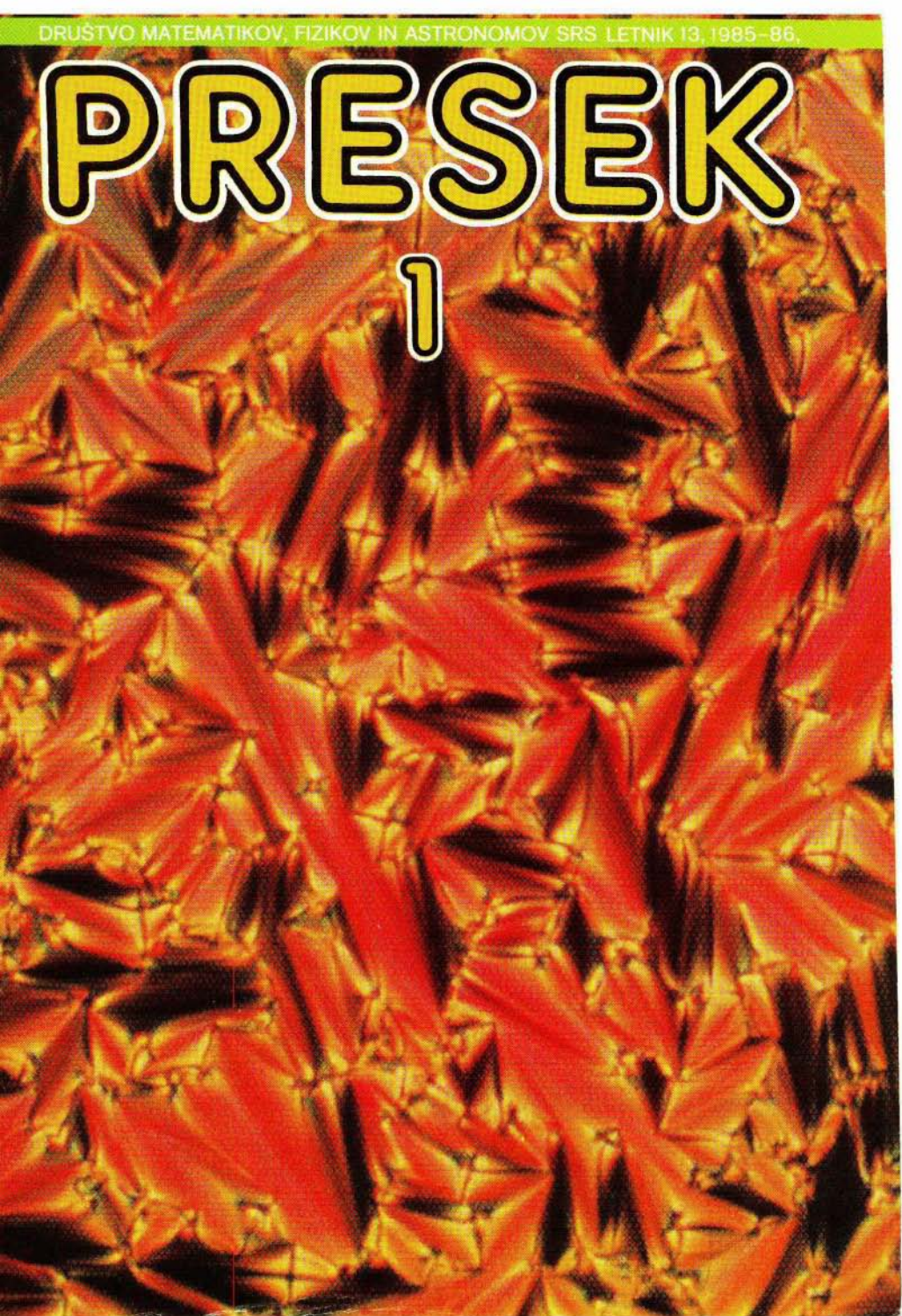


PRESEK 1



VSEBINA

UVODNIK	Dragi bralci (Edvard Kramar)	1
FIZIKA	Prikazalniki s tekočimi kristali (Igor Muševič)	2
NOVE KNJIGE	Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo (Ciril Velkovrh)	8
FIZIKA	Ali je nogomet igra na srečo (Janez Strnad)	9
	Hitrost izstrelka iz zračne puške (Marko Jagodič, Andrej Likar)	16
MATEMATIKA	O posojilih (Bojan Mohar)	20
	Inverzija (Milena Pintar)	24
TEKMOVANJA	11. izbirno tekmovanje iz matematike (Gorazd Lešnjak)	27
KRIŽANKA	Ob stopetdesetletnici rojstva (Pavle Gregorc)	32
ASTRONOMIJA	Zanimiva senca (Boris Kham)	34
KRIŽANKA	Franc Močnik — rešitev iz P-12/5 (Pavle Gregorc)	37
RAČUNALNIŠTVO	Kako računalnik nariše daljico (Andrej Vitek)	38
NALOGE	Dva dokaza — rešitev str. 50 (Dragoljub M. Milošević, prev. Peter Petek)	45
	Nekaj nalog mladim Vegovcem (Aleksander Potočnik)	46
	Naloge za mlade matematike — rešitev str. 52 (Pavle Zajc)	48
MATEMATIKA	Dokaz (Izidor Hafner)	55
RAZVEDRILO	PREMISLI IN REŠI — Kriptoritem z dvema kartama - rešitev iz P-12/3 (Peter Petek) Za ljubitelje nogometa (Ciril Velkovrh)	58
	PISMA BRALCEV (Dušica Boben)	60
	BISTROVIDEC — Barvanje zemljevidov (Vladimir Batagelj)	63
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Kovanci. Pogovor z Raymondom Smullyanom. Norost? (Izidor Hafner)	23, 45, 47
RAČUNALNIŠTVO	Narišimo hrib (Rok Sosič)	64, III
NA OVITKU	Tekoči kristali (glej članek na str. 2)	I, IV

Dragi bralci!

Z novim šolskim letom je pred vami tudi prva številka novega letnika Preseka. Večina vas naš list že dobro pozna in upamo, da ste ga doslej radi jemali v roke, saj je v preteklem obdobju prinesel veliko zanimivega in poučnega branja. Tako vam ne bo težko še naprej ostati naš naročnik. Gotovo pa bo list navdušil tudi vse tiste, ki ste ga letos prvič dobili v roke.

Presek bomo tudi v prihodnje poskušali pripravljati tako, da boste z njim še bolj zadovoljni in ga boste še bolj nestrpnostno pričakovali. Poleg pohvalnih besed, ki jih prejemo od vas, sem in tja kdo potoži, da je kakšen od prispevkov pretežak. Tega se v uredništvu dobro zavedamo in poskušali se bomo še bolj potruditi, da bi pripravili čim več prispevkov, ki bodo razumljivi tudi najmlajšim bralcem. Ker pa se prav vselej tega ne da narediti, pa tudi precej srednješolcev prebira naš list, svetujemo zlasti najmlajšim bralcem, da številke Preseka shranjujejo in take prispevke preberejo čez kako leto ali dve.

V Preseku boste tudi v prihodnje našli vrsto zanimivih člankov iz matematike, fizike, astronomije in tudi računalništva. Zanimale vas bodo naloge in poročila s tekmovanj, razne druge naloge, problemi in uganke v raznih rubrikah, ki so zelo priljubljene (Bistrovidec, Premisli in reši, ...). Objavljali bomo tudi še naprej križanke ter razne druge zanimivosti in novice.

Da bi se Presek čim bolj približal vašemu okusu, vabimo tudi vas, dragi bralci, da s svojimi prispevki pomagata oblikovati njegovo vsebino. Sodelujete lahko s krajšimi prispevki, nalogami, ugankami, fotografijami itd., ki imajo tematsko vsebino iz zgoraj naštetih področij. Naši uredniki bodo vaše prispevke pregledali in, če bodo dovolj zanimivi, uvrstili v eno od rubrik. Najboljše prispevke bomo tudi nagradili s knjižno nagrado.

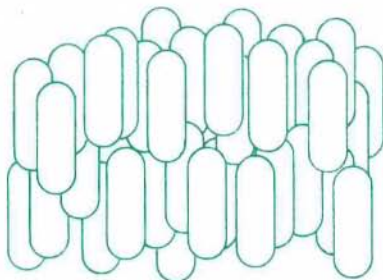
Prvo številko Preseka smo tudi letos poslali vsem lanskim naročnikom. Aktivne matematikov in fizikov na šolah kakor tudi posameznike prosimo, da nam z naročilnico, ki je natisnjena na strani 15, sporočijo vsaj do 20. septembra, koliko izvodov Preseka naročajo. Naročnina za letošnje šolsko leto je 400 din za skupinska naročila in 500 din za posameznike. Zbrano naročnino nam pošljite vsaj do konca koledarskega leta.

Edvard Kramar

PRIKAZALNIKI S TEKOČIMI KRISTALI

Nekaj osnovnih podatkov o tekočih kristalih je bralec najbrže izvedel v 4. številki Preseka letnika 1983/84, str. 178, kjer smo spoznali predvsem holesterinske tekoče kristale in njihovo uporabo. Poleg holesterinskih tekočih kristalov danes poznamo še množico drugih vrst tekočih kristalov, ki sta jim skupni dve osnovni lastnosti: so *tekoči* (tečejo kot tekočina), obenem pa kažejo *notranjo urejenost*, ki je značilna za trdne kristale. Razvrščeni so v razrede, ki kažejo enako notranjo urejenost: *nematski*, *diskotični*, *smektični*, *holesterinski* ... Spoznali bomo notranjo strukturo nematskih tekočih kristalov in tiste njihove lastnosti, katerih poznavanje je nujno potrebno za razumevanje delovanja prikazalnikov s tekočimi kristali.

Molekule nematskih, holesterinskih in smektičnih tekočih kristalov so podolgovate, cigarasto oblikovane, dolge nekaj 10 nm in debele nekaj nm. Molekule so med seboj urejene paralelno, dolge osi cigarasto oblikovanih molekul so pretežno paralelne. V nematski tekočokristalni fazi so težišča molekul tekočega kristala naključno porazdeljena po prostoru, kot je prikazano na sliki 1.



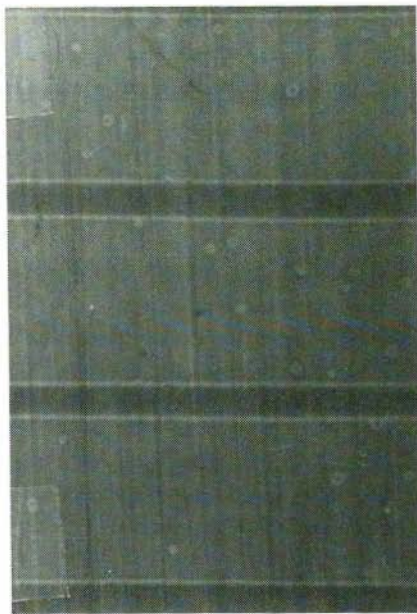
Slika 1. Notranja urejenost nematskega tekočega kristala.

Bralec si lahko predstavlja urejenost molekul nematskega tekočega kristala z medsebojno urejenostjo rib v jati: med seboj pretežno plavajo paralelno, težišča rib pa so naključno porazdeljena v prostoru.

Za nematski tekoči kristal je torej značilna ena odlikovana smer, to je smer urejenosti dolgih osi molekul. S segrevanjem tekočega kristala pride pri določeni temperaturi do sprememb v notranji urejenosti molekul tekočega kristala, dolge osi molekul niso med seboj več vzporedne, temveč naključno usmerjene

v prostoru. Nematski tekoči kristal preide v tekočino, ki izgubi notranjo urejenost. Temperaturi, pri kateri pride do take spremembe, pravimo temperatura *faznega prehoda* tekočega kristala v izotropno fazo (izotropen pomeni v vseh smereh enak). Podobno se z ohlajanjem tekočega kristala pri določeni temperaturi spremeni struktura nematskega tekočega kristala tako, da običajno preide v trdno fazo, torej izgubi lastnost tekočine in ne teče. Spremembe notranje urejenosti tekočega kristala lahko opazujemo na primer z mikroskopom. Na sliki 2a vidimo fotografijo plasti nematskega tekočega kristala, kot jo pokaže mikroskop.

Preden spoznamo osnove delovanja prikazalnika s tekočimi kristali, še tole: na sliki 2a se lepo vidi, da je plast tekočega kristala sestavljena iz nešteto drobnih "kristalčkov" velikosti 0.05 mm, torej je to nekakšna večkristalična plast. Kakor bomo kasneje izvedeli, so površine prikazalnikov lahko izredno velike, do nekaj 100 cm², torej je potrebno na nek način doseči enakomerno urejenost tekočega kristala oziroma vzgojiti monokristal s tako veliko površino

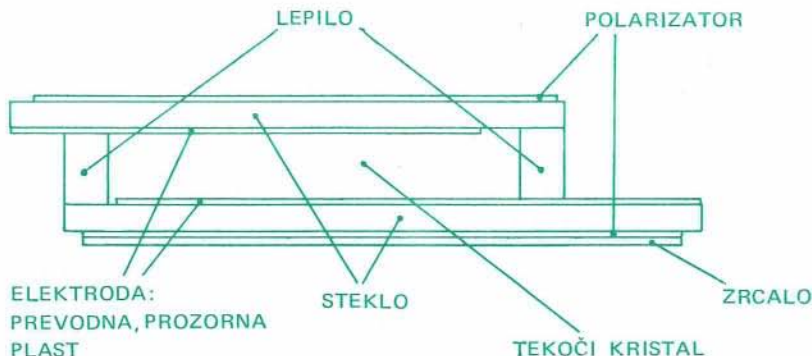


Slika 2a. Mikroskopski posnetki plasti nematskega tekočega kristala.

Slika 2b. Posnetek urejene plasti nematskega kristala. Vidni so sledovi drgnjenja steklene ploščice — tanke navpične raze. Vidimo tudi elektrode — debele vodoravne, vzporedne črte.

Pri tem si pomagamo z zvijačo. Stekleno ploščico enakomerno podrgnemo z zelo drobnim diamantnim prahom, s tem naredimo na površini stekla mikroskopsko majhne raze, ki so med seboj paralelne. Površina stekla ima to lastnost, da se molekule tekočega kristala postavijo vzporedno s površino. Zaradi brazd je najbolj ugodno, da se dolge osi molekul usmerijo vzdolž brazd. Tako dobimo tik ob površini stekla enakomerno urejeno plast, še več, urejenost molekul se prenaša v globino do razdalje 0.1 mm. Na ta način naredimo tanko, urejeno plast tekočega kristala z veliko površino, kar je prikazano na sliki 2b.

