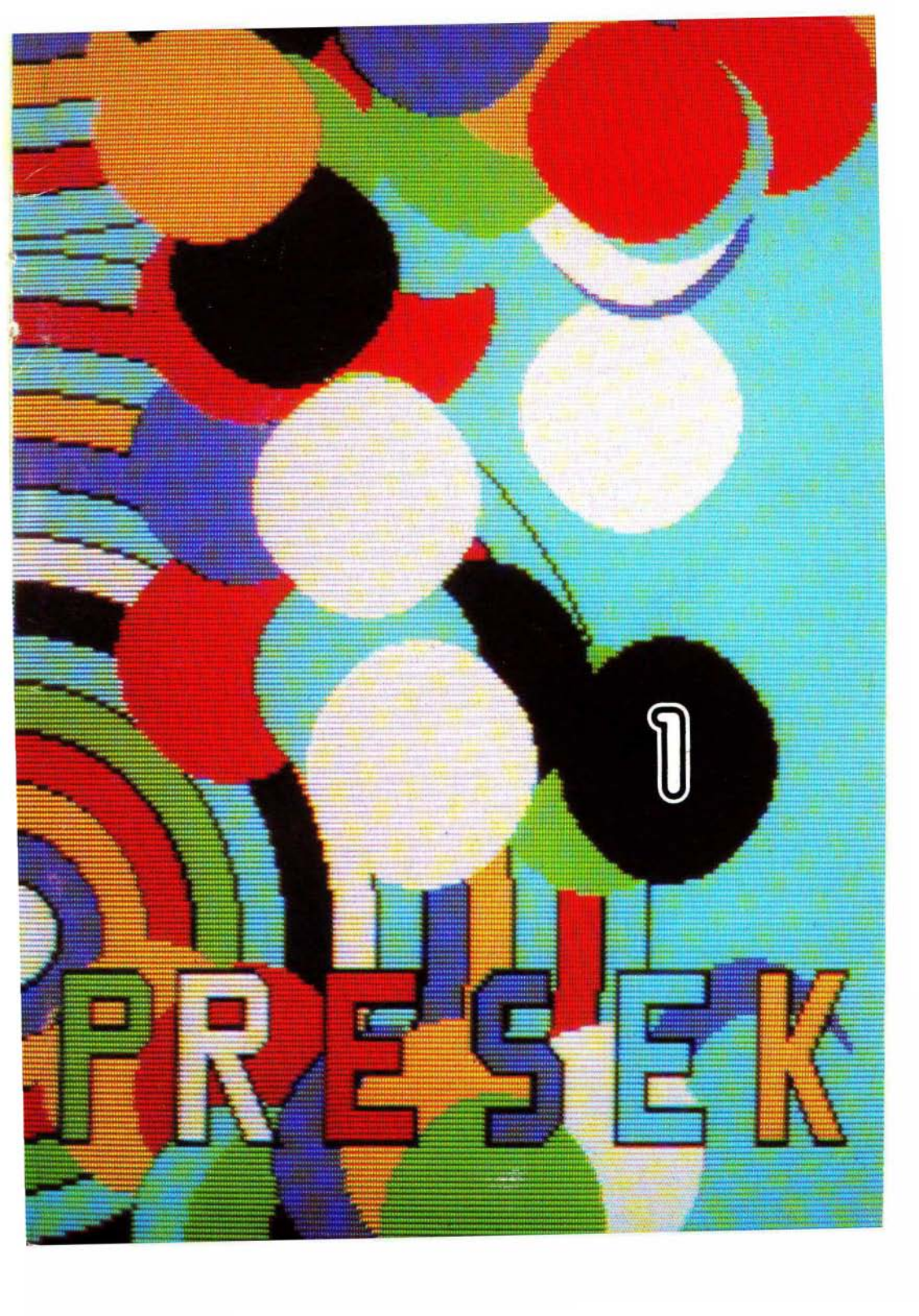


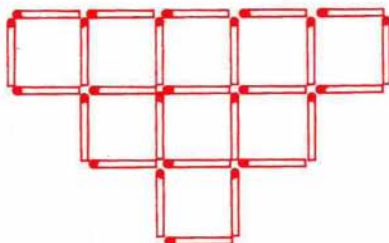
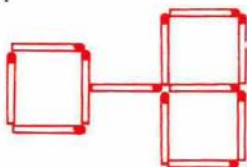


1

PRESSEK

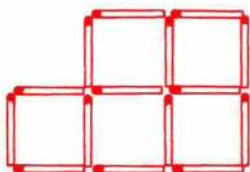
KRATKOČASNE VŽIGALICE

33. Prestavi 6 vžigalic, da dobiš 5 kvadratov!

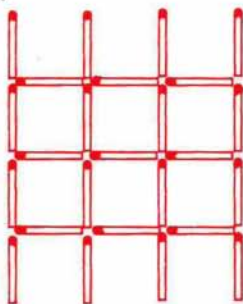


34. Sestavi narisan lik, nato pa:

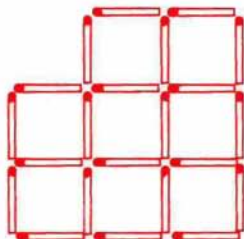
- odstrani 3 in premakni 2,
- odstrani 3 in premakni 3,
- odstrani 3 in premakni 4 vžigalice, da dobiš vsakokrat 3 enake kvadrate!



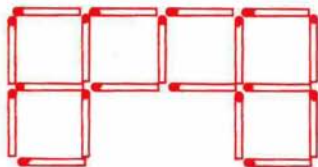
37. Prestavi 6 vžigalic, da dobiš 6 kvadratov!



35. Prestavi 2 vžigalici, da dobiš 7 enakih in en večji kvadrat!



38. Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 5 kvadratov!



36. Odstrani 10 vžigalic, da dobiš 4 enake kvadrate!

V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

UVODNIK

Dragi bralci!

Pred nami je novo šolsko leto in kot je že običajno, s tem tudi prva številka novega letnika Preseka. Tokrat bo to že 14. letnik. V tem obdobju smo sedanjí in bivši uredniki premagovali nemalo težav, da smo list ohranili pri življenju, od teh je bilo pomanjkanje denarnih sredstev še največji problem. Število naročnikov je bilo vrsto let okrog 20.000, zaskrbljuje pa nas, da jih je v zadnjem letu padlo za petino. Kaj je vzrok za tolikšno zmanjšanje? Mogoče je bila cena Preseka eden prvih. Vemo, da se vse neznansko hitro draži, tako tudi pri Preseku stroški za papir, tisk in drugo skokovito naraščajo. Tako moramo kljub finančni subvenciji, ki jo list prejema od Republiške raziskovalne in izobraževalne skupnosti, vsako leto postaviti višjo ceno. Za šolsko leto 1986/87 bo to 800.- (oz. 1000.- za posamezne naročnike). Ali je to veliko? Na prvi pogled gotovo je. Toda če pomislimo, da stane en izvod okrog 130.-, kar je manj od večine zabavnih tednikov ali stripov, ki jih včasih kupujete vsak teden, ali pa, če primerjate, kakšno čokolado bi za ta denar lahko kupili, opazite, da to res ni velik denar. Tako najbrž ne bo težko plačati za šest števil v celem šolskem letu za tako zanimivo in poučno branje. Drug razlog za upadanje števila naročnikov je najbrž to, da Presek premalo reklamiramo med mladimi. Kar težko nam je, ko včasih slišimo, da v kakšnem od razredov ni niti enega naročnika, čeprav jih je med učenci gotovo nekaj, ki jih matematika, fizika in podobne stroke kaj bolj zanimajo. V uredništvu si kakšnih večjih reklamnih akcij ne moremo privoščiti, saj nimamo v njem niti enega redno zaposlenega. Tako nam ostaja edini način razširjanja Preseka preko prizadevnih učiteljev in profesorjev na šolah.

Kakšna je vsebina Preseka, večina gotovo ve, tistim pa, ki ga še ne poznajo in bi jih utegnil zanimati, jim ga pokažite in priporočite. Tudi letos boste v Preseku prebirali zanimive prispevke iz matematike, fizike, astronomije, računalništva ter razne novice in poročila s tekmovalnj. Reševali boste lahko pestre naloge, probleme in križanke ter se razvedrili ob raznih drugih zabavnih prispevkih. Zelo nas bo veselilo, če boste tudi sami kaj napisali, saj zelo redko dobimo kakšne tekste, ki bi jih napisali učenci sami ali pa njihovi mentorji. Ravno v tej številki je vendarle nekaj takih prispevkov in opogumite se tudi vi!

Prvo številko smo tudi tokrat poslali vsem lanskim naročnikom. Aktivne matematikov in fizikov na šolah prosimo, da list priporočijo svojim učencem in dijakom ter nam število zbranih naročnikov pošljejo vsaj do 20. septembra z naročilnico.

Člane našega društva, matematike in fizike na šolah, lepo prosimo, da nam bodo odvečne izvode po omenjenem roku vrnili. V kolikor pa bo med dijaki in učenci za Presek navdušenje še večje, bomo poslali na šole še dodatne izvode takoj, ko bomo prejeli ustrezno naročilnico.

Bralce Preseka, predvsem pa učence in dijake na šolah, prosimo, da naročnino za Presek poravnajo vsaj do konca koledarskega leta. Do takrat bodo izšle že tri številke, s tem pa tudi že nad polovica celotnega obsega lista za mlade matematike, fizike, astronome ter računalnikarje. S pravočasnim nakazilom naročnine boste omogočili redno izhajanje vašega lista in se izognili dvakratnemu pobiranju naročnine. Upravni odbor Komisije za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS se je kljub priporočilu odločil, da letos še ne bo sprejel dvojne cene za Presek, kar bi pomenilo podražitev že v drugem polletju. Po večletnih izkušnjah upamo, da bodo naročniki tudi v prihodnje redno plačevali svoje obveznosti.

Ker ob koncu septembra že oddajamo rokopis druge številke in določamo naklado za tiskarno, bomo morali število poslanih, pa čeprav nepotrjenih izvodov upoštevati kot dokončno naročilo. Zato bomo šolam po 1.1. 1987 poslali račun za celoletno naročnino vseh poslanih in neplačanih izvodov.

Novi naročniki Preseka lahko naročijo tudi večino starejših števil prvih dvanajstih letnikov. Zadnjega, 13. letnika pa imamo na zalogi še več sto kompletov.

Edvard Kramar, Ciril Velkovrh

KOMISIJA ZA TISK DMFA SRS

61111 Ljubljana, Jadranska c. 19

p.p. 64, tel. št. (061) 265-061

NAROČILNICA

Za šolsko leto 1986/87 naročamo izvodov PRESEKA — lista za mlade matematike, fizike in astronome.

Naslov:

Šola :

Priimek in ime:

Naslov (ulica, hišna številka, številka pošte in kraj)

.....

Naročnino bomo poravnali do konca koledarskega leta.

Datum

Žig in podpis

VSEBINA

UVODNIK	(Edvard Kramar, Ciril Velkoverh)	1
MATEMATIKA	Ulomki s števcem 1 (Ivan Vidav)	4
	Pitagora in njegova šola (Danijel Bezek)	8
	Obrestno obrestni račun (Jože Andrej Čibej, Ciril Velkoverh)	12
RAČUNALNIŠTVO	Barvanje likov (Marjan Bradeško, foto Marjan Smerke)	1, 19
ASTRONOMIJA	Zvezda, ki mrka (Marijan Prosen)	25
NALOGE	Naloge iz matematike za učence 6., 7. in 8. razreda — rešitve str. 44 (Pavle Zajc)	28
	Naloge mladim Vegovcem. Nekaj za kratek čas — rešitve str. 47, 48 (Učitelji mate- matike in fizike občine Slovenske Konjice)	30, 31
RAZVEDRILO	KRIŽANKA Slikovna: Novi častni člani društva (Pavle Gregorc)	32
	Številka (Jolanda Babič)	34
	PREMISLI IN REŠI Otok zakladov — rešitev iz P—XIII/3 (Peter Petek, Matjaž Željko)	36
	Kaj izpiše naslednji program (Sandi Klavžar)	40
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES Kratkočasne vžigalice — rešitev str. III (Roman Rojko)	11
	Karikature (Said Bešlagić)	11, 27
	Ribiča se pogovarjata. Še nekaj ribiških — rešitev str. 48 (Jože Kotnik)	38, 39
	Reši in premisli — rešitev str. 48 (M.Štalec)	39
	Štiri zgodbe o verjetnosti (KARAS)	40
	Kralj Jurij III in zvezde (izbrala Dušica Boben)	57
	Dve števili, ki nista hkrati nič (Izidor Hafner)	58
	BISTROVIDEC — An Ban (Vladimir Batagelj)	41
NOVE KNJIGE	Programski jezik pascal (Marko Petkovšek)	42
	Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo (Ciril Velkoverh)	43
FIZIKA	Tomografija s pozitronskimi sevalci (Aleš Stanovnik, Marko Starič)	IV, 49
MATEMATIKA	Jensenova neenakost (Peter Anastasov, Mirko Dobovišek)	54
NOVICE	Pisma bralcev (Dušica Boben)	18, 31
	Profesor dr. Ivan Vidav v očeh študentov in v objektivu fotografa (Marta Majcenovič)	59
	Presekovi računalniški programi (Matija Lokar)	62
NA OVITKU	Barvna računalniška grafika (glej članek str. 19)	1

ULOMKI S ŠTEVCEM 1

Vsako racionalno število r se da zapisati v obliki ulomka $r = a/b$, kjer sta a in b celi števili. Kakor vemo, je takih zapisov celo nešteto. Če je r pozitiven, smemo vzeti, da sta števec a in imenovalec b naravni števili.

Včasih so imeli za ulomek samo tak ulomek, ki ima števec 1, npr. $1/2$, $1/3$, $1/7$ so ulomki. Druga pozitivna racionalna števila pa so izrazili z vsoto ulomkov s števcem 1, npr.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Na desni imajo vsi ulomki isti imenovalec. Pišemo pa lahko tudi takole:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Imenovalca na desni sta zdaj različna. Podobno je

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$2/3$ se da izraziti tudi takole:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

Tudi tu so vsi imenovalci na desni med seboj različni.

Naravno se zdaj vsiljuje tole vprašanje:

(A) Ali se da vsako pozitivno racionalno število zapisati kot vsota ulomkov, ki imajo števec 1, imenovalci pa so med seboj različni?

Ulomke s števcem 1 zapišimo lepo po vrsti

$$(1) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

V tem zaporedju se ulomki manjšajo in postanejo sčasoma poljubno majhni. Racionalno število, ki je vsota ulomkov s števcem 1 in različnimi imenovalci, pri čemer noben imenovalec ni večji od n , je manjše ali kvečjemu enako številu

(2)

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Število s_n je vsota prvih n ulomkov zaporedja (1). Če večamo n , se vsota s_n večja, njeni sumandi pa postajajo vse manjši. Zato je umestno tole vprašanje:

(B) Ali je vsota s_n poljubno velika, če je n dovolj velik?

Z drugimi besedami povedano: Ali je vsota dovolj velikaga števila ulomkov zaporedja (1) večja od 10, ali celo večja od 1000?

Odgovor na vprašanje (B) je pritrdilen. Vsota s_n je poljubno velika, če je le n dovolj velik. Torej dobimo tako velike vsote, kakor želimo, če le seštejemo dovolj členov iz (1). Tega dejstva tu ne bomo dokazovali. Hitro pa se s poskusi prepričamo, da se vsote s_n zelo počasi večajo. Če bi npr. hoteli dobiti vsoto, ki je večja od 10, bi morali sešteti okoli 10 000 ulomkov iz (1)!

Pozitivni odgovor na vprašanje (B) še ne pomeni, da je tudi odgovor na vprašanje (A) pozitiven. Res je sicer, da s seštevanjem ulomkov zaporedja (1) dobimo poljubno velike vsote. Ne vemo pa še, ali dobimo za vsoto vsako pozitivno racionalno število.

Pa si oglejmo metodo, s katero bi izrazili pozitivno racionalno število r kot vsoto ulomkov s števcem 1 in z različnimi imenovalci. Odštejmo od r najprej prvi ulomek zaporedja (1). Nato odštejmo od razlike $r - 1/2$ drugi ulomek $1/3$. Tako nadaljujmo. Ker dobimo s seštevanjem ulomkov zaporedja (1) poljubno velike vsote, se odštevanje po nekaj korakih gotovo konča. Kdaj se konča? Dvoje je mogoče: Ali pridemo z odštevanjem do razlike 0 ali pa dobimo razliko r_1 , ki je manjša od prvega ulomka v vrsti (1), ki ga nismo še odšteli. V prvem primeru smo nalogo rešili: število r smo izrazili kot vsoto zaporednih ulomkov iz (1). V drugem primeru odštevanje nadaljujemo. V zaporedju (1) poiščemo prvi ulomek, ki je manjši od zadnje razlike r_1 . Tega spet odštejemo od r_1 in tako nadaljujemo, dokler ne dobimo razlike 0.

Vzemimo za zgled število $r = 21/20$. Najprej odštejemo $1/2$

$$\frac{21}{20} - \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$$

Nato odštejemo $1/3$

$$\frac{11}{20} - \frac{1}{3} = \frac{13}{60}$$

Dobljena razlika $13/60$ je manjša od naslednjega ulomka $1/4$. Prvi ulomek v zaporedju (1), ki je manjši od $13/60$, je $1/5$. Odštejmo ga

$$\frac{13}{60} - \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$$

Razlika je ulomek s števcem 1. Zato smo postopek končali in dobili

$$\frac{21}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{60}$$

S to metodo naj skuša bralec sam izraziti število 2 kot vsoto ulomkov s števcem 1 in različnimi imenovalci.

Doslej smo tiho privzeli, da je dano število r večje od $1/2$. Če je $r < 1/2$, odštejemo od r prvi ulomek iz (1), ki je manjši od r . Potem z odštevanjem nadaljujemo kakor prej.

Seveda se zastavlja vprašanje, ali je naša metoda pri vsakem pozitivnem racionalnem številu r uspešna. Poskusi pri večjih r pokažejo, da se števci v različnih nekaj časa večajo. Kljub temu pa nas postopek v vsakem primeru privede do cilja. Odgovor na vprašanje (A) je namreč pritrdilen, ker velja izrek:

Vsako pozitivno racionalno število se da zapisati kot vsota ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci.

Dokazali bomo ta izrek na koncu.

Izrek zagotavlja, da se da vsako pozitivno racionalno število zapisati na opisani način. Toda pri nekoliko večjem r je število sumandov izredno veliko. Pri zapisu števila $r = 100$ je npr. število sumandov tako veliko, da računa verjetno ne bi zmogli niti z največjim računalnikom. Pa tudi papirja za zapis bi nam zmanjkalo. Število sumandov se namreč izraža s številko, ki ima okoli 40 cifer.

Z opisano metodo izrazimo vsako pozitivno racionalno število tudi kot vsoto ulomkov s števcem 1, kjer so vsi imenovalci med seboj različni in vsi večji od naprej danega števila m . Namesto z $1/2$ začnemo v tem primeru odštevati z ulomkom $1/(m+1)$. Kot zgled zapišimo 1 kot vsoto ulomkov, kjer so vsi imenovalci večji od 2:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20}$$

Bralec pa naj sam izrazi število 1 kot vsoto ulomkov, kjer so vsi imenovalci večji od 3 oziroma večji od 4!

