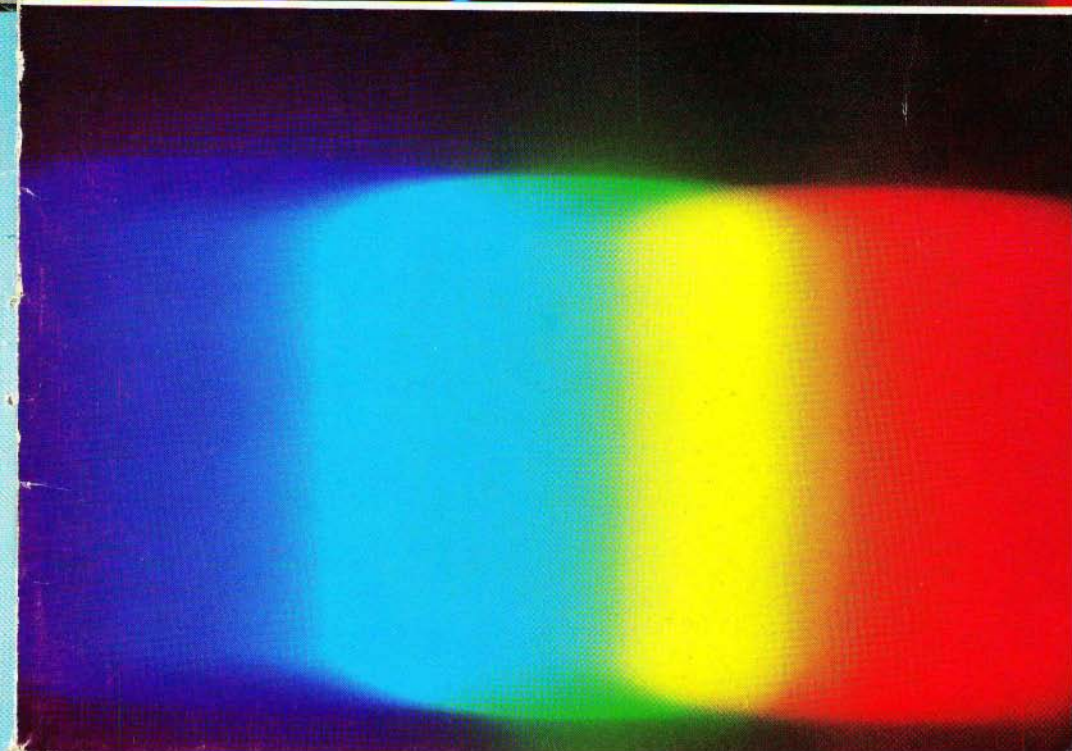


DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 13, 1985-86,

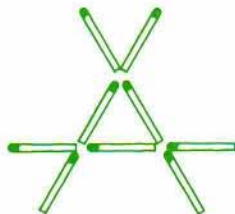
PRESEK

6

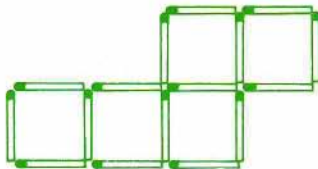


KRATKOČASNE VŽIGALICE

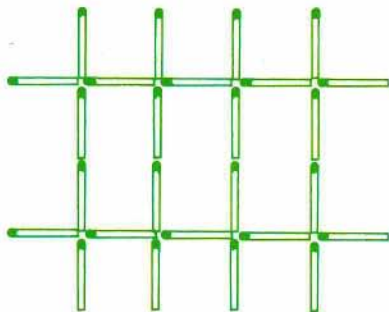
27. Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 5 trikotnikov!



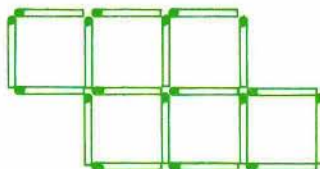
30. Prestavi 2 vžigalici, da dobiš 4 enake kvadrate!



28. Prestavi 12 vžigalic, da dobiš 3 kvadrate!

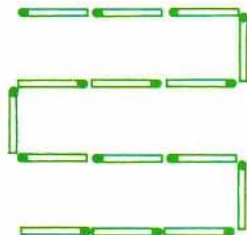


31. Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 3 kvadrate in 4 pravokotnike!

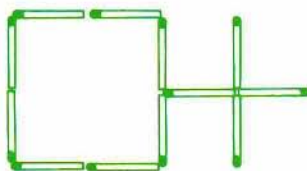


29. Sestavi 2 kvadrata, tako da pre-
makneš:

- a) 4 vžigalice,
- b) 5 vžigalic!



32. Prestavi 5 vžigalic, da dobiš 3 enake kvadrate!



V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

VSEBINA

FIZIKA	O spektrih (Janez Strnad)	322
RAZVEDRILO	BISTROVIDEC — Obhodi (Vladimir Batagelj) . . .	334
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	
	— Kratkočasne vžigalice — rešitve str. III	
	(Roman Rojko)	II
	ANEKDOTE — Neumni znanstvenik (Izbrala	
	Dušica Boben)	336
	ŠTEVILSKA KRIŽANKA — Pitagorov izrek —	
	rešitev str. 352 (Franci Oblak)	336
	NATEČAJI — 16. mednarodna fizikalna	
	olimpiada (Izbral Ciril Velkovrh)	341, 351
RAČUNALNIŠTVO	Program za risanje — Melbourne draw	
	(Vladimir Batagelj, foto Marjan Smerke) . .	IV, 338
TEKMOVANJA	26. mednarodna matematična olimpiada —	
	rešitev 4. naloge str. 350 (Roman Drnovšek) .	342
NOVICE	Letna matematična šola (Peter Anastasov)	344
MATEMATIKA	Prijateljska števila (Jože Grasselli)	346
REŠITVE NALOG	ŠTEVILSKA KRIŽANKA — Številski izrazi in	
	enačbe — rešitev iz P XIII/4 (Franci Oblak) .	352
NA OVITKU	Črtasti spekter vodika z vijoličnima (410 nm	
	in 434 nm), modro (488 nm) in rdečo črto	
	(656 nm) (zgoraj) in zvezni spekter žarnice s	
	kovinsko nitko (spodaj). Spektralno cevko z	
	vodikom, skozi katero je visoka napetost	
	poganjala električni tok, in žarnico pro-	
	jekcijskega aparata smo fotografirali skozi	
	uklonsko mrežico s 570 režami na milimeter.	
	Pri zveznem spektru moti neenakomerna	
	občutljivost barvnega filma. (Foto Marjan	
	Smerke) Glej članek na str. 322	I

O SPEKTRIJI

Dvogovor med piscem in članom uredniškega odbora — namesto uvoda

Bralci Preseka naj ne mislijo, da se pisec usede, napiše prispevek, ga odda in je zanj s tem zadeva opravljena. Rokopis gre skozi roke področnega urednika, odgovornega urednika in o njem razpravlja še uredniški odbor. Na vsakem izmed teh korakov se lahko porodijo pripombe in spreminjevalni predlogi. Ta misli, da bi bilo treba kaj povedati preprosteje, oni, da bi kazalo kaj spustiti ali dodati. Včasih posluša pisec pripombe tudi še po izidu prispevka. Naslednji dvogovor med piscem in članom uredniškega odbora ni izmišljen.

Pisec: Članek ob stoletnici Balmerjeve enačbe nekaterim članom uredniškega odbora Preseka menda ni bil pogodu?

Član uredniškega odbora: Zdel se je prezahteven za osnovnošolce, ki sestavljajo večino naših bralcev.

P: Mislim sem, da je posebno primeren za osnovnošolce. Johann Jakob Balmer je potreboval samo množenje in deljenje — s fiziko se sicer sploh ni ukvarjal —, da je odkril enačbo za valovno dolžino vodikovih spektralnih črt. To enačbo je uporabil Niels Bohr kot temelj, na katerem je začel graditi novo — kvantno — mehaniko.

Fizika bi brez merjenja in računanja shirala. Fiziki se ne bi mogli pogovarjati o tem, "zakaj ptice letajo in zakaj je nebo modro", če se ne bi prej z merjenjem in računanjem dokopali do zakonov za gibanje teles po zraku in za sipanje svetlobe.

Kaj imajo matematične naravoslovne teorije, kar jim omogoči, da pogosto uspešno napovedo izkustvene novosti? Tega ne zmorejo ne pesniki ne astrologi ne vedeževalci ne biologi ne sociologi ne tisti naravoslovci, ki se sklicujejo zgolj na izkušnje. Matematične teorije morajo biti v nekem posebnem odnosu z resničnostjo, ki jim omogoča uspešne napovedi, in izredno zanimivo se je vprašati, kakšen je ta odnos ...

"Število je vse," je dejal Pitagora pred dvema tisočletjema. To razumsko

trditev so podprli Platon, Galilei, Descartes, Spinoza in Newton, če naštejemo le najznamenitejše.

H.J. Robinson, *A theorist's philosophy of science* (Teoretikova filozofija naravoslovja), *Physics Today* 37 (1984) 24 (3)

Ali ne sme Presek poudarjati tudi tega kvantitativnega pogleda v fiziki, če ga že v vsakdanjem življenju mnogi odklanjajo?

Postali bodo znani sociologi in politologi, čeprav so izrazito alergični na števila. Trpijo za "dismetrijo" – kot večina Američanov.

S.L. Glashow, *Science education and US technology*
(Pouk naravoslovja in ameriška tehnika),
Physics Today 36 (1983) 9 (4)

U: Kot matematik imam nasploh računanje rad. Članek se ni zdel prezahteven zaradi računanja, ampak po fizikalni strani. Ali se naučijo osnovnošolci v sedmem in osmem razredu, kaj je spekter?

P: Odleglo mi je, ker Presek ne preganja kvantitativnega pogleda nasploh. Obljubim, da bom poskusil napisati kaj o spektrih, kar bodo lahko razumeli tudi osnovnošolci.

Če lahko merite to, o čemer govorite, in izrazite s števili, veste nekaj o tem. Toda če tega ne morete meriti in izraziti s števili, je vaše znanje pičlo in nezadovoljivo. Morda je začetek znanja, toda v svojih mislih niste napredovali do stopnje znanosti.

Lord Kelvin, *Popular lectures and addresses* (Popularna predavanja in nagovori), McMillan, London 1891

Toda, seveda, kvantitativni pogled ni edini.

Rad povem svojo domislico, da so v svetu človeške misli nasploh in v fizikalni znanosti še posebej najplodovitejši tisti pojmi, ki jim je nemogoče pripeti določen pomen.

