

NIELS BOHR

CENTENNIAL

1885 • 100 ÅR • 1985

SASA 116

2

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 13, 1985-86,

Niels Bohr Library



VSEBINA

MATEMATIKA	O številu 13 (Ivan Vidav)	66
	Egipčanski algoritem (Jože Grasselli)	70
	Napoleonov trikotnik (Damjan Kobal)	75
RAČUNALNIŠTVO	Želva išče hrano (Rok Sosič)	78
FIZIKA	Mehanika hoje in teka (Peter Gosar)	81
	Meti (Janez Strnad)	86
ASTRONOMIJA	Halleyev komet se približuje (Pavla Ranzinger)	92
RAZVEDRILO	BISTROVIDEC — Načrtovanje s prepogibanjem papirja (Vladimir Batagelj)	93
	PREMISLI IN REŠI — Trikotni šotor Tete Amalije — rešitev iz P—XII/4, str. 191 (Peter Petek)	94
	— Matiraj v dveh potezah (Izidor Hafner)	95
	KRIŽANKA — Ob stoletnici rojstva	96
	Ob stopetdesetletnici rojstva J. Stefana — Rešitev iz P—XII/1 str. 32 (Pavel Gregorc)	112
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Filatelija	85
	Prazna množica. Na izpitu. Cvek, nato še ukor (Izidor Hafner)	69, 99, 125
	PISMA BRALCEV — Filatelija (Ciril Velkovrh)	II, III, IV, 98
NOVICE	Jurij Vega — Sandi Sitar, Moja žena Svoboda (Ciril Velkovrh)	100
NALOGE	Nekaj nalog z otoka vprašanj (Izidor Hafner)	102
	Naloge za ogrevanje - Rešitve str. 80 (Roman Rojko)	102
NOVE KNJIGE	P. Kovač, Vesoljsko jajce ali $1 + 1 = 5$ (Ciril Velkovrh)	103
	H. Muren, Prvi in drugi korak Commodore (Bojan Mohar)	106
	Presekova knjižnica. Naše nebo 1986. Nove knjige. Razumljivo in preprosto z osebnim računalnikom. J. Strnad, Jožef Stefan (Ciril Velkovrh)	107
TEKMOVANJA	29. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Martina Koman)	113
	26. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Aleksandar Jurišić)	116
REŠITVE NALOG	iz P—XIII/1 — Naloge za mlade Vegovce, str. 46 (Aleksander Potočnik)	119
	— Naloge s predtekmovanj iz matematike, str. 27 (Gorazd Lešnjak)	123
	— Naloge izbirnega tekmovanja iz matematike, str. 29 (Gorazd Lešnjak)	126
	— Kriptoritmi, str. 59 (Peter Petek)	128
NA OVITKU	Roberts L., NIELS BOHR, plakat in razglednica, ki sta izšla v ZDA. (Glej križanko na str. 96 in članek v prihodnji številki)	I

O ŠTEVILU 13

Vsi dobro vemo, da je 13 nesrečno število. (Morda pa prinaša nesrečo le številka 13?) Pa pogledjmo na to število z matematičnimi očali. Poskušajmo z matematično analizo ugotoviti, kaj je tako zlovešnega in neprijaznega na njem.

Takoj vidimo, da je 13 praštevilo: deljivo je samo z 1 in samim seboj. Sodi med tista praštevila, ki jih lahko zapišemo kot vsoto dveh kvadratov

$$13 = 2^2 + 3^2$$

Manjša praštevila so 2, 3, 5, 7 in 11. Med njimi sta 2 in 5 vsoti dveh kvadratov

$$2 = 1^2 + 1^2, \quad 5 = 1^2 + 2^2$$

Nikakor pa ne moremo zapisati praštevil 3, 7 in 11 v tej obliki. 11 je vsota treh kvadratov: $11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$. Praštevilo 7 pa se ne da izraziti niti s tremi kvadrati temveč le s štirimi: $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$.

Vsako naravno število, naj bo praštevilo ali sestavljeno, se da zapisati kot vsota štirih ali manj kvadratov. Nekatera števila so že sama kvadrati, npr. 4, 9, 16. Med njimi seveda ni praštevil. Nekatera se dajo izraziti kot vsota dveh, zopet druga kot vsota treh kvadratov. V najslabšem primeru potrebujemo štiri kvadrate.

Katera praštevila so vsote dveh kvadratov? Praštevilo p delimo s 4. Ker so razen števila 2 vsa praštevila liha, je ostanek pri delitvi lahko le 1 ali 3. Če dobimo ostanek 1, je p vsota dveh kvadratov, če dobimo ostanek 3, p ni vsota dveh kvadratov. Ker je $13 = 3 \cdot 4 + 1$, je ostanek pri delitvi s 4 enak 1 in 13 je vsota dveh kvadratov. Prav tako je praštevilo $17 = 4 \cdot 4 + 1$ vsota dveh kvadratov: $17 = 1^2 + 4^2$.

Katera praštevila p pa se dajo izraziti z vsoto treh kvadratov? Takole ugotovimo: Delimo p z 8. Ostanek pri delitvi je zdaj lahko 1, 3, 5 ali 7. Če je ostanek 3, se p izraža z vsoto treh kvadratov. Zgled: $19 = 2 \cdot 8 + 3$ in zato je 19 vsota treh kvadratov $1^2 + 3^2 + 3^2$. Če pa je ostanek pri delitvi 7, se da p izraziti le z vsoto 4 kvadratov. Ker je $71 = 8 \cdot 8 + 7$, lahko zapišemo 71 kot vsoto štirih kvadratov $1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2$, nikakor pa ne kot vsoto treh ali dveh kvadratov. Kaj pa ostanka 1 in 5? Bralec naj se sam prepriča, da dobimo pri delitvi z 8 ostanek 1 ali 5 natanko tedaj, ko dobimo pri delitvi s 4 ostanek 1.

Torej pri ostankih 1 in 5 je praštevilo p vsota dveh kvadratov.

Naj bo D naravno število, ki ni kvadrat. Oglejmo si enačbo

$$x^2 - Dy^2 = -1 \quad (1)$$

Zanimajo nas rešitve, kjer sta x in y celi števili. Pri $D = 2$ ima enačba $x^2 - 2y^2 = -1$ rešitev $x = 1, y = 1$. Zaman pa bi se trudili, če bi iskali rešitev enačbe $x^2 - 3y^2 = -1$ v celih številih. Take rešitve ni. Izraz $x^2 - 3y^2 + 1$ pri celih številih x in y namreč nikoli ni enak 0. O tem se prepričamo, če delimo število x s 3. Naj bo kvocient pri tej delitvi q . Ostanek pa je lahko 0 (delitev se izide), 1 ali 2. V prvem primeru je $x = 3q$, v drugem $x = 3q + 1$ in v tretjem $x = 3q + 2$. V prvem primeru dobimo $x^2 - 3y^2 + 1 = 9q^2 - 3y^2 + 1$. To število da pri delitvi s 3 ostanek 1 in zato ni enako 0. Podobno obravnavamo primera $x = 3q + 1$ in $x = 3q + 2$. To naj opravi bralec sam in se tako prepriča, da tudi v teh dveh primerih izraz $x^2 - 3y^2 + 1$ ni enak 0.

Pri $D = 13$ je enačba

$$x^2 - 13y^2 = -1 \quad (2)$$

rešljiva. Zadoščata ji števili $x = 18, y = 5$. Ta rešitev ni edina. Velja namreč tole: Če ima enačba (1) rešitev $x = a, y = b$, je njena nadaljnja rešitev

$$x = a^3 + 3ab^2D, \quad y = 3a^2b + b^3D \quad (3)$$

Bralec naj se sam prepriča o tem s preskusom! Torej ima (2) tudi rešitev

$$x = 23382, \quad y = 6485$$

Če izhajamo iz te rešitve, dobimo po formuli (3) spet novo rešitev. Zato je rešitev neskončno.

Rešljivost enačbe (2) je posledica dejstva, da je 13 vsota dveh kvadratov. Če je namreč D praštevilo p , ima enačba (1) rešitev v celih številih x, y natanko tedaj, ko je p vsota dveh kvadratov.

Naj omenim, da je podobna enačba

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad (4)$$

vselej rešljiva v celih številih. Ima dve očitni (trivialni) rešitvi $x = 1, y = 0$ in $x = -1, y = 0$. Če D ni kvadrat, pa ima (4) poleg teh dveh še nešteto drugih rešitev. Bralec naj s preskusom dokaže tole: Če je $x = a, y = b$ rešitev enačbe (1), potem je

$$x = a^2 + b^2D, \quad y = 2ab \quad (5)$$

rešitev enačbe (4).

Popolno število imenujemo naravno število m , ki je enako vsoti svojih pravih deliteljev. Pravi delitelji so vsi delitelji števila m , ki so manjši od m . Najmanjše popolno število je 6. Njegovi pravi delitelji so 1, 2 in 3 z vsoto $1 + 2 + 3 = 6$. Seveda ni nobeno praštevilo p popolno, saj ima p en sam pravi delitelj, namreč 1. Zato tudi 13 ni popolno število. Naslednje popolno število je 28. Njegovi delitelji so 1, 2, 4, 7, 14 z vsoto $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Praštevilo p je *Fermatovo*, če razlika $p - 1$ ni deljiva z nobenim drugim prafaktorjem kakor z 2. Torej je $p - 1$ potenca od 2, npr. $p - 1 = 2^n$ in od tod $p = 2^n + 1$. Izkaže se, da je $2^n + 1$ praštevilo kvečjemu tedaj, ko je tudi eksponent n potenca od 2. 13 ni Fermatovo praštevilo, saj je razlika $13 - 1 = 12$ deljiva s prafaktorjema 2 in 3. Pač pa so $3 = 2^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 2^4 + 1$ Fermatova praštevila.

Fermatova praštevila so slavna zaradi povezave s konstrukcijo pravilnih mnogokotnikov. Gauss je namreč dokazal, da se da pravilni mnogokotnik s p stranicami, kjer je p praštevilo, narisati z ravnilom in šestilom natanko takrat, ko je p Fermatovo praštevilo. Zato lahko narišemo pravilni petkotnik in sedemnajstkotnik. Pravilnega trinajstkotnika pa prav tako kakor pravilnega sedemkotnika in enajstkotnika ne moremo narisati samo z ravnilom in šestilom.

Naravna števila a, b, c sestavljajo pitagorejsko trojico, če je med njimi zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Tedaj sta a in b kateti, c pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Od davnega je npr. znana trojica 3, 4, 5. Ploščina pravokotnega trikotnika s katetama a in b je enaka $p = \frac{1}{2}ab$. V vsaki pitagorejski trojici a, b, c je vsaj ena od katet a, b sodo število. Zato je ploščina takega trikotnika zmerom celo število, npr. $p = 6$ za trikotnik s stranicami 3, 4, 5. Lahko pa se zgodi, da ima pravokotni trikotnik za ploščino celo število, čeprav njegove stranice niso cela, temveč le racionalna števila. Zgled za to je trikotnik s stranicami

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{20}{3}, \quad c = \frac{41}{6}$$

Njegova ploščina $p = 5$.

Naravno število, ki je ploščina kakšnega pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami, se imenuje *kongruentno število*. Pravkar smo videli, da sta 5 in 6 kongruentni števili. Dokazali so, da je 5 najmanjše kongruentno število; 1, 2, 3 in 4 namreč niso kongruentna števila. Torej ni pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami, ki bi imel ploščino 1.

Če je n kongruentno število, ne obstaja samo en pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino n , temveč je takih trikotnikov nešteto. Tako ima npr. tudi trikotnik

$$a = \frac{7}{10}, \quad b = \frac{120}{7}, \quad c = \frac{1201}{70}$$

ploščino $p = 6$.

Poleg 5 in 6 je tudi 7 kongruentno število. Pravokotni trikotnik s stranicami

$$a = \frac{24}{5}, \quad b = \frac{35}{12}, \quad c = \frac{337}{60}$$

ima namreč ploščino $p = 7$.

Kaj pa naše število 13? Je prvo kongruentno število, ki je večje od 7. Izmed števil 8, 9, 10, 11 in 12 namreč nobeno ni kongruentno. Ker je 13 kongruentno število, obstaja pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in s ploščino 13. Kako bi ga našli? Poiskati je treba tako pitagorejsko trojico a, b, c , da je ploščina pripadajočega trikotnika enaka produktu števila 13 in kvadrata nekega števila, tedaj oblike $p = 13 s^2$. Trikotnik z racionalnimi stranicami $a/s, b/s, c/s$ je podoben trikotniku s stranicami a, b, c , njegova ploščina pa je 13. Vendar je potrebno precej truda, preden najdemo pitagorejsko trojico z navedeno lastnostjo. S poskušanjem pridemo tako do trojice

$$a = \frac{323}{30}, \quad b = \frac{780}{323}, \quad c = \frac{106921}{9690}$$

Bralec naj se sam prepriča, da so navedena števila stranice pravokotnega trikotnika s ploščino 13. Če ima pri roki žepni računalnik, to ne bo huda naloga.

Lahko bi navedli še nadaljnje lastnosti števila 13. Vendar bi se morali spustiti globlje v teorijo števil. Ta teorija namreč raziskuje lastnosti naravnih števil. Že ti zgledi pa povedo, da ima 13 veliko lepih lastnosti in je zato prijazno in zanimivo število.

Ivan Vidav

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

PRAZNA MNOŽICA

Janez: Zakaj tvoj učbenik ne obravnava prazne množice?

Peter: Saj jo, na strani 144.

Janez (vidi, da ima učbenik samo 139 strani): Ta stran sploh ne obstaja!

Peter: Saj prazna množica tudi ne.

Izidor Hafner

EGIPČANSKI ALGORITEM

Pozitivne ulomke, ki so manjši od 1, zapisujemo danes največkrat v obliki $\frac{a}{b}$. Pri tem sta a, b tuji naravni števili in $a < b$. Zgled: $\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{22}{39}$. Ta zapis je plod dolgega razvoja. Nadomestil je razne drugačne oznake, ki so se uporabljale skozi zgodovino. Ustavimo se na kratko ob zapisu iz starega Egipta.

Najdeni viri izpričujejo, da so imeli stari Egipčani že pred štiri tisoč leti posebne znake za osnovne ulomke $\frac{1}{b}$ in še za ulomka $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Za drugačne ulomke posebnih znakov niso poznali. Pri zapisovanju teh drugih ulomkov so si pomagali z znaki za osnovne ulomke in včasih še z znakoma za $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Ulomek $\frac{3}{8}$ so npr. naznačili tako, da so znak za $\frac{1}{8}$ zapisali trikrat zapovrstjo. Domneva se, da so do tega zapisa prišli takole. Vemo, da je

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \quad (1)$$

Simbola za seštevanje pri starih Egipčanih še ni bilo. Seštevanje so nakazali tako, da so znake za števila, ki jih je treba sešteti, pisali drugega ob drugem. Glede na (1) so zato $\frac{3}{8}$ zapisali s trikrat postavljenim znakom za osnovni ulomek $\frac{1}{8}$.

Ker je $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, se namesto (1) dobi

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad (2)$$

Res so ulomek $\frac{3}{8}$ zapisovali tudi tako, da so postavili znaka za osnovna ulomka $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{8}$ drugega za drugim. Namesto treh sta zdaj potrebna le dva znaka.

Pri zapisu ulomka $\frac{8}{9}$ je bilo treba osemkrat zapored postaviti znak za $\frac{1}{9}$. To je precej nerodno. Ker je

$$\frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \quad (3)$$

so zadoščali tudi že znaki za $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}$ zapisani po vrsti. Namesto osmih so tu le trije znaki.

Podobni zapisi kot za $\frac{3}{8}$ in $\frac{8}{9}$ so se ohranili iz starega Egipta še za nekatere druge pozitivne ulomke. Pri vsakem teh zapisov gre kakor v (2) in (3) za izrazitev ulomka z vsoto različnih osnovnih ulomkov in kdaj še ulomkov $\frac{2}{3}$ oziroma $\frac{3}{4}$.

Ulomek $\frac{3}{8}$ je v (2) izražen s samimi osnovnimi ulomki, torej brez uporabe ulomkov $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Take izrazitve, ko ulomka $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$ ne nastopata, so znane iz

starega Egipta še za nekatere druge ulomke. Tako vidimo, da so znali stari Egipčani vsaj nekatere ulomke izražati le z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Ko to opazamo, se vsiljuje vprašanje, ki nas bo v nadaljnjem zanimalo. *Ali se da vsak od 1 manjši pozitivni ulomek izraziti kot vsota samih različnih osnovnih ulomkov?*

Odgovor na zastavljeno vprašanje daje *egipčanski algoritem*. Pridevnik egipčanski ne pomeni, da so algoritem odkrili Egipčani; nakazuje le povezanost algoritma z egipčanskim zapisovanjem ulomkov.

Egipčanski algoritem sloni na tej lastnosti naravnih števil: *Če sta u in v tuji naravni števili, $1 < u < v$, obstajata taki naravni števili k, r , da je*

$$1 < k, \quad 1 \leq r < u \quad (4)$$

$$\text{in velja} \quad v = ku - r \quad (5)$$

oziroma

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{r}{kv} \quad (6)$$

O resničnosti te trditve se hitro prepričamo. Vzemimo vse pozitivne večkratnike števila u

$$u, 2u, 3u, 4u, 5u, \dots \quad (7)$$

Pokažimo, da med njimi ni števila v . Če bi bil v zajet v zaporedju (7), bi veljalo $v = tu$ pri naravnem številu t . Torej bi u delil v in največji skupni delitelj števil u, v bi bil $u > 1$. To ne gre, saj sta u, v tuji števili. Večkratniki v zaporedju (7) naraščajo in presežejo vsako še tako veliko vrednost. Zato so vsi večkratniki od nekega dalje večji od v . Naj bo ku prvi večkratnik, ki je nad v . Ker noben večkratnik ni enak v , je

$$(k-1)u < v < ku \quad (8)$$

Naravno število k , do katerega smo tako prišli, gotovo ni 1. Za $k = 1$ bi namreč iz (8) izhajalo $0 < v < u$. To ne more biti, saj smo vzeli, da je $u < v$. Torej je $1 < k$ in prva zahteva v (4) je izpolnjena. Po (8) je razlika $r = ku - v$ naravno število, manjše od u ; torej je $1 \leq r < u$ in $v = ku - r$. Izpolnjena je druga zahteva iz (4) in zahteva (5). Delimo $ku = v + r$ s kv , pa dobimo (6). Trditev je dokazana.

Iz (4) in (5) vidimo, da je k kvocient, $-r$ pa negativni ostanek pri delitvi v z u .

Poglejmo na zgledu, kako enakost (6) omogoča izraziti ulomek z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Pri ulomku $\frac{7}{51}$ je $u = 7$, $v = 51$. Delitev 51 s 7 daje kvocient $k = 8$ in negativni ostanek $-r = -5$. Enakost (5) je

$$51 = 8 \cdot 7 - 5$$

Od tod pridemo po delitvi z 8,51 in preureditvi na enakost

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8 \cdot 51} \quad (9)$$

Prvi sumand na desni je osnovni ulomek. Drugi sumand lahko pišemo $\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{51}$. Izrazitev z osnovnimi ulomki za $\frac{7}{51}$ bomo dobili, če $\frac{5}{51}$ tako izrazimo. Preoblikujemo $\frac{5}{51}$ po (6). Ker je

$$51 = 11 \cdot 5 - 4$$

po delitvi z 11,51 najdemo

$$\frac{5}{51} = \frac{1}{11} + \frac{4}{11 \cdot 51} \quad (10)$$

Na koncu se je pojavil ulomek $\frac{4}{51}$. Zdaj je treba ta ulomek preoblikovati po (6). Ko delimo 51 s 4, dobi kvocient 13 in ostanek -1 . Torej je

$$51 = 13 \cdot 4 - 1$$

in dalje

$$\frac{4}{51} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13 \cdot 51} \quad (11)$$

Ulomek $\frac{4}{51}$ je tu že zapisan z vsoto dveh različnih osnovnih ulomkov. Ko vnesemo (11) v (10), dobimo

$$\frac{5}{51} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{13 \cdot 51} \right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{11 \cdot 13 \cdot 51} \quad (12)$$

in imamo ulomek $\frac{5}{51}$ izražen z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Ko upoštevamo (12) v (9), pride

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{11 \cdot 13 \cdot 51} \right)$$

in od tod

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 51} \quad (13)$$

V (13) imamo ulomek $\frac{7}{51}$ izražen z vsoto samih različnih osnovnih ulomkov.