Dokaz izreka. Po opisani metodi odštevamo od danega števila r zaporedne ulomke iz (1) tako dolgo, dokler ne pridemo do razlike — imenujmo jo r_1 , ki je manjša od naslednjega ulomka v (1). Razlika r_1 je seveda racionalno število. Naj bo npr. $r_1 = a_1/b_1$, kjer sta a_1 in b_1 naravni števili. Pojdimo zdaj v zapo-

redju (1) do prvega ulomka, ki je manjši ali enak številu r_1 . Denimo, da je ta ulomek $1/n$. Prejšnji ulomek $1/(n-1)$ pa je še večji od r_1 . Imamo torej tale vrstni red:

$$(3) \quad \frac{1}{n} \leq \frac{a_1}{b_1} \text{ in } \frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{n-1}$$

Iz prve neenačbe dobimo $b_1 \leq na_1$, iz druge pa $na_1 < a_1 + b_1$. Torej

$$(4) \quad 0 \leq na_1 - b_1 < a_1$$

Odštejmo zdaj od r_1 ulomek $1/n$

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{n} = \frac{na_1 - b_1}{nb_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

Tu pomeni $a_2 = na_1 - b_1$ in $b_2 = nb_1$. Po (4) je $a_2 < a_1$. Torej smo dobili z odštetjem člena $1/n$ ulomek $r_2 = a_2/b_2$, ki ima manjši števec kakor prejšnji ulomek $r_1 = a_1/b_1$.

Če je $n \geq 3$, je dobljeno racionalno število r_2 manjše od naslednjega ulomka $1/(n+1)$ v (1). Po (3) je namreč

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Pri $n \geq 3$ je produkt $n(n-2) > 1$. Za tak n je potemtakem $n(n-1) > n+1$. Zato je $r_2 < 1/(n+1)$. Pri nadaljevanju postopka torej spet preskočimo v zaporedju (1) vsaj en člen. Tako dobimo pri naslednjem koraku razliko $r_3 = a_3/b_3$, kjer je zopet $a_3 < a_2$. Od trenutka torej, ko prvič preskočimo v (1) vsaj en člen, se števci v razlikah stalno manjšajo. Ker so naravna števila, pridemo po nekaj korakov do razlike 0. S tem pa smo r izrazili kot vsoto ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci. Tako smo dokazali izrek. Iz dokazovanja pa je razvidno, da je naša metoda vselej uspešna.

Ivan Vidav

PITAGORA IN NJEGOVA ŠOLA

Glavna značilnost grške matematične misli je bil razumski pristop. Osnovna značilnost razumskega pristopa ni bilo toliko iskanje praktičnih in koristnih postopkov na podlagi empiričnih izkušenj, ampak iskanje vzročno—posledičnih zvez po logični poti. Temu pristopu je ostala zvesta večina grških filozofskih šol, ki jih je matematika zanimala. Nekatere od šol so se v okviru tega pristopa ukvarjale z bolj realnimi problemi in vprašanji (npr. sofisti), druge šole pa so se nagibale k bolj mističnim razlagam in iskanju mističnih zvez med števili in urejenostjo sveta. Med take šole spada tudi tako imenovana "šola pitagorejcev". Ime je dobila po idejnem voditelju te šole — Pitagori (gr. *πυθαγόρας*, okoli 580 — 500 pr.n.št.). Nekaj nam o šoli, njenih učencih in delovanju izda v verze prelitá naloga:

"Reci Pitagora srečni, potomec Modric helikonskih, tole mi zdaj odgovori: dej, koliko vrlih učencev v tvoji se hiši sedaj ubada na poti k modrosti?"
"Tole povem Polikrat, da se matematiko krasno vseh polovica uči, nesmrtno prirodo spoznati hoče nato četrtna. Sedmina vseh mojih učencev rada molčala bi le, besede razmišljala večne. Z njimi še žene so tri, med njimi je prva Teana. To so nasledniki vsi, kar meni so dale jih muze."

Pitagorejci so se veliko ukvarjali s števili in prišli na tem področju do vrste zanimivih odkritij. To jih je navdušilo do take mere, da so poskušali zakonitosti in lastnosti iz geometrije, kozmologije in glasbe povezati s števili in številskimi razmerji.

Med mnogimi primeri, ki predstavljajo povezavo med geometrijo in števili, je tudi naslednja naloga:

Za katere pravokotnike je številka vrednost obsega enaka številski vrednosti ploščine?

V smislu pitagorejskih nazorov išče-mo pozitivno celoštevilsko rešitev enačbe:

$$2(a+b) \stackrel{?}{=} a \cdot b$$

$$2(a + b) = ab \quad (1)$$

V gornji enačbi ločimo količini a in b , tako da dobimo:



$$a = \frac{2b}{b-2}$$

Ker zahtevamo, da je a naravno število, mora biti števec večkratnik imenovalca ($2b = a(b-2)$ in $a \in \mathbb{N}$).

Upoštevajmo to in najdemo vse rešitve za a in b . Ni jih veliko. Zahtevano lastnost imata le dva pravokotnika. Obe rešitvi sta bili znani tudi pitagorejcem. Poišči jih!

Enačbo $2(a+b) = ab$ lahko preoblikujemo tako, da nastopata a in b na isti strani enačbe. Tako dobimo enačbo:

$$\frac{2ab}{a+b} = 4$$

Izraz $2(ab)/(a+b)$ imenujemo *harmonična sredina* količin a in b .

Nalogo o pravokotniku lahko zdaj povemo takole. Poišči taki naravni števili a in b , da bo njuna harmonična sredina enaka 4.

Postavimo si še splošnejšo nalogo. Poišči vse take trojice naravnih števil (x, a, b) , da bo x harmonična sredina števil a in b .

(Navodilo: Poglej, kako smo rešili posebni primer za $x = 4$, in tako reši naloge za ostale $x = 1, 2, 3, \dots$).

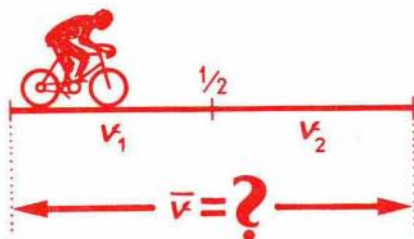
Zgodovina matematike povezuje pojem harmonične sredine z imenom Arhita iz Tarenta (gr. *Ἀρχιταξ*, IV. stol. pr.n.št.). Poleg Pitagore je bil eden najvidnejših predstavnikov pitagorejske šole. Njemu pripisujejo tudi uvedbo pojma aritmetične sredine $((a+b)/2)$ in geometrične sredine $(\sqrt{ab})$ števil a in b .

Izraz za harmonično sredino $x = 2ab/(a+b)$ lahko še nekoliko preoblikujemo: $x(a+b) = 2ab$ in od tod $(a+b)/2a = b/x$, nakar vstavimo namesto x kar izraz za harmonično sredino in dobimo sorazmerje:

$$(a+b)/2 : a = b : 2ab / (a+b)$$

V dobljenem sorazmerju nastopata kot zunanja člena aritmetična in harmonična sredina. Pitagorejci so to sorazmerje imeli za višek popolnosti.

Razmišljanje o harmonični sredini in številih končajmo z nalogo:



Kolesar prevozi prvo polovico poti enakomerno s hitrostjo 8 m/s, drugo polovico poti pa s hitrostjo 12 m/s. Izračunaj povprečno hitrost vožnje.

Rešitve:

1. Pitagora ima 28 učencev. Matematiko raziskuje 14 učencev, narodo 7 učencev, 4 učenci se ukvarjajo s filozofijo. Med njimi so tudi 3 učenke, za katere pa ne vemo, s čim se ukvarjajo. Pri tem smo seveda predpostavili, da se nihče ne ukvarja z več kot enim področjem.

2. Celoštevilska vrednost obsega in celoštevilska vrednost ploščine sta si enaki, ko je $2ab / (a + b) = 4$. Brž najdemo prvo rešitev: $a = b = 4$. Druga rešitev pa je $a = 6$ in $b = 3$, tretja pa $a = 3$, $b = 6$. Ker $b - 2$ deli $2b = 2(b - 2) + 4$, mora $b - 2$ deliti 4, zato ni drugih rešitev v naravnih številih.

3. Trojico naravnih števil (x, a, b) poiščemo iz enačbe $x = 2ab / (a + b)$, oziroma iz preoblikovane enačbe: $xa = b(2a - x)$. Prvo rešitev že poznamo $a = b = x$. S sklepanjem najdemo še drugo rešitev. Če je x liho število, potem je $2b = x + 1$ in $a = x(x + 1)/2$. Če je x sodo število, potem je $2b = x + 2$ in $a = x(x + 2)/4$. Sestavimo zdaj tabelo in v njej preverimo rezultat za $x = 4$. Preostali del tabele izpolni sam.

REŠITEV	ŠTEVILO x	ŠTEVILO a	ŠTEVILO b
1. rešitev	liho ali sodo	$a = x$	$b = x$
2. rešitev	liho število sodo število	$a = x(x + 1)/2$ $a = x(x + 2)/4$	$b = (x + 1)/2$ $b = (x + 2)/2$
1. rešitev	1		
2. rešitev	1		
1. rešitev	2		
2. rešitev	2		
1. rešitev	3		
2. rešitev	3		
1. rešitev	4	4	4
2. rešitev	4	6	3
1. rešitev	5		
2. rešitev	5		

Opomba: Če rešiš nalogo splošno, ugotoviš med povprečno hitrostjo (v), hitrostjo na prvi polovici poti (v_1) ter hitrostjo na drugi polovici poti (v_2) zanimivo zvezo. Katero?

4. Nalogo rešimo splošno. Za obe polovici poti velja $s = v_1 t_1$ in $s = v_2 t_2$. Za celotno pot pa $2s = \bar{v} (t_1 + t_2)$. Iz prvih dveh enačb izrazimo $t_1 = s/v_1$ in $t_2 = s/v_2$ ter ju vstavimo v $2s = \bar{v} (s/v_1 + s/v_2)$. Uredimo in pokrajšamo:

$$\bar{v} = 2 v_1 v_2 / (v_1 + v_2)$$

Povprečna hitrost je harmonična sredina hitrosti na obeh polovicah poti. Od tod številčna vrednost za povprečno hitrost 9,6 m/s.

Danijel Bezek

Karikaturi na str. 11 in 27 sta iz biltena 30. republiškega tekmovanja srednješolcev iz matematike, ki je bilo 5. aprila 1986 v Mariboru, je naslikal *Said Bešlagić* dijak tretjega letnika srednje naravoslovne šole.



OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

V tem prispevku se bomo še enkrat lotili vračanja (dolgoročnih) posojil, torej problema, s katerim se je bralec Preseka lahko seznanil v članku Bojana Moharja *O posojilih* (Presek 13 (1985/86) 20–23). Oznake, ki jih bomo uporabljali za posamezne količine, so takšne, kot jih običajno srečamo v poslovni praksi in učbenikih finančne matematike. Upamo, da bo bralec kljub temu brez težav primerjal rezultate omenjenega in našega članka.

Banka za krajša obdobja, katerih dolžina ne presega *kapitalizacijskega obdobja* (to je časa, ki preteče med dvema zaporednima pripisoma obresti), obračunava obresti po načelih *navadnega obrestnega računa*: osnova za izračun obresti je začetni izposojeni ali vloženi znesek, ali drugače, *začetna glavnica* G . Take obresti so premo sorazmerne

- a) višini glavnice G
- b) času obrestovanja n
- c) obrestni meri p

Če se omejimo na najpreprostejši primer, ko je kapitalizacijsko obdobje eno leto, lahko rečemo, da nam obrestna mera pove, koliko dinarjev obresti dobimo od vsakih 100 din vložene glavnice. Letne obresti o so tako določene z obrazcem

$$o = \frac{G \cdot p}{100} \quad (1)$$

kjer G pomeni začetno glavnico, p pa obrestno mero, ki jo vedno izražamo v odstotkih. Po dogovoru o premii sorazmernosti obresti s časom obrestovanja so obresti za 1 dan 365-krat (ali 366-krat, če gre za prestopno leto) manjše od letnih, obresti za d dni pa d -krat večje kot za en dan, tako da dobimo v primeru, ko je čas obrestovanja izražen v dnevih, namesto (1) obrazec

$$o = \frac{G \cdot p \cdot d}{36500} \quad (2)$$

Podobno lahko sam premisliš, kako pridemo do obrazca

$$o = \frac{G \cdot p \cdot m}{1200} \quad (3)$$

za primer, ko se glavnica G pri obrestni meri $p\%$ obrestuje m mesecev. S pomoč-

jo obrazca (3) lahko za vajo izračunamo, koliko se nam do konca leta nabere v banki, če pri obrestni meri $p\%$ vsak mesec vložimo a dinarjev. B. Mohar je nalogo – čeprav tega ni posebej poudaril – rešil za primer, ko te zneske vlagamo ob koncu vsakega meseca:

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{a \cdot p \cdot 11}{1200} + a + \frac{a \cdot p \cdot 10}{1200} + \dots + a + \frac{a \cdot p \cdot 1}{1200} + a = \\ &= 12a + \frac{a \cdot p}{1200} (11+10+\dots+2+1) = \frac{a (14400 + 66 p)}{1200} \end{aligned} \quad (4)$$

Iz oblike (4), ki jo običajno srečamo v učbenikih, dobimo s krajšanjem obrazec $A = a(12 + 11p/200)$, ki se od Moharjevega razlikuje samo po tem, da je pri njem obrestna mera že izražena kot $p/100$ in ima zato pri njem obrazec oblike $A = a(12 + 11p/2)$. Za vajo lahko izpelješ obrazec za skupno letno vrednost mesečnih vlog, ki jih vplačujemo na začetku meseca. Ugotovil boš, da je v tem primeru

$$A = \frac{a (14400 + 78 p)}{1200} = a (12 + 13 p / 200)$$

Popolnoma drugačen pa je obračun obresti za obdobja, ki so daljša od enega leta (ali splošneje, daljša od enega kapitalizacijskega obdobja). V tem primeru se obresti za posamezno obdobje pripisujejo prvotni glavnici in se v naslednjem obdobju obrestujejo poleg glavnice tudi obresti iz preteklega obdobja; rečemo, da se obresti *kapitalizirajo*. Če začnemo z glavnico G , imamo po enem letu

$$G_1 = G + \frac{G \cdot p}{100} = G \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad (5)$$

Izraz $1 + p/100$, ki se pojavlja v (5), je v finančni matematiki tako pogost, da si je prislužil poseben simbol,

$$k = 1 + \frac{p}{100} \quad (6)$$

in posebno ime, imenujemo ga *obrestovalni faktor*. Tako v skladu s (5) velja $G_1 = G \cdot k$. V naslednjem letu se obrestuje tako povečani znesek, zato je glavnica po dveh letih enaka

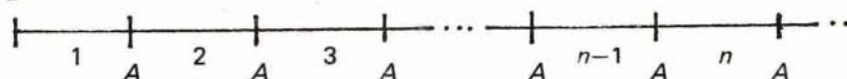
$$G_2 = G_1 + \frac{G_1 \cdot p}{100} = G_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_1 \cdot k = (G \cdot k) \cdot k = G k^2$$

Nadaljevanje tega premisleka (glej Moharjev članek, str. 21) nas pripelje do osnovnega obrazca obrestno obrestnega računa, ki nam pove, kolikšna je glavnica po n kapitalizacijskih obdobjih (letih):

$$G_n = G \cdot k^n \quad \text{ali} \quad G = G_n / k^n \quad (7)$$

Višino glavnice po n letih dobimo torej tako, da jo množimo z n -to potenco obrestovalnega faktorja, vrednost pred n leti pa tako, da jo delimo s to potenco. S tem pravilom smo opisali postopek, ki mu v finančni matematiki običajno rečemo *preračunavanje glavnice* na kasnejši oziroma zgodnejši trenutek (ali s tujko "termin"). Kadar imamo opraviti z več kot eno glavnico, si dinamiko vplačil in izplačil običajno prikažemo na številski premici, na kateri z enako dolgimi intervali označimo posamezna kapitalizacijska obdobja in označimo, ob katerih trenutkih vplačujemo ali dvigamo posamezne glavnice. (Strokovno rečemo, da označimo, kdaj te glavnice *dospevajo*.) Kot primer za uporabo tega dogovora najprej izračunajmo višino letne anuitete*, ki jo moramo plačevati, če želimo dolg D dinarjev vrniti v n letih, pri čemer prvi obrok dospeva eno leto po najemu kredita.

D



Ker lahko neposredno primerjamo samo glavnici, ki dospevata v istem trenutku, moramo vse te zneske preračunati na isti trenutek, najlažje na tisti čas, ko dospeva zadnja anuiteta. Takratna vrednost začetnega dolga D je Dk^n , saj dospeva zadnja anuiteta n let kasneje kot začetni dolg. Vrednosti posameznih anuitet (od zadnje proti prvi) pa so $A, Ak, Ak^2, \dots, Ak^{n-1}$, zato je

$$Dk^n = A(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) \quad (8)$$

Kot je pokazano v Moharjevem članku, lahko vsoto na desni poenostavimo v $A(k^n - 1)/(k - 1)$

$$Dk^n = A \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (9)$$

* Izraz "anuiteta" pride iz besede "anno", ki pomeni leto, anuiteta torej "letni obrok". Ker pa se je izraz uveljavil tudi za polletne, mesečne ... obroke, posebej poudarimo, da gre za letne obroke.

in končno

$$A = \frac{Dk^n(k-1)}{k^n - 1} \quad (10)$$

Strah, da takšna formula pri $p = 0$ ne velja, je odveč. Vedno se namreč lahko vrnemo na obliko, ki sledi iz (8),

$$A = \frac{Dk^n}{1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}}$$

Pri $p = 0$ je obrestovalni faktor k enak 1 in za anuiteto A dobimo

$$A = \frac{D \cdot 1}{1 + 1 + \dots + 1} = \frac{D}{n} \quad (11)$$

Pri brezobrestnem posojilu je torej anuiteta kar obratno sorazmerna številu obrokov (in premo sorazmerna začetnemu dolgu).

Iz letne anuitete A , določene z obrazcem (10), lahko z razrešitvijo obrazca (4) izračunamo potrebni mesečni obrok, ki nam ob plačevanju dvanajstih takih obrokov ob koncu posameznega meseca do konca leta zbere natanko A dinarjev. Tako bi bil v obravnavanem primeru mesečni obrok enak

$$a = \frac{1200 A}{14400 + 66p} = \frac{1200 D k^n (k-1)}{(14400 + 66p) (k^n - 1)} \quad (12)$$

Navadno so bile pri bančnih posojilih podane letne obrestne mere. Pri polletnih anuitetah so polletne obrestne mere točno polovico manjše, pri mesečnih obrokih dvanajstkrat manjše, pri dvoletnih pa dvakrat večje. Praktično so banke do leta 1980 pri mesečnih odplačevanjih dolgov polletne anuitete razdelile na 6 enakih mesečnih obrokov, ki pa se v tem intervalu niso obrestovali. Ali so bile tu banke nepošteno ali pa so bili le posojilojemalci na škodi? O nepoštenosti ne moremo govoriti, če se denarni zavodi držijo dogovorjenega poslovanja. Rekli bi lahko le, da je za občane škoda, ker posojilne pogoje določa le banka. To pa ne drži vedno, vsaj ne v primeru, ki ga Bojan Mohar navaja na začetku svojega članka. Pri stanovanjskih kreditih so pogoji ugodnejši: za 15-letno posojilo in 5% obrestno mero. Ali ni to ob 80% inflacijski stopnji skoraj zastoj? Prav zaradi tega pa so banke pričele vplačane anuitete obrestovati vsak mesec. Tako je tudi pri podatkih, ki jih je Bojan Mohar dobil pri znancu, vse v najlepšem redu:

$$D = 800.000.- \text{ din}$$

$$p = 5\%, k = 1,05$$

$n = 15$ let oziroma $n_1 = 180$ mesečnih odplačil, pri čemer je

$$p_1 = 5/12 \% = 0,0041\dot{6} \text{ oziroma } k_1 = 1,0041\dot{6}.$$

Mesečni obrok a_1 izračunamo takole

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{D \cdot k_1^{180} \cdot (k_1 - 1)}{k_1^{180} - 1} = \frac{800.000 \cdot 1,0041\dot{6}^{180} \cdot 0,0041\dot{6}}{1,0041\dot{6}^{180} - 1} = \\ &= \frac{800.000 \cdot 2,1137014 \cdot 0,0041\dot{6}}{1,1137014} = 6326,25 \end{aligned}$$

Razlika do 6327.— din pa nastane zato, ker banka vse končne zneske zaokroži navzgor.