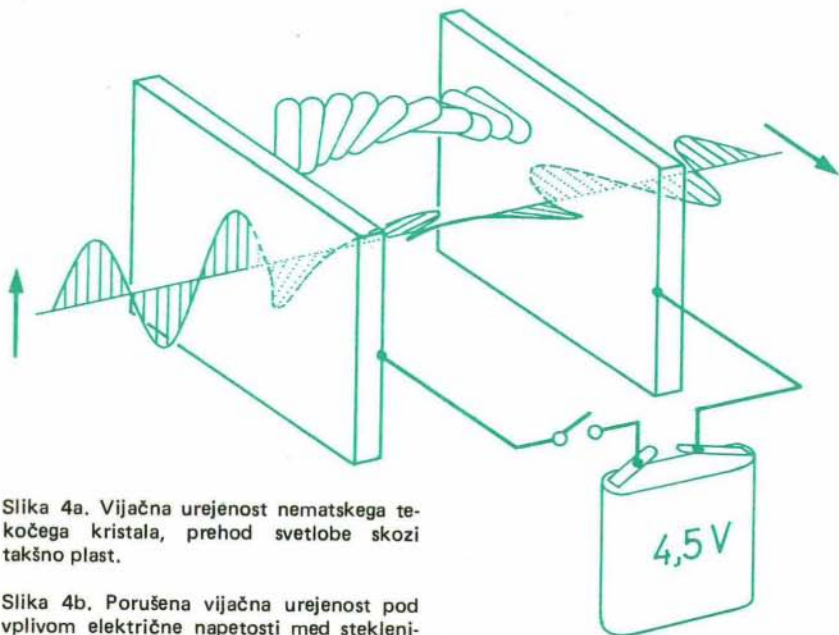
Če znamo narediti urejeno plast tekočega kristala, potem do prikazalnika ni več daleč. Prerez prikazalnika s tekočimi kristali je prikazan na sliki 3.



Slika 3. Prerez prikazalnika s tekočimi kristali

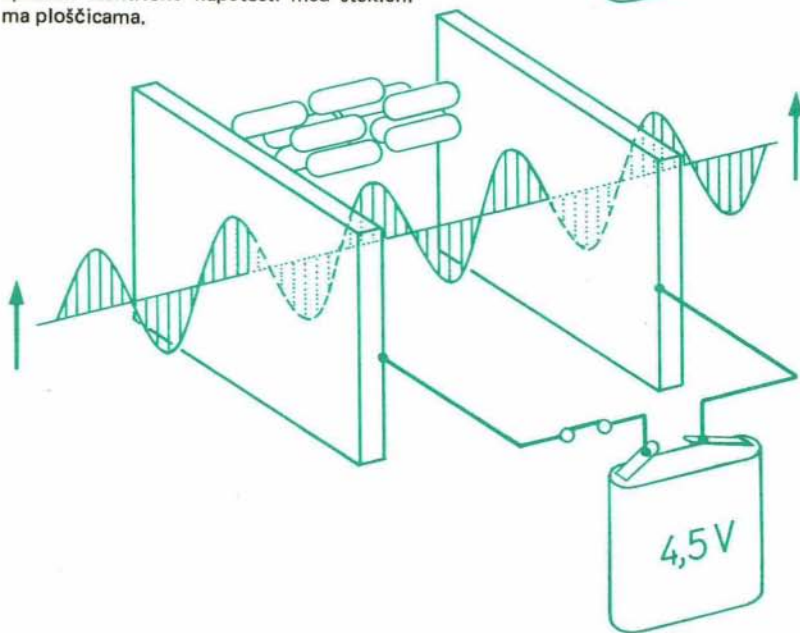
Sestavljen je iz dveh steklenih ploščic debeline 1 mm, ki imata na notranjih površinah nanešeno zelo tanko plast električno prevodne snovi, ki je prozorna. Notranji površini obeh stekel sta mehansko podrgnjeni tako, da sta smeri brazd v spodnji in zgornji ploščici pravokotni. Sestavna dela prikazalnika sta še dva polarizatorja in zrcalo, o katerih bo tekla beseda malo pozneje. Razmik med steklenima ploščicama je 5 do 10 μm . Mimogrede: debelina človeškega lasu je približno 50 μm . Steklene ploščice po robovih zlepimo in tako dobimo celico prikazalnika, ki jo napolnimo s tekočim kristalom. Ta se na površinah uredi tako, da so dolge osi vzporedne z brazdami v površini stekla. Ker sta površini drgnjeni pod pravim kotom, se v notranjosti celice vzpostavi vijačna urejenost molekul tekočega kristala, ki je prikazana na sliki 4a.

Konice molekul opisujejo 1/4 vijačnice, ko se pomikamo od spodnjega stekla proti zgornjemu. Poglejmo, kako se širi svetloba skozi takšno strukturo. Širjenje svetlobe v prostoru si predstavljamo kot širjenje valovanja po napeti



Slika 4a. Vijačna urejenost nematskega tekočega kristala, prehod svetlobe skozi takšno plast.

Slika 4b. Porušena vijačna urejenost pod vplivom električne napetosti med steklenima ploščicama.



vrvi. Če prost konec vrvi zanihamo v smeri gor–dol, se po vrvi širijo valovi, vrv niha v navpični smeri. Pravimo, da je valovanje *polarizirano*, ker ležijo odmiki vrvi v eni ravnini. Če polarizirano svetlobno valovanje spustimo na tekočokristalno celico z vijačno urejenostjo, potem smer nihanja (*polarizacija*) sledi smeri dolgih osi molekul. Po prehodu skozi takšno celico je svetlobno valovanje polarizirano pod pravim kotom na smer vstopanja valovanja. Pri prehodu svetlobe je torej prišlo do sukanja polarizacije svetlobnega valovanja za 90 stopinj.

Omenili smo že, da ima celica na obeh notranjih površinah prevodno plast. Pravimo, da ima celica dve *elektrodi*. Če na ti dve elektrodi priključimo električno napetost (4,5 V baterija bo že dovolj), se pojavi v plasti tekočega kristala *električno polje*, ki zavrti osi molekul tekočega kristala tako, da so po vsej plasti pravokotne na površino stekla. Ta pojav je zelo podoben zasuku magnetne igle ali železnih opilkov pod vplivom magnetnega polja. Nova ureditev tekočega kristala ne suče več polarizacije svetlobe, kot je razvidno iz slike 4b.

Iz povedanega sledi, da se pod vplivom električne napetosti spremenijo optične lastnosti celice. Kako pa to vidimo?

Dnevna svetloba je nepolarizirano valovanje. Njena polarizacija je naključno porazdeljena po smereh v prostoru. Iz nepolariziranega valovanja dobimo polarizirano valovanje s pomočjo posebne priprave, ki jo imenujemo *polarizator*. Le—ta iz množice valovanj izlušči valovanja s točno določeno polarizacijo. Ponazorimo ga lahko z vrvjo in vrtno ograjo z navpično postavljenimi letvami. Skozi ograjo potegnemo vrv in jo pritrdimo na drugi strani. Če prosti konec zanihamo v smeri gor–dol, se bo valovanje lepo širilo skozi ograjo. Če vrv zanihamo v smeri levo–desno, se bo valovanje po vrvi po prehodu skozi ograjo znatno oslabilo. Tako smo dobili neke vrste polarizator, ki prepušča samo valovanje s točno določeno smerjo odmkov vrvi. Polarizatorji, ki jih uporabljamo v prikazalnikih, so v obliki tanke plastične folije.

Sedaj, ko smo spoznali polarizator, se vrnimo k naši celici. Pred celico postavimo prvi polarizator, ki iz dneвне svetlobe naredi polarizirano svetlobo. Obrnemo ga tako, da je smer polarizacije vzporedna s smerjo molekul ob vstopu v celico. Za celico postavimo drugi polarizator, ki prepušča samo tista valovanja, ki so polarizirana pravokotno na vstopno valovanje. Ker je med obema polarizatorjema celica, ki suče polarizacijo za 90 stopinj, bo celotna priprava prepuščala svetlobo. Pod vplivom električne napetosti se spremeni struktura tako, da ne suče svetlobe in celica bo med prekržanimi polarizatorjema neprepustna. Na tak način lahko z vklopom in izklopom električne napetosti med ustrezno oblikovanima elektrodama "pišemo" na naš prikazalnik. Zaradi pra-

ktičnosti običajno postavimo za drugim polarizatorjem še *zrcalo*, tako da izpis opazujemo v odbiti svetlobi.

Spoznali smo torej osnovo delovanja tekočerkristalnega prikazalnika. Takšen prikazalnik ste prav gotovo že videli. Vgrajeni so v ročnih urah, svinčnikih, kalkulatorjih, telefonih, začenjajo se pojavljati tudi v osebnih računalnikih. Na pogled so to sivozelene ploščice (zaradi polarizatorja), na katerih se pojavljajo temne številke, črke, poljubno oblikovani znaki. Takšen prikazalnik ima nenavadno lastnost: v temi je slabo viden, v močni svetlobi pa odlično, torej ravno obratno kot TV zaslon. Razlika je v tem, da tekočerkristalni prikazalnik ne seva svetlobe kot TV cev, temveč jo samo prepušča ali ne. Za delovanje torej potrebuje zunanjo svetlobo. Zaradi tega takšen prikazalnik porabi znatno manj električne energije, celo večmiljonkrat manj kot katodna cev ustrezne velikosti. Poleg tega so tekočerkristalni prikazalniki ploščati, za delovanje potrebujejo nizko napetost in so zelo poceni. Imajo pa tudi slabe lastnosti: otežkočen je večbarvni prikaz, omejeno je število prikazovanih znakov.

Pri nas so se raziskave tekočih kristalov začele v sedemdesetih letih na Inštitutu Jožef Stefan. Po večletnem raziskovalnem in razvojnem delu je stekla proizvodnja tekočerkristalnih prikazalnikov, vgrajujejo jih v merilne instrumente, telefon, radiopostaje in v *osciloskope* s tekočerkristalnim zaslonom, ki je prikazan na sliki 5. Osciloskop je plod domačega znanja in je eden prvih tovrstnih izdelkov v svetu. Ima vgrajen mikroprocesor, z njim pa lahko opazujemo časovne odvisnosti električne napetosti. Slike lahko spravljamo v pomnilnik, jih obdelujemo, primerjamo, seštevamo in podobno.

Zaradi izredno majhne porabe energije se uporaba tekočerkristalnih prikazalnikov nezadržno širi, saj se s to danes tako pomembno lastnostjo imenitno vključujejo v proizvode mikroelektronike.

Igor Muševič



Slika 5. Digitalni osciloskop s tekočerkristalnim zaslonom.

Glej tudi slike tekočih kristalov na I. in IV. strani ovitka.

UČBENIKI IN PRIROČNIKI ZA OSNOVNO IN SREDNJO ŠOLO

Naročniki Preseka lahko tudi letos nabavijo pri Komisiji za tisk DMFA SRS ob skupinskem naročilu z 20% popustom naslednje učbenike in priročnike za osnovno in srednjo šolo:

	Cena 80%	100%
<i>Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov naravnih števil od 1 do 999 ter obsegov in ploščin kroga za merska števila premera od 1 do 299 (Zbral J. Žabkar)</i>	55.-	69.-
<i>Štirimestni logaritmi in druge tabele (S. Uršič)</i>	240.-	300.-
<i>Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj</i>		
1. in 2. del (V. Batagelj, T. Pisanski), vsaka	72.-	90.-
<i>Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj</i>		
1. del (M. Hribar)	144.-	180.-
2. del (B. Golli, J. Žitnik)	320.-	400.-
<i>Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za srednje šole (I. Štalec in dr.)</i>		
1. razred	280.-	350.-
2. razred	150.-	185.-
3. razred	220.-	280.-
4. razred	180.-	223.-
<i>Leksikon Cankarjeve založbe:</i>		
<i>Matematika (A. Vadnal)</i>	768.-	960.-
<i>Fizika (J. Strnad)</i>	1280.-	1600.-
<i>Uvod v programiranje (B. Mohar, E. Zakrajšek)</i>	600.-	750.-

Priporočamo vam, da si knjige pravočasno oskrbite.

Ciril Velkovrh

ALI JE NOGOMET IGRA NA SREČO

Pri tej *najpomembnejši postranski zadevi* bi se fiziki lahko zanimali za hitrost žoge ali za silo igralčeve noge na žogo. Vendar si to pot postavimo raje bolj nenavadno vprašanje, ki je zapisano v naslovu. Odgovor nanj uganemo vnaprej. Nogomet je v veliki meri igra na srečo. Če ne bi bilo tako, ne bi bilo športne napovedi. Sestavek poskuša utemeljiti to trditev po nekoliko ovinkasti, a poučni poti.



Najprej poiščimo seznam rezultatov vseh tekem v kakem tekmovanju, denimo v naši prvi ligi. Podatke za sezono 1976/77 najdemo na primer v *Almanahu* 1978 ČGP Delo.

V ligi z 18 moštvi ima vsako moštvo 17 nasprotnikov, s katerimi igra doma in v gosteh. Tako vsako moštvo v sezoni odigra $2 \cdot 17 = 34$ tekem. Vseh tekem skupaj v eni sezoni pa je $(1/2) \cdot 18 \cdot 34 = 306$. Z dve smo morali deliti, ker bi sicer vsako tekmo šteli dvakrat, pri prvem in še pri drugem moštvu.

Najprej si izberimo eno izmed moštev in se zanimajmo za število golov, ki jih je dalo na tekmah ene sezone. Vzemimo beograjsko Crveno zvezdo, ki je bila v sezoni 1976/77 prva. Naredimo si pregled tekem po številu golov, ki jih je dalo na tekmo to moštvo. Ugotovimo, da Crvena zvezda na 5 tekmah ni dala nobenega gola, na 9 tekmah po 1 gol, na 11 tekmah po dva gola, na 3 tekmah po 3 gole, na 4 tekmah po 4 gole, na 1 tekmi 5 golov in na 1 tekmi 6 golov. Delimo število tekem s številom vseh tekem, to je s 34, pa dobimo *relativno pogostost*, s katero nastopajo tekme z danim številom golov. Tako pridemo do *porazdelitve* tekem, pravzaprav njihove relativne pogostosti $p(n)$, po številu n danih golov na tekmo. Porazdelitev prikažemo s tabelo:

n	$Np(n)$	$p(n)$
0	5	0,15
1	9	0,26
2	11	0,32
3	3	0,09
4	4	0,12
5	1	0,03
6	1	0,03
	34	1,00

V prvem stolpcu je število danih golov na tekmo, v drugem stolpcu ustrezno število tekem in v tretjem relativna pogostost. Vsota drugega stolpca da polno število tekem 34, vsota relativnih pogostosti v tretjem pa 1. Zadnjo trditev zapišemo z enačbo

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$$

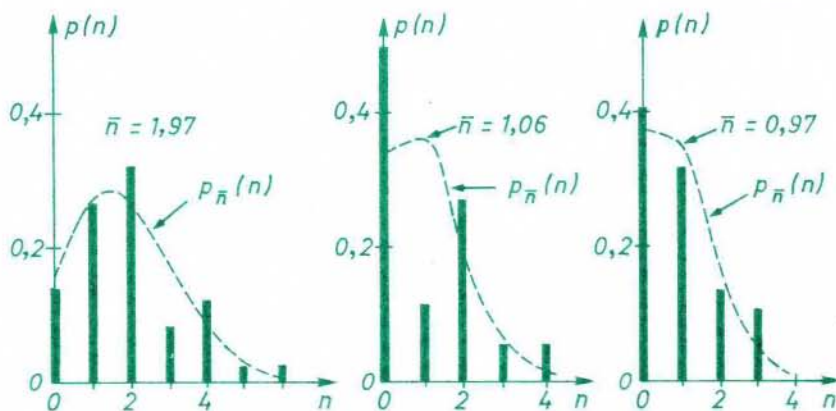
Neskončnost ∞ ima tu le simboličen pomen, ker nastopa v vsoti v resnici samo malo členov, v našem primeru samo 7.