H.A. Kramers, *Physical science and human values*
(Fizikalna znanost in človeške vrednote),
University Press, Princeton, N.J. 1947

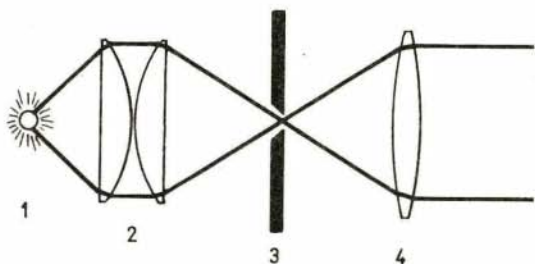
Obljuba dela dolg. Toda eno je imeti dober namen, drugo pa preprosto pojasniti, kaj je spekter. To zagotovo ni lahek pojem, čeprav ga v fiziki pogosto uporabljamo. Še pri fiziki v prvem letniku na univerzi marsikateri študent zajecija, ko ga vprašate, kako je s to zadevo. Ne osnovna ne srednja ne visoka šola te ne prisilijo, če izvamemo naravoslovno—matematično usmeritev in študij matematike ali fizike, da bi v podrobnostih razumel, kaj je spekter. Veliko ljudi tega znanja sploh ne pogreša.

Tukaj pa vzemimo, da pritegne "spekter" tako ali drugače pozornost mladega bralca in da le—ta želi izvedeti, za kaj gre.

Črtasti spekter

Začnimo z vodikovim spektrom, ki ga je obravnaval sestavek *Stoletnica Balmerjeve enačbe* (Presek 12 (1984/85), str. 103). Vzemimo cevko z vodikom pri znižanem tlaku in jo priključimo na visoko izmenično napetost, ki požene po njej spremenljiv tok. Plin zasveti v rdečkasti svetlobi. Poglejmo cevko skozi uklonsko mrežico. Vidimo štiri svetle spektralne črte. Najmanj sta odklonjeni vijolični črti, bolj je odklonjena modra črta in najbolj rdeča črta (slika na naslovni strani). Tudi v svetlobi drugih plinov opazimo svetle črte, le da jih je več ali manj, so drugih barv in drugače razporejene. Pravimo, da so za svetlobo, ki jo sevajo plini, značilni *črtasti spektri* (spectrum, latinsko: podoba, predstava). S tem mislimo na vidno sliko, ki jo dobimo, ko opazujemo sevajoči plin skozi uklonsko mrežico. Uklonska mrežica razstavi svetlobo na barve, bolj učeno: na sestavine z določeno valovno dolžino. Na temnem ozadju vidimo svetle črte v izrazitih barvah.

V fiziki pogosto ne shajamo s tako sliko, ampak potrebujemo diagram s številskimi podatki, ki mu tudi pravimo spekter. Najprej določimo valovno dol-



Slika 1. Poenostavljena risba preprostega spektroskopa na prizmo: 1 svetilo, katerega spekter bi radi opazovali, leča 2 zbere svetlobo nareži 3, leča 4 naredi vzporeden curek svetlobe, ki pade na prizmo 5. Spekter opazujemo skozi daljnogled z zbiralnima lečama 6 in 7. Nakazan je potek žarkov modre (črtkano) in rdeče svetlobe (pikčasto). Razlika odklonov za modro in rdečo svetlobo je narisana pretirano.

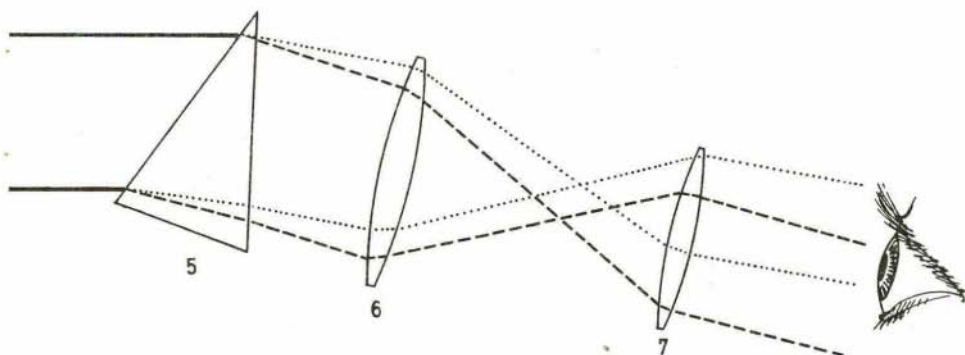
žino črt. Z nekaj truda bi lahko izmerili valovno dolžino črt v vodikovem spektru. Določiti bi morali odklon, pod katerim jih vidimo, in vedeti, koliko rež pride na milimeter v mrežnici. To pot si prihranimo računanje in kar ponovimo valovne dolžine, ki smo jih navedli zadnjič: 410,1 nm, 434,0 nm, 486,1 nm in 656,3 nm (nanometer je milijardina metra, $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$).

Za natančno merjenje bi potrebovali *spektroskop* (slika 1). Svetlobo cevke z lečo zberemo na vstopni reži. Drugo zbiralno lečo postavimo tako, da je reža v njeni goriščni ravnini. Vzporedni curek svetlobe usmerimo na uklonsko mrežico. Tej sledi še ena zbiralna leča, ki da ostro sliko na zaslonu, ali pa dve zbiralni leči, skozi kateri opazujemo kot skozi daljnogled. Pogosto pravimo, da so spektralne črte slike vstopne reže v različnih barvah. (Vodikovega spektra zaradi šibke svetlobe iz spektralne cevke ne moremo opazovati na zaslonu, ampak le z očmi neposredno ali skozi daljnogled.)

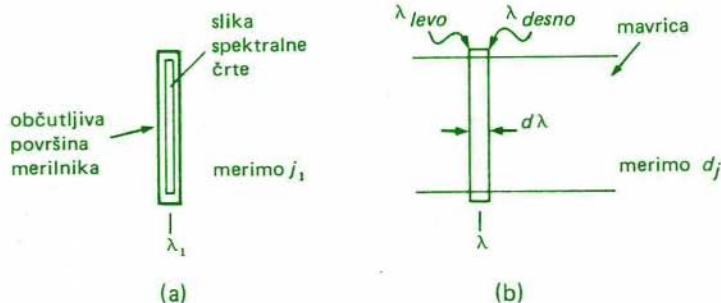
Namesto uklonske mrežice lahko uporabimo *prizmo* iz stekla. Prizma je vgrajena tudi v žepni spektroskop, ki ga uporabljamo v šoli. V tem primeru je najmanj odklonjena rdeča črta, najbolj vijolični. Valovne dolžine pa ne moremo tako preprosto izračunati kot pri mrežici.

S tem, da smo določili valovne dolžine črt, smo naredili šele prvi korak. V drugem koraku moramo izmeriti svetlobni tok ali gostoto svetlobnega toka, ki ustreza črtam. Uporabimo merilnik gostote svetlobnega toka, ki meri pri vseh valovnih dolžinah enako, na primer baterijo termoelementov. Merilnik postavimo na mesto prve črte v spektru in odčitamo gostoto svetlobnega toka. Poskrbeti moramo, da občutljiva površina merilnika v obliki ozkega pravokotnika pokrije vso črto, torej, da merilnik ni ožji kot črta (slika 2). Postopek ponovimo na kraju druge, tretje ... črte.

Narišemo diagram, v katerem nanesemo na vodoravno os valovno dolžino, na navpično os pa gostoto svetlobnega toka. Pri valovni dolžini prve črte λ_1 na-



rišemo navpično črto, katere višina ustreza gostoti svetlobnega toka v prvi črti j_1 , pri valovni dolžini druge črte λ_2 navpično črto z višino j_2 , pri valovni dolžini tretje črte λ_3 navpično črto z višino j_3 ... (slika 3).

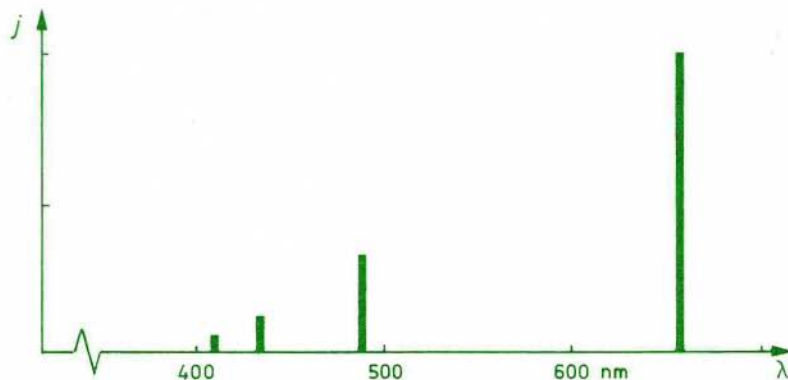


Slika 2. Merjenje gostote svetlobnega toka j_1 v črti v spektru pri valovni dolžini λ_1 (a) in dela gostote svetlobnega toka dj v zveznem spektru na pasu valovne dolžine s širino $d\lambda$ okoli valovne dolžine λ (b).

Tako narišemo tudi črtaste spektre drugih valovanj, ki jih ne moremo neposredno videti. Spektri zvoka, ki ga oddajajo glasbila, so na primer tudi črtasti.

Zvezni spektri

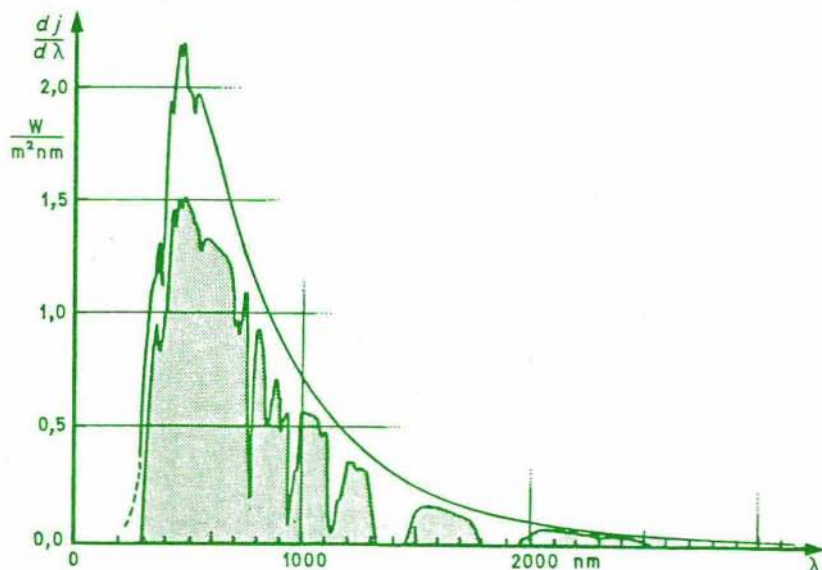
Poznamo še drugačne spektre. Kot smo opazovali spekter vodika, opazujemo zdaj spekter *bele* sončne svetlobe. Podobni so tudi spektri svetlobe, ki jo sevajo trdna telesa, na primer žareča nitka v žarnici, ali kapljevine, na primer



Slika 3. Črtasti spekter vodika na vidnem območju v diagramu

talina v plavžu. Slika, ki jo vidimo, spominja na mavrico, v katero so razvrščene mavrične barve: vijolična, modra, zelena, rumena, oranžna in rdeča (slika na naslovni strani). Zdaj ni območij brez svetlobe kot v prejšnjem primeru. Okoli vsake valovne dolžine na vidnem območju je nekaj svetlobe, zastopane so na gosto vse sestavine s tega območja. V tem primeru govorimo o *zveznem spektru*. Diagram zveznega spektra je težavneje dobiti kot diagram črtastega spektra.