Zanimivo je še vedeti, kakšne so letne anuitete za ta primer.

$$\begin{aligned} a &= \frac{D \cdot k^{15} \cdot (k - 1)}{k^{15} - 1} = \frac{800.000 \cdot 1,05^{15} \cdot 0,05}{1,05^{15} - 1} = \\ &= \frac{800.000 \cdot 2,0789282 \cdot 0,05}{1,0789282} = 77073,83 \end{aligned}$$

kar je za 1159.— din več kot 12 mesečnih anuitet.

Za konec bomo skušali odgovoriti še na tri zastavljena vprašanja v omenjenem članku iz P—XIII/1.

(1) Ali so možne take obresti, da bo (mesečni) obrok pri odplačevanju na pet let manjši kot obrok pri odplačevanju na 10 let? Pri tej nalogi upoštevamo, da so v obeh primerih obrestne mere enake. Zato lahko zapišemo

$$\frac{D \cdot k^5 \cdot (k - 1)}{k^5 - 1} < \frac{D \cdot k^{10} \cdot (k - 1)}{k^{10} - 1}$$

Ker so $D > 0$, $p > 0$, $k - 1 > 0$ in $k > 1$, lahko obe strani enačbe krajšamo z D , k^5 , $(k - 1)$ in $(k^5 - 1)$ ter dobimo

$$\begin{aligned} k^5 + 1 &< k^5 \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$

kar pa ni možno.

(2) Kolikšna je dejanska vrednost odplačanega denarja v primerjavi z višino posojila, če upoštevamo, da se vrednost zmanjšuje z inflacijo, ki je, recimo, vsa leta odplačevanja enaka 80%? Kako se spreminja vrednost denarja pri inflaciji, si oglejmo, kar bo lažje, pri 100%? To pomeni, da bo današnji znesek 200.- din čez leto dni vreden le še 100.- din. Če zaznamujemo inflacijsko stopnjo z $r = 100\%$, je inflacijski faktor $l = 1 + r/100 = 2$. Današnjo vrednost zneska a_0 dobimo tako, da vrednost čez eno leto a_1 pomnožimo z inflacijskim faktorjem, kar lahko zapišemo tudi obratno

$$a_1 = a_0 \cdot \frac{1}{l} \quad (13)$$

Če upoštevamo, da z enim letom znesek ne samo izgubi na vrednosti, pač pa tudi pridobi zaradi obresti, moramo ta znesek pomnožiti še z obrestovalnim faktorjem k . Obrazec

$$a_1 = a_0 \cdot \frac{1}{l} \cdot k = a_0 \cdot \frac{k}{l}$$

lahko zapišemo tudi takole

$$a_1 = a_0 \cdot m, \text{ kjer je } m = \frac{k}{l} = \frac{1+p}{1+r} \quad (14)$$

Vsi drugi obrazci z upoštevanjem inflacije so enaki obrazcem za obrestno obrestni račun, le da je obrestovalni faktor zapisan malo bolj komplicirano:

$$G_n = G \cdot m^n \text{ in } A_n = a \cdot \frac{m^n - 1}{m - 1} \quad (15)$$

(3) Ali se lahko zgodi, da bo pri posojilu na n let mesečni obrok višji od celotnega posojila? Kaj hitro lahko opazimo, da so lahko obroki (ne le mesečni) večji od celotnega posojila. V tem primeru je vrednost ulomka

$$\frac{a}{D} = \frac{k^n (k - 1)}{k^n - 1} > 1$$

kar smo dobili iz formule (5). Oglejmo si to neenačbo za različna obdobja.

a) Za enoletna posojila ($n = 1$) se neenačba

$$\frac{k_1^n \cdot (k_1 - 1)}{k_1^n - 1} > 1 \text{ glasi } \frac{k_1 \cdot (k_1 - 1)}{k_1 - 1} > 1$$

kjer je k_1 več od 1, p pa več od nič. To pa pomeni, da posojilo ne sme biti neobrestovano, saj moramo na koncu prvega leta vrniti že vso glavnico pa še tako majhne obresti, samo da so.

b) Za dvoletno posojilo ($n = 2$) se neenačba glasi

$$\frac{k_2^2 \cdot (k_2 - 1)}{k_2^2 - 1} = \frac{k_2^2 (k_2 - 1)}{(k_2 + 1) \cdot (k_2 - 1)} = \frac{k_2^2}{k_2 + 1} > 1$$

$$k_2^2 > k_2 + 1$$

$$k_2^2 - k_2 - 1 > 0$$

Srednješolci, ki poznajo reševanje kvadratnih enačb, lahko ugotovijo, da ta neenačba velja za $k_2 > 1,6180339$ ali da je $p > 61,8\%$. Za ilustracijo in lažje razumevanje vzemimo, da je obrestna mera $p = 70\%$. Glavnica 100.— din do konca prvega leta naraste na 170.— din. Ker vrnemo najmanjšo anuiteto, ki ustreza pogoju naloge (v višini prvotne glavnice), je ostanek dolga še 70.— din. Ta znesek pa se v drugem letu še enkrat obrestuje za 49.— din, kar znese skupaj 119.— din dolga. To pa res že pomeni, da moramo vrniti vsako leto več, kot je višina začetne glavnice.

c) Ker so neenačbe višje stopnje

$$k^n > k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + 1$$

za veliko večino učencev v osnovnih šolah mnogo pretežke, naj zanje velja le sklepanje, da je pri posojilih na več let pri zelo visoki obrestni meri vedno možno doseči, da je vsakokratna anuiteta večja od prvotne glavnice.

Jože Andrej Čibej, Ciril Velkovrh

PISMA BRALCEV

Jovanovič Bojan, učenec 6. razreda osnovne šole Ivan Kovačič Efenka iz Celja, nam je prav tako poslal nekaj nalog, ki pa so žal za bralce Preseka prelahke. Kljub temu pa za razvedrilo objavljamo prirejeno uganko:

$$\sqrt{Z} - (B + C) = ?$$

Bojanu bomo, kot prvemu pošiljatelju svojih nalog, poslali knjižno nagrado.

Lep pozdrav vsem in veliko veselja, dobre volje in lepih ocen v novem šolskem letu!

BARVANJE LIKOV

Z računalnikom znamo narisati pike, črte, kroge in z njihovo pomočjo tudi druge like, toda znotraj so vsi prazni, torej v barvi ozadja. Mi pa bi radi take like lepo pobarvali. Recimo krog z rdečo, mnogokotnik z modro in tako naprej. Skratka, malo bolj pisan zaslon si želimo.

Če naš računalnik premore ukaz `FILL` (zapolni), potem ni nobenega problema. Sicer pa se moramo potruditi sami. Seveda se da napisati programe za barvanje tudi v `BASIC`-u, vendar so prav obupno počasni. Vsi resni programi za barvanje so napisani v strojnih jezikih.

Nas pa tokrat bolj zanimajo algoritmi, po katerih delajo programi za barvanje. Natančneje si bomo ogledali tri.

Pa začnimo! Na zaslonu imejmo neki lik, omejen z neko zvezno krivuljo. Najprej moramo določiti notranjost lika. Če imamo podatke o robovih lika nekje v pomnilniku, to ne bo težko (algoritem je opisan na koncu), sicer pa podamo koordinati neke točke, ki po naši oceni leži v notranjosti našega lika. Če se pri oceni zmotimo, se bo barva razlila kam drugam.

Najprej si oglejmo možnost, kjer razen bitne slike v grafičnem pomnilniku nimamo drugih podatkov o sliki na zaslonu. Postavimo se nekam v notranjost lika. Če je točka še nepobarvana, jo pobarvajmo, potem pa ponovimo postopek še na njenih sosedah: zgornji, spodnji, levi in desni točki. To ponavljamo, dokler je še kakšna nepobarvana točka v notranjosti lika. V programskem jeziku `pascal` bi bil ustrezen podprogram videti takle:

```
PROCEDURE Poplavi (x, y : integer);
BEGIN
  IF NOT pobarvana (x, y) THEN
    BEGIN
      Pobarvaj (x, y);
      Poplavi (x + 1, y); Poplavi (x - 1, y);
      Poplavi (x, y + 1); Poplavi (x, y - 1)
    END
  END;
END;
```

V `BASIC`-u poznamo za funkcijo 'pobarvana' ukaz `POINT (x, y)`, 'Pobar-

vaj' pa bi nadomestili s PLOT (x , y). Gornji podprogram je rekurziven (kliče sam sebe), zato ga ne moremo kar naravnost prepisati v BASIC. Vsi rekurzivni programi rabijo prostor za shranjevanje nekaterih podatkov — to je sklad. Poplavni algoritem je zelo potraten s prostorom, saj vsakič na sklad shrani koordinate štirih točk, pobarva pa le eno. Sklad v začetku hitro narašča, ko so še vse točke nepobarvane, potem pa se počasi umiri in začne upadati. Če je točka na vrhu sklada že pobarvana, jo namreč le odstranimo in pogledamo, če je še kaj na skladu, vse dokler ni prazen. Poplavni algoritem je sicer preprost, ni pa ravno učinkovit, zato bodi dovolj o njem.

Še na nekaj je treba opozoriti, preden si ogledamo kak boljši algoritem. Dosedaj smo govorili le o pobarvani in nepobarvani točki, nič pa o barvah samih. Na zaslonu imamo, če le imamo barvni zaslon, lahko narisane like v različnih barvah. Meje likov se lahko med seboj križajo. Odločimo se pobarvati enega od likov — vedeti moramo, s kakšno barvo ga hočemo zapolniti in s kakšno barvo je pravzaprav omejen. V grafičnem pomnilniku imamo podatke o barvi vsake točke in to je vse, kar lahko pri našem barvanju upoštevamo. Zato rabimo pri ukazu za barvanje poleg začetne točke še dva podatka: barvo, s katero bomo pobarvali območje, in barvo, s katero je območje omejeno. Pri večjih računalnikih imamo lahko v pomnilniku tudi podatke o samih robovih oziroma ogliščih likov. V takem primeru pridejo v poštev algoritmi, kjer je poleg številke lika edini podatek barva, s katero bomo barvali.

Poglejmo si sedaj kak boljši algoritem. Med take spada algoritem, ki neko območje zaslona barva po vodoravnih vrsticah (segmentih). Je zelo preprost, če imamo le črno—beli svet in omejene like, malo več dela pa zahteva v barvni grafiki. Rešiti je treba tudi problem 'odprtih likov', torej tistih z nesklenjenim robom, kjer barva uide iz lika in zalije cel zaslon. Obstajati mora tudi možnost barvanja zunanosti lika. Mi v vse podrobnosti ne bomo silili, oglejmo si le osnovno idejo.

Začnimo v točki nekje v notranjosti lika. Pobarvajmo vrstico, v kateri je točka, potem pa rekurzivno pobarvajmo še zgornjo in spodnjo vrstico. To počnimo, dokler ni vse pobarvano. Ker BASIC in rekurzija nista ravno največja prijatelja, si poglejmo izvedbo, kjer bomo spet imeli delspomnilnika (sklad) rezerviran za shranjevanje koordinat točk vrstic, ki jih še moramo pobarvati. Vsak nepobarvan odsek (segment) vrstice predstavimo z eno točko. Koordinate zaslona si mislimo tako, da nam y predstavlja številko vrstice od vrha zaslona navzdol, x pa številko stolpca od leve proti desni. Algoritem je takle:

- (1) preberi koordinate začetne točke, zeleno barvo območja in barvo, s katero je lik omejen — koordinati daj na sklad

- (2) ČE sklad prazen POTEM KONČAJ
- (3) vzemi točko $T(x, y)$ z vrha sklada
 ČE točka T pobarvana POTEM POJDI na (2)
- (4) $x_{\text{left}} = x, x_{\text{right}} = x$
- (5) ČE točka $T(x_{\text{left}}-1, y)$ v barvi roba
 POTEM POJDI na (6)
 SICER $x_{\text{left}} = x_{\text{left}} - 1$, POJDI na (5)
- (6) ČE točka $T(x_{\text{right}}+1, y)$ v barvi roba
 POTEM POJDI na (7)
 SICER $x_{\text{right}} = x_{\text{right}} + 1$, POJDI na (6)
- (7) nariši vodoravno črto od $T1(x_{\text{left}}, y)$ do $T2(x_{\text{right}}, y)$
- (8) $x = x_{\text{left}}, y = y - 1$, druga = 0
- (9) PONAVLJAJ
 ČE $x > x_{\text{right}}$ IZSTOPI
 SICER ČE točka $T(x, y)$ pobarvana (območje, rob)
 POTEM $x = x + 1$
 SICER PONAVLJAJ
 $x = x + 1$
 ČE točka $T(x, y)$ v barvi roba
 POTEM $x = x - 1$, IZSTOPI
 DO SEM
 točko $T(x, y)$ daj na sklad
 DO SEM
- (10) ČE druga = 0
 POTEM druga = 1, $x = x_{\text{left}}, Y = Y + 2$ POJDI na (9)
 SICER POJDI na (2)

Če gre za barve, potem pri pregledovanju vrstice preverjamo, katera točka je v barvi roba, ki omejuje območje, in katera ni v barvi, s katero barvamo območje. Algoritem dela za kakršnekoli like (konveksne in konkavne), ki so omejeni z zvezno krivuljo. V notranjosti območja naj ne bi bilo točk v barvi, s katero barvamo, čeprav motijo samo nekatere točke (ob desni meji). Opisovanje podrobnosti bi zahtevalo več prostora, zato pogledjmo le še, kaj dela program 1 v FEBASIC-u (mikroračunalnik DIALOG). Prav počasi pobarva kakršnekoli zaprte like (ne testira robov zaslona), ki ustrezajo zgoraj opisanim omejitvam. Predelava v kakšen drug BASIC ne bo težka; namesto SET lahko vzamemo PLOT, DRAW na nekaterih računalnikih riše črto relativno od trenutne točke, funkcijo, ki vrne barvo točke (POINT), pa tudi najdemo sem ter tja. Vendar je program le ilustracija algoritma in je za kakršnokoli resno uporabo neuporaben. Rekurzivno obliko pa pokaže program 2 v pascalu.

```

10 DIM Z(100,2) : REM SKLAD
20 INPUT "Začetna točka X = "; XZAC
30 INPUT "Začetna točka Y = "; YZAC
40 INPUT "Barva območja BARO = "; BARO
50 INPUT "Območje omejeno z barvo BARR = "; BARR
60 CLS : S = 1 : Z(S, 1) = XZAC : Z(S, 2) = YZAC
70 IF S = 0 THEN
    GOTO 220 : REM PRAZEN SKLAD
80 REM ELSE
81     X = Z(S, 1) : Y = Z(S, 2) : S = S - 1:
        IF POINT (Y, X) = BARO THEN
            GOTO 70 : REM NASLEDNJA TOČKA
90     REM ELSE
91         XB = X : XE = X
100        IF POINT (Y, XB-1) = BARR THEN
            GOTO 120
110        REM ELSE
111            XB = XB-1 : GOTO 100 : REM LEVO:
            REM
120        IF POINT (Y, XE+1) = BARR THEN
            GOTO 140
130        REM ELSE
131            XE = XE+1 : GOTO 120 : REM DESNO:
            REM
140        SETY, XB, BARO : DRAWY, XE, BARO : X = XB
            Y = Y - 1 : DRUGA = 0 : REM GORNJA VRSTICA
150        IF X > XE THEN
            GOTO 200 : REM VRSTICA PREGLEDANA
160        REM ELSE
161            B = POINT (Y, X) :
            IF B = BARO OR B = BARR THEN
                GOTO 190 : TOCKA ZE POBARVANA
170            REM ELSE
171                X = X + 1:
                IF NOT POINT (Y, X) = BARR THEN
                    GOTO 170 : DESNO PO NEPOBARVANIH
180            REM ELSE
181                X = X - 1 : S = S + 1:
                Z(S, 1) = X : Z(S, 2) = Y :
                REM TOCKA NA SKLAD:
                REM:
                REM
190            X = X + 1 : GOTO 150
200            IF DRUGA = 1 THEN
                GOTO 70 : OBE VRSTICI PREGLEDANI

```



```

210          REM ELSE
211          DRUGA = 1 : X = XB:
          Y = Y + 2 : GOTO 150 :
          REM SPODNJA VRSTICA:
          REM:
          REM:
          REM:
          REM
220 END

```

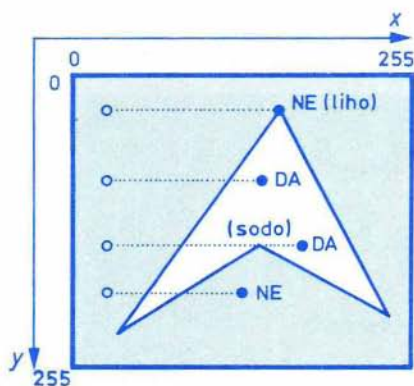
Program 2

```

PROCEDURE Segm fill(xzac, yzac, baro, barr : integer);
VAR x, y, xleft, xright, b : integer;
BEGIN
  IF NOT point (y, x) = baro THEN
    BEGIN
      xleft := x; xright := x;
      WHILE NOT point (y, xleft-1) = barr DO
        xleft := xleft - 1;
      WHILE NOT point (y, xright+1) = barr DO
        xright := xright + 1;
      set(y, xleft, baro); draw(y, xright, baro);
      y := y - 1;  (* gornja vrstica *)
      x := xleft;
      WHILE x <= xright DO
        BEGIN
          b := point(y, x);
          IF NOT (b= baro OR b=barr) THEN
            BEGIN
              REPEAT x := x+1 UNTIL point(y, x)=barr;
              x := x - 1; Segm-fill(x, y, baro, barr)
            END;
          x := x + 1
        END;
      y := y + 2;  (* spodnja vrstica *)
      x := xleft;
      WHILE x <= xright DO
        BEGIN
          b := point (y, x);
          IF NOT (b= baro OR b=barr) THEN
            BEGIN
              REPEAT x := x + 1 UNTIL point(y, x)=barr;
              x := x-1; Segm-fill(x, y, baro, barr)
            END;
          x := x + 1
        END
      END
    END
  END;  (* Segm-fill *)
END;

```

Sam algoritem je dokaj hiter (implementiran seveda v primernem programskem jeziku) in tudi prostora ne porabi veliko, razen v izrojenih primerih. Za vse konveksne like hrani največ dve točki na skladu, kar je izredno malo. Tudi pri konkavnih ne rabi mnogo prostora, če liki niso ravno kakšni nenavadni labirinti.



Slika 1

Omeniti velja še en algoritem, ki se izogne težavam v zvezi s pikami, posejanimi kje v notranjosti lika. Zahteva, da imamo podatke o likih shranjene nekje v glavnem pomnilniku, in sicer podatke o robovih likov. Barvamo tako, da za vsako piko v notranjosti področja počnemo naslednje: izberemo neko točko, ki zanesljivo leži izven področja, in jo povežemo z opazovano točko. Če je število presečišč daljice, ki povezuje točki, in robov lika liho, potem točka leži v notranjosti in jo lahko pobarvamo.

Algoritem ima spet svoje težave, ki jih povzročajo oglišča oziroma stičišča robov. To se najboljše vidi na sliki 1.