Opomba: V gornjem postopku bi lahko krajše izrazili ulomek $\frac{5}{8 \cdot 51}$ takole:

$$\frac{5}{8 \cdot 51} = \frac{1}{51} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{51} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2 \cdot 51} + \frac{1}{8 \cdot 51}$$

Vendar pa ima prvotni postopek to prednost, da ga lahko posplošimo tudi na druge ulomke.

Ravnanje, ki smo ga uporabili, je egipčanski algoritem. Podobno kot na zgornjem zgledu poteka egipčanski algoritem za poljuben ulomek $\frac{u}{v}$, $1 < u < v$.

V prvem koraku iz (6) dobimo

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{r}{kv} \quad (14)$$

kjer je $1 < k$, $1 \leq r < u$. Če je $r = 1$, je

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kv} \quad (15)$$

Na desni je vsota različnih osnovnih ulomkov. Ker je $1 < k$, $1 < v$, je namreč $\frac{1}{k} > \frac{1}{kv}$. Pri $r = 1$ torej že prvi korak privede na želeno izrazitev.

Če je $r \neq 1$, moramo storiti drugi korak. V njem obravnavamo $\frac{r}{v}$ kot prej $\frac{u}{v}$. Ker je $1 < r < u$, iz (6) dobimo

$$\frac{r}{v} = \frac{1}{k_1} + \frac{r_1}{k_1 v} \quad (16)$$

Tu sta k_1, r_1 zaradi (4) naravni števili, za kateri je $1 < k_1$, $1 \leq r_1 < r$. Če je $r_1 = 1$, iz (14) in (15) izhaja

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kk_1} + \frac{1}{kk_1 v} \quad (17)$$

Zaradi $1 < k$, $1 < k_1$, $1 < v$ so na desni sami različni osnovni ulomki. Drugi korak je dal iskano izrazitev.

Če je $r_1 \neq 1$, je potreben tretji korak. V njem spravimo na obliko (6) ulomek $\frac{r_1}{v}$.

Ko tako korak ponavljamo, dobimo ulomke

$$\frac{u}{v}, \frac{r}{v}, \frac{r_1}{v}, \dots \quad (18)$$

ki imajo isti imenovalc v , števci pa se jim zaradi (4) manjšajo po naravnih številih $u > r > r_1 > \dots$. Ker je vseh ulomkov, ki imajo imenovalc v , za števec pa naravno število med 1 in u , ravno u , je v (18) kvečjemu u ulomkov. Torej se naše ravnanje najpozneje po u korakih ustavi. Zadnji ulomek, ki v (18) nastopa, je $\frac{1}{v}$. Za vsak ulomek $\frac{r'}{v}$, pri katerem je $1 < r' < u$, se da namreč korak (6) ponoviti; za ulomek $\frac{1}{v}$ pa to ne gre več, če naj velja (4). V zgornjem zgledu smo za ulomke (18) dobili $\frac{7}{51}, \frac{5}{51}, \frac{4}{51}, \frac{1}{51}$.

Razen egipčanskega algoritma poznamo še druge načine, ki pripeljejo do izrazitve ulomka z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Po enem teh načinov se dobi

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 22} + \frac{1}{22 \cdot 51} \quad (19)$$

Izrazitvi (13) in (19) sta različni. Zato izražanje ulomkov z osnovnimi ulomki ni enolično. Dodajmo še, da je tudi vsak ulomek, ki je večji od 1, mogoče predočiti z vsoto samih različnih osnovnih ulomkov. Kot zgled navedimo

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

Kako v tem primeru izrazitev dosežemo, sedaj ne bomo opisovali. V Preseku pa se bo kmalu pojavil članek, ki bo spregovoril tudi o tem.

VAJE

1. Po egipčanskem algoritmu prevedi na vsoto različnih osnovnih ulomkov ulomke: $\frac{5}{7}, \frac{22}{39}, \frac{31}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{18}{19}$.
2. Poskusi izraziti z vsoto različnih osnovnih ulomkov: $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$.
3. Če je v liho naravno število, večje od 2, obstaja tako naravno število k , da je

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kv}$$

4. Naj bosta u, v tuji naravni števili, $1 < u < v$. Naravno število k , za katero velja

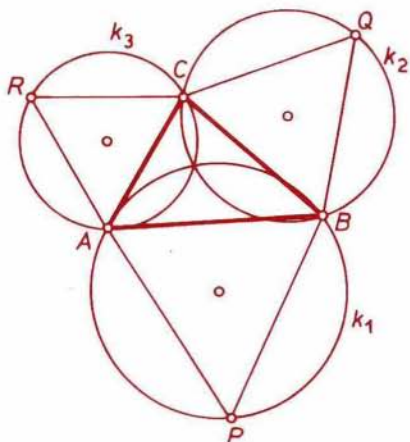
$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kv}$$

obstaja natančno takrat, kadar u deli $v + 1$.

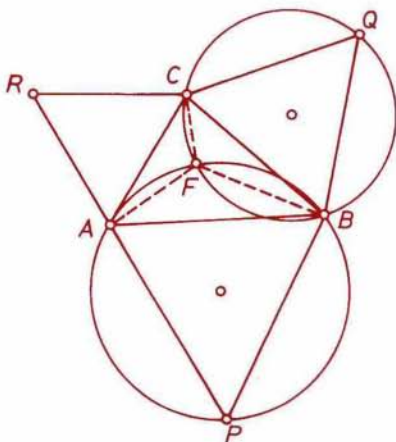
NAPOLEONOV TRIKOTNIK

Poskušajmo združiti nekaj našega znanja o geometriji — mogoče se celo kaj novega naučimo! Ali, kot bi temu drugače rekli: povejmo to, kar že vemo, v novi obliki, ... pa dobimo nekaj, česar še nismo vedeli.

Nad stranicami poljubnega trikotnika ABC načrtajmo enakostranične trikotnike (kot kaže slika 1)! Enakostraničnim trikotnikom APB , BQC , CRA očrtajmo kroge, ki jih označimo s k_1 , k_2 , k_3 . Kaj opazimo? Če nas površnost ni izdala, se vse tri krožnice sekajo v isti točki.



Slika 1



Slika 2

Da bi se o tem prepričali, ponovimo risbo, a očrtajmo le kroga k_1 in k_2 (slika 2). Krožnici k_1 in k_2 se sekata v oglišču B in v točki, ki jo označimo z F . Točke A, P, B, F ležijo na krožnici k_1 . Torej je štirikotnik $APBF$ tetiven. Podobno ležijo točke B, Q, C, F na krožnici k_2 in je tudi štirikotnik $BQCF$ tetiven. Ker vemo, da sta nasprotna kota v tetivnem štirikotniku suplementarna, je:

$$\sphericalangle AFB = 180^\circ - \sphericalangle APB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

in

$$\sphericalangle CFB = 180^\circ - \sphericalangle CQB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

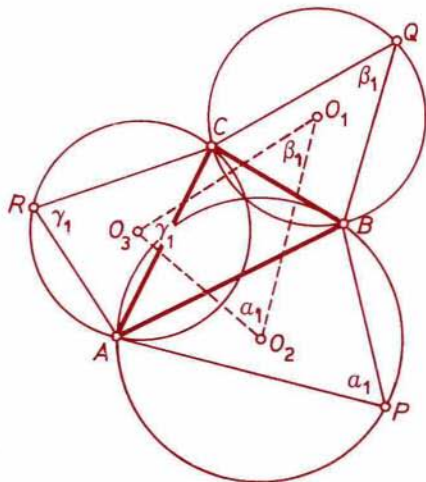
Od tod izračunamo še:

$$\sphericalangle AFC = 360^\circ - \sphericalangle AFB - \sphericalangle CFB = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$$

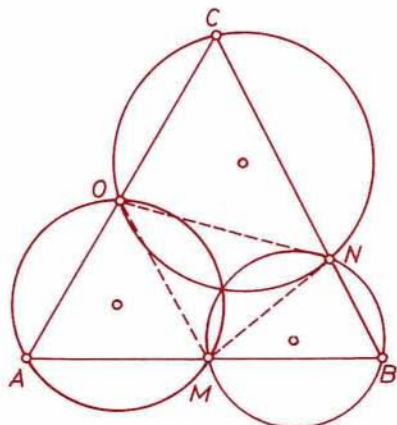
Ker je trikotnik CRA enakostraničen, je $\sphericalangle CRA = 60^\circ$, kota $\sphericalangle AFC$ in $\sphericalangle CRA$ sta torej suplementarna. Če sta v štirikotniku nasprotna kota suplementarna, je štirikotnik tetiven. Ugotovili smo torej, da določajo točke C, R, A, F tetivni štirikotnik $CRAF$, oziroma, da lahko skozi točke C, R, A, F napeljemo krožnico. Ta krožnica pa je lahko le k_3 , saj k_3 vsebuje točke C, R, A . Torej gre tudi k_3 skozi F , ki je skupna točka krožnic k_1 in k_2 . Krožnice k_1, k_2 in k_3 se torej res sekajo v isti točki F .

Našo ugotovitev lahko zelo posplošimo. Namesto da bi na straneh poljubnega trikotnika ABC načrtali enakostranične trikotnike, načrtajmo poljubne trikotnike APB, BQC, CRA . Pazimo le na nekaj! Vsota kotov $\sphericalangle CRA, \sphericalangle APB$ in $\sphericalangle BQC$ naj bo enaka 180° (glej sliko 3). Zopet opazimo, da se krogi, očrtani trikotnikom APB, BQC, CRA , sekajo v isti točki. Dokaz (ki je podoben prejšnjemu) naj bo za vajo.

V našem primeru smo imeli $\sphericalangle CRA = \sphericalangle APB = \sphericalangle BQC = 60^\circ$, torej tudi $\sphericalangle CRA + \sphericalangle APB + \sphericalangle BQC = 180^\circ$, in gre res za posplošitev prejšnjega primera.



Slika 3



Slika 4

Za utrditev in v razmislek še nalogi:

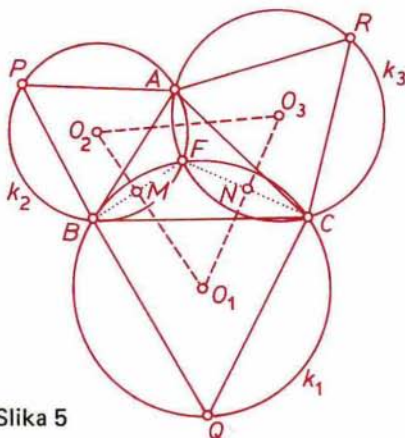
(1) Na straneh trikotnika ABC izberi tri poljubne točke M, N in Q , na vsaki stranici po eno. Trikotnikom AMO, MBN, NCO očrtaj kroge. Pokaži, da se vsi trije krogi sekajo v isti točki (glej sliko 4)!

(2) Ali lahko na straneh poljubnega trikotnika ABC načrtamo trikotnike, ki so podobni poljubnemu trikotniku DEF (v posebnem primeru je lahko trikotnik DEF kar trikotnik ABC), tako da se bodo njim očrtani krogi sekali v isti točki?

Naredimo še korak naprej! Trikotniku ABC smo na straneh načrtali enakostranične trikotnike, njim pa očrtali kroge k_1, k_2, k_3 , ki se, kot že vemo, sekajo vsi v isti točki F . Oglejmo si trikotnik $O_1O_2O_3$, ki ga tvorijo središča krogov k_1, k_2, k_3 (glej sliko 5).

Označimo skupno tetivo krogov k_1 in k_2 z FB , skupno tetivo krogov k_1 in k_3 z CF , daljico s krajiščema O_1 in O_2 z O_1O_2 , daljico s krajiščema O_1 in O_3 z O_1O_3 . O_1O_2 seka FB pravokotno v točki M , O_1O_3 pa CF pravokotno v točki N . (Skupna tetiva in zveznica središč dveh krogov se vedno sekata pravokotno!) Za štirikotnik FMO_1N torej velja $\sphericalangle FMO_1 = \sphericalangle FNO_1 = 90^\circ$. Od tod takoj sledi

$$\begin{aligned} \sphericalangle O_3O_1O_2 &= \sphericalangle NO_1M = \\ 180^\circ - \sphericalangle NFM &= 180^\circ - \sphericalangle CFB \end{aligned} \quad \text{Slika 5}$$



Vemo, da je $\sphericalangle CQB = 180^\circ - \sphericalangle CFB$, torej dobimo $\sphericalangle O_3O_1O_2 = \sphericalangle CQB = 60^\circ$. Povsem enako bi dobili še $\sphericalangle O_1O_3O_2 = \sphericalangle CRA = 60^\circ$ in $\sphericalangle O_3O_2O_1 = \sphericalangle APB = 60^\circ$. Torej smo ugotovili, da je trikotnik $O_1O_2O_3$ enakostraničen.

Novo naj bo za vajo dokaz trditve, da lahko tudi to ugotovitev splošimo kot v prvem primeru. Trikotnik $O_1O_2O_3$ sedaj ne bo več enakostraničen, temveč bo imel kote $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, kot kaže slika 3.

Najvztrajnejšim še dve nalogi:

(1') Pokaži, da tvorijo središča krogov iz naloge (1) trikotnik, ki je podoben trikotniku ABC (iz naloge (1))!

(2') Pokaži, da tvorijo središča krogov iz naloge (2) trikotnik, ki je podoben trikotniku DEF (iz naloge (2))!

(V nalogi (2) je bil odgovor seveda pritrdilen.)

Obravnavanemu trikotniku $O_1O_2O_3$ rečemo Napoleonov trikotnik k danemu trikotniku ABC . Zakaj ravno Napoleonov, ni znano. Danes je jasno samo to, da zgornje zakonitosti ni odkril on.

RAČUNALNIŠTVO

ŽELVA IŠČE HRANO

Osnove želvine grafike smo spoznali že v Preseku št. 4, letnik 1984/85. Temeljna ukaza sta ukaz RIGHT, ki obrne želvo za dani kot, in ukaz FORWARD, ki premakne želvo v dani smeri za določeno število korakov.

Danes si bomo ogledali, kako lahko s pomočjo želvine grafike in z računalniškim programom oponašamo preprosto obnašanje živali.

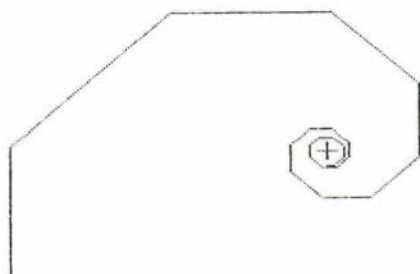
Zamislimo si, da je v želvini bližini prijetno dišeča hrana. Edini način, kako želva zaznava hrano, naj bo vonj, ki slabi z oddaljenostjo želve od hrane. V ta namen napišimo funkcijski podprogram RAZDALJA, ki nam izračuna trenutno oddaljenost želve od hrane. Koordinati hrane naj bosta v spremenljivkah HRANAX in HRANAY (podprogram 1).

```
FUNCTION razdalja : integer ;  
BEGIN  
    razdalja := round(sqrt(sqr(hranax-zelva.tx) +  
                           sqr(hranay-zelva.ty)));  
END;
```

S funkcijo RAZDALJA smo naredili želvin nos, sedaj ga moramo še uporabiti. Postopek za iskanje hrane naj bo zelo preprost. Če vonj postaja močnejši, nadaljuj v dani smeri, drugače se obrni za dani kot. Natančno je postopek napisan v podprogramu 2.

```
PROCEDURE isci ( kot:integer ) ;  
VAR  
    stararazdalja, novarazdalja : integer ;  
BEGIN  
    stararazdalja := maxint ;  
    WHILE true DO BEGIN  
        forward (1) ;  
        novarazdalja := razdalja ;  
        IF novarazdalja > stararazdalja THEN right(kot);  
        stararazdalja := novarazdalja ;  
    END;  
END;
```

Obnašanje želve za različne kote je narisano na sliki 1.



KOT = 20



KOT = 60
ODMIK = 20



KOT = 60



KOT = 60
ODMIK = 70



KOT = 80



KOT = 60
ODMIK = 130

Slika 1

Slika 2

Premikanje želve je zelo pravilno, saj prehojena pot vsebuje precej dolge ravne odseke. To lahko popravimo s tem, da vnesemo malce negotovosti. Na vsakem koraku naj se želva premakne še za naključni kot med kotom $-ODMIK$ in kotom $+ODMIK$. Pri tem uporabljamo funkcijo $RAND(A,B)$, ki vrne naključno celo število med A in B. Novi postopek je napisan v podprogramu 3, rezultat pa je na sliki 2.

```

PROCEDURE isci1 (kot, odmik:integer) ;
VAR
    stararazdalja, novarazdalja : integer ;
BEGIN
    stararazdalja := maxint ;
    WHILE true DO BEGIN
        forward(1) ;
        right(rand(-odmik, odmik)) ;
        novarazdalja := razdalja ;
        IF novarazdalja > stararazdalja THEN right(kot);
        stararazdalja := novarazdalja ;
    END ;
END ;

```

Kdor bo podprograme preizkusil na računalniku, bo ugotovil, da želva v resnici nikoli ne konča svoje poti. Zakaj?

Naloge:

1. Poizkusi najti kar najbolj učinkovit postopek za iskanje hrane!
2. Kako se obnaša tvoja želva, če ji na vsakem koraku naključno zamešamo kot?
3. Opazuj odvisnost prehojene poti od vhodnih podatkov!

Rok Sosič

NALOGE ZA OGREVANJE — Rešitve s str. 102

1. Kadar zapelje avtobus na oviro (jarek ali prag), se zavrti za majhen kot okoli tiste osi, ki ni zadela ob oviro. Pri tem se najmanj zatrese blizu osi, najbolj pa na najbolj oddaljenih mestih. Tresenje se navadno čuti najbolj v zadku, manj v nosu in najmanj nad osmi koles. Triosni avtobus je seveda bolj zapleten, zadnji del tudi rad poskakuje, v grobem pa velja zanj isto razmišljanje.

2. Met kladiva razlaga fizika pod poglavjem z naslovom "Poševni met". Kladivo leti po tirnici, ki ima obliko parabole, največjo razdaljo pa dosežemo pri metu pod kotom 45° . To seveda upoštevajo tudi tekmovalci. *Vodoravna* hitrost kladiva je ves čas leta enaka in očitno znaša 20 m/s, zaradi dviznega kota 45° pa moramo to hitrost pomnožiti s $\sqrt{2}$, če želimo dobiti začetno hitrost kladiva v smeri gibanja.

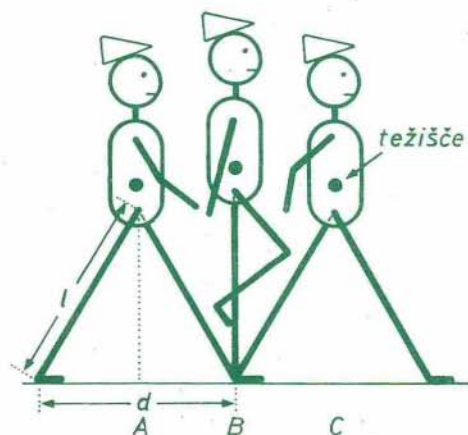
Roman Rojko

MEHANIKA HOJE IN TEKA

Za hojo in tek so značilni enakomerno se ponavljajoči koraki z desno in levo nogo. Korak se začne, ko se na primer desna noga dotakne tal, in konča ob naslednjem dotiku leve noge. Povprečna hitrost v hoje ali teka je povezana s trajanjem koraka T in njegovo dolžino d , to je razdaljo med obema točkama dotika tal, takole

$$v = \frac{d}{T}$$

Med hojo se vedno vsaj ena noga dotika tal. Nekaj časa pa sta v stiku s tlemi istočasno obe nogi. Trajanje stika posamezne noge s tlemi izražamo s faktorjem stika β , ki je definiran kot razmerje med trajanjem stika in trajanjem hoje ali teka. Z meritvami so ugotovili, da je tipična vrednost β za hojo 0.6. Pri hoji je posamezna noga več kot polovico časa na tleh. Tek se razlikuje od hoje v tem, da sta tu pri posameznem koraku nekaj časa obe nogi v zraku. Med tekom je posamezna noga manj kot polovico časa v stiku s tlemi in je zato $\beta < 0.5$.