Porazdelitev prikažemo še z diagramom. Na vodoravno os naneseemo število n danih golov na tekmo, na navpično os pa relativno pogostost p : pri danem številu golov n narišemo navpično daljico z višino $p(n)$, ki ustreza relativni pogostosti pri tem številu golov (sl. 1a). Take porazdelitve za sezono 1976/77 izračunamo in jih prikažemo z diagramom še za ljubljansko Olimpijo, ki je bila 12. (sl. 1b), in sarajevski Željezničar, ki je bil 18. (sl. 1c).

Iz dobljenih podatkov ni težko izračunati povprečnega števila golov, ki jih je dalo v sezoni 1976/77 kako moštvo. Število golov n pomnožimo z ustrezno relativno pogostostjo in prispevke seštejemo:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n)$$

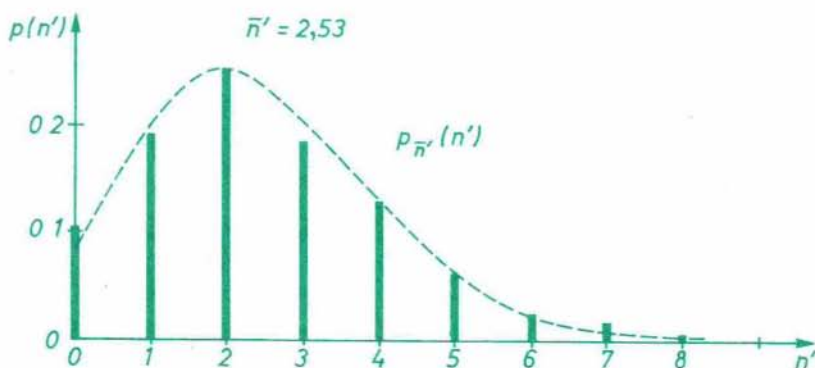
Do enakega rezultata pridemo, če število vseh golov delimo s številom vseh tekem. Tako dobimo za Crveno zvezdo $\bar{n} = 1,97$, za Olimpijo $\bar{n} = 1,06$ in za



Slika 1. Porazdelitev števila prvoligaških tekem po številu danih golov na tekmo za Crveno zvezdo (a), Olimpijo (b) in Željezničarja (c) v sezoni 1976/77. Zaradi nazornosti ponazorimo Poissonovo porazdelitev s črtkano krivuljo, kot da bi se n lahko spreminjal zvezno.

Željezničarja $\bar{n} = 0,97$. Ni nujno, da bi moštvo, ki da v povprečju več golov, vedno zavzelo višje mesto, čeprav je v našem primeru tako.

Število tekem enega moštva, to je 34, je razmeroma majhno. Zato se v porazdelitvah pokažejo nekatere neenakomernosti, na primer pri Crveni zvezdi več tekem s 4 goli kot s 3.



Slika 2. Porazdelitev števila vseh prvoligaških tekem po številu golov na tekmo v sezoni 1976/77. Podatki so iz *Almanaha* 1978 ČGP Dela.

Več podatkov zajamemo, če upoštevamo vseh $N' = 306$ tekem ene sezone v prvi ligi. V tem primeru nam gre za število vseh golov na tekmi n' , se pravi tistih, ki jih kako moštvo da, in tistih, ki jih prejme. Poiščimo torej relativne pogostosti tekem $p(n')$ po številu vseh golov na tekmo n' . Porazdelitev prikažemo z diagramom (sl. 2) in izračunamo povprečno število golov na tekmo $\bar{n}' = 2,53$. Zdaj, ko je tekem precej več, v porazdelitvi ni izrazitih neenakomernosti.

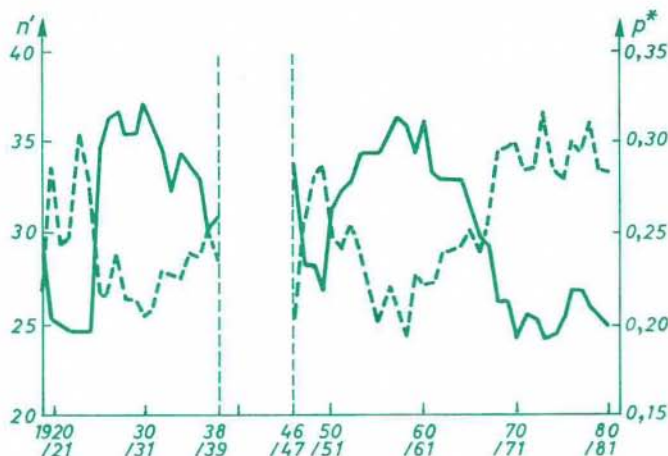
☆

Jacka Dowieja, sodelavca Fakultete za sociologijo Odprte univerze v Milton Keynesu, je zanimalo nekaj drugega. V londonski reviji New Scientist je objavil članek *Slabost nogometa - smrtno neodločeno*. Za prvo in drugo angleško ligo s skupaj 44 moštvi je pregledal, kako sta se od leta 1920 do leta 1980 spreminjala delež neodločenih tekem $p^\star$ in povprečno število golov na tekmo n' . Med obojim je ugotovil nedvomno zvezo (sl. 3), ki jo je na intervalu med nekako $\bar{n}' = 1$ in $n' = 4$ približno opisal s premico (črtkano na sl. 4):

$$p^\star = 0,55 - 0,1 \bar{n}'$$

V sezonah 1920/21 in 1980/81 se je, pri povprečnem številu golov na

tekmo 2,5, končalo 0,28 ali 28% tekem neodločeno, v sezoni 1930/31 pri povprečnem številu golov 3,7 20% in v sezoni 1960/61 pri povprečnem številu golov 3,6 22%.



Slika 3. Tako sta se v prvi in drugi angleški ligi spreminjala med leti 1920 in 1980 povprečno število golov na tekmo $\bar{n}'$ (sklenjeno, leva skala) in delež neodločenih tekem p^* (črtkano, desna skala). Povezave obeh ni mogoče spregledati. Slika je vzeta iz članka J. Dowieja *Football's failing - the deadly draw*, New Scientist, 27. 8. 1981. Med vojno 1939 — 1945 ni bilo ligaških tekmovalj.

Dowie misli, da bi privabili na nogometne tekme zopet več gledalcev, če bi dosegli večje število golov na tekmo in bi s tem zmanjšali delež neodločenih tekem. V tej zvezi razmišlja o zmanjšanju števila igralcev, povečanju golov, omiljenju ali odpravi pravila offside[☆] in še o čem. Skrajno možnost vidi v tem, da bi sploh odpravili neodločen izid: pri izenačenem številu golov naj bi štel na primer razmerje kotov ali tega, kolikokrat sta se dotaknila žoge vratarja.

Poglejmo še, kako je s tem v našem nogometu. V prvi ligi je v sezoni 1974/75 ob povprečnem številu golov 2,4 bilo 33% neodločenih tekem, v sezoni 1975/76 ob povprečnem številu golov 2,3 35% in v sezoni 1976/77 ob povprečnem številu golov 2,5 prav tako 35%.

☆ "Vsak igralec, ki je v trenutku oddaje žoge bliže nasprotnikovi prečni črti, kot je žoga, je v položaju offside, razen če je na svoji polovici igrišča, če sta med njim in nasprotnikovo prečno črto najmanj dva nasprotna igralca, če se je žoge zadnji dotaknil nasprotnik, če sprejme žogo neposredno po udarcu iz kota, udarcu od vrat, sodniškem metu ali metu žoge iz outa. Offside kaznuje sodnik s posrednim prostim strelom..." Pravilo 11, E. in W. Nordheim, *Leksikon športnih panog*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

Dowie razlaga zmanjšanje deleža neodločenih tekem v dvajsetih letih s spremembo tega pravila. Prej je pravilo zahtevalo najmanj tri nasprotna igralce.

Mimogrede se vsili misel, da bi učinkovitost kakega tekmovanja lahko izrazili s kvocientom

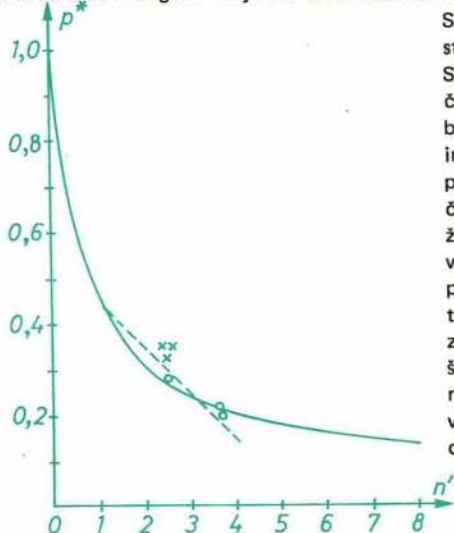
povprečno število golov na tekmo : delež neodločenih tekem.

Nekaj podatkov je zbranih v preglednici.

Sezona	kvocient
<u>angleška prva in druga liga</u>	
1920/21	8,9
1930/31	18,5
1960/61	16,4
1980/81	8,9
<u>jugoslovanska prva liga</u>	
1974/75	7,2
1975/76	6,6
1976/77	7,0

Po tem kvocientu pa ne smemo prenačljeno sklepati na mednarodni nogometni ugled kake države.

Dowiejeva razprava je zbudila pozornost Romana Sexla, profesorja teorijske fizike na dunajski univerzi. Skupaj s sodelavcema Alfredom Wehrlom in Alfredom Pflugom se je bil lotil načrta *Fizika v športu*, ki je povezan z izobra-



Slika 4. Delež neodločenih tekem v odvisnosti od povprečnega števila golov na tekmo. Sklenjena krivulja kaže rezultat $e^{-\tilde{n}'/0}(\tilde{n}')$, črtkana premica pa Dowiejev empirični približek. Krožci ustrezajo podatkom za prvo in drugo angleško ligo, križci pa za našo prvo ligo. Po teh podatkih ni mogoče odločiti med Dowiejevim empiričnim približkom in računskim rezultatom. — Pričakovali bi, da bi lahko kak rokometni rezultat pomagal pri tej odločitvi. Vendar je podatek za našo rokometno ligo s 14 moštvi v sezoni 1976/77, ko je bilo ob povprečnem številu golov na tekmo 47 16% neodločenih tekem, precej daleč od obeh. Glede števila golov je rokomet vsekakor zanimivejši od nogometa.

ževanjem odraslih ali po naše s študijem ob delu. (Od njega smo prevzeli osnovno misel, da je mogoče povečati zanimanje za fiziko, če z njo obravnava športne zadeve.) Sexl je s sodelavcema ob nekaterih predpostavkah izračunal drugačno zvezo med deležem neodločenih tekem in povprečnim številom golov na tekmo (sklenjena krivulja na sl. 4). Po tej odvisnosti bi se povprečno število golov moralo močno povečati, da bi se le malo zmanjšal delež neodločenih tekem. Če temu rezultatu verjamemo, ni vredno spreminjati pravil, kakor predlaga Dowie.



Ali ne bi mogli pogledati malo v ozadje porazdelitev, ki smo jih spoznali? Poskusimo. Ta začetek obeta, da bo odstavek nekoliko zahtevnejši. Za tolažbo si zato izmislimo pravljico. Na poroki kraljične iz devete dežele s svinjskim pastirjem je bilo skupaj 1000 povabljenih. Ravno so gostje sedli za mizo, ko je začelo deževati. Gostje so se začeli že nekoliko nejevoljno ozirati na dobro vilo, ki je skrbela za gostijo, a so kmalu uvideli, da sodi dež k stvari. Vsaka kaplja se je na krožniku spremenila v cekin. Na 1000 krožnikih se je znašlo skupaj 1970 zlatnikov. (Marsikateri gost, ki je prej godrnjal, je zdaj obžaloval, da ni dlje deževalo.) Vsak gost je dobil tedaj v povprečju po 1,97 cekina (kot pri porazdelitvi na sliki 1a). Nekatere je zanimalo relativno število gostov, ki niso dobili nobenega cekina, in gostov, ki so dobili po 1, 2, 3, ... cekinov. Vila je pojasnila, da podaja relativne pogostosti tako imenovana Poissonova porazdelitev (in to tem bolje, čim več je gostov), ki jo zapišemo kot

$$p_{\bar{n}}(n) = (\bar{n})^n e^{-\bar{n}} / n!$$

n je število cekinov na krožniku (število golov na tekmo), $\bar{n}$ povprečno število cekinov na krožniku (povprečno število golov na tekmo) in $p_{\bar{n}}$ relativna pogostost. $e = 2,718...$ je osnova naravnih logaritmov, $n!$ (n fakulteta ali n faktoriela) pa $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Na sliki 1 in 2 so nakazane ustrezne Poissonove porazdelitve s črtkanimi krivuljami, kot da bi se n lahko zvezno spreminjal.

Predpostavimo, da dajo vsa moštva nekega tekmovanja v povprečju enako število golov n na tekmo. To že ni čisto res: kar primerjajmo Crveno zvezdo, Olimpijo in Željezničarja. Vendar moramo to predpostaviti, če naj ne bo računanje preveč zapleteno. Če pa je tako, lahko hitro izračunamo delež neodločenih tekem. Na neodločeni tekmi dasta prvo in drugo moštvo enako število golov. Delež tekem z izidom $0 : 0$ je $p_{\bar{n}}(0) \cdot p_{\bar{n}}(0)$, delež tekem z izidom $1 : 1$ $p_{\bar{n}}(1) \cdot p_{\bar{n}}(1)$ itd. Delež vseh neodločenih tekem dobimo, ko seštejemo prispevke te vrste:

$$p^{\star} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\bar{n}}(n) \cdot p_{\bar{n}}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} [(\bar{n})^n e^{-\bar{n}} / n!]^2 = e^{-2\bar{n}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{n}'/2)^{2n} / (n!)^2 = e^{-\bar{n}'} I_0(\bar{n}')$$

Postavili smo $\bar{n}' = \bar{n} + \bar{n} = 2\bar{n}$. Vsote $\sum_{n=0}^{\infty} (\bar{n}'/2)^{2n} / (n!)^2$ sploh ni treba posebej računati, ker najdemo funkcijo $I_0(\bar{n}')$ že izračunano v tabelah. Funkcijo $e^{-\bar{n}'} I_0(\bar{n}')$ kaže sklenjena krivulja na sliki 4.

Na koncu odgovorimo še na začetno vprašanje. Zdaj to moremo, ko vemo, koliko smemo zaupati Poissonovi porazdelitvi. Pri tej porazdelitvi je *efektivni odmik od povprečja* enak $\sqrt{n}$ in *relativni efektivni odmik* $1/\sqrt{n}$. Matematiki vedo povedati, da leži število danih golov pri nekako dveh tretjinah tekem med $\bar{n} - \sqrt{n} = \bar{n} (1 - 1/\sqrt{n})$ in $\bar{n} + \sqrt{n} = \bar{n} (1 + 1/\sqrt{n})$. Izid posamezne tekme je tem teže napovedati, čim večji je relativni efektivni odmik. Tako lahko vzamemo, da kar ta odmik podaja delež naključja v izidu tekme. V naši prvi ligi se giblje povprečno število golov, ki jih da v eni tekmi kako moštvo, okoli $(1/2) \cdot 2,4 = 1,2$. V tem primeru je delež naključja $1/\sqrt{1,2} = 0,88$. Rečemo lahko torej, da je delež naključja nekoliko manjši kot 90%. Čeprav smemo v tej navedbi videti samo grobo oceno, je nogomet neizpodbitno zelo blizu pravih iger na srečo, pri katerih odpade na naključje vseh 100%. Rečemo lahko še to, da je delež naključja tem večji, čim slabše je v povprečju kakšno moštvo. Zares naši sklepi ne bodo dosti koristili igralcem športne napovedi. Ti že vnaprej upoštevajo, kolikor je mogoče, različno učinkovitost posameznih moštev, čemur smo se tukaj izognili.