Rešitev je v posebni obravnavi takih točk. Pogledamo robova, ki se stikata v tej točki. Če ležita oba na isti strani točke, se šteje presečišče kot liho, sicer pa kot sodo število, torej se število presečišč poveča za dve.

Seveda ne preverjamo za vsako točko posebej, če je v območju lika ali ne, ampak se z vodoravno iskalno črto pomikamo od vrha do dna lika in na vsakem koraku naberemo odseke, ki jih je treba pobarvati. Postopek je preprostejši, če imamo robove urejene po y koordinatah. Kaj globlje pa se pri tem načinu ne bi spuščali.

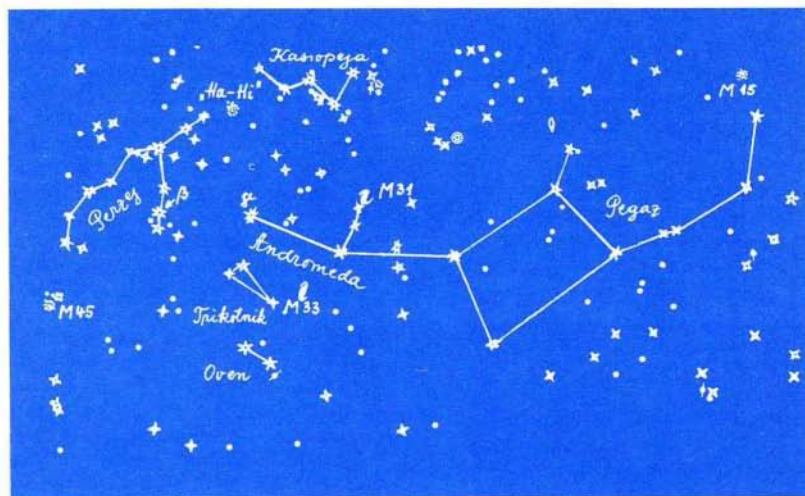
Vsaj na kratko smo pogledali nekaj osnovnih idej, da boste vedeli, kaj vse se dogaja in na kaj vse je treba paziti, da potem lahko enostavno rečete FILL (zapolni), PAINT (pobarvaj) ali kaj podobnega in dobite na zaslonu pobarvane kroge, kvadrate in druge like. Pa še enkrat: če se boste zares lotili katerega od algoritmov, ga nikar ne pišite v BASIC-u, razen če boste barvali izredno majhne like.

Marjan Bradeško

ZVEZDA, KI MRKA

Si že kdaj dalj časa pozorno opazoval kako zvezdo? Če ne, ti priporočam, da opazuješ zvezdo *Algol*, ki leži v ozvezdju Perzeja. Kako izslediš to zvezdo, kaže slika 1.

Opazuj Algol zaporedoma več jasnih večerov, vsak večer pa več ur ali pa, če zdržiš, kar vso noč. V jesenskem času to ne bo težko, saj noči še niso prehladne, Algol pa je tudi s prostim očesom dobro vidna zvezda na jugovzhodnem delu neba. Če si natančen in vztrajen, zapaziš, da Algolu tu pa tam oslabi sij. To ugotoviš tako, da sij Algola primerjaš s sijem okolnih zvezd, ki sija ne spreminjajo. Če ti to ne uspe, vzemi v roke *Astronomske efemeride*, ki izhajajo vsako leto pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.



Slika 1. Skica vzhodnega dela neba, kot ga vidiš v jesenskih večerih. Vrisali smo značilne vesoljske objekte, ki jih lahko opazuješ.

M 45 — razsuta (odprta) zvezdna kopica Plejade (Gostosevci) v ozvezdju Bika;

"Ha-Hi" — razsuta zvezdna kopica v Perzeju;

M 15 — kroglasta zvezdna kopica v Pegazu;

M 31 — galaksija v ozvezdju Andromede;

β Perzeja — Algol, spremenljivka;

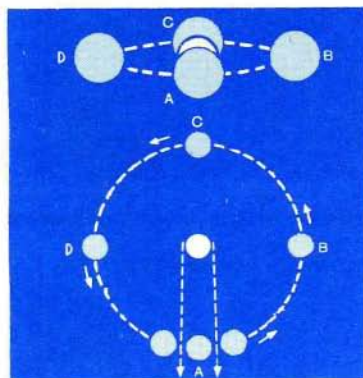
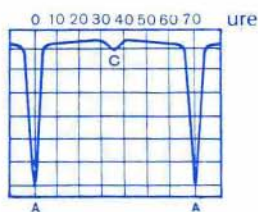
γ Andromede — Alamak, dvojna zvezda.

Pri opazovanju uporabljaš daljnogled.

Tam dobiš podatke, kdaj ima Algol "minimum sija", to je, kdaj najšibkeje sije. Algol začneš opazovati nekaj ur pred minimumom sija in padec sija te zvezde boš zagotovo zaznal. To spremembo sija seveda "odkriješ" s prostim očesom, z daljnogledom, ki ga postaviš na trdno stojalo, pa še bolje. Nadalje lahko ugotoviš, da približno vsake tri dni Algolu močneje oslabi sij.

Zakaj Algol "mežika", je bila dolgo časa velika uganka. Danes pa to ni težko pojasniti. Algol namreč ni navadna, enojna zvezda. Algol je dvojna zvezda. Sestavljata jo zvezdi, ki se gibljeta druga okrog druge v ravnini, ki gre skozi Zemljo. Za opazovalca na Zemlji se tako zvezdi periodično prekrivata. Če opazujemo tako dvojno zvezdo, kot je na primer Algol, lahko zaznamo spreminjanje — nihanje njenega sija. No, in Algol zato v siju pomrkuje — "mežika" (slika 2).

Zvezdam, ki se jim spreminja sij, rečemo *spremenljive zvezde* ali kratko *spremenljivke*. Odkrili so že več kot 25 tisoč spremenljivk, ki na različne na-



Slika 2. Značilen podatek za vsako spremenljivko je graf (krivulja) sija. Ta kaže, kako se sij spremenljivke spreminja s časom. Dobimo ga tako, da merimo sij zvezde. Na abscisno os nanašamo čas t opazovanja, na ordinatno os pa izmerjeni sij m zvezde. Vsakemu opazovanju ustreza v omenjenem koordinatnem sistemu ena točka $T(t, m)$. Ko vse točke povežemo, dobimo graf sija. Včasih ugotove graf sija kakke spremenljivke šele po več letih trdega nočnega dela, včasih pa že v eni noči.

Gornji del slike kaže graf spreminjanja sija za Algol, spodnji pa zgradbo Algola. Algol je tesna dvojna zvezda. (Zvezdi, ki ga sestavljata, sta približno trikrat večji od našega Sonca.) Razmik med zvezdama je torej zelo majhen, približno eno desetinko razdalje med Zemljo in Soncem. Algol je okoli sto svetlobnih let od nas. S te razdalje zvezdi ne razločimo niti z najmočnejšim daljnogledom. Zaznavamo le njun skupni sij (svetlobo). Ko pri kroženju manj svetla, a večja zvezda prekrije svetlejšo, a manjšo zvezdo (ko pride v lego A med Zemljo in svetlejšo zvezdo), skupni sij močno pade. To je *minimum sija* — mrk, ki nastopi približno vsake tri dni in traja okoli 10 ur. Ko pa svetlejša zvezda prekrije manj svetlo (lega C), sprejemamo praktično le svetlobo svetlejše zvezde — skupni sij tako rahlo oslabi, da tega ti ne moreš ugotoviti. Ugotavljaš le spremembo sija ob minimumu.

čine in zaradi različnih vzrokov spreminjajo sij. Samo pri nekaterih spremenljivkah je vzrok mežikanja prekrivanje dveh zvezd, zato pravimo *prekrivalne* ali *eklipsne* (eclipse — angl. mrk) *spremenljivke*. Znanih je nekaj tisoč prekrivalnih spremenljivk, ki jih lahko združimo v več tipov. Zgradba nekaterih prekrivalnih spremenljivk je mnogo bolj zamotana, kot je Algolova. Nekatere dvojne zvezde, ki se razkrivajo kot eklipsne spremenljivke, so dosti večje od velikosti zvezd in medsebojnega razmika zvezd kot pri Algolu, druge pa so tudi manjše velikosti, tako da se periode spreminjanja sija gibljejo od nekaj dni do okoli ene ure. Nekatere redke izjeme pa imajo tudi precej daljše periode, ki jih štejemo v letih.

Marijan Prosen



Naloge iz matematike za učence 6., 7. in 8.r

6. razred

1. Naslednjo vsoto ulomkov izračunaj na najenostavnejši način:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10}$$

2. Produkt štirih zaporednih naravnih števil je 1680. Katera so ta števila?

3. Reši enačbo

$$\left(5 \frac{7}{18} - 4 \frac{23}{30}\right) : \left(1,12 \cdot 1 \frac{1}{9}\right) = x : (3,2 + 0,8 \cdot (5,5 - 3,25))$$

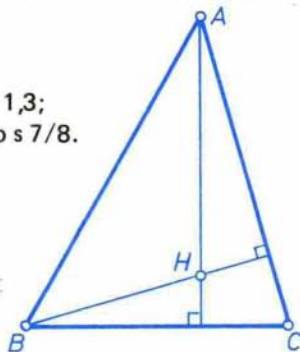
4. V nekem mesecu imajo tri sobote parni datum. Kateri dan v tednu je petin-dvajsetega v istem mesecu?

5. Preveri:

število a povečamo za 30% tako, da ga množimo z 1,3;

število a zmanjšamo za 12,5% tako, da ga množimo s $7/8$.

6. Višine trikotnika $\triangle ABC$ se sekajo v točki H . Izračunaj kot $\sphericalangle CAB$, če je $AH = BC$ (slika).



7. razred

1. a) Katere število mora biti večje, a ali b , da bo $-5(a - b) > 0$?

b) Določi vsa števila a , za katera je vrednost izraza $\frac{a+9}{a+6}$ celo število.

c) Naj bo $a = 0, 1, 2, 3, \dots$ in

$$q = \frac{a+2}{2a^2+3a+6}. \text{ Pokaži, da je } 0 < q \leq \frac{1}{3}.$$

2. Pokaži, da vrednost izraza $(3x - 2)(4 - x) + (x - 3)(3x - 5)$ ni odvisna od spremenljivke x .

- Žoga ob padcu na tla odskoči za $\frac{2}{3}$ višine, s katere pade. Prvič je žoga padla z višine 8,1 m. Koliko odskokov žoge je preseglo 1,5 m?
- Diagonali trapeza merita 10 cm in se sekata pod pravim kotom. Kolika je ploščina trapeza?
- Katerega leta so rojeni ljudje, ki bodo leta 1987 stari toliko let, kot je vsota cifr letnice njihovega rojstva?

8. razred

- Za števila a, b, c in x, y, z velja

$$a : x = b : y = c : z$$

Dokaži, da je $(a + b + c) : (x + y + z) = a : x$

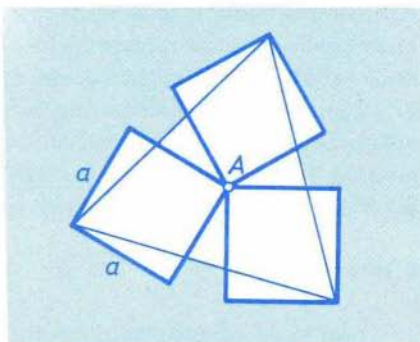
- Kolesar pelje po klanču navzgor s hitrostjo 10 km/h, po klanču navzdol pa 15 km/h. Razlika časov gibanja navzgor in navzdol je 12 minut. Kolikšna je dolžina poti?
- Dana je funkcija $y = mx - (3m + 4)$, kjer je m rešitev enačbe

$$\frac{m+1}{5} + \frac{2m-3}{15} + 1 = m - \frac{m-2}{6}$$

- Enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ z osnovnico c in kotom $\angle BCA = 30^\circ$ očrtaj krog. Izračunaj:

- dolžino loka nad krakom trikotnika,
- ploščino večjega krožnega odseka.

- Trije enaki kvadrati s stranico a imajo skupno oglišče in koti med kvadrati so enaki. Če zvežemo oglišča kvadratov, kot kaže slika, dobimo trikotnik. Kolika je njegova ploščina?



- Polkrogli s polmerom r očrtamo pravilno štiristranično piramido. Kot med ravnino, v kateri leži osnovna ploskev piramide, in višino stanske ploskve meri 60° . Izračunaj površino in prostornino piramide.

Pavle Zajc

NALOGE MLADIM VEGOVCEM

6. razred

1. Poišči ulomek med $4/13$ in $5/13$, ki ima imenovalec 20.
2. Dve premici se sekata. Vsota treh od štirih nastalih kotov je $212^{\circ}30'$. Določi vsakega od nastalih kotov.
3. Na obeh straneh 200 m dolgega drevoreda so zasajena drevesa: na eni strani so 5,25 m, na drugi pa 4,95 m narazen. Kateri drevesi na nasprotnih straneh (razen prvih) stojita natanko nasproti?

7. razred

1. Deljenec se je povečal za 50%, delitelj pa za 25%. Kako se je pri tem spremenil količnik?
2. Premici a in b se sekata v točki A pod kotom 30° . Na premici b je točka B , tako da je $AB = 4$ cm.
 - a) Konstruiraj krožnico, ki gre skozi točko B in se premice a dotika v točki A .
 - b) Izračunaj obseg in ploščino kroga, ki ga določa konstruirana krožnica.
3. Izraz $\frac{a-2}{2} - 4x$ ima vrednost 1 za $x = 1/2$. Določi vrednost za a .
4. Načrtaj graf funkcije $y = 2x - 3$. Odgovori:
 - a) Za katero vrednost spremenljivke x ima ta funkcija vrednost 0?
 - b) Za katero vrednost spremenljivke x je ta funkcija pozitivna?
 - c) Za katero vrednost spremenljivke x je ta funkcija negativna?
5. Zelenjavni vrt pravokotne oblike z dolžino 12 m in širino 8 m bomo preoblikovali tako, da bomo dolžino povečali za dve tretjini, širino pa za 75% prejšnjih razsežnosti. Koliko bo stala žica za novo ograjo, če je za staro stala 6000 din, pa se je cena žice medtem zvišala za 40%?

8. razred

1. V neki zbirki nalog se nahaja enačba: $3 \cdot (2x + \dots) (3x + 2) - 2 \cdot (3x + 1)^2 = 70$ v kateri je pri tipkanju slučajno izpuščen drugi seštevanec v prvem oklepaju. V rešitvah nalog je za to enačbo navedeno $x = 2$. Določi manjkajoči člen.
2. Če stranico kvadrata povečamo za 2 cm, se ploščina poveča za 24 cm^2 . Določi dolžino stranice prvotnega kvadrata.

NEKAJ ZA KRATEK ČAS

1. Preberi naslednji pogovor:

A: Koliko je star tvoj vnuk, babica?

B: Moj vnuk ima ravno toliko mesecev kot jaz let.

A: Koliko let pa imaš ti?

B: Skupaj z vnukom jih imava 65. Koliko let ima moj vnuk, izračunaj sam!

Koliko let ima torej vnuk in koliko babica?

2. Vsaka od naslednjih štirih deklet zna enega od tujih jezikov: italijansko, nemško, francosko in angleško, ki pa ga druge ne znajo, in igra na en instrument, na katerega ne znajo igrati druga tri dekleta.

Ana igra na klavir in ne zna italijansko.

Barbara igra na kitaro in ne zna nemško.

Cvetka ne igra na harmoniko.

Darja ne igra na violino.

Tista, ki zna francosko, igra na violino.

Tista, ki igra na kitaro, ne zna italijansko.

Ugotovi za vsako od štirih deklet, kateri instrument igra in kateri tuj jezik zna!

*Učiteljki matematike in fizike
občine Slovenske Konjice*

Pisma bralcev

Učiteljki matematike in fizike občine Slovenske Konjice so nam ponovno pisali. Poslali so nam svoje naloge, ki jih objavljamo na strani 30. V pismu pa so še zapisali:

"Potrudili se bomo, da ob priliki najdemo še kaj ustreznih nalog. Želimo, da bi tudi drugi naši kolegi sodelovali pri oblikovanju vaše in naše revije Presek."

Želji se pridružujemo tudi mi, kolegom iz Slovenskih Konjic pa hvala za uspešno prebijanje ledu.

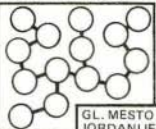
Dušica Boben

SLIKOVNA KRIŽANKA

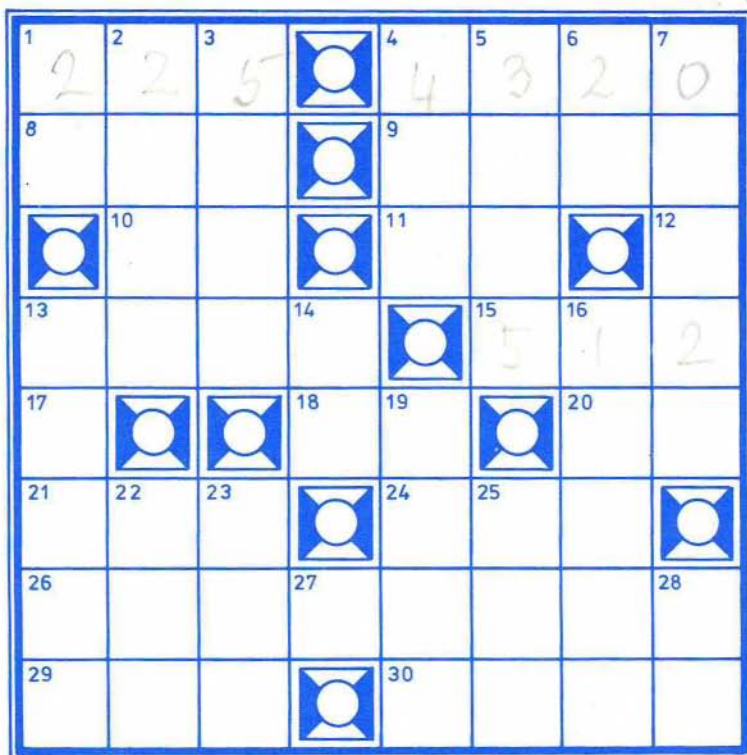
				SESTAVIL PAVLE GREGORČ	NAGOVOR MUSLIM. IZOBRA- ZENECV	DEL VEJE	JUNAK IZ "POD SVOBOD- SONCEM"	ZOLTAN ILIN	X	JEDAČA	
				MITOLOŠKI PRAVLJIČ- NI GAJ		L	I	2	I	J	
				OSEBA NA LEVI: UNIV. PROF. ...			2	I	K	E	
				ESTONEC				STANE DOLANC			
				REKA AARE	E	S	T	NAKANA			
					A	N	T	O	N	MAJO- RANTNA VRSTA	PRIMOŽ TRUBAR
	PISATE- LJICA BREKNOVA	PADEC LISTNATO DREVO	T	A	D	TABORIŠČE PRALNI ŽAMET	K	A	M	P	ERBIJ
DUHOVNIK	K						OSEBA NA 2. SLIKI JE ... MAKARSKA	M	A	T	E
KRAJ V OBCINI VIROVI- TICA	R			OSEBNI ZAIMEK	RASTLINA PREOBJEDA		K	E	J	LOVEC NA RAKE NAŠ SKLAD. (FRANJA)	R
JEZERO V SEVERNI ITALIJI	I				MORSKI RAK POZITIVNA ELEKTRODA		A	N	O		DRŽAVA V AFRIKI
SLOV. FIZ. IN NAŠ SO- DELAVEC (JANEZ)	S	T	R	N	A	D	NAPLAČILO	A	2	A	15. DAN PRI RIMLJANIH GNUS
KUPON	T	A	L	O	N	SLOV. NARODNO GLEDALI- SČE	GORA V VIETNAMU	DANSKI OTOK NEMŠKI FILOZOF (GEORG)	A		S
IVICA	I	V	A	TUREK ALFRED NOBEL		S	M	A	N	SAWYER	T
NEPRIČA- KOVANOST	N	E	N	A	D	N	O	S	T	EFEKT, POSLEDICA	V
AKTINIJ	A	L	GOLOTA	N	A	G	O	F	A	ENOTA ZA 10 DELOV	D

NOVI ČASTNI ČLANI DRUŠTVA



RISAL MIHA ŠTALEC	Z BESEDA- MI IZRA- ŽENA MISEL	... IN LAMBER- GAR	SESTAVINA NAFTE	EDEN OD ČUTOV	RAZISKUJE JIH FIZIK NA 1. SLIKI  GL. MESTO JORDANIJE	
PESEM	S	L	E	V		
DALJICA MED TOČ- KAMA KRI- VULJE	T	E	T	I	V	A
MESTO V NIGRU	A	G	A	D		H
ILIRCI				LANTAN		
				OSEBA NA 2 SLIKI SESTAVLJA	L	A
MAMICA	ČELADA			JAPONSKA OBLIKA BUDIZMA	Z	N
	OSEBA NA LEVI JE...					
4	A	T	K	MESTO V AMER. DRŽAVI OHIO	BRANKO MIKLAVC	DUŠA UMRLEGA
				REKA V J. AFRIKI	3	4
A	K	A	Q	LETALO	A	V
H	A	L	I	2. IME		R
A	D	E	PRESEK	KRSTA		
				DOLENJ- SKA REKA		
ENRICO CARUSO			TAKSNA ZNAMKA			ŠPORTNI KLUB IZ CELOVCA
ATA	E	C	AMERIŠ. M. IME			
		RASTLIN- SKA BODICA		KARADŽIĆ		
		NATRIJ		20. In 22. ČRKA	V	U
				SMEŠNICA	Š	A
E	K	F	D	STRIC	U	J
					K	A

ŠTEVILSKA KRIŽANKA



Vodoravno:

1. Večja rešitev enačbe $x^2 - 229x + 900 = 0$.
4. Število, katerega 25% je 1080.
8. Najmanjši skupni večkratnik števil 28, 48 in 168.
9. Število 44402, spremenjeno iz petiškega v desetiški številski sestav.
10. Celi del stranice a v trikotniku s podatki $b = 5$, $c = 6\sqrt{3}$, $a = 150^\circ$.
11. Nenegativna rešitev sistema (x, y) :
 $xy + x^2 = 0$
 $xy + y^2 = 4$
12. Tangens kota pod katerim se sečeta premici $3x + y - 6 = 0$ in $x - y + 1 = 0$.