Slika 1

Hoja je možna le pri majhni hitrosti. Odrasel človek preide v tek pri $v \approx 2.5 \text{ m s}^{-1}$ (9 km h^{-1}). S posebno tehniko hoje, ki jo uporabljajo športniki, lahko hodimo tudi hitreje, s hitrostjo do $v \approx 4 \text{ m s}^{-1}$ (14.4 km h^{-1}). Otroci imajo s hojo več težav kot odrasli. Pri hitrostih, ki so za hojo odraslih še zmerne, morajo otroci že teči. Zaradi krajših nog je korak otroka krajši od koraka odraslega človeka. Zato otrok dosega isto hitrost v le ob povečani frekvenci korakov $1/T$.

Kaj omejuje hitrost hoje? Med hojo in tekom se težišče telesa, ki je v trebušni votlini, giblje s povprečno hitrostjo v v vodoravni smeri, poleg tega pa niha v navpični smeri med dvema skrajnima legama. Hitrost v vodoravni smeri se med hojo večinoma ne spreminja dosti. Slika 1 kaže razmere pri prehodu iz hoje v tek, to je pri $\beta = 0.5$. V legah telesa A in C, ki ustrezata začetku oziroma koncu koraka, je težišče telesa najnižje.

V srednji legi B, kjer sta poravnana telo in noga, na katero se opira telo, pa je težišče najvišje. Iz slike sklepamo, da je višinska razlika h ekstremnih leg težišč približno enaka razliki med dolžino noge l in višino enakokrakega trikotnika s kraki l in osnovnico d . Tako je

$$h = l(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}) \quad ; \quad a = \frac{d}{l}$$

V času med legama B in C se težišče telesa niža. Sila, ki to omogoča, je teža. Noga lahko spuščanje telesa le ovira, ne more pa ga vleči k tlom. Najhitrejši prehod iz B v C bi dosegli s prostim padom telesa. Tedaj bi prehod težišča iz lege B v lego C ustrežal vodoravnemu metu s hitrostjo v . Prosti pad z višine h traja $\sqrt{2h/g}$, kjer je g pospešek prostega pada. Iz vodoravne razdalje $d/2$ med legama B in C ter najmanjšega časa, ki je potreben za ta prehod, dobimo teorijsko oceno za maksimalno možno hitrost hoje

$$v_{\max} = \frac{d}{2\sqrt{2h/g}} = \sqrt{gl} \frac{a}{\sqrt{8(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}})}}$$

V celotnem intervalu a , ki pride v poštev, to je $0 < a < 1$, je $v_{\max} \approx \sqrt{gl}$. V tem intervalu se $v_{\max}$ spreminja le za 3.4%. Dolžina nog pri odraslem človeku je približno 90 cm. Tedaj je $v_{\max} = 3 \text{ m s}^{-1}$ (10.8 km h^{-1}). Vidimo, da da gornje preprosto sklepanje zelo dobro oceno za največjo hitrost, pri kateri je hoja še možna. Sedaj tudi natančneje razumemo, zakaj je pri otrocih tek tako pogost način gibanja, saj jih kratke noge in s tem manjša mejna hitrost $v_{\max}$ silijo k temu.

Zakaj pa pri športni hoji dosegamo hitrosti, ki so večje od $v_{\max}$? Športna hoja je nekaj prav posebnega. Pri taki hoji je v legi B telo močno zvito, tako da zveznica kolčnih sklepov ni vodoravna, ampak se spušča v smeri proč od noge, ki podpira telo. Posledica take drže je znižanje težišča telesa v primerjavi z lego pri normalni hoji. Pri športni hoji je navpično nihanje težišča manjše, kar omogoča večjo mejno hitrost. Ta način hoje je zaradi zvijanja telesa čuden in nenaraven.

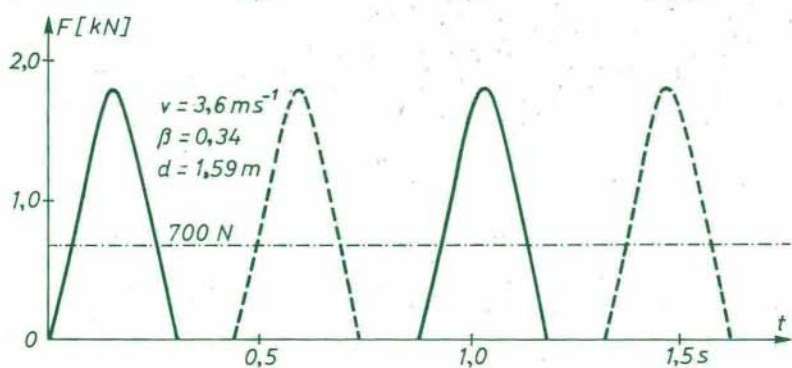
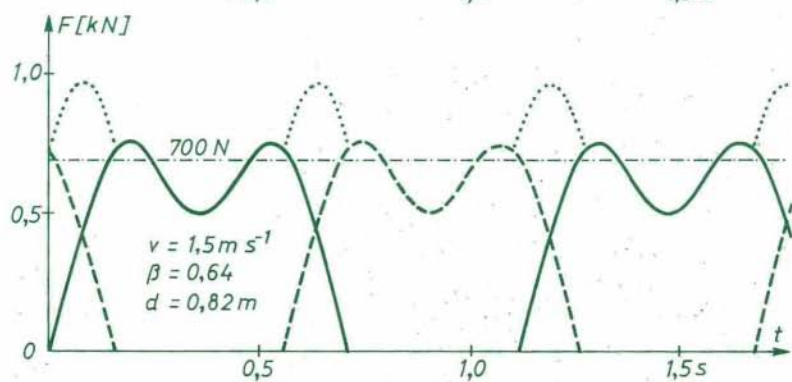
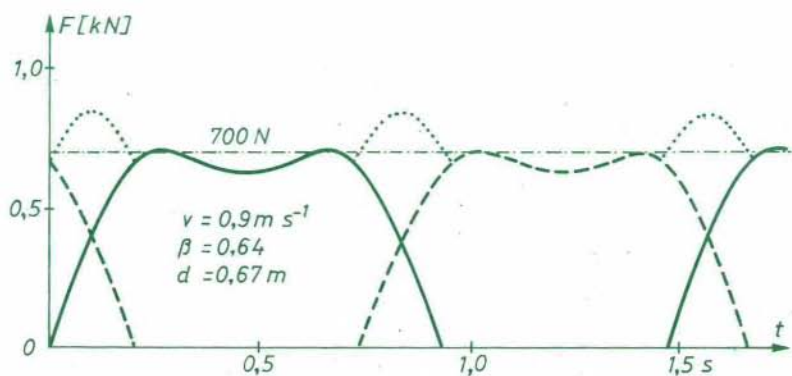
V nadaljnjem nas bosta zanimala velikost in časovni potek sile tal na desno

oziroma levo nogo med hojo in tekom. Ta je nasprotno usmerjena sili, s katero pritiska noga na tla, po velikosti pa je njej enaka. Slika 2 kaže tipičen potek navpičnih komponent sil na desno in levo nogo pri 700 N težkem človeku in pri različnih hitrostih hoje in teka (hoja: $v = 0.9 \text{ m s}^{-1}$ in 1.5 m s^{-1} , tek: $v = 1.5 \text{ m s}^{-1}$). Polna črta kaže časovni potek sile na desno, prekinjena pa na levo nogo. Za časovne intervale, ko sta pri hoji istočasno na tleh obe nogi, pa je s pikčasto črto narisana tudi vsota obeh navpičnih sil. Med hojo in tekom vsota navpičnih komponent sil na desno in levo nogo niha s periodo korakov T okoli srednje vrednosti 700 N. Srednja vrednost mora biti enaka teži človeka, ker se med hojo ali tekom povprečna razdalja težišča telesa od tal ne spreminja.

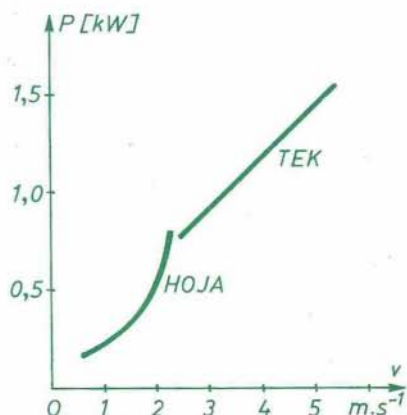
Nihanje navpične komponente celotne sile tal na nogi okrog njene srednje vrednosti povzroča nihanje težišča telesa v navpični smeri. Najbližje tlom je težišče v trenutkih, ko je sila največja, najbolj oddaljeno pa je, ko je sila najmanjša. Amplituda nihanja sile raste s hitrostjo hoje ali teka. Poskušajmo to razložiti v primeru hoje. Pri hoji je razdalja h med najvišjo in najnižjo lego težišča skoraj neodvisna od hitrosti v . Prehod med obema legama se izvrši v času $T/2$, torej tem hitreje, čim večja je hitrost hoje. Očitno je, da dobiva telo pri večji hitrosti večje pospeške v navpični smeri. Iz Newtonovega zakona torej sledi, da mora amplituda nihanja sile v navpični smeri rasti s hitrostjo hoje.

Na prvi pogled preseneča časovni potek sile tal na posamezno nogo pri hoji. Ta ima dva maksimuma, enega kmalu po začetku in drugega malo pred koncem dotika s tlemi. Med njima je minimum. Izrazitost maksimumov in minimov hitro narašča s hitrostjo hoje. Pri prehodu v tek pa se razmere nenadoma spremenijo. Tu ima sila le en maksimum. Pri hoji, kjer je vedno vsaj ena noga na tleh, je časovni potek sile z dvema maksimumoma nujen, saj mora v najvišji legi telesa rezultirajoča sila na telo, to je razlika med silo tal na nogi in silo teže, kazati navzdol, v najnižji legi pa navzgor.

Koliko energije rabimo za hojo ali tek? Sama mehanika ne more dati odgovora na to vprašanje. Pri hoji in teku se mehanska energija telesa, ki je enaka vsoti kinetične energije in potencialne energije v težnostnem polju, periodično spreminja. Vendar nam poznanje časovnega spreminjanja mehanske energije pove razmeroma malo o tem, koliko energije rabi telo za gibanje. Oglejmo si enostavnejši primer dvigovanja uteži. Pri dvigovanju opravlja telo "pozitivno" delo, ker potencialna energija uteži raste, in rabi energijo, ki je nujno večja od opravljenega dela. Pri napenjanju mišic se precej energije sprosti v obliki toplote. Pri počasnem spuščanju uteži, ko telo opravlja "negativno" delo, pa telo tudi porablja energijo. Spuščanje uteži je za telo ravno tako naporno in povzroča povečanje metabolizma v mišicah. Vidimo, da telo potrebuje energijo za opravljanje tako "pozitivnega" kot tudi "nega-



ativnega" dela. Energijo rabimo pri vsakem krčenju ali raztezanju mišic, pa tudi kadar je mišica napeta, čeprav se njena dolžina ne spreminja. Tipično porabo energije v časovni enoti ali porabljeno moč P pri hoji in teku v odvisnosti od hitrosti kaže slika 3.



Pri hoji narašča porabljena moč s hitrostjo hitreje kot linearno, pri teku pa je ta odvisnost skoraj linearna. Zaradi take odvisnosti porabljene moči od hitrosti sta enakomerna hoja oziroma tek v intervalu hitrosti $2 \text{ m.s}^{-1} < v < 3 \text{ m.s}^{-1}$, ko prehaja hoja v tek, energijsko neugodna. Manj moči porabimo v časovnem povprečju, če izmenoma hitro tečemo in počasi hodimo, tako da ostane povprečna potovalna hitrost ista.

Slika 3

Peter Gosar



Na poštних znamkah so tudi zelo lepi motivi z raznih športnih disciplin.

FILATELIJA

METI

Presek se je že dotaknil skokov in tekov. Kaj, ko bi se zdaj lotil druge lahko-atletske discipline — metov? Da bi metalec vrgel orodje čim dlje, ga pospeši do čim večje hitrosti in usmeri pod najugodnejšim kotom proti vodoravnici. Tako ločimo pri metu prvi del — *pospeševanje telesa* — in drugi del — njegov *let*. Kot se spodobi matematično—fizikalno—astronomskemu listu, bomo namesto "orodje" pisali kar "telo".

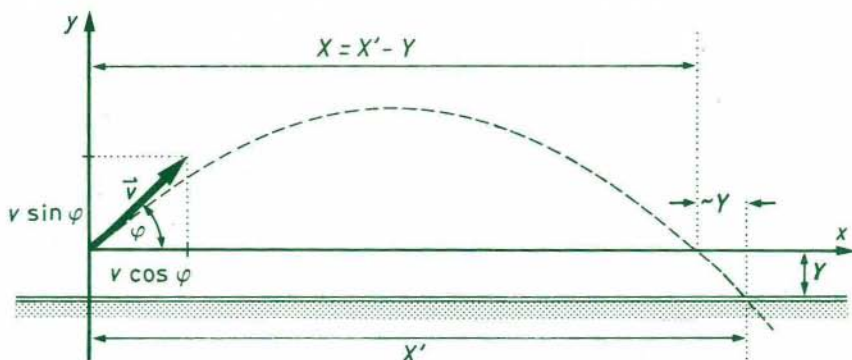
Med pospeševanjem deluje na telo sila metalčeve roke, ki opravi delo A . To delo določa hitrost v , s katero zapusti telo z maso m metalčevo roko:

$$A = \frac{1}{2} mv^2 \quad (1)$$

Kaj je sila? Intuitivno mislimo, da vemo, kaj ta beseda pomeni. Pojem je nastal ob dejanjih, kakor so potiskanje, metanje, vlečenje ali aktiviranje mišic, ki spremlja vsako tako dejanje. V splošni obliki pa pojem daleč presega te preproste primere.

A.Einstein, L.Infeld, *Razvoj fizike*,
Mladinska knjiga, Ljubljana 1962, str. 19

Pospeševanje. Kot je v mehaniki navada, izhajamo iz Newtonovega zakona: sila je masa krat pospešek. Zapišimo ga za primer, da se telo giblje premo, da pred pospeševanjem, ki se začne v času $t = 0$, miruje in da se sila F ne spremeni.



Slika 1. Razmere pri poševnem metu pod kotom 45°

nja s časom. Potem se tudi pospešek $a = v/t$ ne spreminja s časom; v je pri tem hitrost, ki jo ima telo v času t . V tem primeru povzema zakon enačba

$$F = mv/t$$

Pot s telesa dobimo, ko povprečno hitrost pomnožimo s časom. Povprečna hitrost je $(1/2)v$, saj je hitrost na začetku pospeševanja enaka nič, nato pa enakomerno narašča in doseže ob času t vrednost v . Tako imamo za pot

$$s = \frac{1}{2} vt$$

Pomnožimo to enačbo z zapisanim Newtonovim zakonom:

$$Fs = \frac{1}{2} mv^2$$

Produkt sile in poti vpeljemo kot *delo*, $A = Fs$, produkt polovične mase in kvadrata hitrosti pa kot *kinetično energijo telesa*, $W_k = (1/2)mv^2$. Ugotovili smo torej, kot pravi *izrek o kinetični energiji*, da je delo (edine) sile, ki pospešuje telo, enako spremembi kinetične energije (1). V našem primeru ima telo na začetku hitrost nič in kinetično energijo nič, tako da je sprememba kinetične energije kar enaka končni kinetični energiji.

Let. Let telesa obravnavamo kot *poševni met*. To je posebna vrsta krivega gibanja, ki si ga mislimo razstavljeno na vodoravno in navpično gibanje. V vodoravni smeri se telo giblje enakomerno s hitrostjo v_x :

$$x = v_x t$$

v navpični pa enakomerno pospešeno s težnim pospeškom $-g$ (minus opozarja, da kaže pospešek navzdol) in z začetno hitrostjo v_y :

$$y = v_y t - \frac{1}{2} gt^2$$

Telo vržemo s hitrostjo v pod kotom φ proti vodoravnici, tako da je na začetku leta vodoravna komponenta hitrosti $v_x = v \cos \varphi$ in navpična $v_y = v \sin \varphi$. Iz enačbe za x izračunamo čas $t = x/v \cos \varphi$ in ga vstavimo v enačbo za y :

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} gx^2/v^2 \cos^2 \varphi$$

Krivulja, ki jo opisuje ta enačba, sodi med stožnice in jo imenujemo *parabolo*.

Če vržemo telo iz izhodišča $x = 0, y = 0$ (slika 1), pade na tla v oddaljenosti

$$x = 2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot v^2 / g = v^2 \sin 2\varphi / g$$

od izhodišča. (To je drugi koren enačbe $y = 0$, prvi je $x = 0$). Dolžina meta x je največja, če ima sinus največjo vrednost 1, $\sin 2\varphi = 1$, in je $\varphi = 45^\circ$:

$$X = v^2 / g$$

Pri metih v lahki atletiki pade telo v resnici na tla nižje, kot ga vrže metalec, in sicer za višino ramen Y . Ker je nagib tira tudi ob udarcu na tla približno enak 45° , dobimo dolžino meta v enaki višini X , tako da od prave dolžine X' odštejemo Y , torej $X = X' - Y$ (slika 1).

Dolžina meta je sorazmerna s kvadratom hitrosti, tako da je po enačbi (1) sorazmerna tudi z delom A :

$$A = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mgX$$

Zdaj smo si pripravili dovolj enačb, da se lahko lotimo svetovnih rekordov. S podatki za dolžino rekordnega meta in maso telesa izračunamo hitrost telesa $v = (gX)^{1/2}$ – pri tem vzamemo za težni pospešek kar 10 m/s^2 – in njegovo kinetično energijo $W_k = (1/2) mgX$, ko ga metalec spusti. Pri tem upoštevamo dolžino meta X v enaki višini in zato popravimo dolžino rekordnega meta: $X = X' - Y$. Za višino ramen vzamemo približno $Y = 1 \text{ m}$.

Preglednica kaže, da je kinetična energija telesa pri ustrezni disciplini pri ženskah skoraj pol manjša kot pri moških. Relativna razlika je vsekakor večja kot pri tekih. Zato primerjamo moške discipline med sabo in ženske med sabo. Misel, da opravijo vrhunsko trenirani tekmovalci in vrhunsko trenirane tekmovalke pri metu na telesu enako delo, približno velja za disk in kroglo, ne pa za kopje in kladivo.

Kladivo je sploh nekaj posebnega. Metalec namreč pri metu kladiva vrže kroglo z enako maso kot pri metu krogle, le da je ta krogla pritrjena na 1,2 m dolgi žici. Žica ima vlogo nekakšnega vzvoda, ki omogoči metalcu, da zakroži okoli navpične osi skozi težišče krogle in svojega telesa in tako veliko učinkoviteje zavijti kroglo. Poleg tega si pri tem pomaga z obema rokama, medtem ko uporablja v drugih disciplinah eno samo roko. Tudi pri metanju diska in krogle

Disciplina	Masa telesa telesa m	Dolžina rek. meta X'	Hitrost v	Kinetična energija W_k	Ocena za silo F
moški					
kopje	0,8 kg	99,72 m	31 m/s	400 J	400 N
disk	2	71,86	27	710	710
krogla	7,257	22,22	15	770	770
kladivo	7,257	84,14	28	3000	3000
ženske					
kopje	0,6	74,76	27	220	220
disk	1	73,26	27	360	360
krogla	4	22,45	15	430	430

zakroži metalec okoli navpične osi, a mnogo manj učinkovito. Pri metu kopja zakroži roka okoli vodoravne osi. Pred časom so tudi kopje poskusili metati iz obrata, a so ta način metanja kmalu prepovedali.