Poskušajmo ravnati podobno kot pri merjenju gostote svetlobnega toka v črtastem spektru. Postavimo merilnik na določeno mesto v spektru in odčitajmo gostoto svetlobnega toka. Toda lege merilnika zdaj ne moremo določiti po zaporedni številki spektralne črte, ki je v črtastem spektru že določala valovno dolžino. Ob spekter si mislimo položeno lestvico valovnih dolžin, na kateri odčitamo valovno dolžino λ , ki ustreza sredini merilnika (slika 2b). Dobljena gostota svetlobnega toka pa je odvisna od širine občutljive površine merilnika. Tej neprijetnosti se izognemo, če izmerek za gostoto svetlobnega toka delimo s širino občutljive površine, izraženo kar s pasom valovne dolžine $d\lambda = \lambda_{desno} - \lambda_{levo}$. Za izmerek gostote svetlobnega toka zapišemo dj in damo s tem vedeti, da gre za del gostote svetlobnega toka, ki odpade na pas valovne dolžine $d\lambda$



Slika 4. Zvezni spekter sončne svetlobe v diagramu pri tleh ob pravokotnem vpadu (osenčeno) in na vrhu ozračja. Fraunhoferjeve črte so tako ozke, da jih ni mogoče vnesti na risbo. Osenčena ploščina ustreza približno gostoti svetlobnega toka 1 kW/m^2 in je pomembna za tiste, ki razmišljajo o izkoriščanju sončne energije.

okoli valovne dolžine λ . Kvociient $dj / d\lambda$ določimo na dovolj velikem številu mest, to je pri dovolj velikem številu različnih valovnih dolžin. Prikažemo ga z gladko krivuljo v diagramu, v katerem naneseemo na vodoravno os valovno dolžino λ , na navpično os pa $dj / d\lambda$ (slika 4). *

Pri zvoku dobimo zvezni spekter za šum, če na primer rečemo ššššš ali ploskamo z rokama ali strgamo list papirja. Bela svetloba ustreza torej šumu.

Emisijski in absorpcijski spektri

Doslej smo govorili le o *emisijskih spektrih*. Vselej smo razstavili na enobarvne sestavine svetlobo, ki so jo svetila neposredno izsevala. Pa spustimo belo svetlobo skozi hladen plin. V takem *absorpcijskem spektru* opazimo temne absorpcijske črte na svetlem ozadju, in to pri valovnih dolžinah, pri katerih ležijo v emisijskem spektru svetle črte.

V plinu sevajo in absorbirajo svetlobo posamični atomi. Atomi ne morejo imeti katere koli (notranje) energije, ampak samo določeno. Nemoten atom ima najnižjo mogočo energijo. Po trku z ionom ali elektronom ima lahko atom višjo energijo. Presežek energije odda v obliki sevanja z določeno valovno dolžino, ki prispeva k črti v spektru.

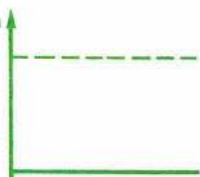
Pri trdnem telesu, segretim do določene temperature, dobimo zvezni spekter. Tako seva tudi Sonce. Čeprav je Sonce velika plinska krogla, se izsevana svetloba na poti od atomov iz globljih plasti do površja obreigne ob veliko atomov. Svetloba, ki jo vidimo, ima podoben spekter kot trdno svetilo s temperaturo sončnega površja.

Curek te bele svetlobe s sončnega površja gre na poti do nas skozi hladnejši plin v sončni atmosferi. Njena sestavina s pravo valovno dolžino λ_1 vzbudi atome, ki nato ponovno sevajo, a sevajo v vseh mogočih smereh. Zato je sevanja s to valovno dolžino v svetlobi, ki prihaja na Zemljo, manj kot pri sosednjih valovnih dolžinah, pri katerih svetloba ne vzbudi atomov. V spektru se pokaže ta primanjkljaj kot temna črta. V sončnem spektru je veliko takih ozkih *absorpcijskih črt*.

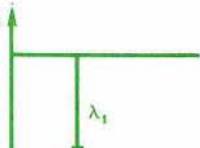
Diskretne in zvezne porazdelitve

Črtasti spektri so zgled za *diskretne* (začuda ne pravimo črtaste), zvezni spektri pa zgled za *zvezne porazdelitve*. Spekter je pač porazdelitev gostote svetlobnega toka po valovni dolžini. Morda si bodo bralci oboje lažje predstavljali po zgledih iz športa. Kot zgled za diskretno porazdelitev navedimo porazdelitev števila igralcev po številu nastopov v državni nogometni reprezentanci (slika 5).

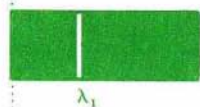
energija ↑
nemoten atom z najmanjšo energijo



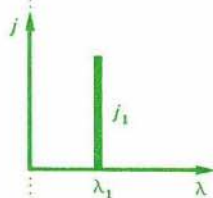
energija ↑
po trku ima atom višjo energijo, ki se je znebi s sevanjem λ_1



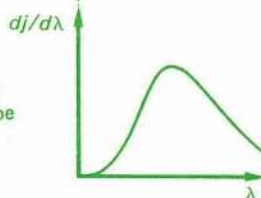
v emisijskem spektru vidimo svetlo črto



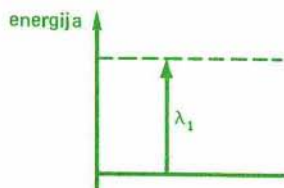
črtasti spekter



zvezni spekter sončne svetlobe

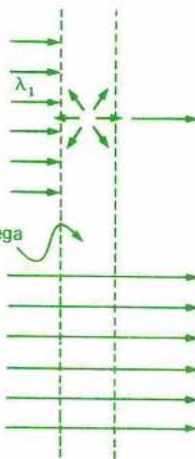


energija ↑
 λ_1

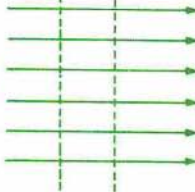


atomi absorbirajo svetlobo z valovno dolžino λ_1 in nato sevajo na vse strani

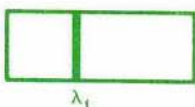
plast hladnejšega plina



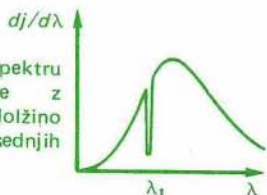
atomi ne absorbirajo svetlobe s to valovno dolžino



v absorpcijskem spektru vidimo temno črto

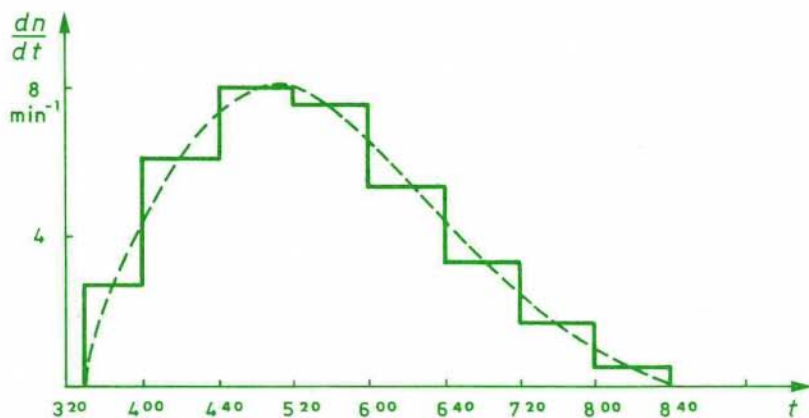
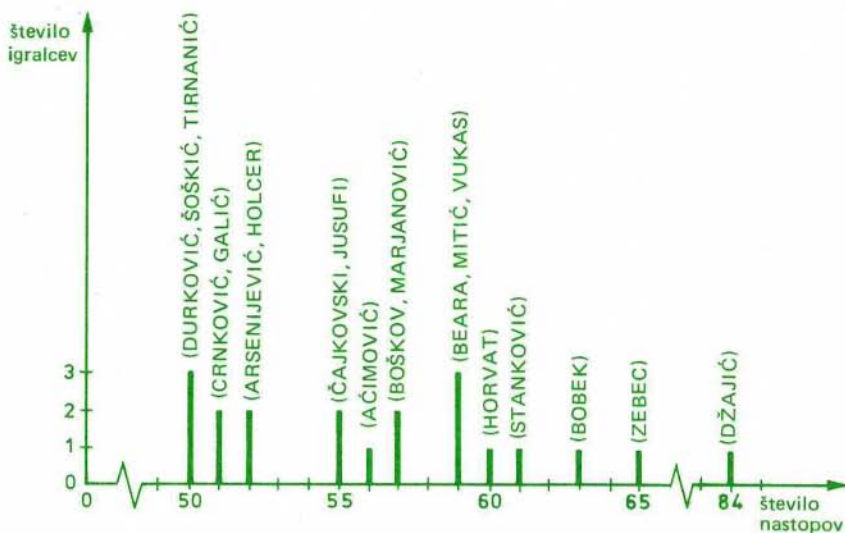


v zveznem spektru je sestavine z valovno dolžino manj kot sosednjih sestavin



* Nekateri priporočajo pisavo $\Delta\lambda$ in Δj namesto $d\lambda$ in dj , češ da sta prvi znamenji bolj domači od drugih. Ali ni izbira znamenj nepomembna, če se le dobro dogovorimo, kaj znamenja pomenijo in kako to izmerimo?

Slika 5. Zgled za diskretno porazdelitev: porazdelitev števila igralcev po številu nastopov v državni nogometni reprezentanci (*Almanah 1978*, Delo, Ljubljana 1979)



Slika 6. Zgled za zvezno porazdelitev: porazdelitev števila tekmovalcev po času na 150 kilometrskem kolesarskem maratonu "Franja" 27. julija 1985. Vseh 1382 moških tekmovalcev smo razvrstili na pasove s širino $dt = 40$ min in narisali stopničasti diagram, ki smo ga podali tudi z gladko krivuljo (črtkano). Če bi vzeli ožje pasove, krivulja ne bi bila tako pregledna, ker so prihajali tekmovalci na cilj v naključnih skupinah (*Horuk*, mesečna priloga Dnevnika, 12.8. 1985).

Pri tekmovanjih, pri katerih merimo čas ali razdaljo, pa se srečamo z zveznimi porazdelitvami. Na vodoravno os naneseimo na primer čas t , ga razdelimo na pasove s širino dt in preštejemo tekmovalce dn na pasu s širino dt okoli t , se pravi od $t - 1/2 dt$ do $t + 1/2 dt$. Kvociient dn/dt v odvisnosti od časa t lahko podamo z gladko krivuljo (slika 6).