3. Ničle polinoma $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ (od najmanjše do največje)
5. 2^{3^2}
7. Produkt rešitev enačbe $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x}$
8. 3 zapisano v dvojiškem sistemu.
10. Stranica b in v_c v trikotniku s podatki: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 2\sqrt{2}$.
21. Katero trimesno število se zmanjša za 720, če postaviš zadnjo cifro na prvo mesto?
24. Realna in imaginarna komponenta $(1 - \sqrt{3}i)^6$
26. Delitelj števila 32 od največjega do najmanjšega.
29. Asimptota in ničla funkcije $(x-3)/(2x)$
30. Nadmorska višina vrha 40 m visoke antene na Kredarici.

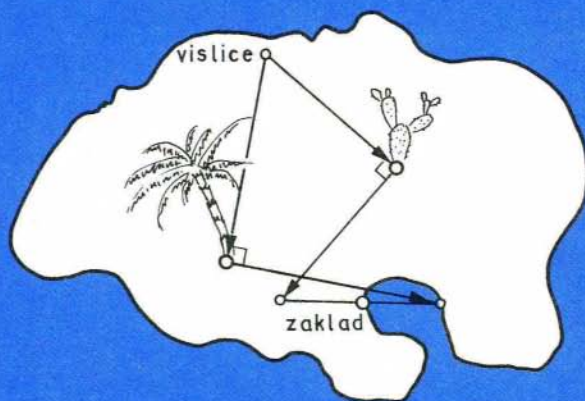
Navpično:

1. Rešitev enačbe $4(x-2):10 = 8(x+5):20$
2. Minimum funkcije $x^2 + 4x + 2315$.
3. Produkt rešitev sistema: $x + y + z = 58$, $2x - y + 2z = 77$, $x + y - z = -4$
4. Rešitev enačbe $2^x \cdot 5^y \cdot 3^z = 2000$ v celih številih. (najprej x , nato y in z).
5. $x + y + u + v = 11$
 $x + y + u - v = 1$
 $x + y - u + v = 7$
 $x - y + u + v = 9$
6. 6 v trojiškem sistemu.
7. Vrednost izraza $(16^{3/4} - 6 \sqrt[3]{5^0}) \cdot 27^{-2/3}$ na štiri decimalke.
13. Število diagonal 180-kotnika.
14. Rob oktaedra, če je prostornina $3087\sqrt{2}$.
16. 2177 v šestiškem sestavu.
19. Koordinate vektorja $3\vec{a} - 2\vec{b}$, če je $\vec{a} = (5, 3\frac{3}{5}, 3)$ in $\vec{b} = (-1/2, (\frac{5}{7})^{-1}, 3.5)$
22. Presečišča pravokotnice na premico $12x - 5y + 1 = 0$, ki gre skozi $(36, -10)$ z x osjo in y osjo.
23. Metka in Janko bosta imela čez 10 let skupaj toliko let, kolikor jih bo imela Metka čez 23 let. Koliko let imata, če je bila Metka ob Jankovem rojstvu stara 8 let?
25. Dolžina, širina in višina kvadra, ki ima za osnovno ploskev kvadrat, višina je za eno enoto daljša od osnovnega roba, površina kvadra pa je 112.
27. Pol ducata.
28. $(\cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ + \cos 660^\circ) \cdot 10$

Jolanda Babič

Otok zakladov – Rešitev s P-XIII/3

Dobili smo 35 pravih, a tudi 12 nepravilnih rešitev. Zaklad so našli: Kornelija BRELC iz Maribora, Sašo DOLENC iz Ljubljane, Polona GONTAREV iz Ljubljane, Andrej GUŠTIN iz Ljubljane, Boštjan HAUPTMAN iz Šmartna pri Liti-ji, Rudi JEZERNIK iz Solčave, Sašo JOVANOVIČ iz Maribora, Katarina KELŠIN iz Ljubljane, Martina KERLATEC iz Maribora, Andrej KNEZ iz Radeč, Rudi KOLMANIČ iz Ljubljane, Simon KOMPARA iz Podnanosa, Evgen KONUŠEK iz Šentvida pri Grobelnem, Željko KREPEK iz Maribora, Aleksan-der KRIŽ iz Šoštanja, Marko MAHNIČ in Goran GOLUBIČ iz Portoroža, Dani-jel MAJCEN iz Celja, Danilo MAKUC iz Nove Gorice, Amič MEHONIČ iz Škofje Loke, Robert MEOLIC iz Murske Sobote, Petra MODIC iz Cerknice, Andreja PERHAJ iz Velikih Lašč, Primož POČKAJ iz Maribora, Albin PO-LANC iz Mokronoga, Jasmina POLJAK iz Maribora, Ciril REKAR iz Kranja, Andreja RUPNIK iz Poljčan, Dejan SAJE iz Ljubljane, Jožica STERLE iz Sta-rega trga pri Ložu, Mitja ŠTERMAN iz Ajdovščine, Damjan TEPINA iz Kranja, Tadeja TROŠT iz Ljubljane, Aleš VAVPETIČ iz Domžal, Miha VERGELJ iz Lesc in NEZNANI bralec iz Ljubljane.

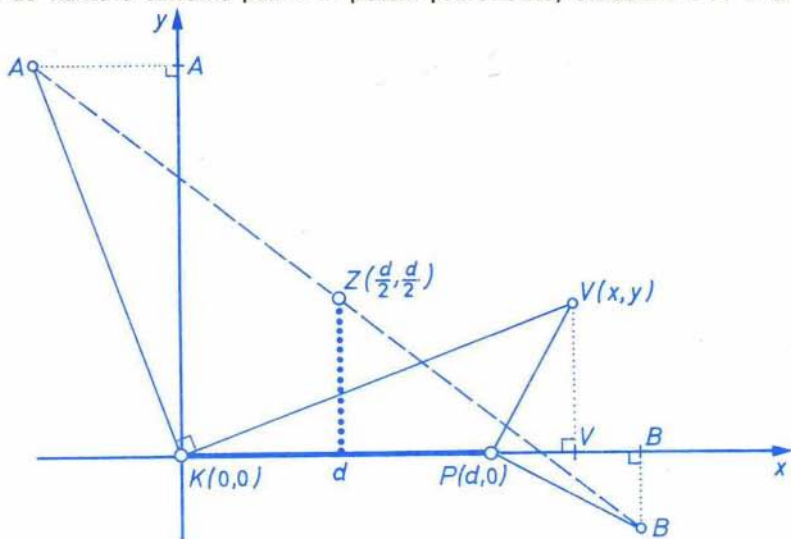


Izžrebali smo Boštjana in dve Andreji. Poslali smo jim knjigo D.J. Struika, *Čratka zgodovina matematike* iz zbirke Sigma.

Zaklad leži seveda na obali v zalivu. To hitro ugotovimo, če si kjerkoli izjemo položaj vislic in postopamo, kot narekuje zapis na pergamentu (slika).

Peter Petek

Nalogo pa lahko rešimo tudi brez risanja. Postavimo koordinatni sistem tako, kot kaže slika 2, torej kaktus v izhodišče in palmo na os x v oddaljenosti d , položaj vislic je označen z (x, y) . Točki, ki jih dobimo s sprehajanjem od vislic do kaktusa oziroma palme in potem pravokotno, označimo z A in B .



Opazimo, da sta trikotnika KAA' in KVV' ter PVV' in PBB' paroma skladna. Zato je $AA' = y$ in $A'K = x$ kar pove koordinati točke $A(-y, x)$. Podobno je $PB' = y$ in $B'B = x - d$. Tako zremo še koordinate točke $B(d+y, d-x)$. Koordinate zaklada dobimo potem takole:

$$(x_Z, y_Z) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right)$$

iz česar opazimo, da položaj zaklada ni odvisen od točke V . Zaklad najdemo, če gremo pol poti od kaktusa proti palmi, zavijemo levo in prehodimo še enako razdaljo.

Matjaž Željko

Premisli in reši

37

RIBIČA SE POGOVARJATA

Prvi se pohvali, da je ujel četrť metra dolgo ribo. Drugi bahavo reče: "Če svoji ribi dolžino dvakrat povečaš, še ne bo presegla dolžine mojega ulova."

Prvi odgovori: "Že eno samo povečanje bo prav gotovo dovolj, pa če bi ujel kita. Kar zaupaj mi dolžino svojega plena."

"Naj ti bo. Riba je merila celih 64 cm. Ali jo lahko presežeš z dvakratnim povečanjem dolžine svoje ribice?" se hvali drugi.

"Seveda," odgovori prvi, "če že hočeš, da dolžino povečam, recimo prvič za 10 cm, nato pa še za toliko, kolikor bi merila njena dolžina po prvem povečanju. Sicer pa lahko že z enim samim primernim povečanjem presežem dolžino kita, kajne?"

Drugi ribič, ki je poznal napako v izražanju, se opravičuje: "Veš, mislim sem, če bi bila dolžina tvoje ribe dvakrat večja, kot je, bi ..."

"Potem bi tako moral tudi reči. Če dolžino svoje ribe podvojim, res ne presežem dolžine tvojega plena."

"Šele potrojitev bi zalegla," nadaljuje drugi.

"Kaj če bi povedala še bolj splošno," reče prvi.

"Naj bo dolžina ribice x . Dvakratno povečanje je tedaj $x + a + b$, kjer in b poljubni dolžini. Naj bo druga dolžina dvakrat večja od prve (podvojena), to je $2x$. Dvakrat večjo (podvojeno) dolžino izrazimo z $2x$, enkrat večja dolžina je tedaj $1 \cdot x = x$. Še (za) enkrat večja dolžina bi bila $x + x$, kar je $2x$ dvojna dolžina.

Dvakratno povečanje cene ribiških dovolilnic, najprej za 20%, nato pa še za 30%, ribičem ni bilo po volji. Kaj bi šele rekli, če bi cene dovolilnicam podvojili!

Naloga:

Izrazi v odstotkih skupno povečanje cene dovolilnic in ga primerjaj s podvojeno prvotno ceno. Za koliko odstotkov je cena po dvakratnem povečanju nižja od cene, ki bi jo plačevali, če bi cene dovolilnicam podvojili?

Koliko odstotna naj bo naslednja podražitev, da bo cena presegla podvojitev prvotne vrednosti za slabo desetinko odstotka?

Poskusi nalogo rešiti tudi ti!

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

Je nekaj ribiških

1. Pet ribičev je ujelo pet rib v petih dneh. V kolikem času bo osem ribičev ujelo osem rib?
2. Šest ribičev je pojedlo šest rib v šestih dneh. V kolikem času bo deset ribičev snedlo deset rib?
3. V vsakem kotu od dna akvarija (kvadrastega) lebdi ribica in pred vsako ribico lebdi tri ribice. Koliko je ribic v tem akvariju?
4. Riba in pol tehta kilogram in pol in še pol ribe. Koliko tehta ta riba?
5. Za dinar in pol si dobil nekdanjo ribo in pol in še pol ribe. Koliko si dobil takrat za dva dinarja in koliko si plačal za eno ribo?
6. Ribja glava tehta tretjino teže ribe, rep 10 dag, to je $\frac{1}{5}$ ostanka. Koliko tehta riba, koliko posamezni deli ribe?

Jože Kotnik

REŠI IN PREMISLI

Pogosto sestavljavci nalog priporočajo učencem, da vse podatke in v zvezi z njimi zakonitosti pred reševanjem nalog dobro premislijo. Pri tej nalogi pa je ravno obratno. Priporočamo vam, da zastavljene naloge rešite, potem pa premislite, kaj lahko pomenijo številke, ki predstavljajo rezultate posameznih nalog. Pravilna rešitev ti bo povedala, kje še najdeš take naloge, razen v učbenikih.

$$2. \left(-\frac{2}{5} + 2 - \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{3} \right) + 5,7 = \quad .$$

$$2. (-3)(+2 - 7) - (-1) \cdot (9 - 6) = \quad .$$

$$3. (4 - 3 \cdot 2)(3 - 5) - (-1 - (-(-1))) = \quad .$$

$$4. 2(2 - (-3)(-1) - 2(4 - 5 \cdot 2)) - 3 = \quad .$$

$$5. 2((4 + (-2)(+7) - (-5))(-4) + (-17)) = \quad .$$

$$6. (1 - 3(1 + (-2)(-5)) + 2) : 3 + 22 = \quad .$$

Miha Štalec

ŠTIRI ZGODBE O VERJETNOSTI

Prva zgodba — pravljica:

Nekoč sta živela očka in mamica. Imela sta štiri otroke. Vsi so bili fantje. Pa pravi mamica: "Upam, da bo najin naslednji otrok deklica." Očka odvrne: "Draga, po štirih fantih bo zagotovo deklica!" Ali je imel očka prav?

Druga zgodba — hazarderska:

Neki hazarder v igralnici je takole razmišljal: "Počakal bom, da se bo ruleta nekajkrat zaporedoma ustavila na črno. V naslednji igri bom stavil na rdečo in zagotovo dobil." Je v resnici tako?

Tretja zgodba — pisateljska:

Ameriški pisatelj Edgar A. Poe je v nekem svojem romanu trdil, da če pri metu poštene igralске kocke pade šestica dvakrat zaporedoma je verjetnost, da bo pri naslednjem metu padla šestica, manjša od $1/6$. Je to res?

Četrta zgodba — vsakdanja:

Pri metu poštenega dinarja je grb padel petkrat zaporedoma. Janez trdi, da bo pri naslednjem metu zagotovo padla cifra. Ali to drži?

Odgovor: Če ste odgovorili na katerokoli vprašanje pritrdilno, ste se zmotili. Padli ste v "igralčevo past". Ruleta, kocka, dinar se ne "spominjajo", kaj se je dogodilo prej.

KARAS

PREMISLI IN REŠI

Tokrat vam zastavljamo kratko nalogo iz računalništva. Kaj izpiše naslednji program v basicu?

```
10 INPUT X, Y
20 LET X = X + Y
30 LET Y = X - Y
40 LET X = X - Y
50 PRINT X, Y
```

40

Odgovor utemelji! Odgovore pošljite do 1.10.1986.

Sandi Klavžar

AN BAN

Pri izbiri posameznika ali skupine ljudi iz večje skupine n ljudi pogosto postavimo prisotne v krog in nato izločamo vsakega k -tega. Tako na primer bo v skupini šestih otrok:

24 22 19 16 12 7 1	2 8 13 17 20 IV
Andreja	Bojan
III 15 11 6 Franci	Cvetka
	3 9 14 18 21 23 25 V
Egon	Dušan
I 5	4 10 II

lovila Andreja, če začnemo izštevati pri njej v smeri urinega kazalca vsakega petega. Rimske številke na sliki označujejo vrstni red izpadanja.

Na opisanem postopku izštevanja temelji več zanimivih nalog. Že iz antike je znana "Jožefova naloga", ki so jo v srednjem veku (17. stol.) takole preoblikovali:

"Barka, na kateri je bilo 30 potnikov — 15 kristjanov in 15 mohamedancev, je zašla v neurje. Da bi rešil ladjo in posadko se je kapitan odločil, da bo polovico potnikov vrgel v morje. Potnike je postavil v krog in vsakega devetega po vrsti (od izbranega začetka) so vrgli čez krov. Kako naj se kristjani postavijo v krog, tako da bodo vsi ostali na krovu?"

Za vsakdanjo rabo pa sestavite tabelo, ki za dana n in k (manjša od 10 ali 20) pove, na katero mesto glede na začetek izštevanja se morate postaviti, da boste "lovili". Precej časa lahko prihranite, če v sestavljanje tabele vprežete računalnik.

Vladimir Batagelj

Mohar Bojan, Zakrajšek Egon / PROGRAMSKI JEZIK PASCAL. — Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1986. — 196 str. — (Knjižnica Sigma ; 41) 1750.-din (1400.-din)

Prva knjiga s področja računalništva, Elektronski aritmetični računalniki F. Križaniča, je izšla v knjižnici Sigma že leta 1960. Po dolgem — predolgem — premoru je pred nami druga Sigmina računalniška knjiga. O njeni upravičenosti in potrebnosti najbrž ne gre izgubljati besed. Naj zapišem le tole: Računalnik Strela, opisan v Križaničevi knjigi, je bil dostopen le izbranim strokovnjakom, saj je potreboval zase kar celo elektrarno. Danes pa opremljamo z računalniki osnovne in srednje šole in marsikateri srednješolec, pa tudi osnovnošolec, ima računalnik doma, kajti cena rabljenega mikroračunalnika je primerljiva s ceno novega plašča.

Knjiga Moharja in Zakrajška je bila prvotno pisana kot skripta za predmet Uvod v računalništvo v prvem letniku matematike in tehniških ved. Po reformi srednje šole pa dijaki osnovno znanje iz računalništva dobijo že tam, tako da so ta predmet nadomestili drugi, knjiga pa se je, nekoliko prirejena, preselila v Sigma.