Kinetična energija telesa je v trenutku, ko telo zapusti metalčevo roko, enaka delu sile roke. Če vzamemo, da se sila roke med pospeševanjem ne spreminja, in ocenimo pot s , na kateri roka pospešuje telo, z 1 m, dobimo oceno za silo roke, navedeno v zadnjem stolpcu preglednice. Sila je tem večja, čim večja je masa telesa. Metalec krogla ali diska deluje na kroglo ali na disk s približno tolikšno silo, kot da bi v eni roki držal dvignjeno utež za 77 ali 71 kg. Po tem tudi razumemo, zakaj na kopju opravi sila roke manjše delo. Kopje se zaradi majhne mase razmeroma hitro umika roki, tako da ta ne more delovati nanj s polno silo. Pri podrobnejšem obravnavanju bi bilo treba upoštevati, da je sila roke odvisna od hitrosti telesa, na katero deluje.

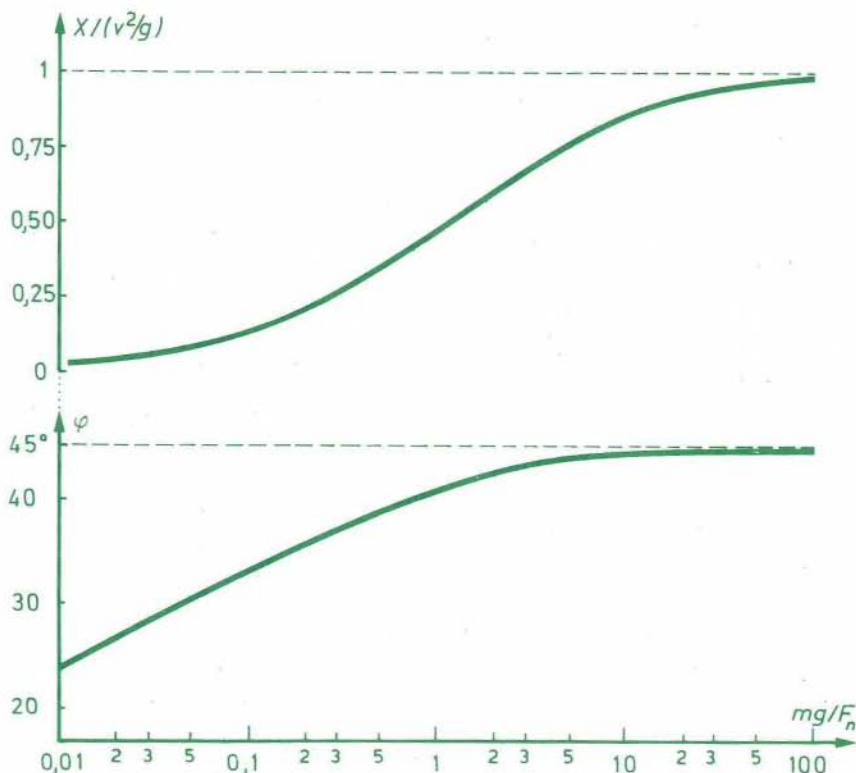
Doslej smo molčali o *zračnem uporu*. To silo je v računih težavno upoštevati. Pri hitrosti, ki jo doseže telo pri metih, je zračni upor sorazmeren s kvadratom hitrosti. Zato so enačbe za gibanje, ki ga upoštevajo, dokaj zapletene. Upor vsebuje namreč kvadrat velikosti hitrosti, tako da nastopa v enačbi za gibanje v vodoravni smeri tudi navpična komponenta hitrosti in v enačbi za gibanje v navpični smeri tudi vodoravna komponenta hitrosti.

Zračni upor. V razmerah, kakršne nas zanimajo pri metih, velja za zračni upor kvadratni zakon: Upor F_u je sorazmeren s kvadratom hitrosti telesa, s koeficientom upora c_u , ki ga določa oblika telesa, s čelnim presekom telesa S in z gostoto zraka ρ :

$$F_u = \frac{1}{2} c_u \rho v^2 S$$

Hitro lahko ocenimo razmerje med zračnim uporom kopja in zračnim uporom krogle. Koeficient upora za kroglo je $c_u = 0,45$, najmanjši koeficient za telo ribje oblike je 0,04, za kopje pa vzamemo 0,06. Čelni presek kopja je krog z radijem 1,3 cm, čelni presek krogle pa krog z radijem 6 cm. Tako dobimo za razmerje uporov

$$\begin{aligned} (F_u)_{kopja}/(F_u)_{krogla} &= \left(-\frac{1}{2} c_u \rho v^2 \pi r^2\right)_{kopje} / \left(-\frac{1}{2} c_u \rho v^2 \pi r^2\right)_{krogla} = \\ &= (0,06 \cdot 1,3^2 \cdot 31^2) / (0,45 \cdot 6^2 \cdot 15^2) = 0,03 \end{aligned}$$



Slika 2. Izračunana odvisnost kvocienta med doseženo dolžino meta in dolžino meta brez zračnega upora od kvocienta med težo krogle in uporom pri začetni hitrosti (a). Izračunana odvisnost najugodnejšega kota od kvocienta med težo krogle in uporom pri začetni hitrosti (b). Sliki sta posneti po navedenem članku J.A. Zafiraja in J.R. Sanmartina.

Pri kopju se zračni upor precej manj pozna kot pri krogli.

Kako pa se pozna zračni upor pri gibanju krogle? Sposodimo si rezultate iz članka J.A. Zafiraja in J.R. Sanmartina *Influence of Air Drag on the Optimal Hand Launching of a Small, Round Projectile* (Vpliv zračnega upora pri metu majhnega, okroglega telesa z roko) v reviji *American Journal of Physics* **50** (1982) 59. Slika 2a kaže odvisnost kvocienta med izmerjeno dolžino meta X in dolžino meta v^2/g brez zračnega upora od kvocienta med težo krogle in uporom pri zračni hitrosti. Slika 2b pa kaže odvisnost najugodnejšega kota pri metu od kvocienta med težo krogle in uporom pri začetni hitrosti. Ko vstavimo poleg znanih podatkov še gostoto zraka $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, dobimo za upor pri začetni hitrosti $F_u = (1/2)c_u\rho v^2\pi r^2 = 0,5 \cdot 0,45 \cdot 1,2 \text{ kgm}^{-3} \cdot (15\text{ms}^{-1})^2 \cdot 3,14 \cdot (0,06\text{m})^2 = 0,69 \text{ N}$. Kvocient teže in upora je potemtakem $mg/F_u = 72,6 \text{ N}/0,69 \text{ N} = 105$. Z diagramov (slika 2a in 2b) razberemo, da sta pri tolikšnem kvocientu dolžina meta in najugodnejši kot tolikšna, kot da ne bi bilo zračnega upora.

Pri metu krogle zračni upor ne igra upoštevanja vredne vloge. Tako je tudi pri kopju. Nekoliko drugače je pri disku, a iz nekega drugega razloga. Disk z značilno obliko krožnika se med metom vrti okoli simetrijske osi in os ostane med letom približno sama sebi vzporedna. Zaradi tega disk nekoliko spominja na letalsko krilo in leti dlje, kot če se ne bi vrtel (slika 3).



Slika 3. Dolžina meta diska se podaljša zaradi vrtenja. Slika je vzeta iz znanega učbenika R.W. Pohla *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Springer, Berlin 1955, str. 74, iz poglavja o vrtavkah. Podaljšek dolžine meta je narisana pretirano. Da je vrtenje diska bistveno za nemoten let, pa se lahko hitro prepričamo, če vržemo podstavek za pivo kot disk. Podstavek zavije s poti. Zračni upor namreč prehitro zavre njegovo vrtenje, medtem ko ne zavre zaznavno vrtenje diska z mnogo večjo maso.

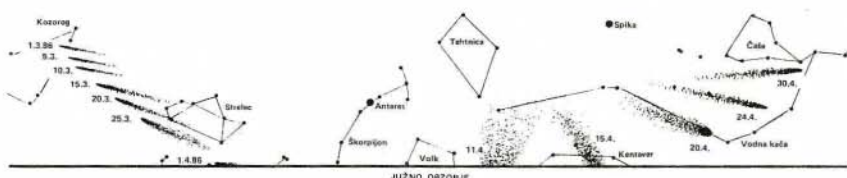
Čeprav se je sestavek ukvarjal z zelo splošnimi vprašanji, upajmo, da ni dolgočasil bralcev. Bolj zanimive, a tudi težje postanejo zadeve, ko poskuša fizik pripomoči vrhunskemu metalcu do daljšega meta. Tedaj natanko opazuje gibanje metalca, pri čemer si pomaga s hitro filmsko kamero, s precej bolj zapletenimi enačbami in – z računalnikom.

Janez Strnad

ASTRONOMIJA

HALLEYEV KOMET SE PRIBLIŽUJE

Vsaki tri četrstoletja, točneje 74 do 79 let, se vrne k Soncu svetla repatica Halleyev komet. Ob sedanjí vrnitvi so ga prvi opazili ameriški astronomi na posnetku, ki je bil narejen z velikim pet metrskim daljnogledom na Mt. Palomarju 16. oktobra 1982. Komet je bil tedaj oddaljen od Sonca še več kot 10 a.e. (astronomska enota je srednja oddaljenost Zemlje od Sonca). Za opazovalce z naših zemljepisnih širin ta vrnitev ni posebno ugodna. Ker pa so napovedi pri kometih, posebno glede njihovega sija, tvegane, nas utegne tudi Halleyev komet presenetiti.



Dne 26. novembra se bo približal Zemlji na 0,62 a.e. Po predvidevanjih naj bi bil tedaj že tako svetel, da bi bil viden z manjšim daljnogledom (dvoogledom) kot meglica s svetlim jedrom in komaj izraženim repom. Takrat bo vso noč nad obzorjem.

Prve dni decembra bo v ozvezdju Rib, viden na večernem nebu. Navidezni sij se mu bo le počasi večal, ker se bo približeval Soncu, hkrati pa oddaljeval od Zemlje. V zadnji tretjini decembra bo prešel v ozvezdje Vodnarja in bo viden kmalu po zahodu Soncu nad južnim obzorjem.

Najugodnejši za opazovanje bo v prvi tretjini januarja, ko naj bi bil že toliko svetel, da bi ga pri čistem ozračju in daleč od luči lahko opazovali tudi s prostimi očmi. Nato se bo naglo približeval Soncu, njegov sij bo hitro naraščal, rep se mu bo daljšal, se bo pa že izgubljal v večerni zarji. Po 22. januarju komet ne bo viden.

V začetku marca se bo pojavil na jutranjem nebu v ozvezdju Kozoroga. Viden bo le krajši čas pred vzhodom Sonca, nizko nad jugovzhodnim obzorjem. Njegov sij bo stalno naraščal, toda po 20. marcu iz naših krajev ne bo viden.

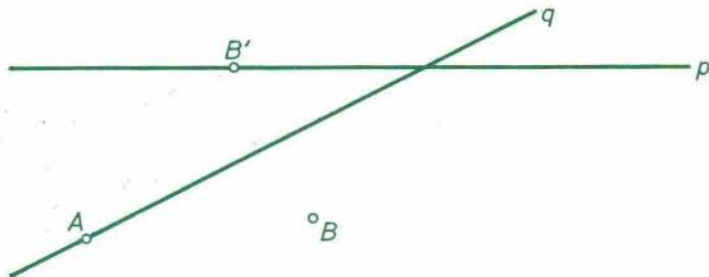
Dne 11. aprila se bo komet spet približal Zemlji, to pot na 0,42 a.e. Tedaj bo po napovedih najsvetlejši. Pri nas bo viden šele v drugi polovici aprila na večernem nebu. Nato bo njegov sij naglo slabel in ob koncu aprila ne bo več viden s prostim očesom.

Pavla Ranzinger

»NAČRTOVANJE« S PREPOGIBANJEM PAPIRJA

Običajno je pri geometrijskih načrtovalnih nalogah dovoljena uporaba ravnila (brez merila) in šestila. Pravimo, da lahko neko točko načrtamo, če jo lahko dobimo kot presečišče premic in/ali krožnic določenih z že načrtanimi točkami. Začetne načrtane točke predstavljajo podatki naloge.

Malce presenetljivo se izkaže, da lahko vse točke, ki se jih da načrtati z ravnilom in šestilom, dobimo tudi, če dovoljujemo le prepogibanje papirja in "buciko", s katero prenesemo pri prepogibu točko z ene strani papirja (simetrično) na drugo stran. Seveda so dovoljeni le prepogibi določeni z že "načrtanimi" točkami in premicami: prepogib skozi točki, simetrala med točkama, simetrala kota med premicama, pravokotnica skozi točko na premico, ... in še nekoliko zapletenejši prepogib (premica q na sliki) skozi dano točko A , tako da bo po prepogibu točka B' simetrična dani točki B ležala na dani premici p .



Ponavadi privzamemo, da je papir dovolj velik, da nanj padejo vse pomembne točke. Lahko pa si zastavimo tudi naloge, pri katerih vemo, da je papir (kvadratne oblike) dovolj velik le za točke, ki predstavljajo podatke in rezultat(e).

Ali bi znali s prepogibanjem "načrtati" pravilni šestkotnik z dolžino stranice, ki jo določata dani točki na papirju? Kaj pa trikotnik z dolžinami stranic $a = \overline{UV}$, $b = \overline{VX}$ in $c = \overline{XY}$, kjer so U, V, X in Y dane točke?

Vladimir Batagelj

Trikotni šotor na vrtu Tete Amalije – rešitev iz P-XII/4, str. 191

Tokrat smo žal prejeli le eno rešitev, ki nam jo je poslal *Aleš Hvala* iz Nove Gorice. Saj naloga ni bila težka, zahtevala pa je kar nekaj računanja. Alešu smo poslali za nagrado knjigo *Igre, grafika, zvoki* avtorjev S. Curran, R. Curnow.

Nalogo sem reševal s pomočjo računalnika, tako, da sem v ustrezen program, ki sem ga napisal v basicu, vstavljal možne koordinate. Najustreznejša je točka T(7,c), pri čemer je ploščina platna enaka 60,146 kvadratov.

Račun je potekal takole:

- 1) višina šotora

$$v^2 = 1^2 + 3^2$$

$$v = \sqrt{10}$$

- 2) dolžina stranic trikotnika v tlorisu

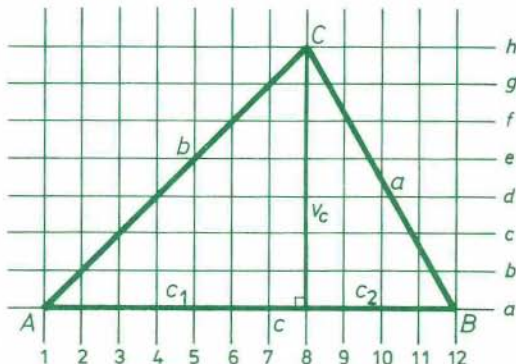
$$c = 11$$

$$b^2 = c_1^2 + v_c^2 = 7^2 + 7^2$$

$$b = \sqrt{98}$$

$$a^2 = c_2^2 + v_c^2 = 16 + 49$$

$$a = \sqrt{65}$$



- 3) razdalje med točko postavitve palice in oglišči

$$d_1^2 = e_4^2 + e_1^2 = 36 + 4$$

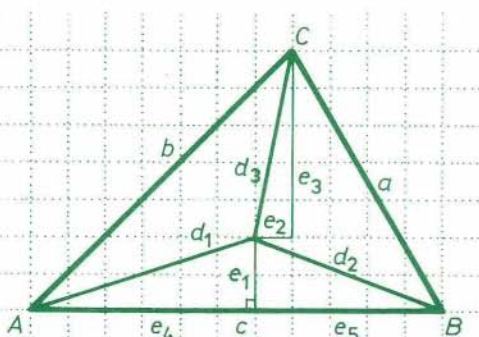
$$d_1 = \sqrt{40}$$

$$d_2^2 = e_1^2 + e_5^2 = 4 + 25$$

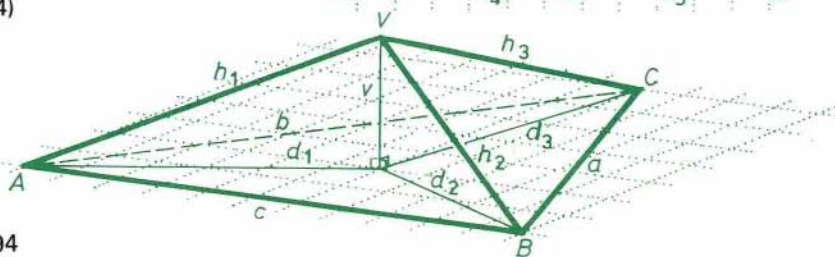
$$d_2 = \sqrt{29}$$

$$d_3^2 = e_2^2 + e_3^2 = 1 + 25$$

$$d_3 = \sqrt{26}$$



- 4)



4) razdalje med vrhom palice in oglišči

$$h_1^2 = d_1^2 + v^2 = 40 + 10$$

$$h_1 = \sqrt{50}$$

$$h_2^2 = d_2^2 + v^2 = 29 + 10$$

$$h_2 = \sqrt{39}$$

$$h_3^2 = d_3^2 + v^2 = 26 + 10$$

$$h_3 = \sqrt{36} = 6$$

5) ploščine posameznih trikotnikov (AVB , BVC , CVA) z uporabo Hero-novega obrazca

$$\Delta AVB: pl_1 = 20.579$$

$$\Delta BVC: pl_2 = 18.567$$

$$\Delta AVC: pl_3 = 21$$

$$pl = pl_1 + pl_2 + pl_3 = 60,146$$

Aleš, pošlji nam še program, s katerim si računal!

Opomba. Če bi se dalo postaviti palico v katerokoli točko, ne le v križišča med ploščami, bi lahko uporabili še malo manj platna. Najugodnejša točka je v tem primeru središče trikotniku včrtanega kroga. Polmer tega kroga je tedaj enak

$$\rho = \frac{2p}{ob} = \frac{77}{11 + \sqrt{98} + \sqrt{65}} = \frac{77}{28.962} = 2,659$$

in višina v_c stranske ploskve

$$v_s = \rho^2 + v^2 = 4,131$$

tako, da je površina platna

$$pl = v_s \cdot \frac{ob}{2} = 59,826$$

Peter Petek

Tokrat vam zastavljamo šahovsko uganko:

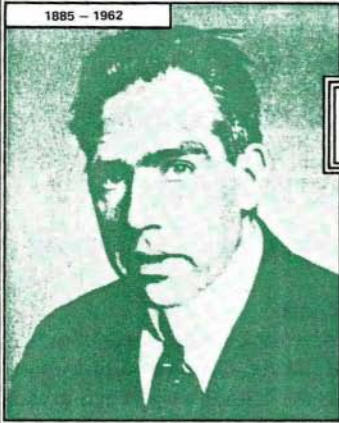
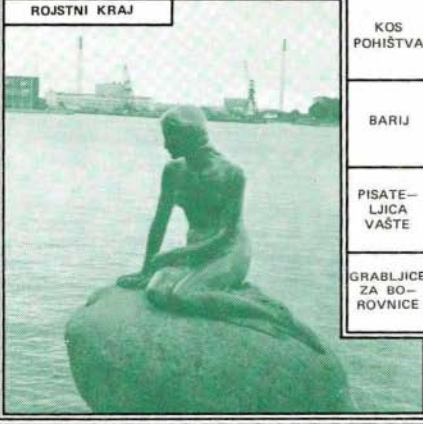
Matiraj v dveh potezah

Rešitve pošljite na naslov: Jadran-
ska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64,
Komisija za tisk DMFA SRS —
PRESEK za PIR do 1. januarja 1986.