Zgodovinsko ozadje

Bralci, ki bi ne razumeli vsega, naj ne bodo vznejevoljeni. V življenju pogosto pomaga, če se o težavah pogovorimo. Tedaj navadno ugotovimo, da imajo podobne težave tudi drugi. Ta način se menda obnese pri uvajanju zahtevnih pojmov v šoli. Ob spektrih za težave drugih sploh nismo v zadregi: dovolj je, če posežemo v zgodovino fizike.

Na začetku 17. stoletja se je z uvedbo daljnogleda in mikroskopa povečalo zanimanje za optiko. Isaaca Newtona je zanimalo, zakaj da daljnogled na lečo sliko z barvastimi robovi. Da bi se temu izognil, je izdelal zrcalni daljnogled. Na drugi strani pa je opazoval prehod svetlobe skozi kose stekla z nevzporednima mejnima ploskvama. Leta 1672 je prvič razstavil belo svetlobo s prizmo na spekter. Ugotovil je, da se vsaka od spektralnih barv po svoje lomi in da je ni mogoče dalje razstaviti. Naprej pa ni prišel, ker je verjel, da sestavljajo svetlobo delci, čeprav tega pogleda ni vsiljeval drugim in je celo delcem pripisal nekatere lastnosti valov.

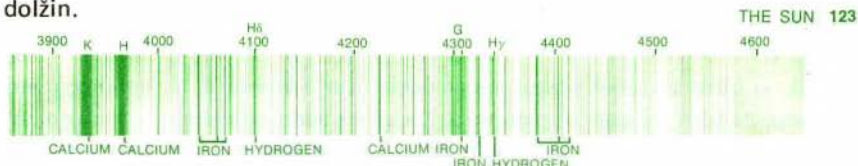
Na začetku 19. stoletja je Thomas Young povzel staro Huygensovo slutnjo, da je svetloba valovanje, ki so jo Newtonovi posnemovalci pregnali iz fizike. Svetlobo je primerjal z zvokom in barve s toni z različnimi valovnimi dolžinami. S svetlobo je ponovil za valovanje značilni poskus, ki so ga tedaj že poznali pri valovih na vodi in pri zvoku. Skozi dve ozki špranji v zaslonu je spustil enobarvno svetlobo na zaslon. Iz razmika med nastalimi svetlimi in temnimi interferenčnimi progami je ocenil valovno dolžino.

Kakor koli občudujem Newtona, me to ne obvezuje, da bi verjel v njegovo nezmotljivost. Z obžalovanjem ugotavljam, da se je tudi on lahko motil in da je njegova avtoriteta včasih morda celo zadrževala razvoj znanosti.

Th. Young

Pomemben korak naprej je naredil Joseph Fraunhofer. Z zbiralno lečo pred prizmo in daljnogledom za njo je sestavil spektroskop in z njim leta 1814 ugotovil veliko ozkih temnih črt v sončnem spektru (slika 7). Te temne črte je uporabil kot znamke v spektru in zanje mnogo natančneje premeril lom kot

Newton. Fraunhofer je nadaljeval tudi po Youngovi, ne samo po Newtonovi poti. Namesto dveh rež je v zaslon naredil veliko ozkih rež v enakem majhnem razmiku in tako izdelal uklonsko mrežico. Ko jo je uporabil namesto prizme v spektroskopu, je mogel izračunati valovno dolžino, ki je ustrezala določenemu odklonu, torej določeni barvi. Tako je postavil ob mavrico lestvico valovnih dolžin.



Slika 7. Del sončnega spektra s temnimi Fraunhoferjevimi črtami na območju valovnih dolžin od 540 nm do 610 nm, od zelenega do rdečega dela. Izrazite črte izvirajo od železa (pri 546 nm in 561 nm), skandija (565 nm) in natrija (dvojna črta pri 589 nm).

Tudi pri drugih količinah, ki se spreminjajo zvezno, na primer pri času, razdalji, temperaturi, je trajalo precej časa, preden so fiziki določili take lestvice. Obvladali so jih, ko so se navadili količino meriti in so se dogovorili za enoto. Pri tem so jim pomagale "fiksne točke", na primer tališče ledu in vrelišče vode pri temperaturi ali Fraunhoferjeve črte v sončnem spektru pri valovni dolžini svetlobe. Emisijske črte so opazili pozneje kot absorpcijske v sončnem spektru. O obojih so veliko govorili, ne da bi natančno vedeli, za kaj gre.

Fraunhofer ni imel sreče. Foucault bi bil kmalu zadel v živo, ko je nekega dne opazoval Sonce skozi prizmo in je šla svetloba skozi obločnico. Opazil je, da se je rumena črta, ki jo je ponavadi sevala obločnica, nenadoma spremenila v temno črto. Švedski fizik Andres Angstroem je tudi šel mimo odkritja, ko je zapisal, da so svetle črte kovinskih par na istem mestu kot temne črte sončnega spektra.

Slavo za izum spektralne analize sta požela Nemca Gustav Robert Kirchhoff in Robert Wilhelm Bunsen. Najprej je prvi izpopolnil spektroskop, da so lahko podrobno podali položaj črt, drugi pa iznašel gorilnik z zelo vročim plamenom. Kirchhoff je vrgel v plamen nekoliko kuhinjske soli in opazil rumeno črto. "To pomeni," je rekel, "da je rumena črta značilna za natrij." Tako je delal še naprej in naredil seznam spektrov, od katerih je bil vsak značilen za določen element. Potem je potrdil Angstroemovo ugotovitev, da se črte nekaterih kovinskih par ujemajo z nekaterimi temnimi črtami sončnega spektra. "Iz tega sklepam, da so na Soncu natrij in druge kovine. Toda zakaj so te črte temne, namesto da bi bile svetle?"

Leta 1860 je izrekel splošni zakon: "Plinska plast, skozi katero gre svetloba, preden pride do spektroskopa, absorbira sestavine, ki jih sicer sama seva."

Leto se še ni končalo, ko je Bunsen izkoristil novo odkritje. V spektru kamene soli iz rudnika v Strassfurtu je opazil nekaj zelo šibkih črt, ki jih ni bilo na seznamih. "Ker te črte ne ustrezajo nobenemu znanemu elementu," si je dejal, "kažejo na navzočnost še neznanih elementov." Skupaj s Kirchhoffom sta se lotila dela. Slednjič sta izločila dve novi kovini, ki sta ju imenovala rubidij in cezij.

Prirejeno po knjigi P. Rousseau, *Zgodovina znanosti*, DZS, Ljubljana 1955, str. 598

Pravo zvezo med emisijskimi in absorpcijskimi črtami v spektru plinov je pojasnil šele Niels Bohr leta 1913 s svojim modelom atoma (*Ob stoletnici Bohrovega rojstva*, Presek 13 (1985/86), str. 144).

Pisec ne bo zvedel, koliko bralcev je prebralo sestavek do konca, koliko si jih je prišlo na jasno o črtastih spektrih, koliko o zveznih. Zato se bo moral zanesti na razširjeno mnenje, da pomaga že pogovor o težavah.

Janez Strnad

PRESEK — LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

13. letnik, šolsko leto 1985/86, številka 6, strani 321 — 352

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Andrej Čadež (astronomija), Martin Čopič, Bojan Golli (tekmovanja — naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Bojan Mohar (matematika), Andrej Kmet, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Sandi Klavžar in Matija Lokar (računalništvo), Gorazd Lešnjak (tekmovanja — naloge iz matematike), Andrej Likar (Presekova knjižnica — fizika), Franci Oblak, Peter Petek (glavni urednik, naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Pisanski, Tomaž Skulj, Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1985/86 je za posamezna naročila 500.— din, za skupinska naročila pa 400.—, posamezna številka 125.— din/100.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

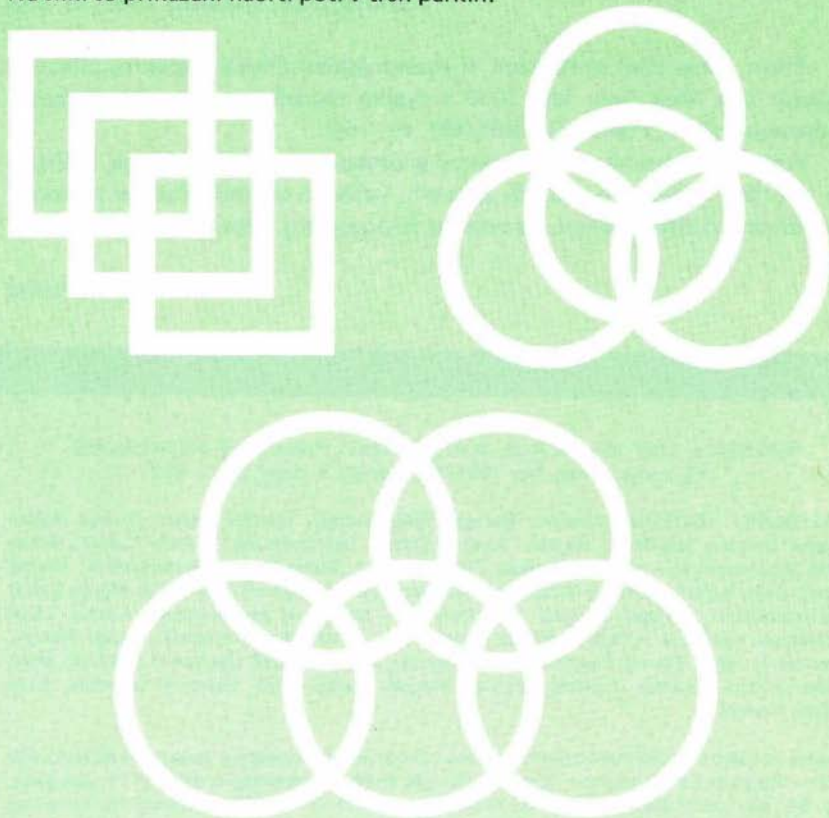
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1986 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 797

ISSN 0351—6652

OBHODI

Na sliki so prikazani načrti poti v treh parkih.



Ali bi se znali sprehoditi po posameznem parku tako, da bi šli po vsaki poti le enkrat in ne bi pri tem nikoli prečkali svoje sledi?

Vladimir Batagelj

NOVE KNJIGE

Richard Pawson, KNJIGA O ROBOTIH. — Ljubljana : ZOTKS in Mladinska knjiga, 1985

Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije je s pomočjo Mladinske knjige izdala izpopolnjen prevod knjige Richarda Pawsona KNJIGA O ROBOTIH. Knjiga z bogatim izborom fotografij in skic popelje bralca skozi zgodovino strojev — avtomatov do današnjih industrijskih robotov. Drugi del knjige je namenjen projektom, ki jih lahko sestavi bralec sam s pomočjo Lego ali Fisher sestavljanek in računalnikov Spectrum ali Commodore. Ker verjetno imajo našete pripomočke že večinoma na naših šolah, smo se za tak podvig odločili z namenom, da posodobimo izobraževalne vsebine naravoslovnih in tehničnih predmetov in vzporednih dejavnosti v prostem času — šolskih krožkih.