Janez Strnad

KOMISIJA ZA TISK DMFA SRS
61111 Ljubljana, Jadranska c. 19
p.p. 64, tel. št. (061) 265-061

Naročilnica

Za šolsko leto 1985/86 naročamo izvodov PRESEKA — lista za mlade matematike, fizike in astronome

Naslov:

Šola

Priimek in ime

Naslov (ulica, hišna številka, številka pošte in kraj)

Naročnino bomo poravnali do konca koledarskega leta.

Datum

Žig in podpis

HITROST IZSTRELKA IZ ZRAČNE PUŠKE

Sosedov Marko je želel izmeriti *hitrost* izstrelka iz zračne puške. To je poizkusil narediti tako, da je ocenjeval *čas*, ki ga porabi izstrelak za pot 10 metrov. Privzel je, da se hitrost izstrelka na tako kratki poti ne spremeni dosti. Vendar je bil ta čas prekratek, da bi ga lahko merili s stoparico. Bil je precej krajši od četrтинke sekunde, hitrost torej večja od

$$v > \frac{10 \text{ m}}{0,25 \text{ s}} = 40 \text{ m/s}$$

Marko s tako grobo oceno ni bil zadovoljen. Gotovo bi se mu posrečilo, če bi meril čas bolj natančno, a potreboval bi zapleteno elektronsko uro, ki bi jo sprožil in ustavil izstrelak sam s prekinitvijo svetlobnih curkov. Pot bi bila v tem primeru lahko dolga le nekaj deset centimetrov, čas pa bi znašal nekaj tisočink sekunde (slika 1).

Ko sva se o tem pogovarjala, sem mu omenil, da se da izmeriti hitrost

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME 13. letnik, šolsko leto 1985/86, številka 1, strani 1 – 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Bojan Golli (tekmovanja - naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Bojan Mohar (matematika), Martin Čopič, Andrej Kmet, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak (tekmovanja - naloge iz matematike), Andrej Likar (Prese-kova knjižnica - fizika), Franci Oblak, Peter Petek (glavni urednik, naloge bralcev, premisli in reši), Dušica Boben (pisma bralcev), Tomaž Pisanski (računalništvo), Tomaž Skulj, Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 265–061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1985/86 je za posamezna naročila 500,- din, za skupinska naročila pa 400,- posamezna številka 100 din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofsek tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1985 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – 747

izstrelka tudi z nihalom, v katerega izstrelek trči in se v njem ustavi. Izstrelek potisne nihalo iz ravnovesja in ga tako zaniha. Največji odklon nihala ali *amplituda* je kar sorazmerna s hitrostjo izstrelka.

Začela sva računati. Izstrelek naj ima *maso* m in hitrost v , nihalo pa naj ima maso M in naj na začetku miruje. *Gibalna količina* izstrelka pred trkom, mv , je enaka gibalni količini nihala in v njem običalega izstrelka, ki je po trku $(M + m)v_0$:

$$mv = (M + m) v_0$$

Tu je v_0 hitrost nihala in izstrelka tik po trku. Hitrosti v in v_0 sta vodoravni, trk pa tako hiter, da se nihalo med njim skoraj ne premakne iz ravnovesne lege. Če bi znala izmeriti hitrost v_0 , bi hitrost v izračunala, le masi M in m bi bilo treba ugotoviti s tehtanjem. Namesto merjenja hitrosti v_0 , kar utegne biti trd oreh še v opremljenem laboratoriju, merimo raje amplitudo nihala, saj sta v_0 in amplituda s_0 takole povezana:

$$v_0 = \frac{2\pi}{t_0} s_0$$

Čas t_0 je čas *polnega nihaja*: iz ravnovesne lege proti eni amplitudni legi, nazaj skozi ravnovesno lego proti amplitudni legi na nasprotnem koncu ter od tu nazaj k ravnovesni legi.

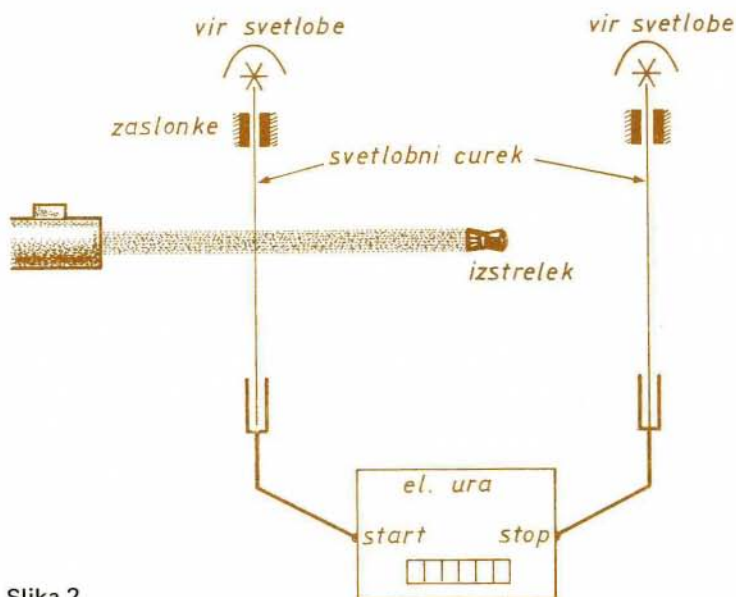
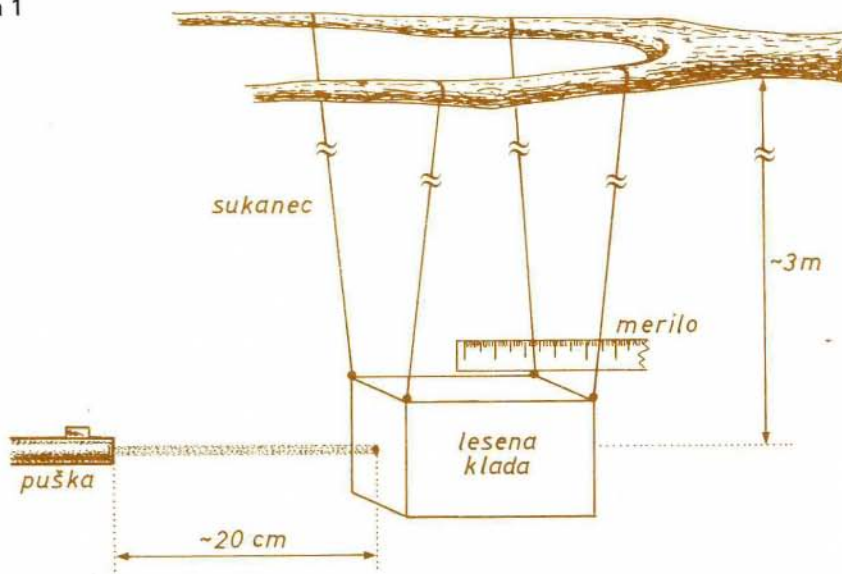
Hitrost izstrelka je potem:

$$v = 2\pi \frac{M + m}{m} \frac{s_0}{t_0}$$

Če pustimo tehtanje izstrelka in nihala ob strani, se meritev hitrega izstrelka prevede na meritev amplitude s_0 , torej razdalje in časa t_0 — podobno kot je Marko že poskušal. Toda sedaj časa ni več težko izmeriti. Nekaj več sitnosti je z merjenjem amplitude s_0 , a s kratko vajo obvladamo tudi to.

Leseno klado, težko 550 g, sva obesila s sukancem tako, da se ni mogla vrteti (slika 2). Za nihajni čas nihala sva izmerila 3,2 s (merila sva čas desetih nihajev), povprečna amplituda po devetih streljih pa je bila 87 mm. Edini podatek, ki sva ga še potrebovala, je bila masa izstrelka. Presenečena sva bila, da imajo posamezne krogle tako različne mase. Prosila sva, da so nama natančno stehali 90 krogel, vsako posebej. Izmerke sva uredila po velikosti ter to narisala na sliki 3. Višina stolpca kaže število krogel, ki ležijo med označenimi masami. Krogel na primer, ki so imele večjo maso od 0,585 g in manjšo od 0,590 g, je bilo 25. Našla sva celo kroglo, ki je tehtala le 0,527 g. Računala sva s povprečno maso 0,59 g.

Slika 1

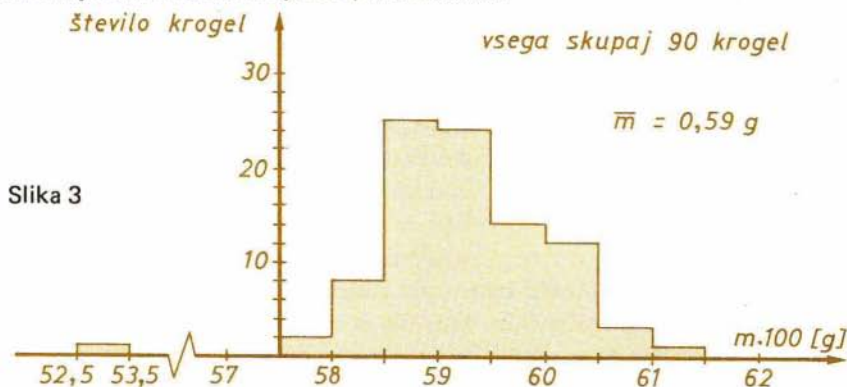


Slika 2

S temi podatki sva izračunala hitrost

$$v = 157 \text{ m s}^{-1}$$

V računu sta dve količini precej negotovi, in to amplituda in masa izstrelka. Amplitudo je težko odčitati na ravnilu, ker se nihalo tam ustavi le za hip (tu bi pomagala dobra tehnična izboljšava), poleg tega pa je pri poizkusu nagajala še rahla sapica. Izstrelkov nisva sproti tehtala (poskusite tehtati na desetinko grama natančno!), zato je povprečna masa za nekatere izstrelke slaba ocena. Negotova je postajala tudi masa lesene klade, ki sva jo precej poškodovala, pa še precej obtičalih izstrelkov se je nabralo v njej, česar nisva štela (nekateri izstrelki so sami izpadali iz klade). Precej izstrelkov se je proti koncu meritve začelo odbijati od klade. Takih meritev seveda nisva upoštevala (amplituda pri odbitih streljih je bila bistveno večja kot pri obtičanih).



Slika 3

Ocenila sva, da je najin rezultat negotov za 7 ms^{-1} , kar pomeni, da je prava hitrost najverjetneje med 150 ms^{-1} in 164 ms^{-1} , kar krajše zapišemo takole

$$v = (157 \pm 7) \text{ ms}^{-1}$$

Merila sva tudi pojemanje hitrosti izstrelka zaradi zračnega upora. Iz rezultatov sva izračunala, da doseže navpično izstreljeni izstrelke višino 110 metrov, puška pa je nevarno orožje (oči) celo do razdalje 200 metrov.

Opozarjava vse, ki bi želeli ponoviti najine meritve, da naj delajo izredno previdno. Odčitavanje amplitude na milimeter natančno terja, da je opazovalec zelo blizu merila, če ne uporablja dobrega daljnogleda. Zgrešen strel ima zato lahko hude posledice. Priporočava, da te meritve delate v navzočnosti starejših.

Marko Jagodič in Andrej Likar

O POSOJILIH

V času, ko je naša dežela vse bolj zadolžena, je zelo pomembno vedeti tudi kaj o posojilih. Zato si oglejmo, kako lahko izračunamo višino mesečne anuitete najetega kredita. Če morda še ne veš, *anuiteta* je znesek, ki ga moraš plačati vsak mesec, da v dogovorjenem roku vrneš posojilo.

Na banki lahko dobimo na primer posojilo, ki ga bomo odplačevali 5 let, obresti pa bodo 50% letno. Za nakup stanovanj pa so krediti ugodnejši: 15 let in 5%. Kolikšna bo mesečna anuiteta za vsakega od kreditov, če posojilo znaša 10000,00 din?

Da bo računanje lažje, bomo vpeljali naslednje oznake:

n	višina posojila (din)
d	doba odplačevanja (let)
p	obrestna mera (npr. $p = 0.05$ za 5% obr. mero)
a	mesečna anuiteta (neznano)

Omeniti moramo, da se obresti zaračunajo vsako leto enkrat in da se odplačani znesek ne obrestuje več. Z vsakim mesecem je torej znesek dolga za a manjši, na koncu vsakega leta pa se k odplačanemu znesku dodajajo obresti.

Za rešitev problema je ugodno razmišljati malo drugače. Banka nam je posodila znesek n din. Ta znesek bomo odplačevali d let. Če ga ne bi odplačevali sproti, bi morali zaradi obresti plačati znesek $n +$ obresti v d letih. Koliko znesejo te obresti, bomo izračunali kasneje. Po drugi strani pa plačujemo mesečne obroke in si lahko mislimo, da jih nalagamo na posebno (svojo) hranilno knjižico ali bančni račun, kjer se nam obrestujejo po obrestni meri, ki velja za posojilo. Namesto da bi upoštevali, da smo banki vsak mesec dolžni manj (in nam banka ne bo več zaračunavala obresti za ta znesek), imamo znesek na naši knjižici. Zanj dobimo ravno toliko obresti, kot jih moramo plačati banki. Sklepamo torej lahko takole: d let mesečno nakazujemo po a dinarjev na poseben račun. Banka ga bo obrestovala po meri p . Končni znesek mora biti enak n plus obresti v d letih.

Oglejmo si sedaj, kako se posojilo n obrestuje z leti. Po prvem letu k znesku prištejemo enoletne obresti $p \cdot n$ dinarjev in imamo tako skupaj $n + pn =$

$= n(1 + p)$ dinarjev. V drugem letu se obrestuje že novi znesek, zato je za $p \cdot n \cdot (1 + p)$ obresti in skupna vsota se poveča na $(n \cdot (1 + p)) \cdot (1 + p) = n(1 + p)^2$. Ravno tako vidimo, da je po treh letih vsota enaka $n(1 + p)^3$ itd. Znesek se po d letih poveča na $n(1 + p)^d$.

Kaj pa je z odplačevanjem? Prvi mesec vplačamo a dinarjev in ta vsota se nam bo obrestovala d let minus en mesec. Drugi obrok se nam bo obrestoval dva meseca manj kot d let itd. V d letih odplačevanja bomo na "našem računu" nabrali skupaj naslednjo vsoto:

$$\begin{aligned} & a + \text{obresti za } (d - 1/12) \text{ let} + \\ & + a + \text{obresti za } (d - 2/12) \text{ let} + \\ & + a + \text{obresti za } (d - 3/12) \text{ let} + \\ & \dots\dots\dots \\ & + a + \text{obresti za } (d - 12d/12) \text{ let} \end{aligned}$$

Skupaj bomo torej vplačali $12d$ mesečnih obrokov po a dinarjev in zanje dobili tudi nekaj obresti. Koliko bo teh obresti, bo najtežje izračunati.