Izidor Hafner



SLIKOVNA KRIŽANKA

1885 – 1962				SESTAVIL PAVLE GREGORC	ČLOVEK KI MESI	ALPINIST MAHKOTA	ZEMLJE– SLOVJE	NAŠI RAZGLEDI	JAZ (LATIN.)	REKA V VOJVO– DINI	DE VOZ (MNC)
				ENOTA ZA MERJENJE MAGNET. MOMENTOV							
				FIZIKALNA KOLIČINA							
				100				8			
				NEJEŠ– ČOST				KOLIČINA, DOLOČENA Z 1 PODAT– KOM			
									BOLGAR. M. IME		
									OMIKA– NOST		
	VAS NA KOPRSKEM	FIZIKAL. ENUTA				ORGAN VIDA				PLOSKOV– NE MERE	
		MESTO JV OD TORINA								NAPLAČILO	
PREGNANI UGANDSKI VODJA (MILTON)						GRŠKA ČRKA					
"KURJA POLT" (POMANJ.)						SODOBNIKI KELTOV					
NASAD V MESTU					PRIHOD V GOSTE	SL. SLIKAR (BOŽIDAR)					
						ŠVEDSKO MESTO					
ROJSTNI KRAJ				KOS POHIŠTVA						VEVERICI PODOBEN GLODALEC	TI R I
				BARIJ			TRETJA POTENCA	SKAND. M. IME	SLOV. MLADIN. PISATELJI– CA (ELA)		
				PISATE– LJICA VAŠTE					PLJAČA SLOVANOV		
									ALFRED NOBEL		
				GRABLJICE ZA BO– ROVNICE							

OB STOLETNICI ROJSTVA

NAKANA					EKSPLOZIVNO TELO	ORANJE	VAS V RIŽANSKI DOLINI	1	PODOLGOVAT KOS LESA
		NINO (LJUBKOVALNO)	DEL TEDNA				MORSKI SESALEC		
			OČE				BOKSAR RUSEVSKI		
			NASO OVID			IZBRANA DRUŽBA	DUŠA UMRLEGA NOSILNOST LADJE		
ALFI IPIČ			NESNAGA, ODPADKI					NOBELOVA ... ZA FIZIKO 1922	OKROGLA POSODA
VAN NKAR			OČRT						
	DEL FOTOAPARATA						NOGOMETNI KLUB VLADIMIR NAZOR		
	STANE ROZMAN	PODREDNI VEZNIK MUSLIM. SV. KNJIGA				ZLITINA JEKLA IN NIKLJA			
EKMOV. ČOLN						DRUŽABNI PLES			
EŽISER ČAZAN					1. IN 25. ČRKA "ČOLN" GRS		VRSTA ŽITA MELIŠČE		
	ODRGNINA CENE VIPOTNIK				GL. MESTO JORDANIJE SPODNJI				
			✕			EDVARD (KRAJŠE)			
			KIPARJEV IZDELEK			LIČILO			

FILATELIJA

Na vabilo iz 5. številke Preseka nam je poslala Eva LENKO iz Šentruperta (COŠ Slavko Šlander Prebold) kratke življenjepisne treh izumiteljev, katerih portreti so bili objavljeni na ameriških znamkah. Za četrtega smo tekst poiskali sami:

Nikola Tesla se je rodil 10.7.1856 v Smiljanu pri Gospiću. Bil je raziskovalec in izumitelj na področju radiotehnike in elektrotehnike. Srednjo šolo je obiskoval v Gospiću in v Karlovcu, tehnično šolo v Gradcu, univerzo pa v Pragi. Zaposlen je bil v Parizu in v Budimpešti. Leta 1884 je odšel v ZDA, kjer je 7.1.1943 tudi umrl.

V prvo fazo njegovega dela spadajo njegova temelja odkritja polifaznega sistema za prenos električne energije, v drugo pa odkritja visokofrekvenčnih in visokonapetostnih tokov.

(Več o N. Tesli smo že objavili v našem listu — Presek 4 (1976/78) str. 83–86, 150–153.)

Charles Steinmetz je bil nemško—angleški elektrotehnik. Rodil se je 1865 v Breslau v Nemčiji, umrl pa v Shenectadyju v državi New York 1923.

Od rojstva je bil grbav. Živel je osamljen in zapuščen, grela sta ga le njegova nadarjenost in njegova blaga narava. Nikoli ni pomišljal na poroko, kajti svoje podedovane napake ni hotel prenašati na naslednjo generacijo. Njegova zgodnja dela so obetala, da bo prinesel slavo domovini. Ker je bil socialist je prišel navzkriž z oblastjo. Dejstvo, da je bil Žid je to še poslabšalo. Leta 1889 je emigriral v Švico, nato pa je odšel v ZDA.

Leta 1893 je malo tovarno, v kateri je delal, kupila družba General Electric iz Schenectadya. Tam je ostal do konca življenja, splošno priznan za enega največjih umov na področju elektrotehnike. Pomen njegovega teoretičnega dela so se zavedali le malokateri strokovnjaki. Študij razelektritve je imel velik pomen in ta "umetna strela" je Steinmetzovo ime razširila tudi med laike.

Edwin Armstrong je bil ameriški elektrotehnik. Rodil se je 18.12.1890 v New Yorku, kjer je 1.2.1954 tudi umrl.

Še preden je dopolnil dvajset let, je naredil svoj prvi radijski oddajnik in začel oddajati signale. Vpisal se je na Columbijsko univerzo, kjer je pri Rupinu dokončal študij elektrotehnike (leta 1913). Med prvo svetovno vojno se je začel zanimati za metode zaznavanja letal. Naprava je prišla prepozno, da bi imela pomembno vlogo med vojno. Leta 1934 je postal profesor elektrotehnike na Columbijski univerzi. Leta 1939 je po šestih letih trdega dela rešil problem motenj.

Armstrong je bil velik prepirljivec. Zmeraj je bil prepričan, da se proti njemu kuje zarota. Leta 1954 je v napadu obupa ali depresije skočil skozi okno v smrt.

Philo T. Farnsworth (19.8.1906 — 11.3.1971) je bil ameriški tehnik, pionir televizije. Že kot petnajstletni študent je skonstruiral svoj prvi televizijski sistem, leta 1935 pa demonstriral celotni televizijski sistem. Skupaj je prijavil kar 165 patentov.

V prvi letošnji številki smo obljubili našim bralcem, da bomo objavili poslane znamke v naslednjih številkah. Na drugi in tretji strani ovitka objavljamo lepe in zanimive znamke iz astronavičke, katere nam je poslal Peter iz Trzina. Njegovih znamk je bilo resda največ, pa tudi izredno lepe so med njimi. Zaradi težav s prostorom smo njihove slike morali za 10 oz. 20% pomanjšati. Na četrti strani ovitka pa objavljamo znamke, ki smo jih dobili iz "različnih vetrov". Znamke z nebesnimi znamenji in s portreti fizikov Arhimeda, Newtona, Lavoisiera, A. Einsteina in M. Curie nam je prinesla iz Italije naša kolegica Dušica Boben, ki že nekaj let nazaj natipka tekst vsakokratne številke Preseka. Znamko s portretom našega največjega fizika J. Stefana smo dobili od kolega Š. Močilnika s celovške gimnazije. Tri znamke s portretom N. Kopernika, fizika R. Milikana in posnetek astronomskega observatorija v Palomaru pa nam je prinesel naš kolega Marko Petkovšek, ko se je vrnil iz ZDA. Kot smo omenili že v prvi številki, v prihodnje ne bi radi več objavljali raznih znamk s posnetki iz astronomskih poletov v vesolje, ker jih je preveč, čeprav so lahko izredno pisane, zanimive in lepe. Raje bi objavljali portrete znanih fizikov in matematično-fizikalnih—astronomskih objektov in instrumentov. Torej nekatere posebnosti iz življenja naših strok. V prihodnjih številkah bomo objavili še druge znamke, ki jih imamo na zalogi.

Ciril Velkovich

PISMA BRALCEV

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

NA IZPITU

Profesor: Katero je najboljšo vprašanje, ki se ga da zastaviti in kaj je najboljši odgovor nanj?

Študent: Najboljšo vprašanje, ki se ga da zastaviti, je to, ki ste ga pravkar postavili, najboljši odgovor pa je ta, ki ga prav zdaj dajem.

Izidor Hafner

JURIJ VEGA

je bil rojen 23.3.1754 v Zagorici pri Moravčah, umrl pa je 17.9.1802 na Dunaju. Po končani gimnaziji in liceju v Ljubljani je bil navigacijski inženir, učitelj matematike na topničarski šoli, kasneje pa je sodeloval kot stotnik v avstrijski vojski proti Turkom, Prusom in Francozom. Napisal je osem razprav iz matematike, fizike in astronomije, učbenik matematike v štirih delih ter sestavil sedemmestne logaritemsko-trigonometrične tablice, ki so izšle s prevodi in ponatisi v skoraj 300 izdajah. Najpomembnejše Vegovo delo je veliki desetmestni logaritmovnik, ki je prvič izšel leta 1794. Med drugim je pravilno izračunal število π na 140 decimalk natančno. Bil je član petih evropskih znanstvenih ustanov, zaradi vojaških zaslug je izredno hitro napredoval v majorja in podpolkovnika, kasneje pa je dobil še druga visoka državna priznanja.

Zaradi vseh teh velikih zaslug na področju matematike ga Slovenci, pa tudi Avstrijci in drugi narodi uvrščajo med slavne može osemnajstega stoletja. Tudi v Preseku smo že večkrat pisali o njem. V letošnjem letu pa ga bomo še enkrat počastili na programu ljubljanske televizije. Znani slovenski novinar Sandi Sitar, ki se veliko ukvarja z zgodovino naravoslovja in tehnike, je napisal izvirno slovensko dramo z naslovom *Moja žena Svoboda*. Za snemalno knjigo jo je priredil Andrej Stojan. V nadaljevanju objavljamo nekoliko prirejen odlolek iz uvodnih strani Sitarjevega rokopisa.

Ciril Velkovrh

Sandi Sitar, MOJA ŽENA SVOBODA

Slika cesarja Franca I. na slikarskem stojalu. Slikar jo dokončuje. Na prestolu z baldahinom cesar s krono in žezlom.

KOMORNIK: *Veličanstvo! Jurij Vega!*

CESAR: *Stopite naprej, baron.*

Vega, v podpolkovniški uniformi, z redom Marije Terezije, prihaja, s seboj nosi vzorce novih mer.

CESAR (slikarju): *Kar nadaljujte.*

Vega se prikloni.

CESAR: *No, kaj nam prinašate tokrat? So izšli novi logaritmi? Prav žal mi je, da nisem takrat sprejel Vašega posvetila. Napačen nasvet od strani, bi rekel. Bi rekel, da nimate le prijateljev ... No, torej? Logaritmi?*

VEGA: *Nove mere, veličanstvo.* (Vega nekoliko dvigne vzorce metra in kilograma.)

CESAR: *Tako? Francoske, menim.*

VEGA: *Res so iz Pariza.*

CESAR: *S Francozom smo spet v vojni, mar ne? Nekoliko neprimeren čas za francoske mere na avstrijskem dvoru, se Vam ne zdi tako, baron?*

VEGA: *Te mere so res iz Pariza. Povzete pa so po zemeljskih razsežnostih. Kjerkoli bi jih izmeril, bi bile enake.*

CESAR: *Vojna je, podpolkovnik, in Bonaparte močno pritiska ...*

VEGA (prizadeto): *Zagotavljam Vam! Tudi jaz bi bil na bojišču, če ...*

CESAR: *Dvajset let vojaške službe! Vega, Vi ste svoje dali; pustite zdaj mlajšim, da si tudi oni zaslužijo križec Marije Terezije. Matematike Vaše slave potrebujemo doma. Novih mer pa ne: le čemu bi jih še uvažali, ko imamo že svojih dovolj. Vsak večji kraj v našem cesarstvu meri z lastnimi klaftami in sežnji. Hočete še povečati to zmedo?*

VEGA: *Prav za to gre, veličanstvo, da se zmeda odpravi. Namesto vseh starih mer — ena sama, nova.*

CESAR: *To bi šele povzročilo težave!*

VEGA: *Enotnost mer?*

CESAR: *Mar pozabljate na korist, ki jo imajo nekateri od sedanjega stanja? Ti žive kar dobro, ko merijo vsak po svoje. Ne bi gledali prijazno, če bi se vmešal kdo z novimi merami. Niti name ne, če bi jih dovolil. Vam, ki jih prinašate, pa ...*

VEGA (še bolj prizadeto): *Veličanstvo! Vse te govorice ...*

CESAR: *Niso le govorice. Nekaterim vaša prizadevanja za nove mere niso všeč. Prav nič všeč!*

VEGA: *Zmeraj se najde kdo, ki ...*

CESAR: *V Vašem prizadevanju ne vidijo le matematika, ki mu je za novotarije, ampak nekdanjega kmečkega sinu, ki se je prehitro povzpел do plemstva!* (Vega že dvigne glavo, da bi odgovoril, toda ugrizne se v ustnico.)

CESAR: *Pazite se jih! Ti se ne šališ! Ko ne bi uživali našega varstva, bi bili nemara že ob glavo!*

VEGA: *Veličanstvo ...*

CESAR: *Da, lahko greste. — Sicer pa — stojte! Položite svoje mere tja. Morda imate vendarle prav in pride kmalu čas, ko jih bomo potrebovali.*

NEKAJ NALOG Z OTOKA VPRAŠANJ

Nekje v Tihem oceanu leži Otok vprašanj. Ime je otok dobil po tem, da otočani nikoli ne dajejo izjav, ampak le zastavljajo vprašanja, in to takšna, da je odgovor "da" ali pa "ne". Otočani so dveh vrst, vrste A in vrste B. Tisti iz vrste A zastavljajo samo vprašanja, na katera je pravilen odgovor "da", otočani vrste B pa vprašanja, na katera je odgovor "ne".

1.

Recimo, da srečaš otočana, ki te vpraša: "Ali sem vrste B?" Kaj lahko sklepaš?

2.

Zdaj pa recimo, da te vpraša, če je on vrste A. Kaj lahko izpelješ?

3.

Nekoč je Smullyan obiskal otok in srečal zakonca Petra in Violeto Rusell. Slišal je Petra, ko je nekoga vprašal: "Ali sva z Violeto oba vrste B?" Katere vrste je Violeta?

4.

Drugič je Smullyan srečal zakonca Gordon. Soprog je vprašal ženo: "Draga, ali sva midva različnih vrst?" Kaj lahko sklepaš?

Izidor Hafner

NALOGE ZA OGREVANJE

1. Pelji se z mestnim avtobusom (to seveda ni reklama za INTEGRAL). Kje v tem avtobusu najbolj trese in kje najmanj. Kako je to pri vozilu z dvema osema in kako pri vozilu s tremi (zglobnik)? Mislimo seveda na tresenje zaradi ceste in ne na tresenje, ki ga povzroča motor. Nariši sliko in razmisli, zakaj je tako.

2. Po televiziji sem spremljal svetovno prvenstvo v atletiki. Pri metu kladiva sem približno ocenil, da je kladivo, ki leti okoli 80 metrov daleč, v zraku nekako 4 sekunde. Ali bi znal izračunati začetno hitrost kladiva, če ga tekmovalec zaluča pod kotom 45° ?

NOVE KNJIGE

KOVAČ Polonca, VESOLJSKO JAJCE ALI $1 + 1 = 5$. Ilustr. Marjanca Jemec—Božič. — Ljubljana : DZS, 1985. — 1200.— din

Polonca Kovač je napisala že nekaj mladinskih del. Najraje se spominjam knjige "Andrejev ni nikoli preveč", katero smo večkrat prebirali v družinskem krogu večer za večerom v pustih zimskih dneh. Zadnja knjiga pa je za nas zanimiva zato, ker se avtorica v objavljenem poglavju drzne razlagati matematika; pri tem pa ni naredila napake. Odštevanje naravnih števil, množenje s pet, množenje z 11 pridejo v šoli in v vsakdanjem življenju zelo prav. Marsikomu te operacije ne bodo delale težav, če jih bo spoznal še v šali, ob branju zabavne zgodbe. Mlade bralce Preseka pa vabimo, da si ta pravila oziroma Polončine trike ogledajo bolj natančno in si skušajo razložiti uporabljena pravila.

Ciril Velkovrh

Klopotec in računska naloga

Nekega jutra je padla slana in pomorila vse rumene rože, listje na drevju pa se je pobarvalo zlato rumeno in rjasto rdeče. Potem je sivo nebo leglo tik nad živalski vrt in usul se je vztrajen, mrzel dež. Bilo je precej hladno, Mojmir in Vladimir sta si hukala v tace, Modra kokoška pa se je naščeperila in spravila jajce podse. Ko je termometer zjutraj trikrat zapovrstjo pokazal nič stopinj, je prišel čuvaj in jim odprl hišico.

»Gremo, gremo, mrcine,« je suval Mojmirja in Vladimirja in ju naganjal noter. Potem je zagledal Cufka in debelo pogledal. »Kaj pa ta debela afenca tukaj dela? Še požrli te bodo,« je rekel, vzdignil Cufka in ga zabrisal čez ograjo. Hu, kako se je Cufko razjezil! Skakal je ob ograji sem in tja, kazal jezik in preklinjal, da so letele sli-nice na vse strani. Ampak nič ni pomagalo, čuvaj mu je zažugal in udaril s palico po ograji, da je zazvenčala.

Potem se je spravil na vesoljsko putko. »Gremo, koklja, gremo,« je naganjal tudi njo. Potem je zagledal vesoljsko jajce. »Kakšen klopotec je pa to?« je rekel in ga hotel vreči stran. Kako se je Modra kokoška razburila! Nasršila je prav vsako svoje

modro peresce, kot da je naelektreno, in z njih so se utrinjale zvezdice, kljun se ji je srebrno svetil in čopka je postala čisto temno modra. In potem se je zakadila v čuvaja kot raketa.

Vladimir in Mojmir pa sta zarjovela in šla z odprtima gobcema proti čuvaju. Ta jo je jadrno ubral za ograjo, zaloputnil vratca in zaklel: »Madona! Buh kitajski! Šel bom za mehanika!« in jo pobrisal.

Vladimir, Mojmir in Modra kokoška so se z jajcem vred spravili v zakurjeno hišico, vendar se je Modra kokoška od razburjenja še kar tresla. »Pa tudi ti si kriv!« se je znesla nad jajcem. »Kaj se pa ne izvališ!«

Jajce pa tudi čivknilo ni.

Nekaj časa so molčali, le zunaj je praskljal dež. »Radi se imejmo, no,« je rekel Mojmir in Vladimir je zakašljaj »Hhrrrm«. In so še naprej molčali. Kar na lepem pa se je pri okencu pokazala kosmata tačka, za njo pa Cufkov obraz in trenutek zatem je že pobobnalo po vratcih in Cufko se je stlačil v hišico. »Kar ušel sem, pri nas doma je taka pijanka,« je rekel. »Potem pa že raje delam računske naloge.« In z Mufkom sta izvlekla računico in delovne zvezke.

»Kar strese me, če vidim računstvo,« je rekel Mojmir. »Za računanje sem zabit kot kakšna punca.«

»To so sami predsodki,« je zakodakala vesoljska putka, ki je bila še vedno nataknjena. »Prvič: nihče ni zabit za računanje!«

»Mojmir je že,« je zamomljal Vladimir. Modra kokoška ga je pogledala kot huda ura in ponovila: »Prvič: nihče ni zabit za računanje!! In drugič: dekleta niso nič bolj zabita kot fantje!«

»Ampak jaz res ne znam ničesar izračunati,« je rekel Mojmir milo. »Moji možgani enostavno niso za to.«

»Če tvoji možgani ne bi bili za to, potem ti enostavno ne bi bil več živ!« se je razburjala Modra kokoška. »Prvič: vsaki možgani imajo skoraj neomejene zmožnosti. Drugič: ali sploh veš, da možgani vsako sekundo delajo neverjetne matematične račune? Seštevajo, odštevajo in množijo vse svetlobne informacije in zvočne valove, ki jih dobe, izračunajo, da bitje srca in dihanje ustrezata potrebam tvojega telesa do konca repa in sploh...« Za trenutek je premolknila in ostro pogledala Mojmirja, da je zamomljal: »Ja, ja.«

»In sploh,« je nadaljevala, »kot sem že rekla, sposobnosti možgan so neomejene, pa naj gre za umetnost ali pa za matematiko. Samo zanemarjamo jih!« Umolknila je in veličastno sedla na gnezdo.