Knjiga bo natisnjena v nakladi 5000 izvodov, namenjena pa je mladini od 10. do 18. leta.

Da ne bi nastal vtis med mladimi, kot da se pri nas nič ne dogaja na tem področju, smo se v soglasju z angleško založbo Windward odločili, da knjigo dopolnimo s poglavjem, v katerem smo predstavili dosežke naših raziskovalcev in tehnikov. Cena knjige je v prednaročilu 3.800.— din, po izidu pa 5.500.— din. Za naročnike Preseka velja prednaročniška cena tudi po izidu.

NAROČILNICA

ZVEZA ORGANIZACIJ ZA
TEHNIČNO KULTURO SLOVENIJE
61001 Ljubljana, Lepi pot 6, pp 99
tel. št. (061) 213-743

Podpisani (priimek in ime, tiskano)

Točen naslov

Sem reden naročnik Preseka. Nepreklicno naročam KNJIGO O ROBOTIH po ceni 3800.— din. Znesek bom poravnal takoj po prejemu računa. Prosim, da mi knjigo pošljete takoj po izidu.

Kraj in datum

Podpis

		1	2	3					
		4							
		5				6	7		
		8		P		9			
	10			I			11	12	
	13		14	T	15				
16				A			17	18	
19		G	O	R	O	V	20		
T	R	I	K	O	T	N	I	K	

Izbrala Dušica Boben

Vodoravno

1. Hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama 19 in 180.
4. Diagonala pravokotnika s stranicama 172 in 129.
5. Kateta pravokotnega trikotnika s hipotenuzo 221 in kateto 220.
6. Višina enakokrakega trikotnika z osnovnico 528 in krakom 265.
8. Stranica romba z diagonalama 96 in 40.
9. Manjša osnovnica enakokrakega trapeza z večjo osnovnico 150, višino 624 in krakom 626.
10. Dolžina odseka na tangenti kroga s polmerom 5, ki gre skozi točko 13 oddaljeno od središča.
11. Razdalja 144 cm dolge tetive od središča kroga s polmerom 75 cm.
13. Osnovnica pravokotnika z diagonalo 401 in višino 40.
15. Krak enakokrakega trikotnika z osnovnico 176 in višino 234.
16. Polmer kroga, katerega odsek na tangenti od dotikališča meri 11 cm, če je točka tangente oddaljena 61 cm od središča.
17. Tretja (manjša) stranica trikotnika z osnovnico 39, višino 40 in drugo stranico 50.
19. Višina smreke, katere vrh je 73 m oddaljen od točke opazovanja, če jo opazujemo 48 m od vznožja.
20. Koliko palice, navpično potopljene v vodi, je pod gladino, če najprej gleda iznad gladine 2 cm, ko pa jo nagnemo do gladine, je konec 12 cm od točke, kjer je prej palica prebadala gladino.

Navpično

1. Krak enakokrakega trikotnika z osnovnico 480 in višino 1188.
2. Kruga kateta pravokotnega trikotnika s hipotenuzo 135 in kateto 108.
3. Hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama 1035 in 1120.
5. Razdalja središča kroga s premerom 2880 od točke, iz katere meri odsek na tangenti 2079.
7. Oddaljenost letala, če ga opazujemo 2904 m od točke, nad katero leti v višini 847 m.
10. Hipotenuza pravokotnega trikotnika, ki ima eno kateto dolgo 900, če je hipotenuza za 360 večja od druge katete.
12. Hipotenuza pravokotnega trikotnika, ki ima eno kateto dolgo 980, če je vsota hipotenuze in druge katete 1400.
14. Polmer kroga s 70 cm dolgo tetivo, ki je 84 cm oddaljena od središča.
15. Diagonala pravokotnika z obsegom 178, ki je za 32 večja od ene in za 9 od druge stranice.
18. Višina enakokrakega trapeza z obsegom 98 in osnovnicama 40 in 24.

Franci Oblak

PROGRAMI ZA RISANJE – MELBOURNE DRAW

Osební računalniki poznajo običajno dva načina risanja: **znakovno** ali **mozaično grafiko** in **pravo grafiko**.

Pri znakovni grafiki je zaslon razdeljen na mrežo znakov in sliko sestavljamo tako, da izpišemo izbrani znak na izbrano mesto v mreži. Mesto določimo v basicu s posebnimi elementi (npr. AT v,s na Spectrumu) v seznamih v stavkih PRINT. Poleg **vgrajenih** znakov lahko uporabnik definira tudi lastne, **uporabniške** znake (znaki UDG). Pri izpisu znakov jim lahko določimo še nekaj lastnosti (barva, utripanje ...).

Pri pravi grafiki je zaslon pokrit z drobnejšo mrežo in lahko določimo za vsako piko v tej mreži, ali je črna ali bela. V (Spectrumovem) basicu temu ustreza stavek PLOT, pogosto pa sta na voljo vsaj še stavka za risanje daljice in krožnice (DRAW in CIRCLE na Spectrumu). Zaradi premajhnega pomnilnika cenejši osebni računalniki ne omogočajo, da bi določili barvo posamezne pike, temveč lahko barvo črnila (črnih pik) in papirja (belih pik) ter druge lastnosti določimo le za posamezno polje v znakovni mreži.

Seveda ni potrebno poznati basic, da lahko na računalniku rišemo. Izdelanih je več programov, ki uporabniku omogočajo enostavno pripravo slik na zaslonu računalnika. Med najbolj znanimi tovrstnimi programi za računalnik Spectrum so: Melbourne draw, Paintbox, Leonardo, The artist, Lightmagic; omeniti pa je treba tudi Risarja, ki je izšel na prvi slovenski računalniški kaseti radia Študent. Za predstavitev zmožnosti programov za risanje in za vzpodbudo, da bi se tudi sami poskusili v risanju z računalnikom, si bomo v tem sestavku na kratko ogledali zmožnosti programa Melbourne draw.

Melbourne draw

Je program za Spectrum 48K, ki omogoča pripravo slik na oba načina in definicijo uporabniških znakov. Izdelal ga je Philip Mitchell.

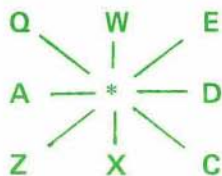
V inačici, ki kroži pri nas, je **Melbourne draw** delno poslovenjen in dopolnjen. Ko je vnesen v računalnik, izpiše glavni menu, ki pozna naslednje ukaze: **p** — oblikuj sliko; **e** — zapusti program; **s** — shrani sliko na trak; **l** — vnesi sliko s traku; **v** — preveri posnetek slike; **S** — shrani uporabniške znake na trak; **L** —

vnesi uporabniške znake s traku; **V** – preveri posnetek uporabniških znakov; **H** – navodila za risanje; **t** – shrani program na trak; **m** – shrani program na mikrotračnik.

Preden začnemo pripravljati sliko, si lahko osvežimo poznavanje ukazov z ukazom **H**. Ker program Melbourne draw nima ukazov za risanje daljic, lokov in krožnic, lahko vnaprej pripravimo osnutek risbe v basicu in ga shranimo na trak. V delovni prostor programa Melbourne draw ga vnesemo z ukazom **I**. Oblikovanje slike začnemo z ukazom **p**. Nazaj v glavni menu se vrnemo s **Cs**, **BREAK**. S **Cs**, bomo krajše označevali, da moramo hkrati s tipko, ki sledi, pritisniti še na tipko **CAPS-SHIFT**. Če nas kdaj zanese v basic, se vrnemo z ukazom **RUN**. Slike pri vračanju v glavni menu ne izgubimo.

Če začenjamo s sliko na novo, se običajno najdemo pred črnim papirjem (zaslonom). Zato najprej vtipkamo ukaz **Cs**, **R** in nato še **A**. Ukaz **Cs**, **R** omogoča brisanje posameznih sestavin slike: **P** (paper) – papir, **I** (ink) – črnilo, **B** (both) – oboje, **S** (screen) – zaslon, **A** (all) – vse, **N** (none) – nič.

Na sredi zaslona bomo opazili utripajočo piko – tečko, ki predstavlja "pero". Po zaslonu jo premikamo s tipkami in v smereh, ki so prikazane na sliki:



Tečka se lahko nahaja v štirih stanjih:

SET	– za sabo pušča sled
RESET	– za sabo briše črnilo
SKIP	– za sabo ne pušča sledi – premik
INVERT	– črne pike (črnilo), čez katere gre, predela v bele (papir) in obratno

V posamezno izmed naštetih stanj pridemo zaporedoma s tipko: **ENTER**, **O**, **SPACE** in **I**.

Z ukazom **Cs**, **G** lahko zaslon opremimo z mrežasto podlago, ki se je znebimo s ponovnim ukazom **Cs**, **G**.

Ustvarjanje zapletenih slik nam olajša ukaz **M**, ki nam prikaže povečan del

slike, kjer se nahaja tečka. Kadar delamo s povečano sliko, se lahko z ukazom **Cs, smer** sprehajamo iz enega dela slike v drugega v izbrani smeri (D,C,X,Z,A,Q,W,E). Ukaz **M** omogoča dva nivoja povečave. V obratno smer deluje ukaz **N**. Ukaz **Cs, 8** omogoča dejansko povečavo/pomanjšavo slike.

Program Melbourne draw omogoča risanje po celem zaslonu (tudi v 22. in 23. vrstici). Z ukazom **Cs, 9** lahko prestavljamo izpis stanja in sporočil iz zadnjih dveh vrstic v prvi dve in nazaj. Izpis stanja vsebuje na levi strani obvestilo o stanju (**MODE: SET, RESET, SKIP, INVERT, SCROLL**) in mestu (**X, Y**) tečke. Na desni strani pa izvemo, v katerem delu slike se nahajamo (pri povečavi), ali so vključene svetle barve in utripanje ter kakšna je trenutna barva papirja **P** in črnila **I**.

Z ukazom **Cs, K** in tipkami za premikanje tečke lahko pomikamo sliko po zaslonu (stanje **SCROLL**). Z ukazom **Cs, L** pa jo prezrcalimo.

Z ukazom **Cs, U** lahko znak, ki se nahaja v kvadratu mreže, v katerem je tečka, shranimo kot uporabniški znak.