Knjiga vsebuje pet poglavij in priloge. Uvodno poglavje seznanja bralca z osnovnimi pojmi o računalniku in programskih jezikih. Naslednja tri poglavja, ki tvorijo jedro knjige, obravnavajo programski jezik pascal, za katerega avtorja pravi, da je "v nekaj letih postal najpomembnejši programski jezik". V resnici je to jezik, ki se ga največ poučuje, ker je izredno skrbno in sistematično sestavljen in se zato tudi v uporabah v zadnjem času močno uveljavlja. Vendar pa poučevanje pascala ni glavni smoter knjige — pascal avtorjema služi predvsem kot primerno sredstvo za posredovanje znanja o računalniku in programiranju. Je pa pascal kljub temu predstavljen v celoti in v skladu s predloženim ISO standardom. Pri tem opise sintakse in semantike posameznih elementov jezika spremljajo številni dobro izbrani programi kot zgledi, ki so jim često dodani tudi primeri podatkov in rezultatov. Zadnje poglavje knjige vsebuje podatke o posebnostih in uporabi prevajalnikov za pascal na posameznih računalnikih, med njimi mikroračunalnikih tipa Sinclair Spectrum in Commodore, ki so pri nas najbolj razširjeni.

Knjige bodo veseli tako začetniki, ki se z računalnikom in programiranjem srečujejo prvič, kot tudi izkušeni "hackerji", ki bi radi znali še kaj drugega kot basic.

Marko Petkovšek

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE – REPUBLIČKA, POKRAJINSKA I SAVEZNA TAKMIČENJA (1986), PREDTAKMIČENJA ZA MMO I MEĐUNARODNE MATEMATIČKE OLIMPIADE (1978–1985). – Ljubljana : DMFA SR Slovenije, 1986 ; 188 str. – (v tisku)

UČBENIKI IN PRIROČNIKI ZA OSNOVNO IN SREDNJO ŠOLO

Naročniki Preseka lahko tudi letos nabavijo pri Komisiji za tisk DMFA SRS ob skupinskem naročilu z 20% popustom naslednje učbenike in priročnike za osnovno in srednjo šolo:

	Cena 80%	100%
<i>Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov naravnih števil od 1 do 999 ter obsegov in ploščin kroga za merska števila premera od 1 do 299</i> (Zbral J. Žabkar)	55.-	69.-
<i>Štirimestni logaritmi in druge tabele</i> (S. Uršič)	300.-	375.-
<i>Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj</i> (V. Batagelj, T. Pisanski)		
1. del	400.-	500.-
2. del	800.-	1000.-
<i>Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj</i>		
1. del (M. Hribar)	144.-	180.-
2. del (B. Golli, J. Žitnik)	400.-	500.-
<i>Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za srednje šole</i> (I. Štalec in dr.)		
1. razred	600.-	750.-
2. razred	150.-	185.-
4. razred	1200.-	1500.-
<i>Leksikon Cankarjeve založbe:</i>		
<i>Matematika</i> (A. Vadnais)	1280.-	1600.-
<i>Fizika</i> (J. Strnad)	1280.-	1600.-
<i>Programski jezik pascal</i> (B. Mohar, E. Zakrajšek)	1400.-	1750.-

Priporočamo vam, da si knjige pravočasno oskrbite.

Ciril Velkovrh

Naloge iz matematike za učenje 6., 7. in 8. r – rešitve s str. 28

6. razred

1. Vsak člen danega izraza lahko zapišemo kot razliko dveh ulomkov:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \text{ itd.}$$

Ko vstavimo za vsak člen dane vsote razliko ulomkov, dobimo rezultat $\frac{9}{10}$.

2. Število 1680 razcepimo na prafaktorje.

$$1680 = 2.2.2.2.3.5.7$$

Iz teh faktorjev sestavimo štiri zaporedna naravna števila 5, 6, 7 in 8.

3. $x = 2,5$

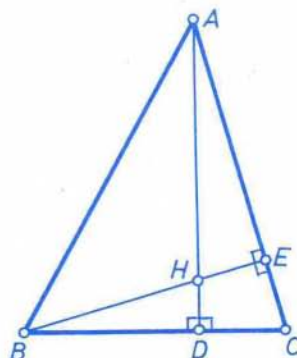
4. Naj bo "parna" sobota v istem mesecu na dan x (x je parno število). Sledeča sobota bo čez 14 dni, na dan $(x + 14)$, tretja sobota bo dan $(x + 28)$. Ker ima mesec lahko 31 dni, predstavlja vrednost za x v izrazu $(x + 28)$ dva dni.

30. v mesecu bo sobota, 25. pa ponedeljek.

5. a) $a + 30\%$ od $a = a + (30/100) \cdot a = a + 0,3a = 1,3a$

b) $a - (12,5/100) \cdot a = a - (1/8) \cdot a = (7/8) \cdot a$

6. Stranici AH in BE trikotnika $\triangle AHE$ oz. $\triangle BCE$ ležita na višinah trikotnika $\triangle ABC$, zato sta kota $\sphericalangle EAH$ in $\sphericalangle ECB$ enaka (kota s pravokotnimi kraki). Ker je $\overline{AH} = \overline{BC}$, sledi, da sta trikotnika $\triangle AHE$ in $\triangle BCE$ skladna. Trikotnik $\triangle BEA$ je zato enakokrak ($\overline{AE} = \overline{BE}$), in pravokoten. Kot $\sphericalangle CAB$ meri 45° (slika).



7. razred

1. a) Razlika $a - b$ mora biti negativna: $a - b < 0$, torej mora biti b večji.
b) $-3, -5, -7$ in -9 .

c) Ulomek q je za vsak $a \in \{0, 1, 2, \dots\}$ Kvocienat dveh pozitivnih števil $a + 2 \geq 2$, $2a^2 + 3a + 6 \geq 6$ in je zato pozitiven. Preverimo še $q \leq 1/3$. Najprej preuredimo:

$$3 \cdot (a + 2) \leq 1 \cdot (2a^2 + 3a + 6) \text{ ali} \\ 3a + 6 \leq 2a^2 + 3a + 6$$

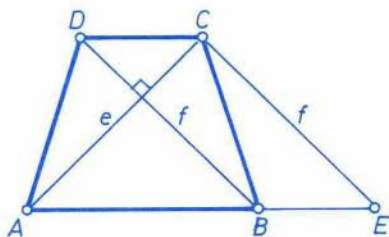
Kar je res, saj je $2a^2 \geq 0$.

$$2 \cdot (3x - 2)(4 - x) + (x - 3)(3x - 5) = 7$$

3. Štirje.

4. Če stranico trapeza AB podaljšamo za dolžino DC , dobimo enakokrak pravokotni trikotnik $\triangle AEC$. Trikotnika $\triangle CDA$ in $\triangle CBE$ imata enako osnovnico $\overline{CD} = \overline{BE}$ in enaki višini, zato sta ploščinsko enaka.

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \\ = P_{ABC} + P_{BEC} = P_{AEC} = \\ = (1/2) \cdot e \cdot f = 50 \text{ cm}^2$$



5. Letnica rojstva ima 4 cifre, kar pomeni, da bodo ti ljudje stari kvečjemu 28 let, torej rojeni v tem stoletju. Zapišimo njihovo rojstno leto kot $19ab$. Vsota teh cifr je $10 + a + b$, starost teh občanov pa bo leta 1987 enaka $1987 - 1900 - 10a - b = 87 - 10a - b$. Odtod enačba:

$77 = 11a + 2b$. Število b je element $\{0, 1, \dots, 9\}$ in mora biti kar 0, saj sta preostali števili v enačbi deljivi z 11. Zato še $a = 7$. Letnica rojstva je 1970.

8. razred

1. Če označimo $k = a : x$, izvemo: $a = kx$, $b = ky$ in $c = kz$. To upoštevamo v $a + b + c$ in dobimo:

$$(a+b+c):(x+y+z)=(kx+ky+kz): \\ :(x+y+z)=k(x+y+z):(x+y+z)= \\ = k = a : x$$

2. Pot označimo z x . Razlika časov je 12/60 ure.

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = \frac{12}{60} \\ x = 6$$

Pot je dolga 6 km.

3. Rešitev enačbe

$$\frac{m+1}{5} + \frac{2m-3}{15} + 1 = m - \frac{m-2}{6}$$

je $m = 4/3$, zato je iskana funkcija $y = (4/3)x - 8$.

4. a) Trikotnik $\triangle ABS$ je enakostraničen. Osnovnica $c = \overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}$, kot $\angle ASC = 150^\circ$.

$$l = (5/6) \pi c$$

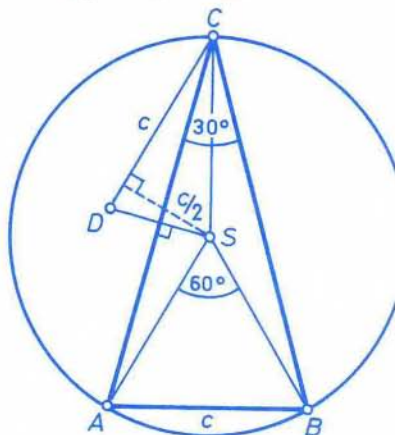
b) Trikotnik $\triangle DSC$, s stranico $\overline{CS} = c$ je enakokrak, s kotom $\angle DSC = 30^\circ$.

$$P_{DSC} = P_{ASC}$$

$$p_{DSC} = (1/2)c(c/2) = c^2/4$$

Ploščina krožnega odseka je enaka razliki ploščin krožnega izseka in trikotnika $\triangle ASC$.

$$p = c^2 \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) = \frac{c^2}{12} (5\pi - 3)$$



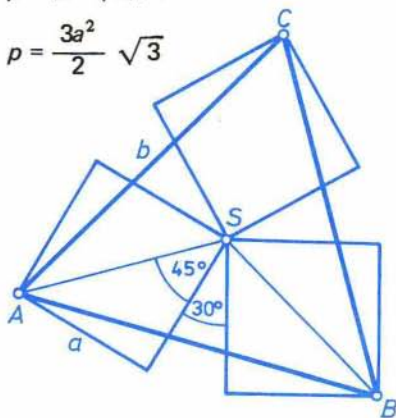
5. Trikotnik ABC je enakostraničen s stranico a_1 .

$$SA = a\sqrt{2}, SA = (b\sqrt{3})/3$$

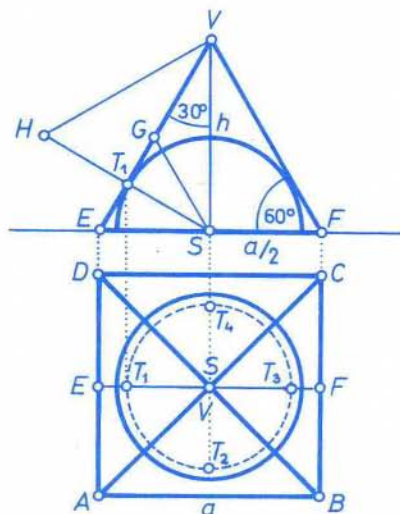
$$b = SA\sqrt{3} = a\sqrt{6}$$

$$p = (b^2\sqrt{3})/4$$

$$p = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$



6. Naj bo a osnovni rob piramide, h njena višina. Iz pravokotnega prereza piramide vidimo, da se stranske višine piramide dotikajo krogle v točkah



T_1, T_2, T_3, T_4 . Trikotnik $\triangle EHV$ je enakostraničen, s stranico $\overline{EV} = a = v_a$. Trikotnika $\triangle EGS$ in $\triangle SVH$ s stranicama $a/2$ in h sta enakostranična, zato je $\overline{ST} = h/2 = (a/2)\sqrt{3}/2$ ali:

$$2r = h = (a/2)\sqrt{3}$$

$$v_a = (4r\sqrt{3})/3$$

$$V = (32/9) \cdot r^3$$

$$P = a^2 + (1/2) \cdot 4 \cdot a \cdot v_a$$

$$P = 3a^2$$

$$P = 16r^2$$

Pavle Zajc

Naloge mladim Vegovcem – Rešitve s str. 30

6. razred

1. Skupni imenoalec ulomkov $\frac{4}{13}$, $\frac{x}{20}$ in $\frac{5}{13}$ je 260. Dobimo neenačbo $80 < 13x < 100$. Iskani ulomek je torej $\frac{91}{260}$ oziroma $\frac{7}{20}$.

2. Dva nastala kota merita $32^{\circ}30'$, druga dva pa $147^{\circ}30'$.

3. $v(525,495) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

$$525 = 5^2 \cdot 7 \cdot 3$$

$$495 = 5 \cdot 3^2 \cdot 11$$

Natanko nasproti razren prvih dveh stojita še 34. drevo na eni in 36. drevo na drugi strani.

7. razred

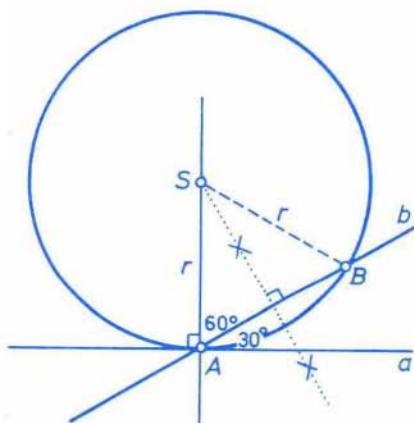
1. Količnik se je povečal za 20%.

2. $\triangle ABS$ je enakostranični.

$$r = 4 \text{ cm}$$

$$o = 8\pi \text{ cm}$$

$$p = 16\pi \text{ cm}^2$$

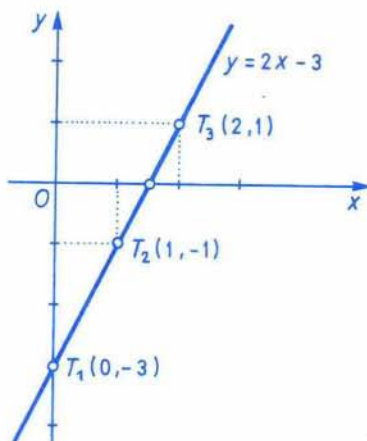


3. Vrednost spremenljivke a je 8.

4. a) Ta funkcija ima vrednost 0 za $x = \frac{3}{2}$.

b) Pozitivna je za $x > \frac{3}{2}$.

c) Negativna je za $x < \frac{3}{2}$.



5. Zica za novo ograjo bo stala 14 280 din.

8. razred

1. Manjkajoči člen je število 3.

2. Stranica prvotnega kvadrata je 5 cm.

*Učitelji matematike in fizike
občine Slovenske Konjice*

Nekaj za kratek čas – Rešitve s str. 31

1. Naj bo:

vnučeva starost x mesecev in babičina starost $12 \cdot x$ mesecev.

Tedaj velja: $12 \cdot x + x = 65$. 12

Iz zapisane enakosti dobimo $x = 60$.

Babica je torej stara 60 let, vnuk pa 60 mesecev oziroma 5 let.

2. Podatke v nalogi si lahko predstavimo v obliki preglednice.

	<i>kl</i>	<i>ki</i>	<i>vi</i>	<i>ha</i>	<i>IT</i>	<i>NE</i>	<i>FR</i>	<i>AN</i>
<i>ANA</i>	DA	NE	NE	NE	NE	DA	NE	NE
<i>BARBARA</i>	NE	DA	NE	NE	NE	NE	NE	DA
<i>CVETKA</i>	NE	NE	DA	NE	NE	NE	DA	NE
<i>DARJA</i>	NE	NE	NE	DA	DA	NE	NE	NE

Ana torej igra klavir in zna nemško.

Barbara igra na kitaro in zna angleško.

Cvetka igra na violino in zna francosko.

Darja igra na harmoniko in zna italijansko.

*Učitelji matematike in fizike
občine Slovenske Konjice*

Rešitve nalog s strani 39 ŠE NEKAJ RIBIŠKIH

1. V petih dneh.
2. V šestih dneh.
3. V akvariju so štiri ribice.
4. 1,5 kg.
5. Za dva dinarja si dobil $8/3$ ribe,
za eno ribo bi plačal 75/100 din.
6. Riba tehta $3/4$ kg, glava 25 dag
in trup 40 dag.

REŠI IN PREMISLI – rešitev s strani 39

1. 17 → P
2. 18 → R
3. 6 → E
4. 19 → S
5. 6 → E
6. 12 → K

Jože Kotnik

Miha Štalec

TOMOGRAFIJA S POZITRONSKIMI SEVALCI

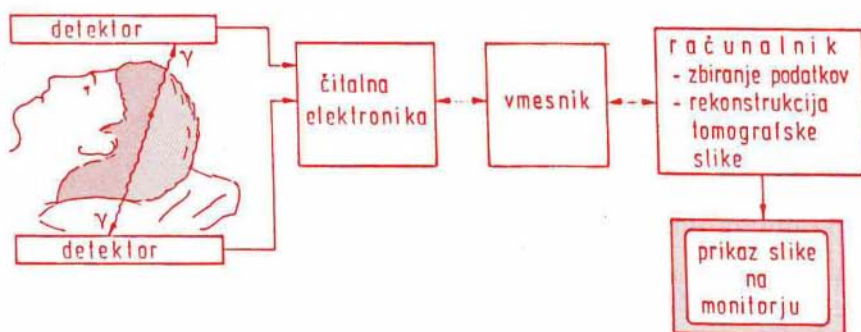
Ime tomografija izhaja iz grške besede "tomein", ki pomeni rezati. K sreči pa s sodobnimi metodami tomografije le slikamo notranje organe v prerezu, ne da bi človeka zares prerezali. Slike lahko bistveno pomagajo zdravniku pri ugotavljanju bolezenskih sprememb ali omogočajo nekatere raziskave, ki doslej niso bile mogoče. Kaže, da zlasti tomografija s pozitronskimi sevalci (angl. positron emission tomography, PET) odpira nova obzorja v raziskavah na področju nevrokemije.

Podobno kot pri fotografiji sta pri tomografiji potrebna "svetloba" in naprava, ki "svetlobo" zazna. Človeško telo navadne svetlobe ne prepušča, zato za slikanje notranjih organov uporabljamo rentgensko svetlobo, sevanje gama, pa tudi radijske valove. (Glej članek J. Stepišnika o slikanju z jedrsko magnetno resonanco v Preseku 13, št. 3). Pri pozitronski tomografiji osvetlijo notranje organe s sevanjem gama, to je s fotoni, ki nastanejo pri *anihilaciji para pozitron—elektron*. Pozitron, ki ga izseva radioaktivno jedro, je antidelec elektrona in v stiku s snovjo ne žive dolgo. Ko se sreča z elektronom, prostim ali vezanim v atomu, se z njim spremeni v dva ali več svetlobnih kvantov — fotonov γ . Ker prenehata obstajati elektron in pozitron, imenujemo pojav anihilacijo (izničenje). Pri tem pa se ohrani energija: fotoni prevzamejo vso energijo para pozitron—elektron, ki jo sestavljajo lastna energija zaradi mas obeh delcev in njuna kinetična in potencialna energija. Anihilacija prostega para v en sam foton ni mogoča. Daleč najverjetnejša je anihilacija v dva fotona; če par ob anihilaciji miruje, odletita fotona v nasprotnih smereh, to je pod kotom 180° . Življenjski čas pozitrona v snovi je odvisen od števila elektronov v njegovi bližini, se pravi od gostote in povprečnega vrstnega števila snovi. V tekočinah in v trdnih snoveh ima velikostno stopnjo milijardinke sekunde.