»Gotovo imaš prav,« je rekel Vladimir.

»Seveda imam prav,« se je odrezala. »Vse to je znanstveno dokazano.«

»Ampak če bi moral jaz napisati pesem — crknem,« je menil Vladimir.

»Rajši ne,« je rekel Mufko. »Rajši vprašaj mene kakšno odštevanje od sto ali pa od tisoč ali pa od deset tisoč in tako naprej.«

»No, koliko je 10000 manj 4512,« je bil Vladimir takoj za. Mufko je odgovoril, kot bi ustrelil: »5488.« In naj ga je Vladimir vprašal karkoli, Mufko je odgovoril v isti sapi, kot je slišal vprašanje.

»Ej, zvita bučka, moral si pogruntati kakšno zvijačo,« je čez čas menil Vladimir in odnehal.

»Sem jo, sem jo,« je bil Mufko ves ponosen. »In povedal jo bom stricu Mojmirju, da bo še on znal računati.« Šel je k Mojmirju in pričel šepetati: »Začeti moraš na levi

in ne na desni in namesto deset vzameš vedno devet, potem pa kar sproti odšteješ. Lej, če hočeš odšteti 76 od sto, narediš takole: devet manj sedem je dve, deset manj šest je pa štiri, torej je to 24. In tako naprej. Lahko odštevaš tudi od milijona.«

Mojmirju je kar gobec lezel narazen: »Jej, kako je Mufko pameten!« In ko je Vladimir spraševal njega, je šlo tudi njemu, kot bi orehe trl. »Saj je kar hecna zabava za deževno popoldne,« je rekel.

»Ampak tudi jaz imam trik!« je rekel Vladimir. »Katero število naj pomnožim s pet?«

»8520,« je rekel Mufko in Vladimir je pri priči ustrelil nazaj: »42600.«

»Kako si to izračunal? Povej, povej!« je sitnaril Mufko in tiščal v Vladimirja, dokler mu ni izdal skrivnosti. »Pripisem ničlo, to se pravi, da pomnožim z deset, potem pa — sek — na polovico.« Mufko je pomislil, preizkusil — in tudi njemu je šlo. Zdaj je Mufko zvito pogledal in rekel: »Ampak jaz vem še en trik. Kaj naj pomnožim z 11?«

»24,« je rekel Vladimir, Mufko pa je takoj butnil nazaj: »264.«

»Ampak kako, hudirja...« se je Vladimir počehljaj po glavi.

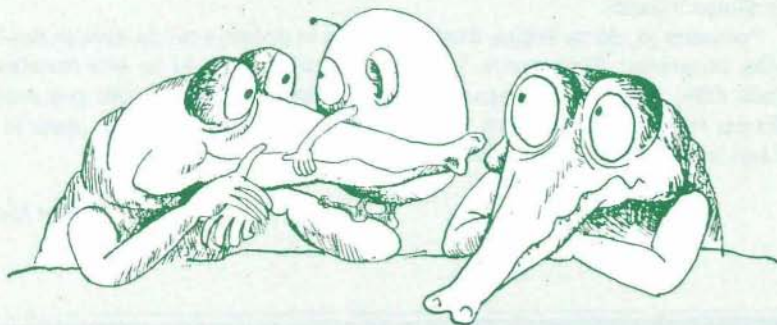
»Jaz mislim, da vem,« je zdaj rekel Cufko. »Kajne, da sešteješ?«

»Mh, vmes, na primer, med dva in štiri, vtaknem njun seštevek — in to je 264. Fino, ne?«

»Kaj pa, če je seštevek večji od deset?« se je pozanimal Mojmir.

»Jasna zadeva, potem pa eno prištejem prvi številki. Na primer, pomnožimo 86. Osem in šest je štirinajst, kajneda, in tisto eno dam k osem, to je potem 946. Hehe.«

Zdaj se je tudi Mojmir navdušil za stvar in pogruntal je trik za množenje s 50. In potem so se igrali, kdo hitreje ugame razliko do sto ali pa kdo hitreje razpolovi število. Zunaj pa je prav prijetno praskljal dež.



Zvečer, preden sta zaspala, sta se Mojmir in vesoljska putka po stari navadi spet malo pogovarjala. »Res si ne bi mislil, da znam kaj računati in da bi me računstvo lahko zabavalo,« je rekel Mojmir Modri kokoški.

»Da, da, življenje je polno presenečenj,« je rekla vesoljska putka. Ampak jaz sem še vedno jezna. Klopotec! Uh!« in je topotnila z nogo.

»V živalskem vrtu se moraš marsičesa navaditi,« je rekel Mojmir vdano. »Ampak naj bodo čuvaji še taka goveda, kaj nisi rekla, da so zmožnosti možgan neomejene?«

Lastniki hišnih računalnikov navadno nimajo težav s prvim korakom pri delu s svojim ljubljencem. Hitro se najde prijatelj, ki jim razkaže vse, od tega, kako priključimo računalnik, kako uporabljamo tipkovnico, pa tja do nalaaganja programov in igranja igrice. Ravno tako ni težko z nabavo programske opreme. Po oglasih je na kupe ponudb in razprodaj. Za isto vsoto kot damo v ZR Nemčiji za en sam povprečen program, jih pri nas dobimo kakih 50. Problemi pa se pojavijo, ko želimo zbrano programsko opremo tudi uporabljati. Brez priročnika pač ne gre, razen seveda pri igrah. Redki priročniki, ki jih dobimo, pa so v angleščini ali nemščini.

Knjiga Prvi ... in drugi korak prihaja kot nalašč. Najprej nam pove vse o operacijskem sistemu računalnika Commodore C64. Kdor že pozna njegove osnove, bo to z veseljem prebral in si zapolnil vrzeli v znanju. Sledi popoln opis commodorejevega basica V2, za katerega sicer vemo, da je zelo siromašen, a vseeno vsebuje dovolj reči, da vsega prav gotovo še ne vemo.

Ker basic V2 nima nobenih ukazov za grafiko, si moramo pomagati s programskimi pripomočki. Najbolj znan je *Simon's basic*. V knjigi pa so obdelani ukazi programa *Supergrafik*, ki je precej močnejši od *Simon's basica*. Na koncu knjige je obdelan še zvok in programiranje le-tega z ukazi, ki jih vsebuje *Simon's basic*.

Pohvalno je, da se knjiga izogiba pikanja in pokanja ter da opisuje dva kvalitetna programa: *Supergrafik* in delno *Simon's basic*, ki ju ima marsikateri lastnik C64, a ju zaradi neznanja ne ceni dovolj. Knjigo toplo priporočam vsakemu lastniku računalnika Commodore 64, ki želi delati na njem še kaj več kot le poganjati bolj ali manj zabavne igrice.

Bojan Mohar



Ljubljanska banka

hitreje do cilja

PRESEKOVA KNJIŽNICA

Naročnikom Preseka ponovno predstavljamo kompletni seznam brošur, ki so izšle v Presekovi knjižnici kot samostojne izdaje ali pa v okviru rednih številčk Preseka. Predstavitev je namenjena predvsem novim generacijam, ki starejših številčk lista za mlade matematike, fizike in astronome še ne poznajo. Vsebina brošur je dokaj raznolika in zanimiva za najrazličnejši okus bralcev. Priporočamo vam, da si iz seznama izberete, kar bi vas utegnilo zanimati, in to naročite v okviru skupinskega naročila na šoli, pri čemer boste imeli tako kot člani društva še vedno 20% popust na maloprodajne cene, ki so navedene v tem seznamu.

Med 23 brošurami sta prva in zadnja posvečeni življenju in delu dveh naših najpomembnejših znanstvenikov na področju matematike in fizike: prof. dr. Josipu Plemlju in Jožefu Stefanu. Tri brošure so že razprodane; v nadomestilo zanje smo pripravili že druge rokopise. Po tri dela so s področja matematike in astronomije. Prav tako imamo tri zbirke nalog za učence v višjih razredih osnovnih šol. V lanskem letu smo izdali štiri knjige s področja računalništva. Najobsežnejše pa je število knjig s področja fizike. Med temi je kar tri prispeval Janez Strnad. V kratkem bomo na vsako šolo poslali na ogled paket starejših del iz te knjižne zbirke s predlogom, da jih učitelji matematike in fizike ponudijo učencem in dijakom s primernim priporočilom.

Vaša naročila pričakujemo do 1.3.1986. Po tem času vam bomo poslali za nevrnjene brošure ustrezni račun.

Ciril Velkovrh

KOMISIJA ZA TISK DMFA SRS
61111 Ljubljana, pp 64
Jadranska c. 19, tel. št. (061) 265-061

Naslov:

Šola

Priimek in ime

Naslov (ulica, hišna številka, številka pošte, kraj)

Račun bomo poravnali do konca aprila 1986.

Datum Podpis in žig

PRESEKOVA KNJIŽNICA

Prosimo, da nam pošljete z 20% popustom naslednje brošure

izvodov	80%	100%
..... 1. Vidav I., Josip Plemelj – Ob stoletnici rojstva, 1975	100.—	125.—
..... 3. Prosen M., Astronomska opazovanja – Kako v astronomiji s preprostimi napravami opazujemo in merimo, 1978	100.—	125.—
..... 4. Strnad J., Začetku sodobne fizike – Od elektrona do jedrske cepitve, 1979	100.—	125.—
..... 5. Strnad J., Relativnost za začetnike – Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce, 1979	100.—	125.—
..... 6. Landau L.D., J.B. Rumer, Kaj je teorija relativnosti – Nobelovec predstavi spremeni- njene poglede na prostor, čas in maso, 1979	100.—	125.—
..... 7. Križanič F., Ukročena matematika – Zapoznalo opozorilo na računske zakone ali fižol namesto množic, 1981	100.—	125.—
..... 8. Ranzinger P., Presekova zvezdna karta, fotografije Bojan Dintinjana, 1981	100.—	125.—
..... 9. Strnad J., Začetki kvantne fizike – Od kvanta do snovnega valovanja, 1982	100.—	125.—
..... 10. Kuščer I., Enajsta šola iz fizike – Čuda se kažejo ob vsakem koraku, 1982	100.—	125.—
..... 11. Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol SR Slovenije, 1982	100.—	125.—
..... 13. Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol, 1983	100.—	125.—
..... 14. Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol, 1983	100.—	125.—
..... 16. Šporer Z., Oh, ta matematika, 1984	400.—	500.—
..... 24. Strnad J., J. Stefan, Ob stopetdesetletnici rojstva, 1985	100.—	125.—

NAŠE NEBO

1986

Astronomsko—geofizikalni observatorij v sestavi oddelka za fiziko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani in Seizmološki zavod Slovenije že vrsto let pripravljata podatke za brošuro NAŠE NEBO, v kateri so objavljene astronomske efemeride, popisi izstreljenih umetnih satelitov ter seznam močnejših potresov v Sloveniji in Jugoslaviji. Brošura je zanimiva predvsem za udeležence šolskih astronomskih krožkov, astronomskih društev ter drugih ljubiteljev astronomije.

Tudi letos bomo poslali to brošuro takoj po izidu na vsako srednjo in osnovno šolo. Priloženi račun bo namenjen šolski knjižnici. Učitelje prosimo, da brošuro priporočijo tudi učencem in dijakom. Nadaljnje izvode naročite s priloženo naročilnico. Cena brošure je 500.— din. Člani društva in naročniki Preseka pa jo lahko dobijo pri skupinskem naročilu z 20% popustom za 400.— din. Če poslane brošure ne boste uvrstili v šolsko knjižnico, jo vključite med naročila za učence, oz. vas prosimo, da nam jo vrnete.

Ciril Velkovrh

..... odreži.

NAROČILNICA

Podpisani (priimek in ime — s tiskanimi črkami)

ali naziv šole

kraj, ulica, hišna številka

poštna številka, pošta

Prosimo, da nam pošljete izvodov brošure NAŠE NEBO 1986.

Datum Podpis naročnika

NOVE KNJIGE

Richard Pawson, KNJIGA O ROBOTIH. — Ljubljana : ZOTKS in Mladinska knjiga, 1985

Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije je s pomočjo Mladinske knjige izdala izpopolnjen prevod knjige Richarda Pawsona KNJIGA O ROBOTIH. Knjiga z bogatim izborom fotografij in skic popelje bralca skozi zgodovino strojev — avtomatov do današnjih industrijskih robotov. Drugi del knjige je namenjen projektom, ki jih lahko sestavi bralec sam s pomočjo Lego ali Fisher sestavljanek in računalnikov Spectrum ali Commodore. Ker verjetno imajo našete pripomočke že večinoma na naših šolah, smo se za tak podvig odločili z namenom, da posodobimo izobraževalne vsebine naravoslovnih in tehničnih predmetov in vzporednih dejavnosti v prostem času — šolskih krožkih.

Knjiga bo natisnjena v nakladi 5000 izvodov, namenjena pa je mladini od 10. do 18. leta.

Da ne bi nastal vtis med mladimi, kot da se pri nas nič ne dogaja na tem področju, smo se v soglasju z angleško založbo Windward odločili, da knjigo dopolnimo s poglavjem, v katerem smo predstavili dosežke naših raziskovalcev in tehnikov. Cena knjige je v prednaročilu 3.800.— din, po izidu pa 4.900.—din. Za naročnike Preseka velja prednaročniška cena tudi po izidu.

NAROČILNICA

ZVEZA ORGANIZACIJ ZA
TEHNIČNO KULTURO SLOVENIJE
61001 Ljubljana, Lepi pot 6, pp 99
tel. št. (061) 213-743

Podpisani (priimek in ime, tiskano)

.....
Točen naslov

.....
Sem reden naročnik Preseka. Nepreklicno naročam KNJIGO O ROBOTIH po ceni 3800.— din. Znesek bom poravnal takoj po prejemu računa. Prosim, da mi knjigo pošljete takoj po izidu.

Kraj in datum Podpis

RAZUMLJIVO IN PREPROSTO Z OSEBNIM RAČUNALNIKOM

je skupen naslov zbirke štirih priročnikov za delo z osebnim računalnikom in so skupna izdaja MK, DE, ZOTKS in DMFA SRS. Originalne knjige so napisali strokovnjaki Peter Lafferty, Susan Curran in Ray Curnow, iz angleščine pa so jih prevedli in priredili Marija Oblak, Borut Lenarčič, Janez Uratnik, Andrej Grebenc ter sodelavci Preseka Vladimir Batagelj, Tomaž Pisanski, Bojan Mohar ter Bojana in Jernej Kozak. Vse štiri knjige sodijo tudi v zbirko PRESEKOVA KNJIŽNICA in nosijo naslednje naslove:

- 18. IGRE, GRAFIKA IN ZVOKI**
- 19. PRVI KORAKI V BASICU**
- 20. UVOD V RAČUNALNIŠTVO**
- 21. UČENJE Z RAČUNALNIKOM**

Priročniki so dober vodič v računalništvo za začetnike. So razumljivo, praktično in zanimivo branje za starejše in otroke, učence in učitelje, študente in poslovneže, skratka za vsakogar, ki se želi naučiti abecede računalništva in mu računalnik pomeni več, kot samo novo igračo. Še posebej priporočamo vse štiri knjige učencem, ki na šolah obiskujejo računalniške krožke.

Cena kompleta je 4400.— din. Naročniki Preseka pa jo lahko s skupinskim naročilom še vedno dobijo za 3200.— din. Priloženo naročilnico pošljite na enega od naslovov:

ZVEZA ORGANIZACIJ ZA TEHNIČNO KULTURO SLOVENIJE,
Ljubljana, Lepi pot 6
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS,
Ljubljana, Jadranska 19

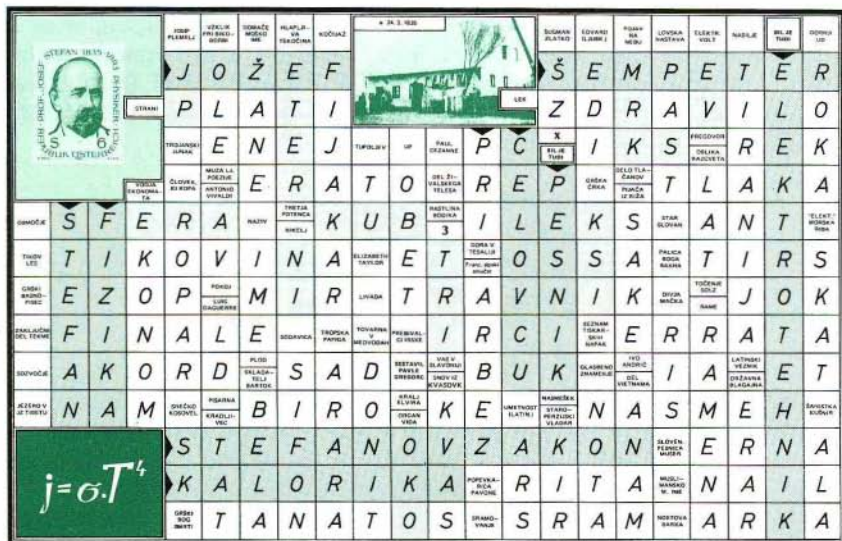
Ciril Velkovrh

Prosimo, da nam pošljete na naslov

priimek in ime
šola
Točen naslov
..... izvodov RAZUMLJIVO IN PREPROSTO Z OSEBNIM RAČU-
NALNIKOM. Zneske bomo poravnali takoj po prejemu računa.
V posebnih primerih lahko dobite ali naročite tudi posamezne knjige, po
800.— din.

Kraj in datum Podpis naročnika

SLIKOVNA KRIŽANKA "OB STOPETDESETLETNICI ROJSTVA " — rešitev iz P—XIII/1, str. 32



Strnad Janez, JOŽEF STEFAN : OB 150—letnici rojstva. —
Presek XIII/5. — (Presekova knjižnica ; 23)

Letos praznujemo 150. obletnico rojstva največjega slovenskega fizika Jožefa Stefana. Kot koroški Slovenec je študiral in ustvarjal predvsem na Dunaju. Zato ga slavijo tudi v Avstriji, kjer so med drugim že izdali poštno znamko z njegovim portretom. Pri nas je bilo v mladinskih in strokovnih časopisih objavljeno že več krajših prispevkov. Janez Strnad pa je za naš list napisal daljši tekst. V prvem delu je v zanimivem besedilu opisal Stefanovo življenje, v drugem delu pa opisuje predvsem odmeve na Stefanova znanstvena dela. Brošura bo izšla še letos kot peta številka Preseka. Redni 3. in 4. številka pa bosta izšli spomladi.

Ciril Velkovrh

29. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Republiško tekmovanje je bilo v soboto, 6. aprila, v prostorih *Srednje tehniške in naravoslovne šole* v Postojni. V prvem razredu je tekmovalo 53 učencev, v drugem 29, v tretjem in četrtem pa po 32 učencev, skupno torej 146 učencev. Tekmovalce sta pozdravila predsednik Skupščine občine Postojna *Viljem Garmuš* in sekretar Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli *Gorazd Lešnjak*. Kot je že običaj, so imeli tekmovalci za reševanje naslednjih nalog dve uri in pol časa.

PRVI RAZRED

1. V kvadratu $ABCD$ leži točka M , za katero velja, da je ploščina štirikotnika $ABCM$ trikrat večja od ploščine štirikotnika $AMCD$. Poišči geometrijsko mesto vseh točk M s to lastnostjo.
2. Naj bosta a in b naravni števili, D njun največji skupni delitelj in v njun najmanjši skupni večkratnik. Dokaži, da za vsako naravno število n velja:

$$a^n + b^n \leq D^n + v^n$$

3. Pokaži, da je število 101010101 sestavljeno v vsakem številskem sestavu.
4. V skupini stotih ljudi ima vsakdo vsaj 67 znancev. Če privzamemo, da so znanstva vzajemna, dokaži, da obstajajo vsaj štirje člani te skupine, ki se vsi poznajo.