Najprej pogledjmo, koliko dobimo pri odplačevanju v enem letu:

$$\begin{aligned} & \text{od prvega obroka: } a + a \cdot p \cdot 11/12 = a(1 + 11p/12) \\ & \text{od drugega obroka: } a + a \cdot p \cdot 10/12 = a(1 + 10p/12) \\ & \dots\dots\dots \\ & \text{od enajstega obroka: } a + a \cdot p \cdot 1/12 = a(1 + p/12) \\ & \text{od dvanaajstega obroka: } a = a(1 + 0p/12) \end{aligned}$$

Skupno dobimo:

$$\begin{aligned} A_1 &= a(1 + 11p/12) + \dots + a(1 + 0p/12) = \\ &= a [12 + p(11 + 10 + \dots + 1)/12] = a [12 + p \cdot 11 \cdot 12/24] = \\ &= a [12 + 11p/2] \end{aligned}$$

Znesek A_1 se nam bo obrestoval še $d - 1$ leto, zato bomo od njega dobili skupno:

$$B_1 = A_1 \cdot (1 + p)^{d-1}$$

V drugem letu ravno tako "odplačamo" A_1 dinarjev, ki se nam potem obrestujejo celih $d - 2$ let. Torej dobimo zanje:

$$B_2 = A_1 \cdot (1 + p)^{d-2}$$

dinarjev. Podobno dobimo iz obrokov tretjega leta skupno

$$B_3 = A_1 \cdot (1+p)^{d-3} \text{ dinarjev itd.}$$

V vseh d letih odplačevanja pa zberemo:

$$\begin{aligned} A &= A_1(1+p)^{d-1} + A_1(1+p)^{d-2} + \dots + A_1(1+p) + A_1 = \\ &= A_1 [(1+p)^{d-1} + (1+p)^{d-2} + \dots + (1+p) + 1] = \\ &= A_1 \cdot [(1+p)^d - 1] / [(1+p) - 1] = a(12 + 11p/2) \cdot [(1+p)^d - 1] / p \end{aligned}$$

Kako smo izračunali vsoto iz oglatega oklepaja v gornji formuli?

Ker je $(x^d - 1) = (x - 1)(x^{d-1} + x^{d-2} + \dots + x + 1)$, sledi $x^{d-1} + x^{d-2} + \dots + x + 1 = (x^d - 1)/(x - 1)$, kar je uporabljeno zgoraj za $x = 1 + p$.

Ta formula ne velja za $x = 1$ (to je $p = 0$). Zakaj misliš, da je tako?

Zdaj smo že pri koncu. Odplačano mora biti enako dobljenemu posojilu, povečanemu za obresti:

$$a \cdot (12 + 11p/2) [(1+p)^d - 1] / p = n \cdot (1+p)^d$$

in

$$a = n \cdot (1+p)^d \cdot p / [(1+p)^d - 1] (12 + 11p/2) \quad (1)$$

Ko sem izpeljal formulo (1), sem jo seveda takoj preizkusil na primeru. Pri nakupu pohištva sem najel potrošniški kredit v višini 92000 din z dobo odplačevanja 5 let in 25% obrestno mero. Na ta račun mesečno plačujem 2851 din. In glej ga zlomka! Ogoljufali so me! Prav gotovo, saj po formuli (1) dobim mesečno anuiteto 2558 din. V petih letih bom torej plačal $12 \cdot 5 \cdot (2851 - 2558) = 17580$ preveč.

Kaj je narobe? Vse skupaj sem še enkrat preveril na podatkih za nek drug kredit in tudi to se ni ujemalo. Očitno je nekaj narobe z našo formulo. Po krajšem poizvedovanju sem izvedel, da kredite odplačujemo z letnimi in ne mesečnimi anuitetami. To pomeni, da se 12 mesečnih obrokov za letno anuiteto ne začne obrestovati z mesecem plačila, ampak šele ob poteku leta, ko smo torej vplačali že vseh 12 obrokov letne anuitete. V gornji izpeljavi je torej vse v redu, le znesek A_1 , ki ga dobimo pri odplačevanju v enem letu, je enak $12a$ in ne $(12 + 11p/2)a$. Od tod pa izračunamo mesečno anuiteto:

$$a = \frac{n \cdot p \cdot (1+p)^d}{12 \cdot [(1+p)^d - 1]} \quad (2)$$

Izvedel sem še, da je pri stanovanjskih posojilih banka bolj "poštena", saj obrestuje odplačani znesek že po vsakih 6 mesecih (ima torej polletne anuitete). Skušal sem izpeljati formulo tudi za ta primer, vendar pa se mi rezultati nika-
kor niso ujemali s številkami, ki sem jih dobil od znanca: $n = 800.000$, $p = 0,05$,
 $d = 15$ in $a = 6327$ din. Ali bi mi kdo od bralcev znal razložiti, kako so na banki
prišli do te številke? Za najboljše (pravilne) odgovore dam tudi nagrade. Lahko
mi pišete kar na uredništvo Preseka.

Za konec zastavljam bralcem še tri vprašanja:

(1) Ali so možne take obresti, da bo mesečna anuiteta pri odplačevanju na
pet let manjša kot anuiteta pri odplačevanju na 10 let? Za rešitev problema po-
trebuješ osnovno znanje o kvadratnih enačbah.

(2) Kolikšna je dejanska vrednost odplačanega denarja v primerjavi z višino
posojila, če upoštevaš, da se vrednost zmanjšuje z inflacijo, ki je, recimo, vsa
leta odplačevanja enaka 80%?

(3) Ali se lahko zgodi, da bo pri posojilu na d let mesečna anuiteta višja od
celotnega posojila? Kaj opaziš, če pri tem primerjaš formuli (1) in (2)?

Bojan Mohar

Bolj za šalo kot zares

KOVANCI

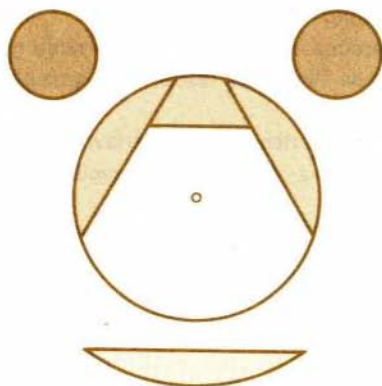
Janez: Zakaj je kovanec za 10 dinarjev iz leta 1983 nekoliko manjši od ko-
vanca za 5 dinarjev iz leta 1982?

Peter: Iz istega razloga, zaradi katerega je tvoj kovanec za 5 dinarjev nekoli-
ko manjši od kovanca za 2 din iz leta 1981.

Izidor Hafner



INVERZIJA



Slika 1



Slika 2

Vas zanima zveza med gornjima slikama? Drugo iz druge dobimo s preslikavo, imenovano *inverzija*.

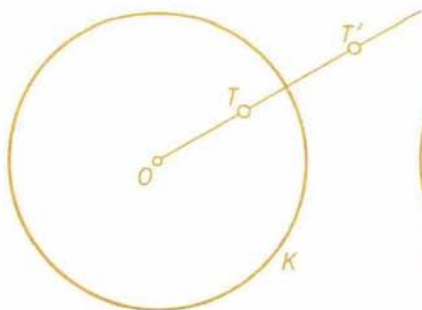
Inverzija je pravzaprav zrcaljenje glede na krožnico. Oglejmo si njeno definicijo.

V ravnini naj bo dana krožnica K s središčem v točki O in polmerom r . V ravnini izberimo še poljubno točko, različno od O , in jo označimo s T . Točki O in T določata poltrak, ki ima izhodišče v točki O in gre skozi točko T . Na poltraku izberimo točko T' , tako da bo izpolnjena enačba $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = r^2$ (slika 3).

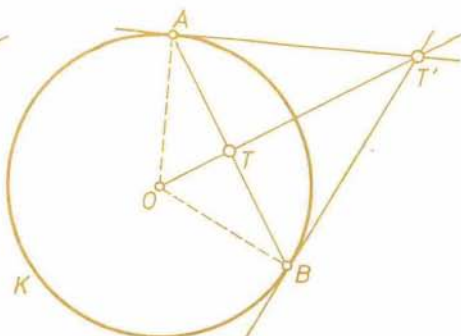
Točko T' , ki jo dobimo na ta način, imenujemo *inverzna slika* točke T glede na krožnico K . Točko O imenujemo *središče inverzije*, krožnico K pa *krožnica inverzije*.

Če izberemo točko T znotraj kroga K , je $\overline{OT} < r$. Ker mora veljati $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = r^2$, sledi, da je $\overline{OT'} > r$. Torej leži inverzna točka T' zunaj kroga K . Velja tudi obratno. Točke zunaj kroga se pri inverziji preslikajo v njegovo notranjost. Prav tako je očitno, da se točke na krožnici K preslikajo same nase. V tem primeru je namreč $\overline{OT} = \overline{OT'} = r$.

Iz definicije takoj vidimo, da sta točki T in T' medsebojno inverzni. Če je T' inverzna slika točke T , potem je točka T inverzna slika točke T' glede na isto krožnico.



Slika 3



Slika 4

Edina točka, katere inverzna slika ni določena, je središče inverzije O . Torej izbrana točka T in O sovpadata in ne določata poltraka, pa tudi $\overline{OT} = 0$. Kaj storimo v tem primeru? Očitno je naslednje. Čim bliže O je točka T , tem dlje od nje je inverzna točka T' , in obratno. Zato včasih pravimo, da se središče inverzije O preslika v neskončnost.

Točke ravnine smo razdelili v tri skupine. V prvi skupini so točke, ki sestavljajo krožnico K , v drugi točke znotraj in v tretji točke zunaj kroga. Vemo tudi, kam se preslikajo. Postavimo si sedaj vprašanje, kako inverzno točko dejansko najti, konstruirati. Najhitreje smo gotovi, če izberemo točko T na krožnici K . Točke krožnice so namreč same sebi inverzne, $T = T'$.

Nekaj dela je v drugih dveh primerih. Oglejmo si konstrukcijo le za primer, ko točka T leži v notranjosti kroga K . Najprej narišimo krožnico K s središčem v točki O in s polmerom r (slika 4). To bo naša krožnica inverzije. V notranjosti kroga izberimo poljubno točko T z edino omejitvijo $T \neq O$, ker bi jo radi res narisali. Narišimo tisti poltrak z izhodiščem O , ki poteka skozi točko T . Narišimo pravokotnico na ta poltrak v točki T . Pravokotnica seka krožnico K v dveh točkah, ki ju označimo z A in B . V teh dveh točkah narišimo tangenti na krožnico K . Tangenti se zaradi simetrije sekata na poltraku OT , in sicer prav v točki T' , ki je inverzna slika točke T glede na krožnico K .

Prepričajmo se, da je res tako!

Trikotnika $\triangle OTA$ in $\triangle OAT'$ sta pravokotna. Pri oglišču O imata skupen kot, torej sta podobna. Imata sorazmerne stranice, torej je

$$\overline{OA} : \overline{OT} = \overline{OT'} : \overline{OA}$$

od koder sledi

$$\overline{OA}^2 = \overline{OT} \cdot \overline{OT'}$$

Ker je $\overline{OA}$ raven polmer krožnice K , dobimo $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = r^2$. S tem je pravilnost konstrukcije potrjena.

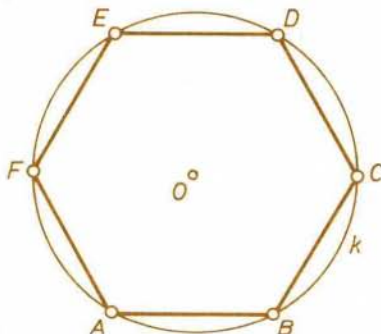
Podobno lahko konstruiramo inverzno točko k točki, ki jo izberemo zunaj kroga K .

Inverzija na krog ima precej lepih lastnosti. Nekaj jih bomo našteali, z njihovim dokazovanjem pa se ne bomo ukvarjali. Inverzija preslika premice in kroge v premice in kroge. Povejmo bolj natančno!

1. Premice, ki potekajo skozi središče inverzije, se preslikajo same nase.
2. Premice, ki ne potekajo skozi središče inverzije, se preslikajo v krožnice, ki potekajo skozi središče inverzije.
3. Krožnici, ki gre skozi središče inverzije, je inverzna premica, ki ne gre skozi središče inverzije.
4. Inverzna slika krožnice, ki ne poteka skozi središče inverzije, je krožnica, ki tudi ne gre skozi središče inverzije. Vendar se le redko preslika nase.

Če smo dobro razumeli te štiri lastnosti, se vrnimo k prvi in drugi sliki. Z malo primerjanja lahko ugotovimo, da sta si res inverzni glede na krožnico, ki je obris obraza.

Mogoče je komu od bralcev ta naloga pretežka. Za ogrevanje lahko poskusi z lažjo.



Slika 5

V kaj se preslika pravilni šestkotnik na sliki 5 z inverzijo glede na očrtani krog?

Milena Pintar

11. IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Ob lanskem republiškem tekmovanju mladih matematikov v Celju so organizatorji pripravili tudi posvet o tem, kako naj bi ta tekmovanja potekala v bodoče. Že dalj časa namreč opažamo, da je tudi na srednjih šolah, ki nimajo naravoslovno—matematične usmeritve, kar precej učencev, ki jih veseli reševanje matematičnih nalog. V konkurenci z dijaki naravoslovno—matematične usmeritve pa le redkim med njimi uspe, da se uvrstijo na republiško tekmovanje. Navzoči profesorji matematike in člani tekmovalne komisije smo se najbolj ogreli za predlog, da naj izbirno tekmovanje poteka v dveh stopnjah. Prva naj bi bila skupno šolsko tekmovanje za tiste učence srednjih šol, ki niso vpisani v naravoslovno—matematično usmeritev. Druga pa bi predstavljala dejansko izbirno tekmovanje za udeležbo na republiškem tekmovanju. Udeležili bi se je tekmovalci iz naravoslovno—matematične usmeritve in najboljši udeleženci šolskega tekmovanja.

Letošnjo pomlad smo to zamisel tudi uresničili. O šolskem tekmovanju smo obvestili 77 srednjih šol po vsej Sloveniji, in sicer vse tiste, ki imajo programe V. stopnje in skupno v štirih letih vsaj 420 ur pouka matematike. Vabilu se je odzvalo kar 42 šol in tako je v soboto, 2. marca 1985, okrog tisoč srednješolcev reševalo naslednje naloge:

Naloge za prvi razred

1. Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ deljiv s 24. Za kakšne n ta izraz ni deljiv s 120?
2. Janko in Marko sta se ob 5. uri napotila iz kraja A v kraj B . Janko je prišel v B ob 17. uri, Marko pa ob 20. uri. Če oba hodita z enakomerno hitrostjo, kdaj sta šla skozi kraj C (med A in B), če vemo, da je šel skozenj Janko dve uri pred Markom?
3. V krog s polmerom 1 je včrtan pravokotnik. Pokaži, da je krajša stranica pravokotnika krajša od 1,5.
4. V nasprotnih ogliščih steklenega kvadra z dolžinami robov 1 dm, 2 dm in 3 dm sta: mravlja v enem in kaplja medu v drugem. Izračunaj dolžino najkrajše poti, po kateri lahko mravlja pride do kaplje medu.

Naloge za drugi razred

1. Dokaži: Če v konveksnem četverokotniku povežemo razpolovišča sosednjih stranic, dobimo paralelogram. Izračunaj razmerje ploščin konveksnega četverokotnika in včrtanega paralelograma.
2. Poišči takšno realno število b , da bo imela enačba

$$|x - 1| + |x - 2| = x + b$$

natanko eno rešitev.