Risbo lahko opremimo tudi z besedili. To nam omogoča ukaz **Cs, T**, ki nas prestavi v način pisanja besedil (**TEXT**). V tem načinu se sprehajamo po zaslonu s smernimi tipkami (tipke s puščicami). Ob pritisku na tipko z znakom se izpiše ustrezen znak. Z ukazom **Cs, 9** preidemo k uporabi uporabniških znakov (**GRAPHICS**) in nazaj. Pišemo lahko tudi navzgor, navzdol in nazaj. Zato moramo najprej hkrati pritisniti na **Cs** in **Ss (SYMBOL SHIFT)**. Puščica na tekočem znaku na zaslonu počrni. S pritiskom na ustrezno smerno tipko spre-

Slike so objavljene na IV. strani ovitka.

Slika 1. Presekov znak. Osnovna risba je bila narejena v basicu. V programu Melbourne draw je bila najprej (ukaza **G** in **K**) postavljena na mrežo tako, da je vsak kvadratek zahteval največ dve barvi. Ker tega ni bilo mogoče v celoti doseči, so bili potrebni manjši popravki risbe. Nato smo posamezna območja risbe napolnili s črnilom (ukaz **F**), risbo pobarvali in jo na koncu opremili še z besedilom.

Slika 2. Pitagorjev izrek. Slika prikazuje enega izmed dokazov Pitagorjevega izreka. Tudi tu je bila osnovna risba narejena v basicu in nato podobno kot presekov znak pobarvana. Črke **a, b** in **c** so bile narisane.

Slika 3. Krivulja Sierpinskega. Osnovna risba je bila narejena v logu. S programom Melbourne draw smo nato notranjost krivulje zapolnili s črnilom in jo pobarvali.

Slika 4. Iluzija. Kaj je na sliki: kvader v kotu ali kvader s kvadrastim izsekom na enem oglišču? Slika je bila v celoti pripravljena s programom Melbourne draw.

Slike na zaslonu televizorja Hitachi je fotografiral (zaslonka 8, čas 1 sek) Marjan Smerke z Agfa filmom.

nimo smer puščice (in s tem pisanja). Ta način zapustimo z ukazom **Cs, BREAK**.

Omejeno področje risbe (brez luknjic v robu), v katerem se nahaja tečka, zapolnimo s črnilom z ukazom **Cs, F**.

Barvo črnila izbiramo s pritiskom na eno izmed tipk **0 — 7**; barvo papirja (podlage) pa tako, da poleg tega pritisnemo še **Cs**. Spremembo barve roba omogoča ukaz **B**. Z ukazom **Cs, V** vključimo/izključimo utripanje; z ukazom **Cs, B** pa preklapljamo med svetlimi in običajnimi barvami.

Kot vemo, lahko na Spectrumu določamo lastnosti le za znake, ne pa tudi za posamezne pike na zaslonu. V način določanja lastnosti vstopimo z ukazom **Cs, H** in izberemo še ustrezen način premikanja **SKIP/SET** s tipko **SPACE/ENTER**. Nato se s tipkami za premikanje tečke premikamo po znakih. Če smo v načinu **SET**, dobijo znaki, čez katere gremo, trenutno veljavne lastnosti. Iz tega načina izstopimo s ponovitvijo ukaza **Cs, H**.

Priprava slike poteka običajno tako, da po potrebi v basicu ali na kakšen drug način pripravimo osnovno risbo in jo shranimo na trak. S traku jo nato vnesemo v delovni prostor programa Melbourne draw in jo dopolnimo s podrobnostmi, napisi in pobarvamo. Pri barvanju nas običajno čaka še precej dela v kvadratkih znakovne mreže, v katerih se srečata dve barvi.

Ker lahko s programom Melbourne draw rišemo tudi v zadnjih dveh vrstah zaslona, "predvajamo" na traku shranjene slike z:

LOAD " "SCREEN : PAUSE 0

S programom Melbourne draw so bile izdelane tudi slike na IV. strani ovitka. Poskusite še sami pripraviti računalniško sliko matematične ali fizikalne vsebine. Najboljše bomo radi objavili.

Vladimir Batagelj



16. mednarodna fizikalna olimpiada: Nikola Tesla — karikatura (P. Miletić)

26. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Letošnja mednarodna matematična olimpiada je potekala na *Finskem* od 1. do 10. julija. Med 39 sodelujočimi ekipami je bila tudi jugoslovanska. V njej smo bili: Roman DRNOVŠEK iz Reteč pri Škofji Loki, Sašo DŽEROSKI iz Struge pri Ohridu, Goran GOGIĆ in Marko JANKOVIĆ, oba iz Šabca, Boban NIKOLIĆ iz Niša in Mirko VOJINOVIĆ iz Pančeva. Vodja naše ekipe je bil Uroš MILUTINOVIĆ, naš predstavnik v žiriji pa Željko HANJŠ.

Pred tekmovanjem smo imeli enotedenske priprave v Zagrebu. Vodili so jih profesorji matematike in bivši tekmovalci, sedaj študenti ali asistenti na matematični fakulteti. Stanovali smo v Pionirskem gradu izven mesta, kjer smo lahko v miru reševali naloge, počivali, igrali šah in košarko.

1. julija smo z letalom preko *Kopenhavna* prispeli v *Helsinki*. Olimpiada tokrat ni potekala v glavnem mestu, pač pa v približno 200 km oddaljenem kraju *Joutsa*. Nastanili so nas ob jezeru v hotelu Rantasipi. Tam smo imeli dobre možnosti za različne oblike rekreacije. Tako smo igrali tenis, badminton, odbojko, šahirali, veslali po jezeru, izkazali smo se tudi kot izredni ljubitelji malega golfa. Vendar prav veliko prostega časa nismo imeli, saj smo poleg dnevnega tekmovanja imeli zelo natrpan program. Ogledali smo si mesto *Jyväskylä*, kjer živi svetovni prvak v smučarskih poletih *Matti Nykänen*, in mesto *Lahti*, kjer so po vsem svetu znane smučarske skakalnice. Obiskali smo tudi vas *Vaihela*, kjer smo se seznanili s finskimi vaškimi običaji.

Organizacija tekmovanja je bila zares odlična, kar pa je bilo tudi pričakova-



ti, saj so že pred dvema letoma na MMO v *Parizu* ekipam razdelili reklamne prospekte o Finski.

Slovesna otvoritev tekmovanja je bila 3. julija, tekmovanje pa je potekalo 4. in 5. julija v šolskem centru v *Joutsu*. Vsak dan smo imeli štiri ure in pol časa za reševanje treh nalog. Po tekmovanju je žirija pregledala in ocenila naše rešitve.

9. julija smo se preselili v *Helsinki*, kjer je naslednji dan potekalo zadnje dejanje letošnje olimpiade — zaključek tekmovanja s podelitvijo nagrad. Najbolje so se odrezali tekmovalci iz *Romunije, ZDA, Madžarske in Bolgarije*. Naša ekipa je bila letos nekoliko slabša kot prejšnja leta. Tretji nagradi sva osvojila *Roman Drnovšek in Sašo Džeroski*.

11. julija smo tako kot večina ekip odpotovali domov.

Na tekmovanju smo reševali naslednje naloge:

1. Krožnica ima središče na stranici AB tetivnega štirikotnika $ABCD$. Ostale tri stranice se dotikajo te krožnice. Dokaži, da velja

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$$

2. Naj bosta n in k tuji si števili, $1 \leq k < n$ in $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Vsak element množice M je pobarvan z belo ali modro barvo. Pri tem velja:

(1) za vsak i iz M sta števili i in $(n-i)$ iste barve;

(2) za vsak i iz M , $i \neq k$, sta števili i in $|i-k|$ iste barve.

Dokaži, da so vsi elementi množice M iste barve.

3. Za poljuben polinom P s celoštevilskimi koeficienti naj bo $w(P)$ število koeficientov, ki so liha števila. Za vsako nenegativno celo število i naj bo $Q_i(x) = (1+x)^i$. Dokaži, da za vsak končni nabor celih števil $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ velja:

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1})$$

4. V množici M je 1985 različnih naravnih števil, od katerih nobeno ni deljivo s praštevilom, večjim od 26. Dokaži, da so v množici M takšna štiri števila, da je njihov produkt četrta potenca naravnega števila.

5. Dana sta trikotnik ABC in krožnica s središčem v točki O , ki poteka skozi oglišči A in C ter zopet seka stranico AB v točki K , stranico BC pa v N ($N \neq K$). Opisani krožnici trikotnikov ABC in KBN se sekata v B in M . Dokaži, da je kot $\sphericalangle OMB$ pravi.

6. Za vsako realno število x_1 definiramo zaporedje $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ s formulo $x_{n+1} = x_n(x_n + 1/n)$ za vsak $n \geq 1$. Dokaži, da obstaja natanko eno število x_1 , za katerega velja:

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1 \quad \text{za vsak } n \geq 1$$

LETNA MATEMATIČNA ŠOLA

Letos so zagnani matematiki iz Valjeva pod vodstvom prof. Vojislava Andrića že petič zapored organizirali letno matematično šolo. Le-ta je potekala v Pečki, vasici, ki je približno 50 km oddaljena od Valjeva.

Šola sama je bila razdeljena v dve izmeni. V prvi so sodelovali učenci od 4. do 7. razreda osnovne šole, v drugi pa osmošolci in dijaki prvih treh razredov srednje šole. V prvi izmeni Slovenci nismo imeli svojega predstavnika, zato pa nas je bilo toliko več v drugi.

Druga izmena je potekala od 18. do 28. julija 1985. Iz Slovenije smo se je udeležili naslednji učenci:

Kristina Gabrovšek iz 8. razreda OŠ,
Andrej Fajfar iz 1. razreda,
Jure Bajc, Mateja Šajna in Peter Anastasov iz 2. razreda ter
Matjaž Željko iz 3. razreda srednje šole.

Vsi udeleženci, predavatelji in poslušalci, smo prebivali v OŠ Čeda Milosavljević v Pecki. Tam smo spali, jedli, poslušali predavanja in se med seboj družili.

Predavanja smo poslušali vsako dopoldne po štiri ure. Predavali so nam profesorji z beogradske univerze, od katerih so nekateri kot dijaki tudi sami dokaj uspešno sodelovali na matematičnih tekmovanjih. Na sporedu je bilo precej različnih tem, kajti predavanja so bila razdeljena po razredih. Mislim, da je bila ta odločitev organizatorjev zelo pametna, saj bi drugače težko uresničili težavnostno stopnjo za vse udeležence.

Teme najbolj zanimivih predavanj so bile:

- a) DIFERENČNE ENAČBE; predavatelj prof. Vladimir Janković,
- b) KOMBINATORNA GEOMETRIJA; predavatelj prof. Predrag Tanović,
- c) FUNKCIJA "CELI DEL"; predavatelj prof. Arif Zolić,
- d) NEENAKOSTI; predavatelj prof. Vojislav Andrić.

Vsem udeležencem šole pa je bilo namenjeno posebno predavanje – pregled nalog z letošnje mednarodne matematične olimpiade. Predaval nam je njen udeleženec, tretješolec Marko Janković.