DRUGI RAZRED

1. V ostrokotnem trikotniku ABC se višine iz oglišč sekajo v točki V . Nožišče višine iz A označimo z A_1 , nožišče višine iz B pa z B_1 . Dokaži, da v primeru, če je $\overline{AB} = \overline{VC}$, daljica A_1B_1 razdeli trikotnik ABC na ploščinsko enaka dela. Ali to velja tudi za pravokotne trikotnike?
2. Tri različna realna števila a, b in c zadoščajo zvezi

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$$

kjer je p realno število.

- a) Določi vsa možna števila p .
- b) Pokaži, da velja $abc + p = 0$.

3. Naj bosta x_1 in x_2 oba korena enačbe $x^2 - 6x + 1 = 0$. Dokaži, da za vsak n iz $\mathbf{N}$ velja: $x_1^n + x_2^n \in \mathbf{Z}$.

4. V enakostraničnem trikotniku s stranico z dolžino 15 leži 111 točk. Pokaži, da obstaja tak krog s premerom $\sqrt{3}$, da vsebuje vsaj tri izmed teh točk.

TRETJI RAZRED

1. V kroglo s polmerom r včrtamo dve največji mogoči enaki krogli. V preostali del prvotne krogle včrtamo nato manjšo kroglo tako, da se dotika prvotne krogle in obeh najprej včrtanih krogel. V preostanek včrtamo še toliko tej krogli enakih krogel, kolikor je mogoče. Pokaži, da vsota prostornin obeh večjih in vseh tako dobljenih majhnih krogel ne presega polovice prostornine prvotne krogle.

2. Poišči vse polinome p in vsa nenegativna cela števila k , za katera velja, da je za vsak realen x

$$p(p(x)) = (p(x))^k$$

3. Pokaži, da za vsako realno število x in za vsak $n \in \mathbf{N}$ velja:

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$$

Pri tem $[x]$ pomeni tisto celo število, določeno z x , za katerega je $[x] \leq x < [x] + 1$.

4. Naj bodo a, b in c vsi koreni enačbe $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

a) Pokaži, da so a, b in c različna števila.

b) Pokaži, da je za vsak $n \in \mathbf{N}$ izraz

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} + \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a}$$

celo število.

ČETRTI RAZRED

1. Zaporedje $\{a_n\}$ realnih števil je podano z rekurzivno formulo

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$$

in začetnima členoma $a_1 = 6$ in $a_2 = 34$. Pokaži, da noben člen tega zaporedja ni deljiv s 5.

2. Utemelji odgovor na vprašanje: katero izmed števil e^π in π^e je večje?

3. Za polinom p z realnimi koeficienti velja, da je za vsak x iz $\mathbf{R}$ $p(x) \geq 0$. Dokaži, da obstajata takšna polinoma a in b z realnimi koeficienti, da je za vsak x iz $\mathbf{R}$: $p(x) = a^2(x) + b^2(x)$.

4. Za skupino $2n$ ljudi velja, da se med poljubnimi tremi člani te skupine poznata vsaj dva. Če vemo, da so znanstva vzajemna, dokaži, da je v tej skupini vsaj $n^2 - n$ znanstev.

Po tekmovanju so si udeleženci ogledali razstavo del slovenskega fizika *Lava Čermelja* v šolski knjižnici, nato so obiskali Postojnsko jamo in se razvedrili ob kvizu na računalniku. Pregled rešitev tekmovalnih nalog je bil zaradi številnih izvirnih poti reševanja zamuden, zato vsi tekmovalci niso mogli pričakati razglasitve rezultatov. Tokrat so se najbolje odrezali:

V prvem razredu:

1. nagrada: Andrej FAJFAR, Tomaž SLIVNIK in Tomaž VOLK, vsi s SNŠ Ljubljana; **3. nagrada:** Borut JAMNIK, SPNMŠ Koper; Mojca KUKAR, SNŠ Ljubljana; **pohvala:** Simon ABOLNAR, TSC B.B. Nova Gorica; Renato BERTALANIČ, SCTPU Murska Sobota; Aljoša CREVATIN in Alenka MEHLE, SNMŠIUJ Piran; Bogdan HORVAT, SŠTZU B.K. Novo Mesto; Martina KRAMAR, NSC Nova Gorica; Andrej MIKSIČ, SNŠ M.Z. Maribor; Bor PLESTE-NJAK, Ambrož PONDELEK in Aleš TOMAŽEVIČ, vsi s SNŠ Ljubljana;

V drugem razredu:

2. nagrada: Peter ANASTASOV in Jure BAJC, oba s SNŠ Ljubljana; Rado KLEMENČIČ, SŠPRNMU Kranj; **3. nagrada:** Mateja ŠAJNA, NSC Nova Gorica; **pohvala:** Edvin BOŠKIN, SPNMŠ Koper; Tomaž JARM, Bojan KUZMA in Gorazd POBERAJ, vsi s SNŠ Ljubljana; Matej PODBREGAR in Blaž ZMAZEK, STŠ Celje; Renata POŽUN, SENMPŠ Brežice;

V tretjem razredu:

1. nagrada: Matjaž ŽELJKO, SŠR Ljubljana; **2. nagrada:** Jože FABČIČ, STNŠ Postojna; Damjana KOKOL, SŠPRNMU Kranj; **3. nagrada:** Pavle POPOVIČ in Marko TOPIČ, oba s SNŠ Ljubljana; **pohvala:** Dušan BABIČ, Grega CIGLER in Primož GABRIJELČIČ, vsi s SNŠ Ljubljana; Peter LEVART, SŠR Ljubljana; Dejan LIKÓVIČ, STŠ Celje; Roman NOVAK, SŠPTNU Novo mesto; Primož PODGORNIK, SEŠ Ljubljana;

V četrtem razredu:

3. nagrada: Izidor JEREBIČ, SŠPRNMU Kranj; Martin JUVAN, SNŠ Ljubljana, Sašo STRLE, SŠE Ljubljana; **pohvala:** Toni BIASIZZO, STNŠ Postojna; Breda CESTNIK, Roman DRNOVŠEK in Miro MASNOGLAV, vsi s SNŠ Ljubljana; Barbara GUŽIČ in Boris ZGRABLJIČ, oba s SPNMŠ Koper; Sandi PARKELJ, SGŠ I.K. Ljubljana; Primož RUTAR in Miha ŠKARABOT, oba s SNŠ M.Z. Maribor.

Organizacijo tekmovanja so finančno omogočile delovne organizacije iz Postojne.

Martina Koman

26. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

26. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike je tokrat organiziralo Društvo matematikov in fizikov Črne gore. Tekmovanje je bilo v CETINJU od 25. do 28. aprila 1985. Sodelovalo je 116 učencev iz vseh republik in obeh pokrajin. Slovenijo je zastopalo 14 tekmovalcev: iz prvega razreda Tomaž SLIVNIK, Andrej FAJFAR in Tomaž VOLK, iz drugega razreda Jure BAJC, Peter ANASTASOV, Mateja ŠAJNA in Rado KLEMENČIČ, iz tretjega razreda Matjaž ŽELJKO, Damjana KOKOL, Jože FABČIČ in Marko TOPIČ in iz četrtega razreda Izidor JEREBIČ, Martin JUVAN in Roman DRNOVŠEK. Vodil jih je asisten Boris LAVRIČ, zastopnik Slovenije v zvezni tekmovalni komisiji pa je bil Aleksandar JURIŠIČ.

Pred tekmovanjem so študentje matematike organizirali dvodnevne priprave, na katerih so tekmovalci reševali zanimive naloge.

Na sestanku zvezne komisije v petek, 26. aprila, je bil sprejet predlog, da se prihodnje leto Jugoslavija udeleži poleg matematične olimpiade še balkanskega tekmovanja, ki je zaradi kakovosti sodelujočih ekip tudi zelo močno. To bo vzpodbujalo tekmovalce, da se bodo še bolj resno pripravljali. Spoprijeti bi se morali tudi z geometrijskimi nalogami, ki jih v zadnjem času ponekod zapostavljajo.

Tekmovalci so prispeli v Cetinje v petek zvečer. Prebivali so v razkošnem hotelu A kategorije.

Zvezno tekmovanje se je pričelo že naslednji dan ob 9 uri v osnovni šoli PETAR PETROVIĆ NJEGOŠ. Tekmovalci so štiri ure in pol reševali naslednje naloge:

1. razred

1. Dokaži, da je med 39-imi zaporednimi naravnimi števili vsaj eno, katerega vsota cifer je deljiva z 11.
2. V notranjosti kvadrata $ABCD$ je dana taka točka E , da je trikotnik CDE enakokrak ($CE = DE$). Določi kote trikotnika ABE , če je $\angle CED = 150^\circ$.
3. V ravnini je dano 3000 točk tako, da poljubne tri ne ležijo na isti premici. Dokaži, da obstaja 1000 trikotnikov oz. oglišč v teh točkah, pri čemer poljubna dva med njimi nimata skupne točke.
4. Dokaži, da za pozitivna realna števila a, b, c, d, e in f velja neenakost

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

II. razred

1. Določi najmanjše naravno število n z lastnostjo, da sta vsoti cifer n in $n+1$ deljivi s 1985.
2. Naj bo funkcija $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ podana s formulo $f(m) = m + [\sqrt{m}]$. Tedaj za vsak $m \in \mathbf{N}$ obstaja tak $k \in \mathbf{N}$, da je $f^k(m) = \underbrace{f(\dots(f(m))\dots)}_k$ popoln kvadrat. Dokaži!
3. Dana sta tetraeder $PABC$ in točka Q v njegovi notranjosti. Dokaži, da velja $\sphericalangle BQC + \sphericalangle CQA + \sphericalangle AQB < \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA + \sphericalangle APB$.
4. Najdi najmanjše naravno število n , za katerega obstaja množica $M = \{1, 2, \dots, 100\}$ z n elementi, ki ustrezajo pogojema:
 - a) števili 1 in 100 sta v M ,
 - b) za vsak $a \in M \setminus \{1\}$ obstajata $x, y \in M$ tako, da je $a = x + y$.

III. in IV. razred

1. Najdi vsa naravna števila, manjša od 1000, ki so enaka vsoti fakultet svojih cifer.
2. Naj bo $p(x)$ polinom z realnimi koeficienti, za katerega velja

$$p(\cos x) = p(\sin x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbf{R}$$

Dokaži, da obstaja polinom $q(x)$ z realnimi koeficienti, takšen, da je

$$p(x) = q(x^4 - x^2)$$

3. V trikotniku ABC simetrale kotov α, β in γ sečejo očrtan krog zaporedoma v točkah P, Q in R . Dokaži, da velja

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA$$

4. Dana je kvadratna tabela $n \times n$, v kateri so vpisana takšna števila, da je razlika poljubnih dveh sosednjih števil kvečjemu 1 (dve števili sta sosednji, če sta vpisani v kvadratka, ki imata skupno stranico). Dokaži, da obstaja število, ki se v tabeli pojavi vsaj n -krat.

Rešitve nalog si lahko ogledate v Matematični knjižnici na Jadranski 19 v Ljubljani.

Tekmovanju bi moral slediti izlet na LOVČEN, vendar cesta še ni bila urejena, zato so si tekmovalci ogledali cetinjske muzeje in druge znamenitosti tega starega mesteca.

Medtem so člani komisije in spremljevalci ekip pregledali naloge in objavili neuradne rezultate. Tekmovalci so tako imeli možnost opozoriti komisijo na morebitne spodrslijaje. Izkazalo se je, da so bile naloge tokrat nekoliko težje. V tretjem in četrtem razredu, kjer so tekmovalci reševali iste naloge, zadnjih

dveh nalog ni nihče rešil. Rezultati pri vrhu so bili precej izenačeni, zato komisija ni mogla izbrati ekipe za olimpiado. Tako je nadaljevala svoje delo pozno v noč in izbrala še naloge za izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo Jugoslavije.

V nedeljo dopoldne je bila v kongresni dvorani hotela slovesna podelitev nagrad. Vsi tekmovalci so prejeli priznanja za sodelovanje in zbirko rešenih nalog z republiških in zveznega tekmovanja Jugoslavije v letu 1985, najboljšim pa je Milojica JACIMOVIČ podelil pohvale, diplome in visoke denarne nagrade. Tudi tokrat so bili naši tekmovalci uspešni, dosegli so tri tretje nagrade in šest pohval:

1. razred: Andrej FAJFAR, SNŠ Ljubljana, pohvala
Tomaž SLIVNIK, SNŠ Ljubljana, pohvala
2. razred: Jure BAJC, SNŠ Ljubljana, pohvala
Mateja ŠAJNA, NSC Nova Gorica, pohvala
3. razred: Jože FABČIČ, STNS Postojna, III. nagrada
Matjaž ŽELJKO, SŠR Ljubljana, pohvala
Damjana KOKOL, SŠPRNMU Kranj, pohvala
4. razred: Roman DRNOVŠEK, SNŠ Ljubljana, III. nagrada
Martin JUVAN, SNŠ Ljubljana, III. nagrada

Najbolje so se odrezali naši tekmovalci iz 3. in 4. razreda, kjer prva in druga nagrada nista bili podeljeni.

Takoj zatem je sledila mala olimpiada, ki so se je udeležili vsi pohvaljeni in nagrajeni iz tretjega in četrtega razreda ter najboljši iz drugega razreda. Reševali so naslednje naloge:

1. Naj bo $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Vsakemu elementu množice M priredimo neko množico $M_i \subseteq M$
 a) če za poljubni števili i, j iz M velja: $i \in M_j \Rightarrow j \in M_i$,
 b) če za poljubni različni števili i, j iz M velja: $|M_i| = |M_j| \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset$
 dokaži, da v M obstaja takšno število, da je $|M_m| = 1$.
 ($|M|$ pomeni število elementov množice M .)
2. Naj bo $ABCD$ paralelogram in E taka točka v ravnini paralelograma, da je $AE \perp AB$ in $BC \perp EC$. Dokaži, da je $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CEB$.
3. Če so a, b, c in d pozitivna realna števila, dokaži neenačbo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Po tekmovanju je komisija izbrala šestčlansko ekipo, ki je v začetku julija potovala na FINSKO. Slovenijo bo že tretjič zastopal Roman DRNOVŠEK.

Kljub nekaterim spodrseljajem kaže organizatorje pohvaliti, saj sta celotno organizacijo izpeljala pravzaprav le dva moža.

Tako se je končalo zvezno tekmovanje in treba se je bilo vrniti domov. Pri plačevanju računov se je imel priliko izkazati tudi vodja naše ekipe Boris LAVRIČ, ki je pri natakarih obudil v spomin pravila osnovnošolske matematike in s tem preprečil hude udarce za že tako skromno društveno blagajno.

Aleksandar Jurišić

REŠITVE NALOG

NALOGE ZA MLADE VEGOVCE – – Rešitve iz P-XIII/1, str. 46

PETI RAZRED

1. a) $(1+2) \cdot 3 \cdot 4 = 36$
b) $(1+2-3) \cdot 4 = 0$

2. a) 122
b) 189

3. Marko Nada Olga
 $x - 222$ x $x - 222 + x$

$$x - 222 + x + x - 222 + x = 7548$$

$$4 \cdot x - 444 = 7548$$

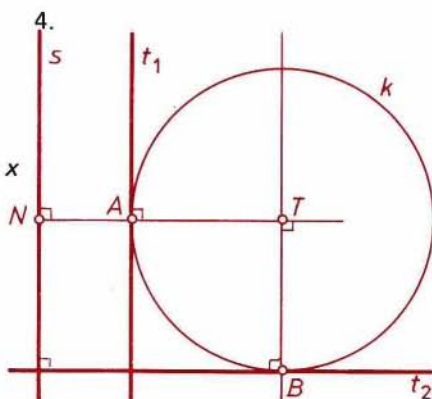
$$4 \cdot (x - 111) = 7548$$

$$x - 111 = 7548 : 4$$

$$x - 111 = 1887$$

$$x = 1887 + 111$$

$$x = 1998$$



Marko dobi 1776 din, Nada 1998 din, Olga pa 3774 din.

5. pravokotnik

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$b = 18 \text{ cm}$$

$$o = 52 \text{ cm}$$

$$p = 144 \text{ cm}^2$$

kvadrat

$$o = 52 \text{ cm}$$

$$o = 4 \cdot a$$

$$52 = 4 \cdot a$$

$$a = 13 \text{ cm}$$

kvadrat

$$p = 144 \text{ cm}^2$$

$$p = a \cdot a$$

$$144 = a \cdot a$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

ŠESTI RAZRED

1. $4 \frac{2}{3}$

2. $\frac{3}{4} \cdot x - \frac{5}{9} \cdot x = 140$

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{9}\right) \cdot x = 140$$

$$\frac{7}{36} \cdot x = 140$$

$$x = \frac{140 \cdot 36}{7}$$

$$x = 720$$

Razdalja med domom in šolo je 720 m.

3. Trikotnik ABS je enakokrak pravokotni trikotnik, zato notranja ostra kota merita po 45° . Zrcaljenje preko premice in preko točke ohranja dolžine daljic in velikosti kotov, zato so notranji koti štirikotnika $ABA'B'$ pravi koti in tudi njegove stranice so skladne. Nastali štirikotnik je kvadrat.

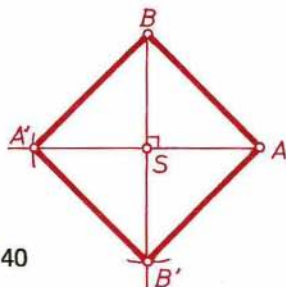
4.

$$v(4, 8, 10) = 2.2.2.5 = 40$$

$$4 = 2.2$$

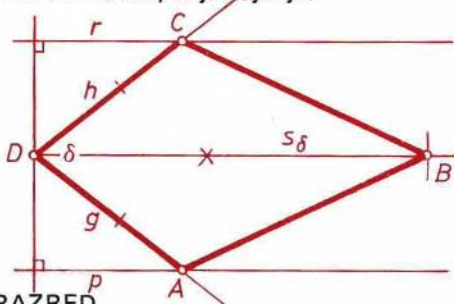
$$8 = 2.2.2$$

$$10 = 2.5$$



Vse tri ladje bodo spet zapustile pristanišče čez 40 dni, to je 8. julija.

5. Iz izbrane točke D potegnemo poltraka g in h tako, da oklepata kot $\delta = 75^\circ$. Kot δ razpolovimo, dobljeni simetrali s_δ pa na nasprotnih straneh načrtamo vzporednici p in r v oddaljenosti $e/2 = 2$ cm. Premici p in r sekata poltraka g in h v ogliščih A oziroma C . V oddaljenosti 7 cm dobimo na s_δ še oglišče B .



SEDMI RAZRED

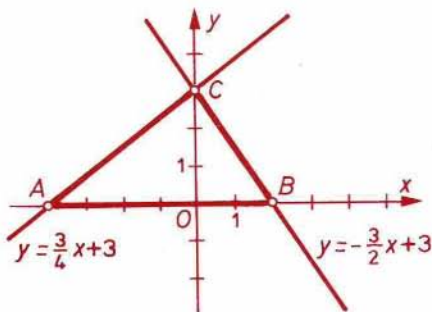
1. Vrednost izraza je 0.

2. $A(-4,0)$

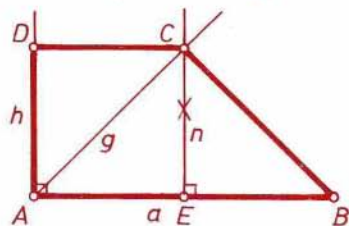
$B(2,0)$

$C(0,3)$

$$p = \frac{o \cdot v}{2} = \frac{6.3}{2} = 9$$



3. Načrtamo osnovnico $a = AB$ z dolžino 6 cm, nato pa poltraka g in h skozi A , ki z a oklepata kota 45° oziroma 90° . Skozi razpolovišče E daljice AB potegnemo normalo n na a . Oglišče C je skupna točka poltraka g in normale n . Vzporednica z a skozi C pa seka poltrak h v točki D .



$$\begin{array}{lll} \sphericalangle BAD = 90^0 & \Rightarrow & \sphericalangle CAD = 45^0 \\ \sphericalangle BAC = 45^0 & \Rightarrow & \sphericalangle DAC = 45^0 \Rightarrow \overline{AD} = \overline{CD} \\ & & \sphericalangle ADC = 90^0 \end{array}$$

$$p = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{AD} \quad p = \frac{6+3}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2}$$

$$\begin{array}{ll} 4. \quad a & a_1 = a + 10\% a = \frac{11}{10} a \\ b & b_1 = b - 10\% b = \frac{9}{10} b \\ ab & a_1 b_1 = \frac{11}{10} a \cdot \frac{9}{10} b = \frac{99}{100} ab \\ ab > \frac{99}{100} ab \\ ab - \frac{99}{100} ab = \frac{1}{100} ab & \text{Produkt se zmanjša za 1\%.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5. \quad b \in V_7 \wedge b < 16 \\ b = 7 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \check{c} = 8 \\ b = 14 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \check{c} = 0 \end{array}$$

Druga možnost ni mogoča, ker so v košari tudi črne kroglice. V košarici je 8 črnih kroglic.