3. Katero število je večje: $(1/25)^{301}$ ali $(1/125)^{201}$? Utemelji odgovor.
4. Za pozitivna realna števila a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 in b_3 velja:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Pokaži, da za vsako naravno število n in poljubna pozitivna realna števila d_1, d_2 in d_3 velja:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{d_1 a_1^n + d_2 a_2^n + d_3 a_3^n}{d_1 b_1^n + d_2 b_2^n + d_3 b_3^n}$$

Naloge za tretji razred

1. Poišči vse rešitve trigonometrijske enačbe ($x \in \mathbb{R}$):

$$\sin 3x + \sin 2x = 5 \cdot \sin x$$

JS

2. Poenostavi izraz $\sqrt{51} - 2\sqrt{98}$
3. Izračunaj vse korene enačbe

$$\log_{\sin x} \cos x - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0$$

4. Poišči vsa naravna števila, ki imajo (v desetiškem zapisu) na skrajni levi cifro 6 in za katera velja: če to šestico zberemo, je novo število ena petindvajsetina prvotnega števila.

Naloge za četrti razred

1. Določi tako realno število x , da bo vrednost izraza

$$(x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-1985)^2$$

najmanjša.

2. Dokaži, da za vsako naravno število n velja:

$$\left(\frac{1.2.4 + 2.4.8 + \dots + n.2n.4n}{1.3.9 + 2.6.18 + \dots + n.3n.9n} \right)^{1/3} < \frac{7}{9}$$

3. Poišči vsa realna števila a , za katera imata polinoma $p(x) = x^3 + ax + 1$ in $q(x) = x^3 + x + a$ skupno ničlo.

4. O neki množici krogel vemo naslednje: vsaka krogla iz te množice je ali modre ali rdeče barve; vsaka krogla iz te množice ima maso ali 1 kg ali 2 kg; vse krogle niso iste barve in vse krogle nimajo enake mase. Dokaži, da v tej množici obstajata taki krogli, ki imata različni masi in sta različne barve.

Na izbirnem tekmovanju, ki je bilo v soboto, 16. marca 1985, je spet sodelovalo skoraj tisoč srednješolcev s tridesetih šol. Kot se lahko prepričate, tudi tokrat naloge niso bile lahke.

Naloge za prvi razred

1. V ravnini so dane tri nekolinearne točke A, B in C . Konstruiraj tisto krožnico s središčem v C , za katero sta njeni tangenti skozi A oziroma B vzporedni.

2. Naj bo c realno število, ki ni manjše od 1. Katero izmed števil

$$\sqrt{c+1} - \sqrt{c} \quad \text{in} \quad \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$$

je večje?

3. Ob napovedovanju noveletnega TV sporeda decembra 1984 je voditeljica oddaje "625" voščila gledalcem "Srečno novo leto 625". V katerem številskem sestavu ima voščilo ustrezen pomen?

4. V razredu je 35 učencev. Neko soboto so pomagali pri pogozdovanju, vendar zaradi različnih razlogov niso prišli vsi. Vemo, da je dopoldne vsak učenec zasadil 6 dreves, popoldne pa vsak 5. Če so skupno posadili 351 dreves, koliko učencev je bilo odsotnih dopoldne in koliko popoldne?

Naloge za drugi razred

1. V krogu s središčem S je ST poljuben polmer. Dokaži: Če izberemo katerokoli točko V na krožnici, pokrije trikotnik $\triangle STV$ manj kot šestino kroga.
2. Izračunaj

$$\frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}}$$

3. Na plantaži kvadratne oblike so drevesa zasajena tako, da tvorijo kvadratno mrežo. Plantažo nameravajo razširiti s 1985 na enak način razporejenimi drevesi tako, da bo ohranila kvadratno obliko. Koliko dreves je na plantaži?
4. Osnovna ploskev piramide $ABCV$ je enakostranični trikotnik, stranske ploskve pa so enakokraki trkotniki, ki so med sabo enaki. Izračunaj razmerje med dolžinama roba osnovne in roba stranske ploskve, če sta poljubni težiščnici iz oglišč osnovne ploskve na stranski ploskvi pravokotni med sabo (mišljene so težiščnice, ki potekajo skozi notranjost piramide).

Naloge za tretji razred

1. Poišči vse rešitve neenačbe

$$\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{x-1}{x+1}$$

2. Za realno funkcijo f velja:

a) $f(1) = 1$

b) za vsak x in vsak y iz $\mathbb{R}$: $f(x - y^2) = f(x) + (y^2 - 2x)f(y)$

Izračunaj $f(1985)$.

3. Za pravokotnik $ABCD$ velja, da je $\overline{AB}:\overline{BC} = 3 : 1$. Na stranici AB izberemo točki E in F tako, da je $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$. Dokaži, da je

$$\sphericalangle CFB = \sphericalangle CEB + \sphericalangle CAB$$

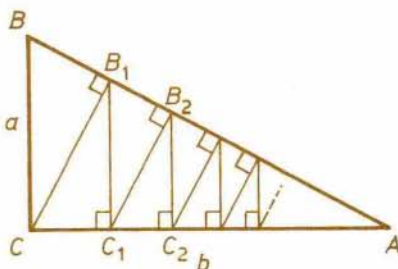
4. Dokaži, da funkcija $g(x) = \sin(x^2)$ ni periodična.

1. V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ s katetama $\overline{BC} = a$ in $\overline{CA} = b$ povežemo C in A z lomljeno črto tako, kot kaže slika na desni. Kako dolga je ta črta?

2. Pokaži, da za nobeno realno število a polinom $p(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 20x + a$ nima dvojnih ničel.

3. Krivulji $y = a |x|$ in $y = (|x| - 1)/a$ sta določeni s pozitivnim številom a . Za katere a se krivulji sekata? Če se sekata, za kakšne a je ploščina omejenega lika, ki ga krivulji oklepata, ekstremna? Je pri tem dosežen maksimum ali minimum?

4. Na neskončnem listu karo papirja so v enakih razmikih natisnjene vodoravne in navpične črte. Izberemo si poljubnih pet presečišč teh črt. Dokaži, da vsaj ena od desetih daljic, ki povezujejo po dve izmed izbranih točk, poteka skozi vsaj še eno presečišče natisnjenih črt.

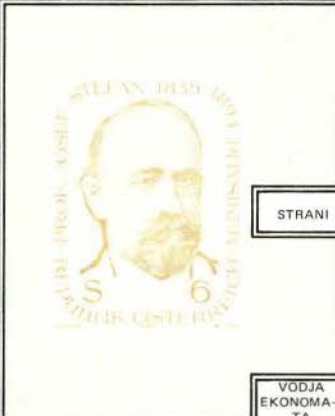
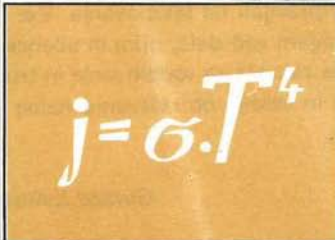


Za udeležbo na republiškem tekmovanju se je potegovalo 271 srednješolcev (112 iz prvega, 38 iz drugega, 69 iz tretjega in 52 iz četrtega razreda). Na podlagi rezultatov v tem letu in v preteklih letih je komisija povabila v Postojno 143 učencev iz 27 srednjih šol, od tega 25 dijakov iz nenaravoslovno—matematičnih usmeritev. Izbira je bila najtežja v prvem razredu, kjer je večina predlaganih učencev dosegla 15 točk od 20 možnih.

Novost v tekmovalnem sistemu je prvo preizkušnjo dobro prestala: z veseljem so jo sprejeli na mnogih šolah, ki doslej niso niti sodelovale na tekmovanjih. Dopisi pričajo, da je zanimanje za matematiko ponekod tolikšno, da bodo uvedli krožke ali pa se kako drugače pripravljali na tekmovanja. Vse to in pa dodatna tekmovanja seveda prinaša učiteljem več dela, njim in učencem pa vzame tudi precej časa. Prvim gre zato naša zahvala za sodelovanje in trud, drugim pa so nagrada uspehi na tekmovanjih in veselje ob reševanju nalog in novih spoznanjih, ki jih prinaša reševanje nalog.

Gorazd Lešnjak

SLIKOVNA KRIŽANKA "OB STOPETDESETLETNICI ROJSTVA"

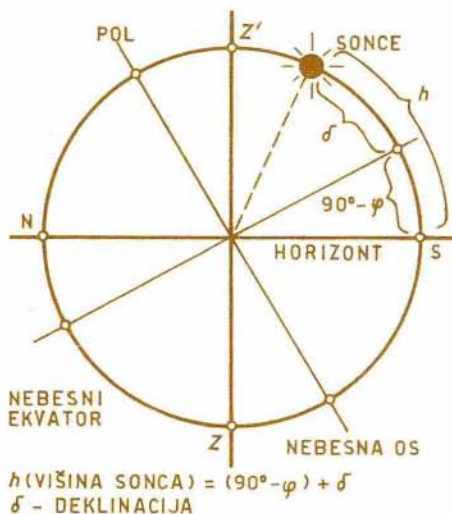
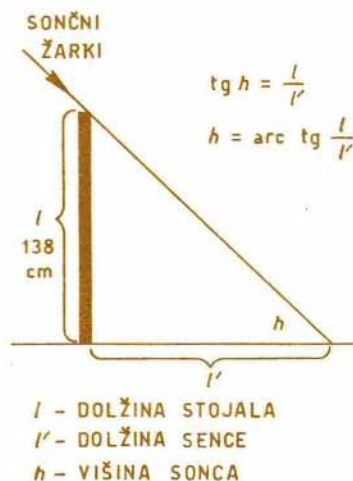
				JOSIP PLEMEJL	VZKLIK PRI BIKO-BORBI	DOMAČE MOŠKO IME	HLAPLI-VA TEKOČINA	KOČIJAŽ	* 24.3.1835		
											
				STRANI							
				TROJANSKI JUNAK					TUPOLEJ	UP	ICE
				ČLOVEK, KI ROPA	MUZA L.J. POEZIJE ANTONIO VIVALDI						
VODJA EKONOMATA											
OBMOČJE						NAZIV	TRETJA POTENCA NIKELJ				RA B
TIKOV LES									ELIZABETH TAYLOR		
GRŠKI BASNO-PISEC					POKOJ LUIS DAGUERRE				LIVADA		
ZAKLJUČNI DEL TEKME							SODAVICA	TROPSKA PAPIGA	TOVARNA V MEDVODAH	PREBIVALCI IRSKE	
SOZVOČJE						PLOD SKLADATELJ BARTOK				SESTAVIL PAVLE GREGORC	SL S K\
JEZERO V JZ TIBETU				SREČKO KOSOVEL	PISARNA KRADLJIVEC					KRALJ ELVIRA ORGAN VIDA	
											
				GRŠKI BOG SMRTI							

		ŠUGMAN ZLATKO	EDVARD (LJUBK.)	POJAV NA NEBU	LOVSKA NASTAVA	ELEKTR. VOLT	NASILJE	BIL JE TUDI	GORNJI UD
		LEK							
PAUL ZANNE			X			PREGOVOR			
			BIL JE TUDI			OBLIKA RAZCVETA			
EL ŽI— LSKEGA, ELESA				GRŠKA ČRKA	DELO TLA— ČANOV PIJAČA IZ RIŽA				
STLINA ODIKA						STAR SLOVAN			"ELEKT." MORSKA RIBA
3									
	GORA V TESALIJI					PALICA BOGA BAKHA			
	Franc. alpski smučar								
						DIVJA MAČKA	TOČENJE SOLZ		
							RAME		
				SEZNAM TISKAR— SKIH NAPAK					
VAS V AVONIJI				GLASBENO ZNAMENJE	IVO ANDRIČ			LATINSKI VEZNIK	
NOV IZ /ASOVK					DEL VIETNAMA			DRŽAVNA BLAGAJNA	
		UMETNOST (LATIN.)	NASMEŠEK						ŠAHISTKA KUŠNIR
			STARO— PERZIJSKI VLADAR						
						SLOVEN. PESNICA MUSER			
	POPEVKA— RICA PAVONE					MUSLI— MANSKO M. IME			
	SRAMO— VANJE					NOETOVA BARKA			

ZANIMIVA SENCA

Senco, ki jo meče Sonce, so že stari narodi uporabljali za merjenje časa – s sončnimi urami. Ali je danes še zanimivo opazovati senco? Ali ne sodi to v zgodovino?

No, mi smo mislili drugače in smo si zadali za nalogo opazovanje sence in višine Sonca skozi šolsko leto 1983/84. Vzeli smo stojalo (138 cm), ga postavili na šolsko teraso in, če je bilo sončno, smo točno opoldne merili dolžino sence l' , nato pa smo izračunali še višino Sonca h (glej skico 1). Narisali smo dva grafa $h(t)$ in $l'(t)$, pri čemer je t čas, to je datum opazovanja. Pozorno pogledj tabelo in grafa – kaj lahko spoznamo iz teh meritev? Najbrž je to v neki zvezi z geografsko širino in gibanjem Sonca. Zato pogledjmo v Prosenovo knjigo (Presek V (1977/78), 5), kjer najdemo zvezo: $h = 90^\circ - \varphi + \delta$ (h je višina Sonca, φ zemljepisna širina in δ deklinacija Sonca – glej skico 2). Tako smo lahko izračunali zemljepisno širino kraja: $\varphi = 90^\circ - h + \delta$. Pogledjmo račun za 6.3.1984: $h = 38,70$ (izmerjeno), $\delta = -5^\circ 40' = -5,8^\circ$ (odčitano iz efemerid), $\varphi = 90^\circ - 38,7^\circ - 5,8^\circ = 45,5^\circ$. Povprečje naših meritev je bilo $\bar{\varphi} = 45,8^\circ$, prava vrednost za Ljubljano pa je $\varphi = 46,03^\circ$.



Mer.	Datum	Srednjeevr. čas	Dolžina sence	Višina Sonca	Zemljep. širina
1.	26.9.83	12	159,4cm	41 ⁰	48 ⁰
2.	30.9.83	12	160,0	40,7	46,8
3.	3.10.83	12	164	40	46,7
4.	4.10.83	12	166	39,7	46,3
5.	8.10.83	12	171	38,9	46,3
6.	14.10.83	12	185	36,7	45,5
7.	18.10.83	12	198	34,8	44,9
8.	20.10.83	12	202	34,3	45,7
9.	24.10.83	12	211	33,2	45,3
10.	25.10.83	12	216	32,6	45,6
11.	28.10.83	12	222	31,8	45,4
12.	3.11.83	12	242	29,7	45,5
13.	7.11.83	12	258	28,7	45,3
14.	14.11.83	12	285	25,8	46,2
15.	16.11.83	12	286	25,8	45,7
16.	22.11.83	12	305	24,3	45,9
17.	23.11.83	12	306	24,3	45,9
18.	2.12.83	12	332	22,6	45,6
19.	6.12.83	12	340	22,1	45,5
20.	7.12.83	12	341	22	45,5
21.	8.12.83	12	343	21,9	45,6
22.	12.12.83	12	351	21,5	45,5
23.	27.12.83	12	354	21,3	45,3
24.	29.12.83	12	358	21,1	45,2
25.	26.1.84	12	291	25,4	45,6
26.	10.2.84	12	239	30	45,3
27.	14.2.84	12	227	31,3	45,4
28.	5.3.84	12	171	38,5	45,3
29.	6.3.84	12	173	38,7	45,6
30.	8.3.84	12	166	39,7	45
31.	19.3.84	12	155	41,7	47,5
32.	20.3.94	12	148,5	42,9	46,5
33.	21.3.84	12	145	43,5	46,3
34.	22.3.84	12	141	44,5	46
35.	23.3.84	12	139	44,9	46,2
36.	27.3.84	12	129	46,9	46,9
37.	12.4.84	12	104	52,8	44,6

Boris Kham

Marijan Prosen, *Astronomska opazovanja*, Presek V (1977/78), 5, Ljubljana

[illegible]

V današnji rešitvi križanke smo pasice z napisi posvečenimi F. Močniku odtisnili v 20% rastru, druge napise, ki so vsaj malo povezani z našimi strokami pa smo prekrili z 10% rastrom.