Pozitrone dobijo pri razpadu beta plus radioaktivnega izotopa. S takšnim izotopom zaznamujejo biološko aktivno snov in jo vnesejo v telo, kjer se kopiči na značilnih mestih. Pozitroni, ki jih seva radioaktivni izotop, se v tkivu ustavijo in nato pride do anihilacije. Pri skoraj vseh anihilacijah odletita dva fotona v nasprotnih smereh. Oba hkrati zaznajo merilniki na nasprotnih straneh opazovanega dela telesa (slika 1). Podatki o kraju obeh sočasnih zadetkov gredo nato

preko elektronskih naprav v računalnik, kjer se zapišejo v spomin. Po končani meritvi, ki obsega približno milijon takšnih dogodkov, začne računalnik iz zbranih podatkov sestavljati tomografsko sliko. Najprej iz vsake dvojice zadetkov izračuna premico, na kateri naj bi bil pozitronski sevalec. Množica vzporednih premic določa projekcijo, več projekcij pod različnimi koti pa določa porazdelitev gostote sevalca (slika 2). Misliti si smemo, da človeški možgani nekako tako kot računalnik pri tomografiji sestavljajo trodimenzionalno sliko iz dvodimenzionalnih slik, ki jih zaznata očesi, le da so pri tem neprimerno hitrejši. Ko je trodimenzionalna slika sestavljena, pa lahko računalnik na monitorju pokaže poljuben prerez skozi opazovani del telesa.

Za pozitronsko tomografijo so najbolj uporabni izotopi ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O in ^{18}F , ki imajo po vrsti razpolovni čas 20 minut, 10 minut, 2 minuti in 110 minut. Zaradi kratkega "roka trajanja" mora biti čas od proizvodnje do uporabe izotopa čim krajši. Večino izotopov za pozitronsko tomografijo proizvajajo s pospeševalniki – ciklotroni, ki pospešujejo protone približno do energije 15 MeV, nekatere (npr. ^{18}F) pa lahko tudi v manjših raziskovalnih jedrskih reaktorjih. Hitro pridobivanje čistega izotopa in označevanje fiziološke spojine sta ponavadi zelo zahtevna postopka. Glukozo, označeno z ^{11}C , na primer pridobivajo preko fotosinteze, pri čemer rastlina porablja CO_2 , označen z ^{11}C . Kisik, ogljik in dušik, ki so sestavine mnogih organskih molekul, so primerni za označevanje predvsem zato, ker biokemični procesi v telesu ne razlikujejo različnih izotopov istega elementa in se tudi označenim spojinam metabolične lastnosti ne spremenijo. Nekoliko drugače je pri analognih spojinah kot npr. pri analogu glukoze, pri katerem zamenjajo en atom kisika z atomom ^{18}F . Po raz-

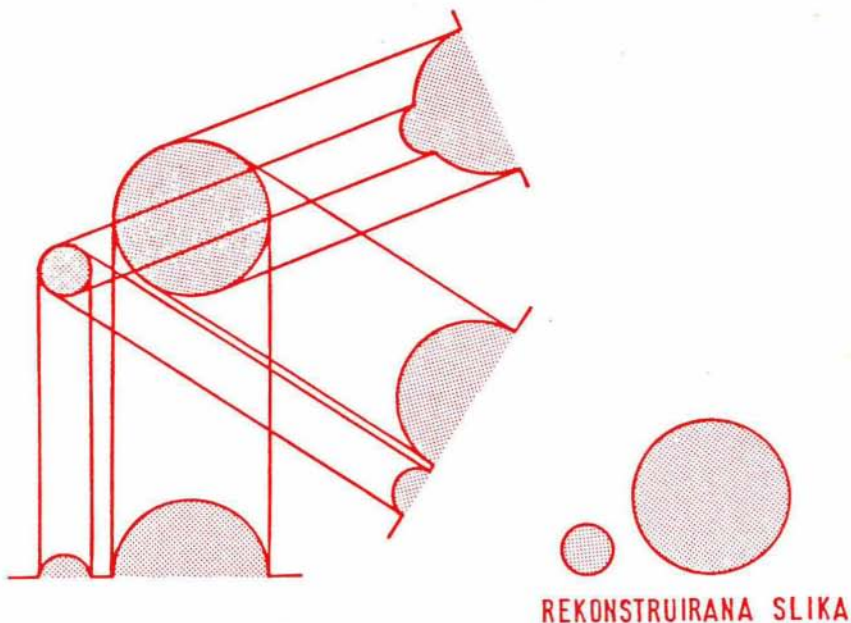


Slika 1. Shematična risba naprave za pozitronsko tomografijo. Merilnika na nasprotnih straneh sočasno zaznata fotona iz anihilacije pozitrona. Čitalna elektronika prečita in kodira podatke, ki se preko vmesnika zapišejo v spomin računalnika. Po končanem slikanju računalnik rekonstruira tomografsko sliko in jo v izbranem prerezu pokaže na monitorju.

graditvi takšne glukoze ostane označevalec ^{18}F v celicah, kar je za meritev metabolizma do neke mere celo ugodno.

Na kvaliteto tomografske slike vplivajo nekateri fizikalni pojavi. Pozitroni, ki jih izseva sevalec, namreč nimajo vsi enake kinetične energije. Ker je razdalja od sevalca, ki jo doseže pozitron v tkivu, odvisna od njegove energije, ne preletijo vsi pozitroni enake razdalje. Povprečna razdalja npr. je za ^{18}F z največjo energijo pozitronov 0,65 MeV približno 1 mm, kar omejuje natančnost, s katero izmerijo lego sevalca. Razen energije pozitrona vpliva na ločljivost slike še dejstvo, da fotona pri anihilaciji ne odletita natanko v nasprotnih smereh. Kot med njima je odvisen od hitrosti težišča elektrona in pozitrona ob anihilaciji in ta hitrost je v splošnem različna od nič. Tipične vrednosti so za nekaj desetink stopinje različne od 180° . Fotonu se lahko v snovi, v kateri merijo porazdelitev sevalca, spremeni energija in smer pri trku z elektronom. Lahko se tudi zgodi, da merilniki zaznajo po naključju hkrati dva fotona iz različnih anihilacij. Ta pojava predvsem poslabšata kontrast tomografske slike.

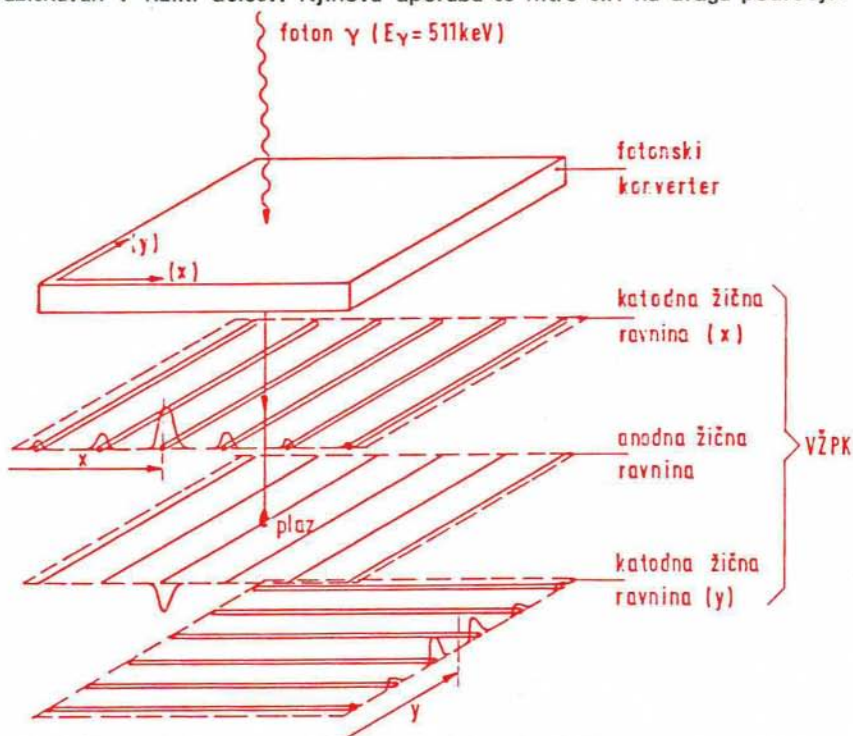
Kvaliteta tomografske slike je odvisna tudi od značilnosti merilnikov.



Slika 2. Iz množice enodimenzionalnih projekcij predmeta lahko rekonstruiramo dvodimenzionalno sliko. Podobno lahko tudi iz dvodimenzionalnih projekcij pod različnimi koti rekonstruiramo trodimenzionalno sliko.

Standardne naprave PET sestavlja množica scintilatorjev, to je kristalov, ki oddajo drobne bliske, ko vanje prileti foton. Te bliske zaznavajo fotopomnoževalke in jih spreminjajo v napetostne sunke. Fotopomnoževalke so razporejene po obodu enega ali več krogov (slika 3). Določena fotopomnoževalka sprejme podatek o kraju zadetka. Posamezen krog fotopomnoževalk določa le en prerez, torej daje eno tomografsko sliko. Naprave zaznajo le majhen del vseh anihilacij. Prostorska ločljivost je približno 1 cm, kar pomeni, da ni mogoče zaznati manjših podrobnosti. Poleg tega so naprave zaradi velikega števila scintilatorjev in fotopomnoževalk razmeroma drage.

V zadnjem času so razvili sisteme PET na osnovi večžičnih proporcionalnih komor (VŽPK). Ti merilniki določajo tudi lego in so jih razvili pri osnovnih raziskavah v fiziki delcev. Njihova uporaba se hitro širi na druga področja.



Slika 4. Kot merilnike v napravah PET uporabljajo tudi večžične proporcionalne komore, opremljene s fotonskim konverterjem. Elektrone, ki jih izbije foton iz konverterja, pritegne električno polje proti najbližji anodni žici, kjer se pomnožijo v plazu. Na tej žici se pojavi negativni signal, ki ga uporabimo za proženje čitalne elektronike. Koordinati x in y prečitamo s katodnih žic. Sinek se pojavi na več žicah. Koordinato določa težišče sunkov, ki ga poiščemo s čitalno elektroniko.

Slike 3., 5a. in 5b. so na IV. strani ovitka.

VŽPK sestoji iz ravnine vzporednih anodnih žic "v sendviču" med dvema ravninama katodnih žic (slika 4). Skozi komoro se pretaka plinska mešanica, katere sestava je odvisna od konkretnih zahtev. Pri uporabi VŽPK za zaznavanje fotonov iz anihilacij je potrebno s posebnim konverterjem povečati verjetnost za zaznavanje (izkoristek). Najboljši doslej izdelani konverter ima izkoristek le okoli 10%. Konverter v praksi omejuje tudi ločljivost na približno 1 mm, kar je desetkrat bolje od scintilacijskih števecv. S komorami z velikostjo 40 cm x 40 cm je mogoče zajeti velik del fotonov in zato te komore bolje izkoriščajo radioaktivnost sevalca. Naprave PET na osnovi VŽPK izmerijo trodimenzionalno porazdelitev sevalca in je mogoče rekonstruirati sliko katerega koli prereza v prostoru, ki ga omejujejo komore.

Izboljšane naprave PET omogočajo kvalitetnejšo sliko in dopuščajo manjšo radioaktivnost sevalca, ki je za tomografijo potrebna. Zato nekateri razmišljajo o hibridnih merilnikih, ki bi združili dober izkoristek in časovno ločljivost scintilacijskih merilnikov z dobro krajevno ločljivost večžičnih komor. Foton iz anihilacije naj bi se absorbiral v scintilatorski plošči, scintilacije pa bi registrirala večžična komora. Meritev razlike časov zadetkov obeh fotonov v nasprotnih smereh bi v nekaterih scintilacijskih materialih omogočila vsaj grobo določitev kraja anihilacije na premici, kar bi tudi prispevalo h kvaliteti tomografske slike. Pozitroni in fotoni γ , ki nastanejo pri anihilaciji, spadajo k ionizirajočemu sevanju. Doza sevanja, ki jo pri enem slikanju s pozitronsko tomografijo dobi telo, je med 0,3 in 1,5 milisieverta (mSv), kar je približno toliko kot prispeva naravno sevanje (kozmični delci in naravna radioaktivnost) v enem letu (1,1 mSv) ali navadni rentgenski pregled (0,5 mSv). Zaradi kratkih razpolovnih časov pozitronski sevalci hitro razpadejo in radioaktivnost v telesu "ugasne".

Za zdaj je pozitronska tomografija v glavnem v rokah raziskovalcev, njena uporaba pa se vedno bolj širi tudi na področje klinične diagnostike. Ovira pri tem ni samo visoka cena naprave (okoli milijon dolarjev), ampak tudi zahtevna bližina ciklotrona ali reaktorja. Prednost je predvsem v tem, da lahko s PET opazujejo krajevno porazdelitev aktivnosti pri metabolizmu (presnavljanju). Ne katere vrste tumorjev so prej opazne zaradi spremembe aktivnosti metabolizma kot zaradi spremembe oblike celic, kar omogoča zgodnje odkrivanje bolezni (slika 5). Po spremembi metabolizma lahko pozitronska tomografija loči med reverzibilno in ireverzibilno poškodbo srca ob infarktu. Proučevali so tudi spremembe aktivnosti možgan zaradi čutnih dražljajev in miselnih procesov ter povezave med posameznimi možganskimi centri. S PET so neposredno opazili pričakovano aktivnost vidnega centra pri prostovoljcu, ki je med tomografiranjem spal in sanjal. Zlasti pa si od PET obetajo napredek pri raziskovanju duševnih bolezni.

Aleš Stanovnik in Marko Starič

JENSENOVA NEENAKOST

Konveksnost oziroma konkavnost je ena izmed mnogih lastnosti funkcij. Določanje te lastnosti pa je pri nekaterih funkcijah dokaj težavna zadeva. V takih primerih ponavadi uporabljamo posebne matematične pripomočke.

Ena boljših metod za določanje konveksnosti oziroma konkavnosti funkcije je Jensenova neenakost. Preden pa pričnemo z obravnavo te neenakosti, si malo pobliže oglejmo pojem konveksnosti oziroma konkavnosti funkcije.

Naj bo $f(x)$ funkcija, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$. Po eni izmed definicij je funkcija f na intervalu $[a, b]$ *konveksna*, če je izpolnjena naslednja neenakost:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (1)$$

za poljubna med seboj različna x_1 in x_2 z intervala $[a, b]$. Funkcija f pa je *konkavna*, če v neenakosti (1) velja znak $>$.

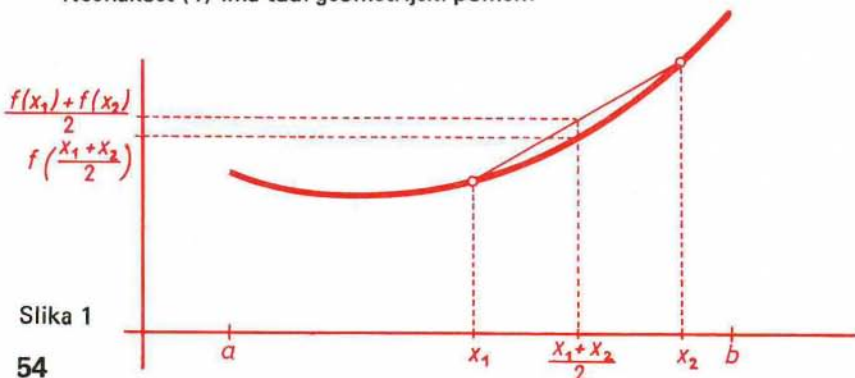
Zatakne pa se nam, ko neenakost (1) preide v enakost. To je, ko velja:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (2)$$

V tem primeru je $f(x)$ linearna funkcija, česar pa tu ne bomo dokazali. Hitro pa lahko preverimo, da linearna funkcija zadošča enakosti (2). Zapišimo jo v obliki $f(x) = kx + n$, vstavimo v (2) in dobimo identiteto.

Tu pa se mnenja razhajajo. Nekateri namreč prištevajo linearno funkcijo med konveksne in pišejo v (1) znak $\leq$, drugi pa linearno funkcijo jemljejo kot poseben primer in neenakost (1) pišejo tako, kot smo jo mi.

Neenakost (1) ima tudi geometrijski pomen:



Slika 1

Iz slike 1 se lepo vidi, da je zvezna funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ konveksna natanko takrat, ko je vrednost te funkcije v točki $(x_1 + x_2)/2$ manjša od aritmetične sredine njenih vrednosti v točkah x_1 in x_2 . Tu smo seveda izvzeli primer $x_1 = x_2$.

In sedaj pojdemo k bistvu našega članka. Dokazati hočemo pravzaprav tole:

Za vsako zvezno funkcijo, ki je na intervalu $[a, b]$ konveksna, velja:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} \quad (3)$$

pri čemer so $x_1, x_2, \dots, x_k$ taka števila z intervala $[a, b]$, da sta vsaj dve števili izmed njih med seboj različni, k pa poljubno naravno število. Neenakost (3) imenujemo *Jensenova neenakost*.

Števila $x_1, x_2, \dots, x_k$ po potrebi tako premešamo, da je $x_1 \neq x_2$. S tem nič ne izgubimo na splošnosti.

Jensenovo neenakost bomo dokazovali s popolno indukcijo. Preden se bomo lotili dokaza neenakost, poiščimo zvezo med ulomkoma

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k + 1} \quad \text{in} \quad x' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$$

ki jo bomo očitno potrebovali. Poizkusimo takole:

Poiščimo tisti y , za katerega velja

$$\frac{x' + y}{2} = x$$

Po krajšem računu ugotovimo, da je

$$y = \frac{(k-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})}{k(k+1)} + \frac{x_{k+1}}{k} = \frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}$$

Velja torej identiteta:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k + 1} = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}}{2} \quad (4)$$

Pojdimo sedaj k dokazu Jensenove neenakosti. Za $n = 2$ je trditev pravilna. Po definiciji – glej (1) – pač velja:

$$f((x_1 + x_2)/2) < (f(x_1) + f(x_2))/2 \quad (5)$$

Vzemimo sedaj, da trditev velja za neko naravno število $k \geq 2$. Pokažimo, da tedaj velja trditev tudi za $k + 1$. Da bo manj pisanja, naj bo zopet:

$$x = (x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}) / (k + 1) \quad (6)$$

Število x je aritmetična sredina števil x_1 do x_{k+1} . Zato je x manjši od največjega izmed njih in večji od najmanjšega izmed njih. Od tod pa že sledi, da je x število z intervala $[a, b]$.

Zaradi (4) velja enakost:

$$f(x) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}}{2}\right) \quad (7)$$

Po definiciji konveksnosti (1) smemo oblikovati neenakost:

$$f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) + f\left(\frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}\right)}{2} \quad (8)$$

Zaradi indukcijske predpostavke veljata sledeči neenakosti:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} \quad (9)$$

in

$$f\left(\frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}\right) \leq \frac{(k-1)f(x) + f(x_{k+1})}{k} \quad (10)$$

Pri tej zadnji neenakosti upoštevamo ti dve dejstvi:

$$f\left(\frac{(k-1)x + x_{k+1}}{k}\right) = f\left(\frac{x + x + \dots + x + x_{k+1}}{k}\right)$$

in

$$\frac{f(x) + f(x) + \dots + f(x) + f(x_{k+1})}{k} = \frac{(k-1)f(x) + f(x_{k+1})}{k}$$

V primeru, da je x enak x_{k+1} , nastopi v neenakosti (10) enačaj. Ostane le $f(x) = f(x)$. Ker pa sta x_1 in x_2 med seboj različna, bo v neenakosti (9) veljal strogi neenačaj in naprej ne bo nobenih težav.

S pomočjo (9) in (10) lahko desno stran v neenakosti (8) nadaljujemo takole:

$$< \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} + \frac{(k-1)f(x) + f(x_{k+1})}{k}}{2} \quad (11)$$

Če pogledamo vrstice (7), (8) in (11), vidimo, da smo dokazali neenakost:

$$f(x) < \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} + \frac{f(x)(k-1) + f(x_{k+1})}{k}}{2} \quad (12)$$

Malo računanja z ulomki in za $f(x)$ dobimo oceno:

$$f(x) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k+1})}{k+1} \quad (13)$$

Spomnimo se, kaj je x , ga vstavimo v (13) in dobimo:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k+1})}{k+1}$$

kar smo želeli dokazati.