Preostali čas dneva smo imeli prosto. Izkoristili smo ga na različne načine. Na razpolago smo imeli nekaj hišnih računalnikov, kino, bazen, odbojgarsko in košarkarsko igrišče. Vendar pa se nismo samo rekreirali, smo tudi tekmovali. V košarki je bila najboljša ekipa profesorjev, v šahu pa je slavil avtor tehle vrstic.

Po večerji — hrana je bila tipično srbska, začinjena, kajpak s kajmakom, kar je bilo še posebej všeč Matjažu — se je življenje "premaknilo" v pritličje, kjer so prebivala dekleta. Tam smo klepetali in kartali; enkrat pa je "tradicijo" prekinil Jure in svojim srbskim vrstnicam pripravil mali recital Prešernovih Poezij. Seveda je požel obilen aplavz.

Teh deset dni je kar prehitro minilo in marsikomu je bilo malce žal ločitve od novih prijateljev. Zadnji dan nam je organizator pripravil še posebno presenečenje — vsakdo je prejel glasilo, kjer so bili napisani vsi naslovi udeležencev, skupinsko fotografijo in spominsko majico. Večina udeležencev je menila, da je šola lepo uspela in da bi morala biti to vzpodbuda organizatorjem, da bi ostali zvesti tradiciji in čez leto dni ponovno organizirali tako srečanje mladih matematikov.

Preden končam, naj zagrizenim reševalcem problemov posredujem še nekaj nalog, ki smo jih reševali v Pecki:

1. Nad stranicami trikotnika ABC so z zunanje strani konstruirani enakostranični trikotniki BCA' , $CB'A$ in BAC' . Dokaži, da se premice (A,A') , (B,B') in (C,C') sekajo v isti točki.
2. Dana je kocka $ABCDEFGH$. Oglišči kocke sta sosednji, če ju veže skupni rob. V oglišču A se nahaja bolha. Le—ta lahko skoči iz poljubnega oglišča v poljubno sosednje oglišče. Na koliko načinov se lahko vrne v oglišče A po n skokih?
3. Naj točka O leži v ravnini trikotnika ABC . Z A' , B' in C' označimo točke, v katerih premice (A, O) , (B, O) in (C, O) zaporedoma sekajo premice (B, C) , (C, A) in (A, B) . Dokaži, da velja

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

4. Na ravnini leži $2n$ belih in $2m$ črnih točk, od katerih nobene tri niso kolinearne. Dokaži, da obstaja premica, na kateri ne leži nobena od teh točk, in da vsak breg te premice vsebuje n belih in m črnih točk.

Peter Anastasov

PRIJATELJSKA ŠTEVILA

Zgodba o prijateljskih številih se začne v davnini, nadaljuje se skozi čase do današnjega dne in še nima konca.

Obnovimo nekaj odlomkov iz te zgodbe.

Začelo se je z nekakšno igro. Z njo so se kratkočasil nekdanji ljubitelji števil. Igra se je odvijala v treh korakih:

1. Izberi naravno število a , večja od 1.
2. Poišči številu a vse prave delitelje. (To so pozitivni delitelji števila a , manjši od a .)
3. Izračunaj vsoto $S(a)$ vseh pravih deliteljev števila a .

Za $a = 10$ poteka igra takole. Vsi pozitivni delitelji za 10 so 1, 2, 5, 10. Vsi pravi delitelji so potem 1, 2, 5 in $S(10) = 1 + 2 + 5 = 8$.

Če je a majhen, se igra hitro izteče. Pri velikih a pa je igra dolgotrajna. Lahko se celo zgodi, da igre kdaj ne moremo pripeljati do konca, kajti za velik a ni preprosta stvar najti vse prave delitelje.

Izračunajmo $S(220)$ in $S(284)$. Vsi pravi delitelji za 220 so

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

za 284 pa

1, 2, 4, 71, 142

Ko jih seštejemo, dobimo

$$S(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$S(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Vidimo, da sta si števili 220 in 284 nekako vzajemni: vsota pravih deliteljev za 220 je 284, za 284 pa 220. To so opazili že stari Grki. Zaradi te lastnosti sta se jim zdeli števili 220 in 284 posebej imenitni in so ju imenovali prijateljski.

Naravni števili a, b sta torej prijateljski, če izpolnjujeta zahteve:

$$a > 1, b > 1; \quad a \neq b; \quad S(a) = b, S(b) = a \quad (1)$$

Nekateri domnevajo, da je prijateljski par 220, 284 našel Pitagora. Če to drži, je bil začetek prijateljskih števil pred dobrimi 2500 leti.

Drugi spet mislijo, da so za prijateljski par 220, 284 vedeli vsaj 500 let pred Pitagoro. V tem primeru se je začela zgodba o prijateljskih številih pred več kot 3000 leti.

Najstarejši poznani dokument, ki omenja prijateljska števila, je neko poročilo o Pitagori in pitagorejcih. Napisal ga je sirski filozof Jamblihios (283? – 330). Jamblihios pripoveduje, da so Pitagoro nekoč vprašali, kaj je prijatelj. Po pitagorejskih nazorih naj bi se vse dalo razložiti z naravnimi števili. V takšnem smislu je Pitagora tudi odgovoril: "Prijatelj je drugi jaz, kakor 220 in 284." Od tod naj bi izviralo ime za prijateljska števila.

Dolgo sta bili 220, 284 edini znani prijateljski števili. Seveda se je zastavljalo vprašanje, ali je še kaj takih števil. To vprašanje je mogoče reševati na razne načine.

Najprej bi lahko na slepo izbirali pare naravnih števil in preverjali, ali je par prijateljski ali ne. Malo je upanja, da bi pri takem ravnanju prišli do kakšnega prijateljskega para.

Potem bi mogli spreminjati a po vseh naravnih številih od 2 do danega naravnega števila c . Če bi vsakokrat izračunali vsoto pravih deliteljev $S(a)$, bi dobljena preglednica za $S(a)$ pokazala vse pare prijateljskih števil, ki ne presegajo števila c . Ta način bi bil sicer izčrpen, je pa zamuden in nezanimiv. Saj gre za preskušanje vseh parov naravnih števil od 2 do c .

Obstajajo tudi bolj načrtni načini za iskanje prijateljskih števil. Podani so navadno v obliki pravil. Kako se do takih pravil pride, ne bomo opisovali.

Prvo tako pravilo je postavil zdravnik, astronom in matematik Thabit ibn Kurrah (836 – 901) iz Bagdada. Njegovo pravilo se glasi:

Naj bo n naravno število, večje ali enako 2. Če so

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^n - 1, \quad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 \quad (2)$$

praštevila, sta

$$a = 2^n p q, \quad b = 2^n r \quad (3)$$

prijateljski števili.

Thabitovo pravilo je na videz preprosto. Ko ga uporabljamo, pa naletimo

na težave. Ni namreč lahko ugotoviti, pri katerih n so p, q, r iz (2) praštevila.
Za $n = 2$ pride iz (2)

$$p = 3 \cdot 2 - 1 = 5, \quad q = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11, \quad r = 9 \cdot 2^3 - 1 = 71$$

To so sama praštevila. Zato sta po (3)

$$a = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220, \quad b = 2^2 \cdot 71 = 284 \quad (4)$$

prijateljski števili. Prišli smo do para, ki ga že poznamo.

Ne ve se, ali je Thabit svoje pravilo uporabil še v kakšnem drugem primeru razen za $n = 2$.

Če vzamemo $n = 3$, je po (2)

$$p = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11, \quad q = 3 \cdot 2^3 - 1 = 23, \quad r = 9 \cdot 2^5 - 1 = 287 = 7 \cdot 41$$

Ker r ni praštevilo, iz (3) sedaj ne dobimo prijateljskega para.

Pri $n = 4$, najdemo iz (2)

$$p = 3 \cdot 2^3 - 1 = 23, \quad q = 3 \cdot 2^4 - 1 = 47, \quad r = 9 \cdot 2^7 - 1 = 1151$$

Ker so to praštevila, je po (3) par

$$a = 2^4 \cdot 23 \cdot 47 = 12\,796, \quad b = 2^4 \cdot 1151 = 18\,416 \quad (5)$$

prijateljski.

Podobno za $n = 7$ iz (2) dobimo

$$p = 3 \cdot 2^6 - 1 = 191, \quad q = 3 \cdot 2^7 - 1 = 383, \quad r = 9 \cdot 2^{13} - 1 = 73\,727$$

Da sta prvi dve števili praštevili, se hitro preveri. Malo težje je ugotoviti, da je tudi tretje število praštevilo. Ko se o tem prepričamo, dajeta obrazca (3) prijateljski par

$$a = 2^7 \cdot 191 \cdot 383 = 9\,363\,584, \quad b = 2^7 \cdot 73\,727 = 9\,437\,056 \quad (6)$$

Nedavno so dognali, da so (4), (5), (6) edini pari prijateljskih števil, ki se dobe iz Thabitovega pravila, ko se n spreminja od 2 do 20 000.

V Evropi je zaživelo zanimanje za prijateljska števila v sedemnajstem stoletju. Takrat je bilo Thabitovo pravilo že davno pozabljeno, če so zanj tu sploh

kdaj vedeli. Pierre Fermat (1601 – 1665) in René Descartes (1596 – 1650) sta Thabitovo pravilo vsak zase na novo odkrila. Fermat je z njim prišel leta 1636 do prijateljskega para (5), Descartes pa nekoliko pozneje do para (6). Ibn al Banna iz Maroka navaja v svojih spisih par (5) že okrog leta 1300. Vendar so to opazili šele pred kratkim.

Ko je nastopil Leonhard Euler (1707 – 1783), so bili poznani trije prijateljski pari, namreč (4), (5) in (6). Te pare sestavljajo sama soda števila. Euler je izpeljal več pravil, ki jih je uporabil pri iskanju prijateljskih števil. S temi pravili je našel 59 novih parov. Med pari, ki jih je odkril, so tudi nekateri pari lihih prijateljskih števil. Eden takih parov je

$$a = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 = 67\,095, \quad b = 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 = 71\,145 \quad (7)$$

V devetnajstem stoletju se seznam prijateljskih števil ni dosti razširil, saj so našli le štiri nove pare. Do leta 1945 pa se je vsega nabralo 200 prijateljskih parov.

Precej pa je seznam narastel v zadnjih štiridesetih letih. Izboljšali so se namreč kriteriji za praštevila. Nadalje so k temu pripomogla nova pravila za iskanje prijateljskih števil, ki so se pridružila Thabitovemu in Eulerjevemu pravilu. Važno vlogo so imeli tudi računalniki, saj si z njimi pomagajo pri preskušanju pravil. Tako je sedaj najdenih vsega nekaj nad 1130 parov prijateljskih števil. Med temi pari so pravi velikani: npr. prijateljski par, ki ga sestavljata števili, vsako s 152 mesti v desetiškem zapisu.