OSMI RAZRED

$$\begin{array}{lll} 1. \quad y = \frac{12}{5}x - 6 & T_1 (0, y) & T_2 (x, 0) \\ & y = \frac{12}{5} \cdot 0 - 6 & 0 = \frac{12}{5}x - 6 \\ & y = -6 & x = \frac{5}{2} \\ & T_1 (0, -6) & T_2 (\frac{5}{2}, 0) \\ d^2 = 6^2 + (\frac{5}{2})^2 & & \\ d = \frac{13}{2} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2. & \text{I. cisterna} & \text{II. cisterna} \\ \text{vode} & 470 & 240 \\ \text{iztok} & 3x & x \\ \text{ostane po 5 h} & 470 - 5.3x & 240 - 5x \\ & 470 - 5.3x + 20 = 240 - 5x & \\ & x = 25 & \end{array}$$

Iz prve cisterne izteče vsako uro 75 l vode, iz druge pa 25 l.

3.

$$(a + \frac{1}{3}a)(b - x) = ab$$

$$\frac{4}{3}a(b - x) = ab$$

$$\frac{4}{3}ab - \frac{4}{3}ax = ab$$

$$-\frac{4}{3}ax = -\frac{1}{3}ab$$

$$x = \frac{1}{4}a$$

Širino moramo skrajšati za njeno četrtno.

$$4. \quad \left(\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3}\right) : \frac{a^2+9}{a^2-9} = \frac{a^2+3a-3a+9}{(a+3)(a-3)} : \frac{a^2+9}{a^2-9} =$$

$$= \frac{a^2+9}{a^2-9} \cdot \frac{a^2-9}{a^2+9} = 1$$

Vrednost izraza je 1 ne glede na vrednost spremenljivke a .

5. I. kvadrat

II. kvadrat

III. kvadrat

 a

$$a_1 = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = 2d_1 = 2a_1 \sqrt{2} =$$

$$= 2a$$

 $o = 4a$

$$o_1 = 2a\sqrt{2}$$

$$o_2 = 8a$$

$$o : o_1 : o_2 = 2 : \sqrt{2} : 4$$

 $p = a^2$

$$p_1 = \frac{a^2}{2}$$

$$p_2 = 4a^2$$

$$p : p_1 : p_2 = 2 : 1 : 8$$

Aleksander Potočnik

INTERTRADE

PODJETJE ZA MEDNARODNO TRGOVINO - INTERNATIONAL TRADE CO.

MOŠE PIJADEJEVA 29 61001 LJUBLJANA TELEFON (061) 322-844 TELEX: 31181 P.O.B. 317-VI INT.

NALOGE S PREDTEKMOVANJ IZ MATEMATIKE Rešitve iz P-XIII/1, str. 27

1. razred

1. $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = (n-1)n(n+1)(n+2) = N$. Vsaj dva faktorja sta sodi števili, eno od obeh pa je deljivo vsaj s 4. Vsaj en faktor je tudi deljiv s tri. Torej $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ deli N .

N ni deljiv s 120 natanko tedaj, ko ni deljiv s 5. Torej ne sme biti noben izmed faktorjev deljiv s 5. To gre le, če se število n v desetiškem zapisu konča z 2 ali s 7.

2. Razdaljo med A in B označimo s črko s . Tedaj je Jankova hitrost $s/12$, Markova pa $s/15$. Čas, ki ga Janko potrebuje za pot od A do C , naj bo t . Pot do C je za oba ista: $t(s/12) = (t+2)(s/15)$. Odtoč dobimo $t = 8$. Janko je šel skozi C ob 13. uri, Marko pa ob 15. uri.

3. Diagonala včrtanega pravokotnika je enaka premeru kroga in razdeli pravokotnik na dva skladna pravokotna trikotnika. Iz $a \leq b$ zato sledi $2a^2 \leq a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4$ ali $a \leq \sqrt{2} < 1,5$.

4. Najkrajša pot meri $3\sqrt{2}$ dm in vodi po kvadru preko najdaljšega roba. V dokaz razgrnemo plašč kvadra v ravnino in upoštevamo, da so v ravnini najkrajše poti daljice (glej skico).

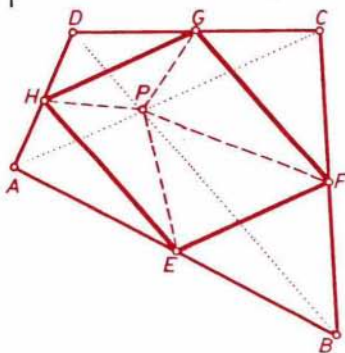
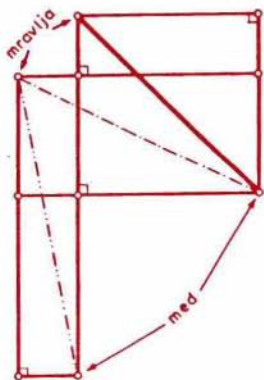
2. razred

1. Razpolovišča stranic označimo po vrsti z E, F, G in H (glej skico). Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle AEH$ in $\triangle ABD$ ter $\triangle DBC$ in $\triangle GFC$ sta daljici HE in GF vzporedni diagonali BD , daljici EF in HG pa sta vzpo-

redni z AC . Lik $EFGH$ je torej paralelogram.

Naj bo P presečišče diagonal danega štirikotnika. Ploščine naslednjih trikotnikov so enake:

$\triangle HAE$ in $\triangle EPH$, $\triangle EBF$ in $\triangle FPE$, itd. Razmerje ploščin je zato 2 : 1.



2. Najprej enačbo prepišemo v odvisnosti od vrednosti x :

$$x + b = |x - 1| + |x - 2| = \begin{cases} 3 - 2x, & x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3, & 2 < x \end{cases}$$

Odtod ugotovimo, da za $b < -1$ enačba nima rešitev, za $b > -1$ ima dve rešitvi, eno samo rešitev pa dobimo le pri $b = -1$.

3. $a = (1/25)^{301} = 5^{-602}$

$$b = (1/125)^{201} = 5^{-603} = 5^{-602}/5 < 5^{-602} = a$$

4. Pogoji

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{d_1 a_1^n + d_2 a_2^n + d_3 a_3^n}{d_1 b_1^n + d_2 b_2^n + d_3 b_3^n}$$

prepišemo v obliko

$$a_1^n (d_1 b_1^n + d_2 b_2^n + d_3 b_3^n) = b_1^n (d_1 a_1^n + d_2 a_2^n + d_3 a_3^n)$$

kjer upoštevamo še, da je zaradi $a_1 b_2 = a_2 b_1$ in $a_1 b_3 = a_3 b_1$ za vsak n tudi $(a_1 b_2)^n = (a_2 b_1)^n$ in podobno v drugem primeru.

3. razred

1. $5 \sin x = \sin 3x + \sin 2x = \sin x \cos 2x + (\cos x + 1) \cdot \sin 2x$ ali $\sin x (5 - \cos 2x) = (\cos x + 1) \cdot 2 \sin x \cos x$.

a) $\sin x = 0, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $5 - (2 \cos^2 x - 1) - 2(\cos x + 1) \cos x = 0$. Razstavimo:
 $(\cos x - 1)(\cos x + 3/2) = 0$

Vse tu dobljene rešitve ($x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$) so že zajete v a).

2. $\sqrt{51 - 2\sqrt{98}} = \sqrt{49 - 2 \cdot 7\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(7 - \sqrt{2})^2} = 7 - \sqrt{2}$

3. Tako $\sin x$ kot $\cos x$ morata biti pozitivna. Logaritma spravimo na skupno osnovo $\log_{\cos x} \sin x = 1/\log_{\sin x} \cos x$. S tem prevedemo enačbo na kvadratno za $u = \log_{\sin x} \cos x$: $u^2 + u - 2 = 0$ z rešitvama $u = 1$ in $u = -2$.

a) $\log_{\sin x} \cos x = 1, \cos x = \sin x, x = \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos x = \sin^2 x$ ali $\cos x \cdot \sin^2 x = (\sin x \cdot \sin 2x)/2 = 1$. Ta enačba pa seveda nima rešitev.

4. $N = 6 \cdot 10^n + x, x = N/25, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zato je $24x = 6 \cdot 10^n$ ali $x = 25 \cdot 10^{n-2}$. To je naravno število le za $n > 1$. Torej so iskana števila natanko vsa števila oblike 625000....000, kjer petici sledi $n-2$ ničel.

4. razred

$$\begin{aligned} 1. \quad & (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-1985)^2 = \\ & = 1985 \cdot x^2 - 2 \cdot (1+2+3+\dots+1985) \cdot x + 1^2 + 2^2 + \dots + 1985^2 = \\ & = 1985 \cdot x^2 - 1985 \cdot 1986 \cdot x + \dots = 1985 \cdot (x^2 - 1986 \cdot x + \dots) \end{aligned}$$

Kvadratna funkcija ima ekstrem v temenu, ki ima v našem primeru absciso enako 993.

$$2. \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n \cdot n}{1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n \cdot n} = \frac{8}{27}$$

zato je $(8/27)^{1/3} = 2/3 < 7/9$.

3. $p(x) = x^3 + ax + 1$ in $q(x) = x^3 + x + a$ sta očitno enaka za $a = 1$ in imata tedaj seveda tudi vse ničle skupne. Sicer odštejemo q od p in dobimo $0 = x(a-1) + (1-a) = (x-1)(a-1)$. Iz te zveze sledi $x = 1$, iz $p(1) = q(1) = 0$ pa še $a = -2$.

4. Vsaj ena krogla je modra. Recimo, da ima maso 1 kg. Med ostalimi krogli obstaja vsaj ena z maso 2 kg. Če je rdeče barve, je trditev dokazana. Če pa imajo vse krogle z maso 2 kg modro barvo, obstaja vsaj ena rdeča krogla z maso 1 kg in tako imamo spet par, ki se razlikuje tako po barvi kot po teži. V primeru, ko ima modra krogla maso 2 kg, postopamo analogno.

Gorazd Lešnjak

Cvek, nato še ukor

Janez je bil vprašan naslednjo nalogo:★

Nariši trikotnik ABC . Označi presek kotov: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$.

Janez: Presek je prazna množica.

Tovarišica: To bo cvek.

(Tovarišica je Janezu pojasnila, da je presek kar cel trikotnik. Janez je odšel v klop, pri tem pa je še nekaj zamrmral.)

Tovarišica: Takoj v kot!

Janez: Saj sem že v kotu. Ne v enem, kar v štirih.

Tovarišica: To bo pa ukor!

★ MATEMATIKA za peti razred osnovne šole, naloga 340.

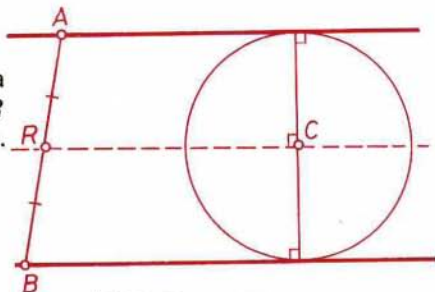
Izidor Hafner

NALOGE IZBIRNEGA TEKMOVANJA IZ MATEMATIKE

Rešitve iz P–XIII/1, str. 29

1. razred

1. Obea tangentama je vzporedna premica skozi C in razpolovišče R daljice AB . Odtod sledi konstrukcija.



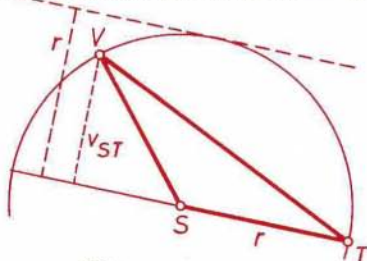
2. Pokažimo, da je $\sqrt{c} - \sqrt{c-1} > \sqrt{c+1} - \sqrt{c}$. Velja namreč $2\sqrt{c} > \sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}$, saj je $4c > 2c + 2\sqrt{c^2-1}$ ali $c^2 > c^2 - 1$.

3. $625_{(n)} = 6 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 5 = 1985_{(10)}$, torej je $(3n+1) \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Prvi faktor ni deljiv s 3, torej je n deljiv z 9. Takoj uvidimo, da ima voščilo pravi pomen v sistemu z osnovo 18.

4. Število manjkajočih učencev dopolndne označimo z x , popoldne pa z y . Uvedemo še oznaki: $n = 35 - x$ in $m = 35 - y$, pa dobimo enačbo $6n + 5m = 351$. Iz nje takoj sledi $m = 70 - n + (1 - n)/5$. Če je $n - 1 = -5k$, $k \in \mathbb{Z}$, je $n = 1 - 5k$ in $m = 69 + 6k$. Smiselno rešitev dobimo le pri $k = -6$. Zato je $x = 4$ in $y = 2$.

2. razred

1. ST je polmer, zato višina v_{ST} v $\triangle STV$ ni večja od r (glej skico). Sledi $p_{\Delta} = \overline{ST} \cdot v_{ST} / 2 = r \cdot v_{ST} / 2 \leq r^2 / 2$ in $p_{\Delta} : p_O \leq (r^2 / 2) : \pi r^2 = 1 : \pi \cdot 2 < 1 : 6$.

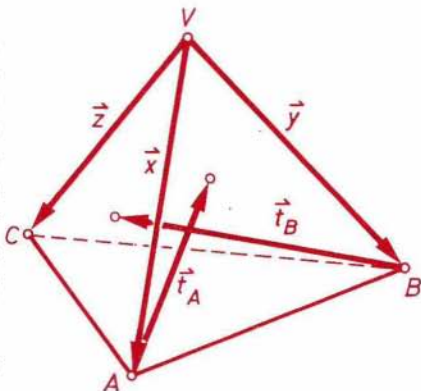


2. $6\sqrt{3} - 10 = (\sqrt{3} - 1)^3$, $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$, zato lahko dani izraz poenostavimo:

$$\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

3. Naj bo m število dreves v eni vrsti plantaže pred spremembo, $m + n$ pa po njej. Velja: $(m + n)^2 - m^2 = n(2m + n) = 1985 = 5 \cdot 397$, zato je lahko le $n = 5$ in $m = 196$ ali pa $n = 1$ in $m = 992$. Pred spremembo je na plantaži 196^2 ali pa 992^2 dreves.

4. Vpeljemo oznake: $\vec{VA} = \vec{x}$, $\vec{VB} = \vec{y}$, $\vec{VC} = \vec{z}$ (glej skico) in označimo $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = b$, $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{y} - \vec{z}| = |\vec{z} - \vec{x}| = a$. Vektor težišnice iz A na $\triangle BCV$ je $\vec{t}_A = -\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})/3$, iz B na $\triangle ACV$ pa $\vec{t}_B = -\vec{y} + (\vec{x} + \vec{z})/3$. Pogoji pravokotnosti nam da: $\vec{t}_A \cdot \vec{t}_B = 0$, kar pomeni, da je $6\vec{x} \cdot \vec{y} - 5\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ ali $\vec{x} \cdot \vec{y} = 5b^2/6$. Potem je



$$a^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 2b^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} = b^2/3 \quad \text{in iskano razmerje je } a : b = 1 : \sqrt{3}.$$

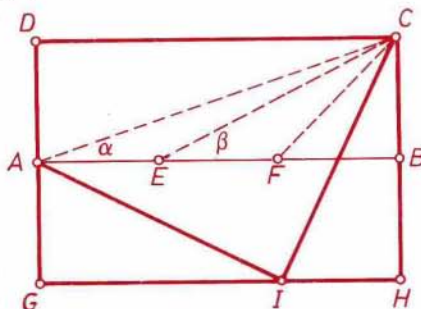
3. razred

1. Le za $|x| > 1$ je $0 < (x+1)/(x-1) < \infty$. Tedaj z y označimo $\log_3((x+1)/(x-1))$. Neenačba se tako glasi: $\log_2 y < \log_{1/2} y$ ali $\log_2 y < 0$, kar nam da $0 < y < 1$ oziroma $x > 2$.

2. V zvezo b) vstavimo $y = 1$: $f(x-1) = 1 - 2x + f(x)$ ali $f(x) = f(x-1) + 2x - 1$. Iz $f(1) = 1$ zremo potem $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, ..., $f(n) = n^2$ (slednje preverimo z b)). Zato je $f(1985) = 1985^2$.

3. Relacijo preverimo ali s trigonometrijo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+\beta) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{1/3 + 1/2}{1 - 1/6} = 1 \end{aligned}$$



ali s sliko in geometrijo:

$\overline{AI} = \overline{IC}$ in $\overline{AI} \perp \overline{IC}$, zato je $\sphericalangle CAI = \pi/4$. Hkrati je še $\sphericalangle CAI = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAI = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CEB$.

4. Predpostavimo nasprotno: naj obstaja perioda $P > 0$. Tedaj je

$$0 = \sin(x+P)^2 - \sin x^2 = 2 \cos(2x^2 + 2xP + P^2) \sin(2xP + P^2)$$

Iz obeh možnosti sledi, da je perioda P odvisna še od x , kar je v protislovju z definicijo periodičnosti.

4. razred

1. Ob oznakah $d = \overline{CB_1}$ in $e = \overline{B_1C_1}$ velja: $d : a = e : d = b : \sqrt{a^2 + b^2}$. Razmerje $k = e : a = b^2 : a^2 + b^2$ je enako tudi za vse manjše trikotnike, zato je dolžina lomljene črte

$$d(1+k+k^2+\dots) + e(1+k+k^2+\dots) = (d+e)/(1-k) = \frac{b}{a} (b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

2. Upoštevamo, da je dvojna ničla polinoma hkrati ničla odvoda.

$$\begin{aligned} p'(x) &= 10x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 20x + 20 = \\ &= 10(x+i)(x-i)(x-1-i)(x-1+i) \end{aligned}$$

Polinom ima realne koeficiente, zato ničle nastopajo v konjugiranih parih. Torej bi p moral imeti par dvojnih konjugiranih ničel. Toda deljenje polinoma p z $x^2 + 1$ ali z $x^2 - 2x + 2$ se ne izide.

3. Simetrija glede na ordinatno os nam omogoči, da obravnavamo le primer $x \geq 0$. Rešitev enačbe $ax = (x-1)/a$ je $x_0 = 1/(1-a^2)$, ki ni negativna le za $0 < a < 1$. Ploščina omejenega območja je enaka dvojni ploščini trikotnika z osnovnico a^{-1} in višino x_0 , torej je $1/P = a(1-a^2)$. Ekstrem je minimum in je dosežen pri $a = 1/\sqrt{3}$.

4. Na listu izberemo tak koordinatni sistem, da imajo vse točke mreže celoštevilске koordinate. Če sta obe razliki koordinat dveh točk sodi števili, je razpolovišče ustrezne daljice gotovo točka s celoštevilskima koordinatama. Če imamo le štiri točke, se le-te glede na parnost lahko po koordinatah vse razlikujejo. Vsaka nadaljnja točka pa se glede na parnost koordinat ujema z eno izmed njih.

Gorazd Lešnjak

REŠITVE KRIPTARITMOV IZ P--XIII/1, str. 59

$$\begin{aligned} 92^2 &= 8464, & 347^2 &= 120409, & 2^{13} &= 8192, & 62^2 - 26^2 &= 3168, \\ 4935/35 &= 141, & 8145/45 &= 181, & 9825/25 &= 393, \\ 5436/36 &= 151, & 5738/38 &= 151 \end{aligned}$$

Peter Petek