S tem je dokazano: če velja Jensenova neenakost za neko naravno število k , potem velja tudi za $k+1$.

(5) nam pove, da velja trditev za $k=2$. Po pravkar izvedenem zaključku pa velja trditev tudi za $k=2+1=3$, za $k=3+1=4$ itd., torej za poljubno naravno število k .

V članku v številki 2 bomo podali nekaj primerov uporabe Jensenove neenakosti.

Peter Anastasov, Mirko Dobovišek

KRALJ JURIJ III IN ZVEZDE

Znamenitega astronoma **Williama Herschela** (1738 – 1822) je obiskal kralj Jurij III. in ga blagohotno pobaral:

”Nu, dragi Hreschel, kaj je novega na nebu?”

Herschel pa nasajeno:

”Je mar veličanstvu vse staro že znano?”

DVE ŠTEVILI, KI NISTA OBE ENAKI NIČ

Poslušajmo razgovor štirih učencev, ki so reševali naslednjo nalogo (V. Batagelj, I. Hafner: Matematika, logika, str. 29, naloga 3):

Imamo dve števili, ki obe nista enaki nič. Kaj lahko rečeš o njunem produktu?

Janez: Obe števili nista 0, torej je eno nič, drugo pa različno od nič. Produkt je torej nič.

Peter: Obe števili nista nič, z drugimi besedami, nobeno ni nič. Produkt je torej različen od nič.

Pavel: Obe števili nista nič. To pomeni, da ni res, da sta obe enaki nič. Eno bi torej lahko bilo nič, ni pa nujno. O produktu ne moremo reči ničesar.

Tone: Strinjam se, da o produktu ne moremo reči ničesar. Pogoji naloge, da imamo dve števili, ki nista obe enaki nič, ne pove ničesar. Če imam dve števili, potem je vedno vsaj eno različno od nič. Nemogoče je imeti dve števili enaki nič. Samo eno število (to je 0) je enako 0.

Janez: Vsi imamo prav.

Peter: To, da oporekaš sam sebi, se mi zdi čudno. Kakorkoli že, jaz imam prav, torej ne drži, da vsi nimamo prav. Vsi drugi pa nimajo prav.

Janez (Petru): Vsi ostali torej nimajo prav! Vsi nimajo, nekateri torej imajo.

Kako je to mogoče, saj se nobeden od naših odgovorov ne ujema s tvojim?

Pavel (Janezu): Ali nisi opazil, da je za Petra "vsi niso" isto kot "nobeden ni" in da je zanj "oba nista" isto kot "nobeden ni"? Opazil pa sem tudi, da zate "vsi niso" ni isto kot "ni res, da so vsi".

Tone: Jaz pa sem opazil, da je za vas $2 = 1$.

Drugi trije: Nemogoče!

Tone: Ali je množica z dvema rečema vedno dvoelementna?

Drugi trije: Seveda!

Tone: Torej tudi v primeru, če sta ti dve reči dve števili, ki sta obe enaki nič?

Drugi trije: Dobro si nas potegnili! Toda, kako bi ti dejal "dve enaki števil" ali "dve enaki množici" ali "dve enaki točki"?

Tone: Dveh enakih števil ni. Število je enako samo sebi in je različno od vsakega drugega števila. Govoriti o dveh enakih množicah je čisti nesmisel, saj ne govorimo o dveh, temveč o eni.

Pavel: Zdaj mi je jasno, zakaj se s profesorjem matematike ne razumeta.

Tone: Zate, Pavel, vem, da greš študirat matematiko. Kaj pa vidva?

Peter: Za nič na svetu ne!

Janez: Jaz pa za vse na svetu ne!

Izidor Hafner

PROFESOR DR. IVAN VIDAČ V OČEH ŠTUDENTOV IN V OBJEKTIVU FOTOGRAFA

Marina, ena zgovornejših študentk zadnjega letnika matematike, zajema sapo pred profesorskim kabinetom v tretjem nadstropju našega (zdaj že nekam domačega) "matematičnega faksa". Potrka, izgine za nekaj časa in se nato vrne med kolege.

"Kaj je rekel? A bo?"

"Pridem noter in rečem za diplomsko nalogo. Pa pravi: 'Veste, jeseni odhajam v pokoj... Bom še premislil.'"

Novico sprejme mrmranje (navajeni smo, da je v tem nadstropju bolje govoriti tiše, če pogovor zadeva profesorje). Samo: "Ja, kdo bo pa potem ...?" je slišati glasneje.

Ko sem se v zadnjem letniku gimnazije spustila v tvegano pustolovščino študija matematike, sem s strahom hodila mimo očetovih knjižnih polic, od koder je vabila prva izdaja Višje matematike, polna orumenelih strani in meni takrat še tako tujih stavčnih formulacij.

Prvi tedni in meseci na fakulteti – zame, provincialno gimnazijko, ta-

ko polni nezaupanja v svoje sposobnosti, strahu pred kolokviji in izpiti, pa vseeno prežeto z občudovanjem čarovnij, ki so jih na tablo razgrinjali mojstri matematike ...

Tehtnica s strahom in občudovanjem pa se je najprej nagnila na stran zadnjega ob predavanjih profesorja Vidava. Moja generacija (in druge verjetno tudi) si je samo enkrat privoščila mučen prizor, da se je profesor ob prihodu v predavalnico znašel pred popisano tablo (mojstrovino svojega predhodnika) in jo v moreči tišini zbrisal sam. Tudi opozorilo, da smo preveč razposajeni, nas je pri njem doletelo samo enkrat, za leglo pa je za vselej.

Njegovim predavanjem bi morali reči "pripovedovanja", tako gladko tečejo. Matematika se prelevi v zgodbo o nečem lepem, pot do nje se poslušalcem ne zdi prav nič naporna, pri tem pa vse preradi spregledajo, da gre pravzaprav za nekakšno Kolumbovo jajce.

Profesor Vidav se ne oklepa lista papirja s pripravo na predavanje – ker ga nima. Pride in pripoveduje kar iz "glave", v jeziku, ki bi mu ga slavisti zavidali; matematično pa tako

izbrušeno, kot bi bral iz skrbno pisane učbenika. Privoščji si pedagoško razkošje, ki si ga na fakulteti le malo kdo — računa na naše navdušenje za sprotne študij in v uvodnih minutah poskrbi, da predavanju lahko sledijo tudi "luftarji".

Na vprašanje, kdo mu je predaval matematične predmete, mi oče ni mogel dolgo odgovorjati: "naštel" je le prof. dr. Josipa Plemlja in prof. dr. Ivana Vidava. Njuna šola matematike se je do danes pridno razrasla in redko se zgodi, da (po vseh pravilih vpisan) študent posluša istega profesorja več let. Zato se moja generacija matematikov — pedagogov lahko že kar pohvali s tremi leti "druženja" s pro-

fesorjem Vidavom: prve korake v resnejšo matematično teorijo smo napravili pri Analizi I, leto kasneje je prevzel na svoje rame še vso težo Analize II (ime profesorja Jamnika, ki bi nam moral predavati ta predmet, imamo še zdaj vpisano v indeks, saj se je ponesrečil kak teden pred začetkom predavanj), v četrtem letniku pa smo uživali še ob "pozni trgatvi", Afini in projektivni geometriji.

Vsak predavatelj na fakulteti se znajde tudi v vlogi eksekutorja, oprostite, eksaminatorja. Kolikokrat je to vlogo zaigral prof. Vidav, najbrž nihče ne ve. Pravijo pa, da je imel nekdanj bolj trdo roko kot danes — morda le, kar se ocen tiče; sistem pa je ostal



Slika 1. Svet matematike je lep, prostran in skrivnosten.



Slika 2. Ampak, ko bi vi vedeli,

isti: kratek uvod v vprašanje, ki študenta reši prvega šoka, nato pa steče nekakšen pogovor, ki ga krmari profesor. Osebnost me presenetili dve dejstvi: da se bojim ziniti kakšno neumnost, ker mi bo potem nerodno (njemu pa tudi), in pa to, da že ob prihodu v kabinet tolčem knjižno slovenščino, kakršne sicer niti pri najboljši volji ne spravim skupaj. Lepi stavki brez narečnih pritikin nastajajo kar sami od sebe, kot da je to nalezljivo.

Kot dodiplomska šolarka imam vse preozko matematično obzorje, da bi segla kam dlje na področje, s katerim se je prof. Ivan Vidav ukvarjal od tistih let dalje, ko moj oče še



Slika 3. kaj vse povedo študentje na izpitih!

seštevati ni znal. Kar oči so se mi širile, ko sem v Obzorniku za matematiko in fiziko iz leta 1978 (takrat je prof. Ivan Vidav praznoval šestdesetletnico) prebirala kratke povzetke njegovega dela. Bolj kot kdajkoli prej sem začutila, kakšni matematični dojenčki bomo vsi, ki bomo mor-da nekoč še strah in trepet srednješolcev ... Se bomo znali približati vsaj idealu pedagoga, ki ga vidimo v tem priljubljenem predavatelju?

★★★

Nikoli nisem bila posebno svetla luč, kar se matematike tiče, študiram pa jo z navdušenjem in kljub vsem strašnim sanjam iz srednje šole sem v vseh letih študija bolj uživala nad lepoto "gole teorije" kot pri reševanju nalog. In najbrž govorim v imenu mnogih slovenskih podjarmljencev matematike, če določim za krivca svoje prve zaljubljenosti v "višjo matematiko" — profesorja Ivana Vidava.

Marta Majcenovič

Fotografije je posnel že pred mnogimi leti višji predavatelj Janko Branc, kot očitvidka pa lahko potrdim, da smo danes deležni enako živega pogleda in prisrčnega nasmeha.

PRESEKOVI RAČUNALNIŠKI PROGRAMI

Vsak začetek je težak. Zato smo bili v uredništvu Preseka prijetno presenečeni, ko smo takoj po izidu četrte številke, v kateri smo objavili razpis za Presekovne programe, dobili dve kaseti s programi. Prva je prišla kasetna iz Pirana, poslal pa jo je Stanislav Trstenjak. Kasneje sta na naš naslov prišli še dve kaseti. Led je tako prebit in upamo, da bo naša akcija zaživela. Povejmo še enkrat, da je glavni namen te akcije vzpodbuditi menjavo programov, ki jih uporabljate učenci in učitelji pri šolskem delu. Zato upamo, da bodo programi še vnaprej prihajali na naš naslov. Dobrodošlo bo tudi vsako mnenje o naši akciji, predlogi, zamisli,

Predstavimo programe kar po vrsti, kakor so prihajali. Vsi so namenjeni računalniku ZX Spectrum.

Stanislav Trstenjak nam je na kaseti poslal kar devet programov. V spremnem pismu piše, da jih je kot učitelj fizike in tehnične vzgoje s pridom uporabljal pri pouku.

Programi so namenjeni predvsem pouku fizike v sedmem in osmem razredu kot dodatek k demonstracijskim eksperimentom.

GIBANJE : V programu je shematsko predstavljeno vozilo, ki se giblje enakomerno ali enakomerno pospešeno. Hkrati z gibanjem se riše graf pot-čas. Po izrisu grafa program izpiše formulo za izračun poti, ki je predstavljena tudi grafično, s pomočjo ploščine. Pohvaliti velja zlasti velike črke, s katerimi se izpisujejo formule.

OHMOV ZAKON : Program izriše vezje, na katerem praktično izvajamo eksperiment. Program prikaže tudi formulo za izračun upornosti in graf tok-napetost.

UPORNIKI : Program prikazuje značilnosti pri zaporedni in vzporedni vezavi upornikov. Ob grafičnih predstavitev značilnosti je nujno potrebna razlaga učiteljev.

TOPLOTA : Program je uporaben pri demonstracijskem poskusu za določanje specifične toplote vode, oz. pri ugotavljanju zanačilnosti segrevanja vode in ledu. Služi za tabeliranje podatkov, risanje grafa temperature v odvisnosti od časa.

IZDELKI : Ta program lahko uporabljamo pri pouku tehnične vzgoje, za risanje izdelkov v pravokotni projekciji. Program predstavi osem izdelkov, primernih za izdelavo v osnovni šoli, narisanih v pravokotni projekciji. Opremljeni so z orienatacijsko kosovnico in kratkim navodilom za izdelavo predmeta.

Pri programih je dobro to, da lahko hitrost izvajanja programa prilagodimo razlagi, saj moramo za vsako akcijo pritisniti tipko. S pomočjo teh programov lahko popestrimo pouk, saj programi nadomeščajo zamudno risanje in pisanje po tabli. Pohvaliti velja tudi to, da se vsi važnejši podatki izpišejo povečani. Še avtorjev naslov: Stane Trstenjak, Rozmanova 4, 66330 Piran.

Simon Kajtna iz OŠ A.Aškerca, Rimske Toplice je poslal dva programa, ki sta namenjena učencem nižjih razredov osnovne šole. **RAČUNANJE 1** utrjuje znanje iz seštevanja in odštevanja, **RAČUNANJE 2** pa preverja znanje množenja in deljenja števil do 100. Programa odlikuje velikost števil, s katerimi izpisuje račune. Učence nižjih razredov verjetno pritegne tudi to, da jih računalnik ogovarja po imenu, ki ga vnesejo na začetku programa. Škoda pa, da program ne izpisuje različnih komentarjev, se ne šali z uporabnikom ... Pri programih take vrste moramo namreč paziti na čim večjo različnost 'dodatkov', saj je program namenjen samostojnemu utrjevanju znanja, ki pa brez primerne spodbude kaj kmalu postane dolgočasno.

Naslov: Simon Kajtna, Trsteniška ulica 3, 63272 Rimske Toplice.

Brane Lužar je poslal tri programe. Vsi so pisani v Basicu, kar omogoča enostavne spremembe in prilagoditve programa. Programi so zelo skrbno grafično opremljeni, od uporabe šumnikov, ki je v šolskih programih nujna, do risb, ki popestrijo razlago.

VOLUMEN je program, ki naj bi učenca petega razreda naučil računanja prostornine kocke in kvadra. Namenjen je samostojnemu delu učencev, saj je opremljen z razlago, ki jo spremljajo tudi slike. Razlagi sledijo primeri, na koncu pa je test, ki je namenjen preverjanju naučenega znanja.

Tudi program **MNOŽIL** je sestavljen na enak način : iz razlage, primerov in testa. Tema je množenje ulomkov. Tako kot pri prvem programu je tudi tu veliko pozornosti posvečeno lepemu in preglednemu izpisu. Ulomki se izpisujejo v običajnem, nelinearnem, zapisu, tako da uporaba računalniškega zapisa ne moti uporabnika.

Programa lahko uspešno nadomestita razlago učitelja, ki se na ta način lahko bolj posveti posameznemu učencu. Zato je smiselna uporaba gesla na začetku, ki omogoča, da vsi prično z delom istočasno. Računalnik zahteva geslo tudi na koncu, zato da si učitelj lahko ogleda rezultate testa.

Naslov: Lužar Brane, Preserje 3, 61352 Preserje pod Krimom.

Prav posebno pohvalo pa zasluži zadnji program, ki ga bomo predstavili v tej številki. Da bi olajšal izvedbo občinskega tekmovanja za Vegova priznanja, je učenec 8.r OŠ Danile Kumar iz Ljubljane, **Milan Hudnik** naredil

program za urejanje rezultatov tekmovanj in izpis teh na tiskalnik. Program URTEK (urejevalnik rezultatov tekmovanj) je uporaben za spremljanje poljubnega tekmovanja. Delo z njim je enostavno, poteka preko menujev. Omogoča vnos in izpis podatkov o tekmovalcih, vnos rezultatov, urejanje tekmovalcev po doseženih rezultatih, spreminjanje podatkov, izpis rezultatov, iskanje tekmovalcev, ..., skratka vse, kar mora vsebovati ta program. Glavna odlika programa pa je izredno skrbno pripravljena dokumentacija. Navodila so natančna in podrobno opisujejo vse možnosti. Prav tako je opisan način, kako program priredimo za delo z mikrotračniki.

Naslov šole: OŠ Danile Kumar, Godeževa 11, Ljubljana.

Žal zaradi rokov za oddajo gradiva ne moremo počakati, da bi dobili še več programov. Ponovimo zato še enkrat, da akcija ni končana in pričakujemo, da bo res zaživela v tem šolskem letu. To pa je odvisno, dragi bralci, predvsem od vašega odziva.

Vsem avtorjem predstavljenih se zahvaljujemo za sodelovanje. Za njihov trud jih bomo nagradili s knjigo B. Moharja in E. Zakrajška: Programski jezik Pascal, Milana Hudnika pa z zbirko Razumljivo in preprosto z osebnim računalnikom.

Matija Lokar

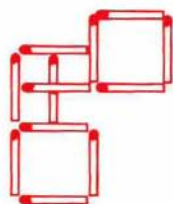
PRESEK — LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
14. letnik, šolsko leto 1986/87, številka 1, strani 1 — 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Andrej Čadež (astronomija), Martin Čopič, Bojan Golli (tekmovanja — naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Bojan Mohar (matematika), Andrej Kmet, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Sandi Klavžar in Matija Lokar (računalništvo), Gorazd Lešnjak (tekmovanja — naloge iz matematike), Andrej Likar (Presekova knjižnica — fizika), Franci Oblak, Peter Petek (glavni urednik, naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Pisanski, Tomaž Skulj, Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

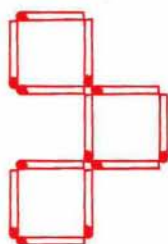
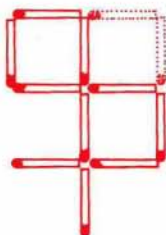
Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1986/87 je za posamezna naročila 1000.— din, za skupinska naročila pa 800.— din, posamezna številka 250.— din/200.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1986 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 800

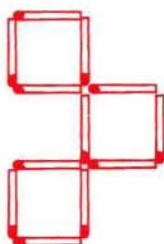
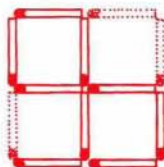
33



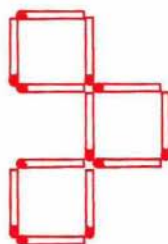
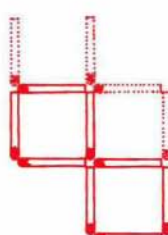
34 a



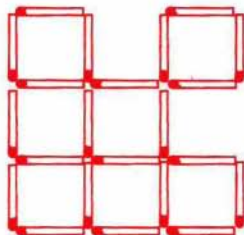
b



c



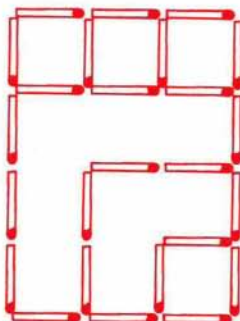
35



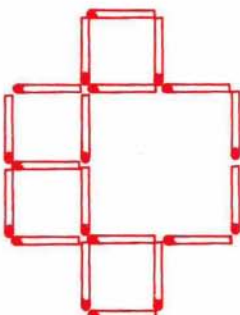
36



37



38



KRATKOČASNE VŽIGALICE – rešitve

3

TOMOGRAFIJA S POZITRONSKIMI SEVALCI

Slika 3. Standardna naprava PET za slikanje možgan. Scintilacijski števeci so razporejeni po obodu kroga.

Slika 5. Slika PET prereza možgan, na kateri je viden tumor. Ta slika in slika 3 sta vzeti iz članka M.M. Ter-Pogossian, M.E. Raichle, B.E. Sobel, *Positron-emission tomography*, Scientific American 243 (1980) 141 (4).

5a

5b