Ciril Velkovrh

KAKO RAČUNALNIK NARIŠE DALJICO

Očetje in sinovi, pa tudi kakšna hči in celo mamica so si zadnja leta našli novo igraro: hišni računalnik. Pravo malo čudo je takale škatlica, kajne? Sin se z njo podi za Marsovci, očka piše nekakšne službene zadeve, hčerka odkriva skrivnosti in zaklade kraških jam, mamica pa si tu in tam ogleda svoj bioritem. In vsa ta resna in manj resna dogajanja spremlja risba na televizijskem zaslonu: črta kaže, kako raste in pada bioritem, po drugi črti potuje marsovska vesoljska ladja. Le kako zna računalnik vse to narisati?

Vas zanima? Pa si ogledjmo!

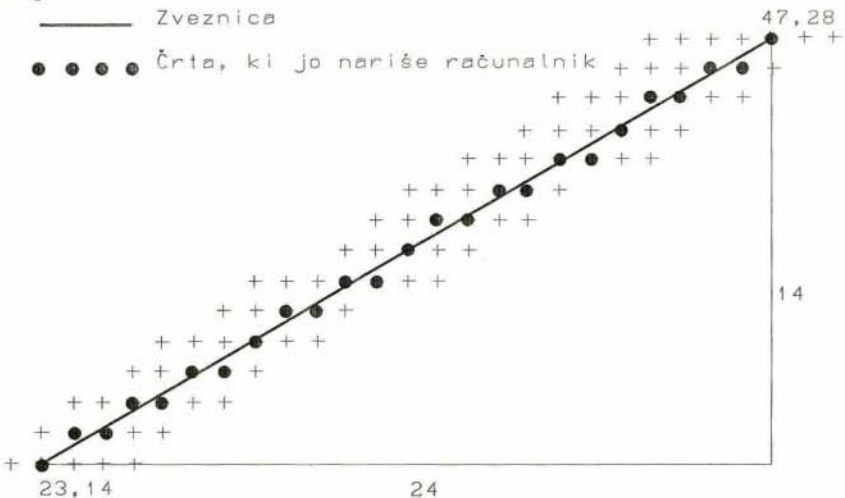
RAČUNALNIKOV PAPIR

Kje bi začeli? Pri samem začetku: ogledjmo si, kako računalnik nariše sliko na zaslon. Nekateri med vami vedo, kako sliko riše televizor, drugi se o tem lahko takoj prepričate: prižgite televizor in sliko pogledjte čisto od blizu. Opazili boste, da je slika sestavljena iz množice vodoravnih vrstic. Podobno postopa tudi računalnik, le da so pri njem vrstice razdeljene še na barvne ali črno-bele pike, in to tako, da je zaslon velika rešetka različno pobarvanih pik. Pike stojijo druga pod drugo, urejene v stolpce. Računalnikove pike so oštevilčene, zato pač, da lahko pot od pike do pike izračuna. Piko izberemo s parom naravnih števil; prvo število pove stolpec, drugo pa vrstico, v kateri stoji pika. Stolpce in vrstice štejemo od levega spodnjega vogala zaslona. Pika 23,14 je tako triindvajseta pika v štirinajsti vrstici. Paru števil, ki označujeta piko, pravimo s tujko koordinati. Tako torej lahko ukažemo: pobarvaj piko 23,14, ali v basicu: `PLOT 23,14`. Igranje z barvo in podobnimi učinki pa prepuščam vam, dragi bralci.

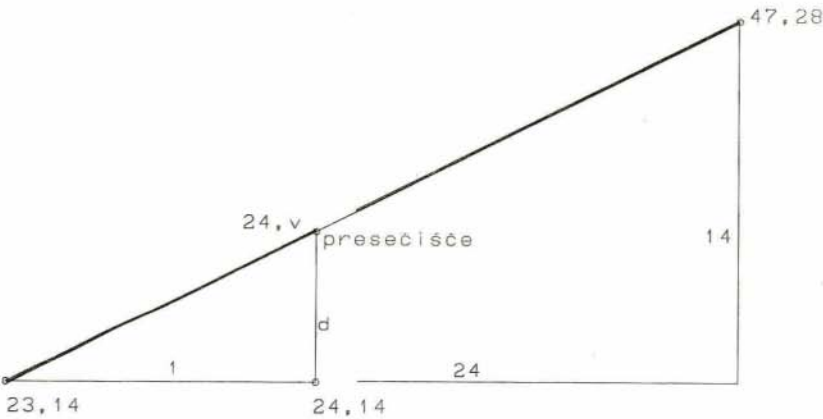
RAČUNALNIKOVO RAVNILO

Sedaj pa k stvari: ogledjmo si, kakšno je računalnikovo ravnilo, po kakšnem postopku računalnik nariše ravno črto. Denimo od točke 23,14 do točke 47,28, se pravi 24 pik v desno in 14 navzgor. Nekateri med vami me boste na kratko odpravili: z ukazom `DRAW 24,14` pač, boste rekli. Res je, dosti računalnikov

je, ki "znajo" risati ravne črte, pri katerih je postopek za risanje vgrajen kar v računalnik sam. Pa vam utegne priti postopek za risanje ravne črte prav tudi na takem računalniku. Kdaj? Denimo, ko boste v svoji igrici želeli vesoljsko ladjo poslati z enega planeta na drugega – po ravni črti. A več o tem morda kdaj drugič.



Slika 1. Skica naše naloge



Slika 2. Podobni trikotniki

Preden se naloge lotimo, si jo skicirajmo. Na sliko 1 smo narisali kar naš gornji primer, črto od 23,14 do 47,28. Ti piki povezuje črta, potegnjena s pravim ravnilom. Z računalnikom bomo morali pobarvati tudi pike, katerih središča ne leže na tej črti. Črta, ki jo nariše računalnik, zato ni ravna, temveč žagasta.

Lotimo se torej naloge! Piko za piko moramo pobarvati, drugo za drugo. Seveda moramo pobarvati začetno piko, naslednjo pa določiti nekje v smeri proti končni. Najlažje je določiti tisto, katere središče je najbližje točki, v kateri prava črta, to je zveznica začetne in končne točke, prečka sredino sosednjega stolpca.

Prestavimo se torej v sosednji stolpec, pogledimo, kje ta stolpec prečka zveznica obeh točk. To nam povesta podobna trikotnika s slike 2. Iz enačbe podobnosti $14:24 = d : 1$ takoj izračunamo, koliko nad osnovnico trikotnika je presečišče, od tod pa dobimo njegovo višino v :

$$d = 14/24$$

$$v = 14 + d$$

Kako določimo presečišču najbližjo piko? Višino presečišča zaokrožimo, poiščemo ji najbližje celo število. V gornjem primeru moramo torej pobarvati piko z višino 15. Povsem podobno izračunamo presečišče zveznice z naslednjim stolpcem. Sami premislite, kako bi potrdili, da je vsako naslednje presečišče za d više! Označimo z i, j koordinati pike, ki jo pobarvamo. Zgornji razmislek potem uredimo v tale postopek:

- (1) postavi se v začetno piko: $i := 23, j := 14$,
postavi $v := 14$ (saj je v tem stolpcu presečišče kar prva pika),
izračunaj $d := 14/24$;
- (2) pobarvaj trenutno piko,
če je to zadnja pika, končaj;
- (3) izračunaj višino naslednjega presečišča: $v := v + d$,
izračunaj koordinati nove pike: $i := i + 1, j :=$ zaokrožen v ,
pojdi na (2);

Program v basicu hočete? Samo en oreh še stremo, pa ga zapišemo: naučiti se moramo zaokroževati. Kot vemo, zaokrožimo decimalno število, ki leži med celima številoma k in $k + 1$, na k , če je manjše od $k + 1/2$, sicer pa na $k + 1$. Naj nam zato c označuje razliko med višino presečišča in prvim za pol zmanjšanim celim številom pod njim. Višina začetne pike je celo število, zato je začetna

vrednost c kar $1/2$. Ko se preselimo v sosednjo piko, se c poveča za d . Pri tem lahko seveda spleza nad 1, tedaj pač, ko v zraste čez naslednje, za pol zvečano celo število. V tem primeru moramo višino pobarvane pike zvečati za 1, zato pa c odštejemo 1. Ozmimo se nazaj, pa lahko hitro ugotovimo, da v sploh ne potrebujemo več, zadostujeta nam j in c .

Pa zapišimo sedaj program! Na primer takole (zaradi čitljivosti smo ga zapisali malo po svoje):

```
100 LET i = 23:
    LET j = 14:
    LET c = 1/2:
    LET d = (47-23)/(28-14)
```

Nasmehnili ste se: davno ste se že naučili, da je $47-23 = 24$. Res je, vendar nam zapis pokaže pot v posplošitev programa. Saj hočemo s črto zvezati poljubni par točk, kajne? Denimo začetno točko s koordinatama iz, jz s končno točko, katere koordinati zapišimo z ik, jk . Takoj popravimo ta korak programa, pa je program takle:

```
100 INPUT "Začetna točka", iz, jz:
    INPUT "Končna točka", ik, jk:
200 LET i = iz:
    LET j = jz:
    LET c = 1/2:
    LET d = (jk-jz)/(ik-iz)
```

Nadaljujmo: pobarvati je treba piko in preveriti, če smo na koncu črte:

```
300 PLOT i, j:
    IF i = ik AND j = jk THEN STOP
```

nato pa določiti koordinati nove pike:

```
400 LET i = i+1: LET c = c + d:
    IF c > 1 THEN
        LET j = j + 1: LET c = c - 1
500 GO TO 300
```

Ste program natipkali? Poigrajmo se malo z njim! Poženimo ga in vtiskajmo gornje podatke: 23, 14 pa 47 in 28. Pri vtiskavanju števila ločite med sabo s pritiskom tipke ENTER. Program lepo nariše črto in konča. Krasno, si mislimo, čas je, da ga posnamemo na kaseto.

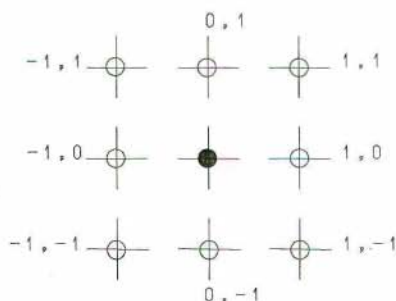
Pa malo dodatnega igranja – "testiranja" – nič ne škoduje. Kar poskusimo! Poženimo program ponovno, pri tem pa zamenjajmo začetno in končno točko! Ste videli? Program je odpovedal. Poskusimo še enkrat, tokrat zamenjajmo le stolpce z vrsticami, torej: 14, 23, 28, 47. Tudi tokrat program povsem zgreši končno točko. Karkoli poskušamo, program riše povsem pravilno le v desno navzgor, in še to le, ko črta ne raste prehitro, ko je razlika vrstičnih števil manjša od razlike stolpčnih števil.

Dopolnimo program, naučimo ga risati še v ostalih smereh! Zato si še enkrat oglejmo, kako izberemo novo piko za barvanje. O tem odloča ostanek c: če je manjši od 1, se pomaknemo vodoravno v desno, sicer pa poševno v desno navzgor. Izbiramo torej le med prvo in drugo sosedo pobarvane pike (slika 3). Program moramo torej popraviti tako, da bo znal izbirati še med preostalimi sosedami. Med katerimi? Odgovor razberemo iz slike: pri vsaki od črt bomo sosedo izbrali med tistima, med katerima pelje narisana črta. Do ene od obeh pridemo pošev, do druge pa vodoravno ali navpično. Poglejmo, kako bi ta koraka izračunali! Označimo poševni korak s π , p_j , pa takoj uganemo:

π_i = predznak ($i_k - i_z$)

p_j = predznak ($j_k - j_z$)

Funkcije predznak se seveda ne ustrašimo, tudi v basicu smo jo že srečali: SGN ji je bilo ime. Le ponovimo, da je predznak pozitivnega števila enak 1, negativnega -1 , pri 0 pa je enak 0. Lotimo se sedaj še drugega koraka, označimo ga z d_i , d_j ! Korak bo vodoraven ali navpičen; zato bo eden od d_i ali d_j enak 0, dru-



Slika 3. Sosedne pike

gi pa tak kot pi oziroma pj. Kateri? Tudi tu se ne zamudimo kaj dlje: če je velikost razlike vrstic večja od velikosti razlike stolpcev začetne in končne točke, bo treba korakati navpik, sicer vodoravno. Velikost števila nam v basicu izračuna funkcija ABS (absolutna vrednost).

Sedaj premislimo še, kako se bomo odločili med obema korakoma. Spet bo sodilo c. Kadar bomo izbirali med vodoravnim in poševnim korakom, nam bo povedal, kdaj moramo spremeniti vrstično številko; ko se bomo odločali med poševnim in navpičnim, pa bo odločil, kdaj spremenimo stolpčno številko pike, ki jo bomo pobarvali. Pomen c bo v obeh primerih podoben kot zgoraj: ko bo njegova vrednost zrasla nad ena, bomo izbrali poševni, sicer pa vodoravni oziroma navpični korak. Od pike do pike bo c spet naraščal s korakom d.

Dopolnimo sedaj s temi ugotovitvami postopek za risanje:

- (1) preberi koordinate začetne in končne točke: iz, jz, ik, jk;
- (2) izberi sosedo in določi koraka do njiju:
pi := predznak (ik-iz), pj := predznak (jk-jz),
di := pi, dj := pj,
če je velikost (ik-iz) večja od velikosti (jk-jz)
potem postavi dj := 0 sicer pa di := 0;
- (3) izračunaj korak sodila c:
c := 1/2,
če je velikost (ik-iz) večja od velikosti (jk-jz)
potem postavi d := velikost ((jk-jz)/(ik-iz))
sicer pa d := velikost ((ik-iz)/(jk-jz));
- (4) postavi se v začetno piko: i := iz, j := jz,
- (5) pobarvaj trenutno piko,
če je to zadnja pika, končaj;
- (6) izračunaj vrednosti sodila v sosednjem stolpcu: c := c + d;
če je c večji kot 1
potem izberi poševni korak: i := i + pi, j := j + pj ter
zmanjšaj c: c := c - 1
sicer pa vodoravni oziroma navpični korak: i := i + di, j := j + dj,
pojdi na (5);

Na koncu zapišimo še program. Dopolnili smo ga toliko, da smo se znebili decimalnih števil: vsa števila, s katerimi računamo, so sedaj cela. Kako? Vrednost d in c smo pomnožili z imenovalcem d in z 2, temu smo ustrezno spremenili tudi vrednost 1 v primerjavi iz koraka (6).

```

100 INPUT "Zacetna tocka"/
    "stolpec = ";iz,
    "vrstica = ";jz
110 INPUT "Koncna tocka"/
    "stolpec = ";ik,
    "vrstica = ";jk
200 LET ri=ik-iz:
    LET rj=jk-jz:
    LET pi=SGN ri: LET di=pi:
    LET pj=SGN rj: LET dj=pj:
    LET ri=ABS ri:
    LET rj=ABS rj
210 IF ri<rj THEN
    LET di=0: LET d=2*ri:
    LET c=rj: LET m=2*rj:
    GO TO 240
220 REM ELSE
230 LET dj=0: LET d=2*rj:
    LET c=ri: LET m=2*ri
240 REM
300 LET i=iz: LET j=jz
400 REM LOOP
410 PLOT i,j:
    IF i=ik AND j=jk THEN
        GO TO 700
500 LET c=c+d
510 IF c<m THEN
    LET i=i+di: LET j=j+dj:
    GO TO 540
520 REM ELSE
530 LET i=i+pi: LET j=j+pj:
    LET c=c-m
540 REM
600 GO TO 400
700 STOP

```

Za primer uporabe opisanega postopka pa naj poskrbi tale naloga:

Napiši program, ki prebere koordinate treh točk in nariše pobarvan trikotnik z oglišči v podanih točkah!