Ko si ogledujemo seznam prijateljskih števil, vzbujajo pozornost nekatere posebnosti. Omenimo jih nekaj.

Vsi do sedaj znani pari prijateljskih števil so taki, da sta obe števili istega para ali sodi ali lihi. Ali je kakšen prijateljski par, v katerem je eno število sodo, drugo liho?

Lihi števili, ki nastopata v prijateljskem paru (7), nista tuji. To velja za vse znane lihe prijateljske pare. Ali obstaja kakšen lihi prijateljski par s tujima si številoma?

Pri vseh znanih lihih prijateljskih parih sta števili deljivi s 3. Ali sta števili iz lihega prijateljskega para zmeraj deljivi s 3?

Na nobeno gornjih vprašanj še ni odgovora.

Brez odgovora je tudi vprašanje, koliko je parov prijateljskih števil: končno ali neskončno. Nekaterim se zdi, da to vprašanje ne bo nikoli rešeno. Pač pa je dognano, da so prijateljska števila med naravnimi števili veliko redkeje posejana kot praštevila.

Jože Grasselli

26. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitev 4. naloge s str. 342

V rešitvi bomo uporabili *Dirichletov princip*, ki ga pogosto srečamo tudi na naših tekmovanjih (predvsem zveznih). Če $(n + 1)$ kroglic poljubno razdelimo v n škatlic, potem sta v vsaj eni škatlici vsaj dve kroglici. Izrek enostavno dokažemo s protislovjem. Če bi namreč v nobeni škatlici ne bilo vsaj dveh kroglic, potem skupno število kroglic ne bi presegalo števila n , kar je nemogoče. Dirichletov princip je zelo preprost, zato ga čestokrat uporabljamo. Uporaba zapletenih stvari običajno ni tako pogosta.

Po tem uvodu se lotimo naše naloge. Verjetno koga moti število 26 (saj ni praštevilo), dokler ne opazi, da je naloga s 26. mednarodne matematične olimpiade. Do števila 26 je 9 praštevil. Naravna števila v množici M lahko zapišemo v obliki:

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \dots 23^i \quad a, b, c, \dots, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

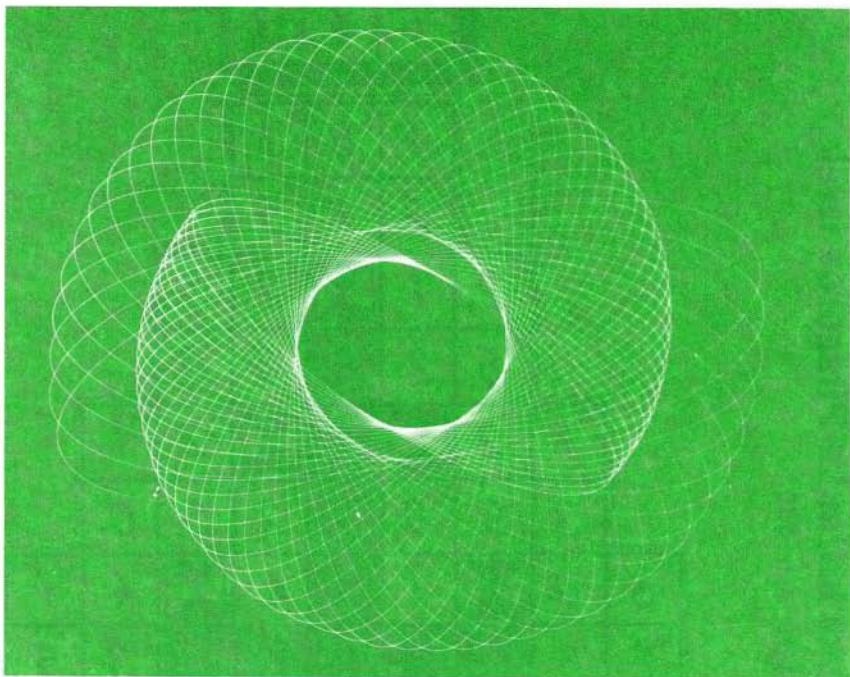
Poskusimo odgovoriti na vprašanje: Koliko najmanj števil potrebujemo, da gotovo obstajata dve, katerih produkt je kvadrat? Produkt števil $2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \dots 23^{i_1}$ in $2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \dots 23^{i_2}$ je kvadrat, če velja: števila $a_1 + a_2, b_1 + b_2, \dots, i_1 + i_2$ so vsa soda oziroma po dve števili (a_1 in $a_2, \dots, i_1$ in i_2) sta iste parnosti. Glede na parnost eksponentov imamo $2^9 = 512$ možnosti. Po *Dirichletovem principu* torej lahko trdimo: med 513 števili vedno obstajata dve, ki imata eksponente pri istem praštevilu iste parnosti in je njun produkt zato kvadrat naravnega števila. Iz množice M jemljemo taka števila, dokler imamo vsaj še 513 števil. Dobimo torej $(1985 - 511)/2 = 737$ parov števil. Označimo njihove produkte z $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{737}^2$. Isti postopek sedaj ponovimo z množico $O = \{x_1, x_2, \dots, x_{737}\}$. Dobimo $(737 - 511)/2 = 113$ parov števil. Če je en par takih števil $x_u \cdot x_v = y^2$ ($v \in \mathbb{N}$) $1 \leq u, v \leq 737$, potem je $x_u^2 \cdot x_v^2$ produkt štirih števil iz množice M , ki je hkrati tudi enak y^4 tj. četrti potenci naravnega števila. Tako je naloga rešena.

Dirichletov princip lahko posplošimo v več smereh. Oglejmo si eno najlažjih posplošitev.

Če m predmetov poljubno razdelimo v n škatlic, tedaj vsaj ena škatlica vsebuje vsaj $\lceil (m-1)/n \rceil + 1$ predmet. Pri tem $\lceil x \rceil$ pomeni največje celo število, ki ne presega x . Za vajo poskušajte rešiti naslednje naloge:

1. Dokaži, da med poljubnimi $(n + 1)$ naravnimi števili obstajata dve, katerih razlika je deljiva z n .
2. Danih je $(n + 1)$ različnih naravnih števil, manjših od $2n$ ($n \geq 2$). Dokaži, da med njimi vedno obstajajo tri takšna števila, da je vsota dveh enaka tretjemu.
3. Ali obstaja tak n , da se število 3^n končuje z 0001?
4. V množici M je 15 različnih naravnih števil, ki so vsa manjša od 100. Dokaži, da v množici M lahko vedno izberemo števila a, b, c in d , med katerimi so vsaj tri različna in za katera velja $a + b = c + d$!

Roman Drnovšek



16. mednarodna fizikalna olimpiada: Eliptično nihanje (Foto Damjan Černe)

Številka križanka –
 Številski izrazi in enačbe
 – rešitev iz P/XIII-3

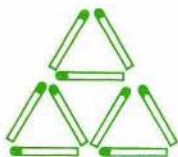
Številka križanka Pitagorov izrek
 – rešitev s str. 336

		1	3	2	2	9			
		3	1	2		4	1	5	3
6	8	5	2	7	2	4	9	8	6
	6		9	1	2	8			8
10	4	11	2	4	2	2	12	0	4
		13	3	5		14	9	0	
			15	6	4	3			

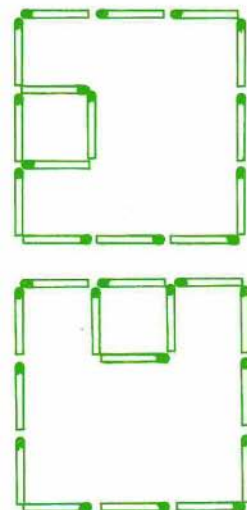
			1	1	2	8	3	1													
			4	2		1		5													
		5	2		1				6	2	7	3									
		8	5		2		P		9	5		0									
	10	1		2				I			11	2	12	1							
	13	3		9	14	9		T	15	2		5		0							
16	6		0						1	A		4			17	4	18	1			
19	5		5		G		O		R		O		V		20	3		5			
					T		R		I		K		O		T		N		I		K

KRATKOČASNE VŽIGALICE REŠITVE S STR. II

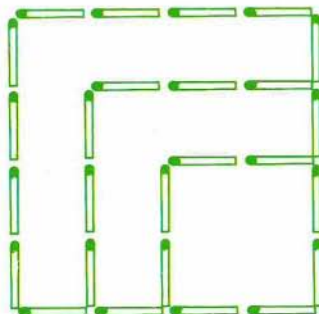
27



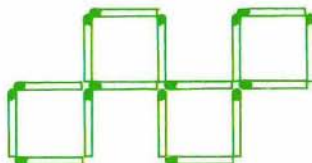
29



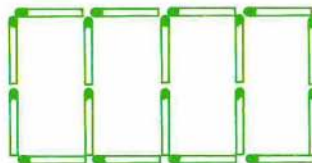
28



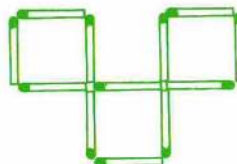
30



31



32

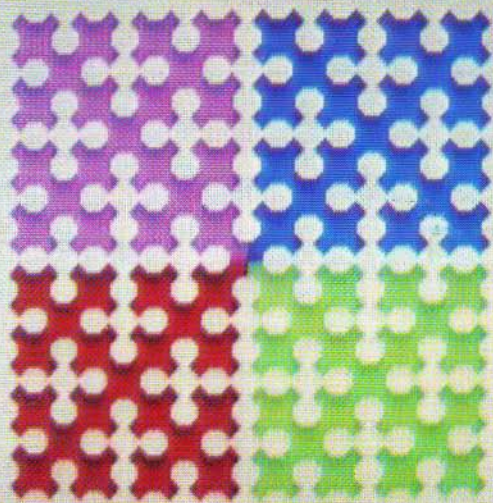


ISKANJE PRIJATELJSKIH ŠTEVIL

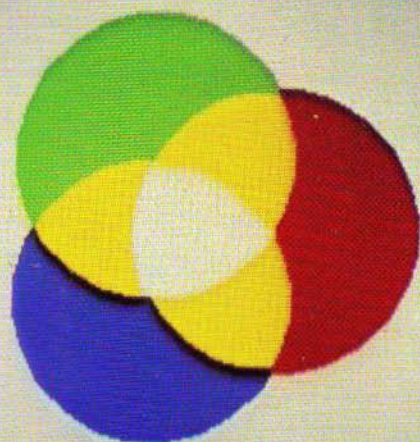
Ta številka Preseka prinaša članek o prijateljskih številih. Vabimo bralce, da poiščejo čim več parov prijateljskih števil. Pri tem si seveda lahko pomagajo z računalnikom. Kdor bo iskal vse pare števil a, b , za katere velja $a < b \leq M$, lahko mimogrede poišče še vsa *popolna števila*, to je taka števila a , za katera je $S(a) = a$.

Bojan Mohar

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9



PRESEK



PRESEK

PRESEK