Kdaj drugič pa si bomo ogledali, kako računalnik riše krožnice in elipse.

DVA DOKAZA

1. Če sta R in r polmera pravokotnemu trikotniku opisane in vpisane krožnice, tedaj velja neenakost

$$R \geq r(1 + \sqrt{2})$$

Dokaži!

2. Dokaži, da v pravilnem osemnajstkotniku velja

$$a^3 + R^3 = 3aR^2$$

kjer je a stranica in R polmer krožnice, opisane okrog tega mnogokotnika.

Dragoljub M. Milošević
Prev. Peter Petek

Pogovor z Raymondom Smullyanom

Presek: Profesor Smullyan, napisali ste več knjig z logičnimi ugankami. Kako je naslov knjigi, ki jo imate v roki?

Smullyan: "Kako je naslov tej knjigi?"

Presek: Da, po naslovu sprašujemo.

Smullyan: Saj sem odgovoril, tej knjigi je naslov "Kako je naslov tej knjigi?"

Presek: Tale knjiga pa je zbirka vaših življenjskih izkušenj. Kakšen je njen naslov?

Smullyan: "Ta knjiga ne potrebuje naslova".

Presek: Hočete reči, da ste napisali knjigo brez naslova?

Smullyan: Ne, povedal sem, da je naslov tej knjigi "Ta knjiga ne potrebuje naslova".

Bolj za šalo kot zares

Izidor Hafner

NEKAJ NALOG MLADIM VEGOVCEM

Naloge so reševali učenci osnovnih šol v občini Ljubljana Moste–Polje na šolskih tekmovanjih za bronasto Vegovo priznanje v šolskem letu 1984/85.

5. razred

1. V izrazu $1 \times 2 \times 3 \times 4$ zamenjaj znak $\times$ z računskimi znaki in postavi oklepaje tako, da bo dobil:
- a) največjo vrednost
 - b) najmanjšo vrednost

2. Izračunaj vrednosti izrazov:

a) $5^3 - (3^2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 0) : 21 =$

b) $202 - 2 \cdot 3^2 + 125 : 25 =$

3. Marko, Nada in Olga so si razdelili 7548 din. Marko dobi 222 din manj kot Nada, Olga pa dobi toliko kot Marko in Nada skupaj. Koliko denarja dobi vsak?

4. Nariši premico s in določi točko T , ki je od premice s oddaljena 4 cm. Nariši krožnico k s središčem T in polmerom 3 cm. Nariši krožnici k vsaj eno tangento, ki je:

- a) vzporedna premici s
- b) pravokotna na premico s

5. V pravokotniku je ena stranica dolga 8 cm, druga pa 18 cm.

- a) Kako dolga je stranica kvadrata, ki ima enak obseg kot pravokotnik?
- b) Kako dolga je stranica kvadrata, ki ima enako ploščino kot pravokotnik?

6. razred

1. Izračunaj vrednost izraza: $\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} \cdot (11\frac{1}{3} - 5,4) \cdot \frac{9}{89}$

2. Učenec je prehodil $\frac{5}{9}$ poti med domom in šolo. Ko bo prehodil še 140 m, bo na $\frac{3}{4}$ poti. Kolikšna je razdalja med domom in šolo?

3. Nariši enakokrak pravokotni trikotnik $\triangle ABS$ s kateto $\overline{AS} = 4$ cm in pravim kotom pri točki S . Zrcali $\triangle ABS$:

- a) prek točke S
- b) preko premice (B,S)
- c) preko premice (A,S)

Kakšen lik tvorita dani trikotnik $\triangle ABS$ in njegove zrcalne slike? Utemelji odgovor!

4. Po redu plovbe izpluje ladja A iz пристanišča vsak 4. dan, ladja B vsak 8. dan, ladja C pa vsak 10. dan. Dne 29. maja so izplule vse tri ladje. Katerega dne bodo naslednjič vse tri ladje zapustile пристanišče?

5. Nariši deltoid $ABCD$ s podatki: $e = 4$ cm, $f = 7$ cm in $\delta = 75^\circ$.

7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza:

$$3 : \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5} : 2\right) + 5\left(0,4 - \frac{2}{5} : (-2)\right) + (-2) : \left(-1\frac{1}{4}\right) .$$

2. Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ in $g(x) = \frac{3}{4}x + 3$ in os x .

3. Načrtaj trapez $ABCD$: $\overline{CD} = 3$ cm, $\overline{AB} = 6$ cm, $\sphericalangle BAC = 45^\circ$, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ in izračunaj njegovo ploščino.

4. Za koliko odstotkov se zveča ali zmanjša produkt števil a in b , če prvi faktor za 10% zvečamo, drugega pa za 10% zmanjšamo?

5. V košarici je 16 kroglic: črnih, belih in rdečih. Rdečih je 7-krat manj kot belih. Koliko črnih kroglic je v košarici?

8. razred

1. Dana je linearna funkcija $y = \frac{12}{5}x - 6$. Določi koordinati presečišč grafa dane funkcije s koordinatnima osema in izračunaj dolžino odseka premice med presečiščima.

2. V prvi cisterni je 470 l vode, v drugi pa 240 l. Iz prve odteče vsako uro trikrat več vode kot iz druge. Čez pet ur ostane v prvi cisterni 20 l vode manj kot v drugi. Koliko litrov vode odteče vsako uro iz vsake cisterne?

3. Če v pravokotniku podaljšaš dolžino za njeno tretjino, se mu ploščina poveča. Za koliko bi morali skrajšati širino, da bi ostala ploščina nespremenjena?

4. Poenostavi izraz:

$$\left(\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3}\right) : \frac{a^2 + 9}{a^2 - 9}, \quad a \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

in ugotovi, ali je vrednost izraza odvisna od vrednosti spremenljivke a .

5. Dani so trije kvadrati: prvi s stranico a , drugi ima stranico enako polovici diagonale prvega, stranica tretjega pa je enaka dvakratni diagonali drugega kvadrata. Izračunaj razmerje obsegov in razmerje ploščin vseh treh kvadratov.

Aleksander Potočnik

NOROST?

A: Zakaj praviš, da je Jim nor? Ali ima privide?

B: Ne, ravno v tem je njegov problem - samo domišlja si, da jih ima.

NALOGE ZA MLADE MATEMATIKE

- 1.a) Poišči vsa dvomestna števila, katerih vsota cifer je četrtnina števila samega!
- b) Določi vsa dvomestna števila, ki so sedemkrat večja od vsote njegovih cifer!
2. Športni park ima obliko pravokotnika z obsegom 0,9 km. Kolikšna je površina parka, če je širina dvakrat manjša od njegove dolžine?
3. Sečišče diagonal kvadrata je od stranice oddaljeno 9 cm. Kolikšen je obseg kvadrata?
4. Brez kotomera (samo z ravnilom in šestilom) razdeli kot 54° na tri enake dele!
5. Dane so cifre 0, 1, 3, 4 in 5. S temi ciframi sestavi petmestna števila, ki bodo deljiva s 4. Vsako število mora vsebovati le dane cifre, vsako natanko enkrat.
6. Seštej sedem zaporednih naravnih števil, od katerih je n najmanjše! Kolikšno število mora biti n , če naj bo vsota
 - a) sodo število,
 - b) liho število?
7. Izračunaj

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$$

Napotek: Vsak ulomek zapiši kot razliko dveh ulomkov, na primer:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

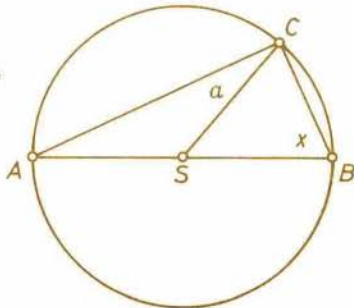
8. Dokaži neenakost

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$$

9. Pokaži, da je
 - a) $83\% \cdot 45 = (83,45)\%$
 - b) $7\% + 5\% + 11\% = 23\%$
 - c) $13\% - 6\% = 7\%$

10. V posodi je bilo 100 kg desetodstotne solne raztopine. Potem, ko je nekaj vode izhlapelo, je ostalo še 70 kg vode. Koliko procentna je sedaj raztopina?

11. Kot x izrazi z danim kotom α !



12. Aritmetična sredina števil a, b, c je 22, aritmetična sredina števil a, b, c in d pa je 25. Določi d !

13. Izračunaj:

$$13^{15} : 13^{13} + (5^{13} - 5^{11}) : 5^9$$

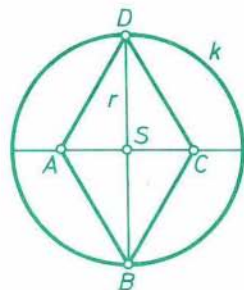
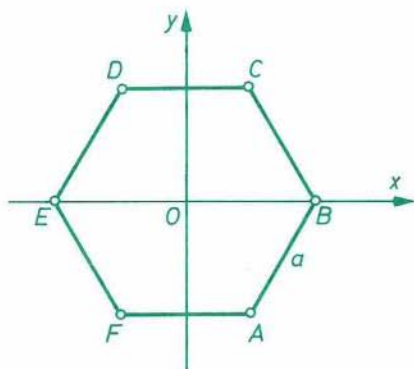
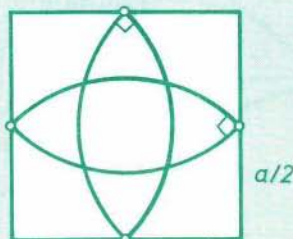
14. Kakšen predznak mora imeti število n , če je

a) $\frac{n}{4,3 - 8,1} < 0$

b) $\frac{n}{4,3 - 8,1} > 0$

15. Napiši koordinate oglišč pravilnega šestkotnika $ABCDEF$ s stranico a ! (Glej sliko!)

17. Zamreženo okno ima obliko kvadrata s stranico a . Koliko metrov kovinske žice potrebujemo? (Glej sliko)



18. Kolikšen del ploščine kroga s polmerom r je ploščina štirikotnika $ABCD$ s kotom $\sphericalangle A = 120^\circ$? Izrazi tudi v procentih! (Glej sliko zgoraj desno.)

19. V kolikšnem razmerju morata biti stranici pravokotnika, če iz njega izrežemo največji šestkotnik?

20. Razdeli število 226,8 na štiri števila tako, da bodo v razmerju

$$\frac{5}{6} : 0,65 : \frac{2}{3} : 1$$

21. Za katero vrednost spremenljivke x ima izraz $5 - (x - 3)^2$ največjo vrednost? Razloži!

22. Izraz

$$\frac{3}{x-5} \cdot \sqrt{(x^2-25)(x-5)}$$

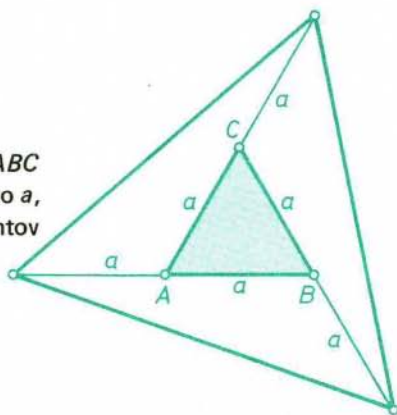
poenostavi in nato ugotovi, za katero vrednost spremenljivke x kvadratni koren obstaja?

23. V pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ s katetama 3 cm in 4 cm včrtaj krog. Dotikališča kroga delijo stranice trikotnika na dva dela. Izračunaj razmerje delov na vseh treh straneh!

24. Izraz $x^3 + 3x^2 - 4$ zapiši v obliki produkta in nato izračunaj njegovo vrednost, če je $x = 99998$! Napotek: $3x^2 = -x^2 + 4x^2$.

25. Nariši enakostanični trikotnik s stranicama $a_1 = 3$ cm, $a_2 = 4$ cm. Nato nariši enakostranični trikotnik, ki bo ploščinsko enak vsoti ploščin danih trikotnikov!

26. Če enakostraničnemu trikotniku $\triangle ABC$ s stranico a podaljšamo stranice za dolžino a , dobimo večji trikotnik. Za koliko procentov se poveča njegova ploščina?



Pavle Zajc

DVA DOKAZA – rešitev s str. 45

1. Za kateti a, b velja $(a - b)^2 \geq 0$, od koder izpeljemo

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \quad (1)$$

Neenakost (1) korenimo in upoštevamo Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$ ter dobimo

$$a + b \leq c\sqrt{2} \quad (2)$$

Iz slike razberemo, da velja $c = (a - r) + (b - r)$, t.j.

$$a + b = c + 2r \quad (3)$$

Na osnovi (2) in (3) imamo $c + 2r \leq c\sqrt{2}$. Ker pa je $c = 2R$, sledi $R(\sqrt{2} - 1) \geq r$ oziroma

$$R \geq r(1 + \sqrt{2})$$

Enakost velja le v primeru, ko je trikotnik enakokrak in pravokoten.

2. Pravičen mnogokotnik z 18 stranici lahko razstavimo na ravno toliko enakokrakih trikotnikov z osnovnico a , krakom R in kotom 20° pri vrhu. Eden od teh trikotnikov je na sliki. Konstruiramo poltrak Ap tako, da je kot pAa enak 20° . Na njem izberemo točki D in E tako, da je $D \in BC$ in $CE \perp AE$. Trikotnika ABC in BAD sta podobna, zato je $BD : a = a : R$, od tod $BD = a^2/R$, kar pomeni, da je

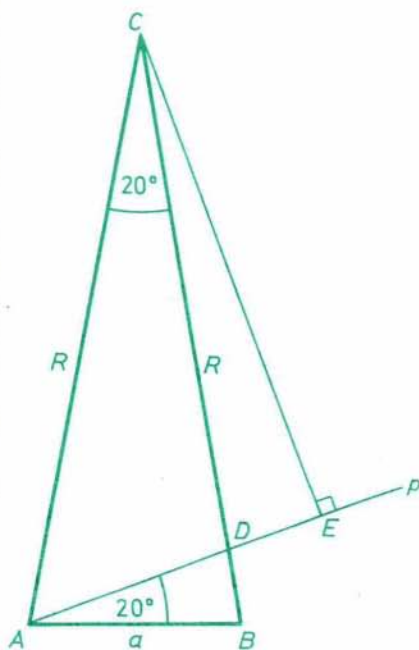
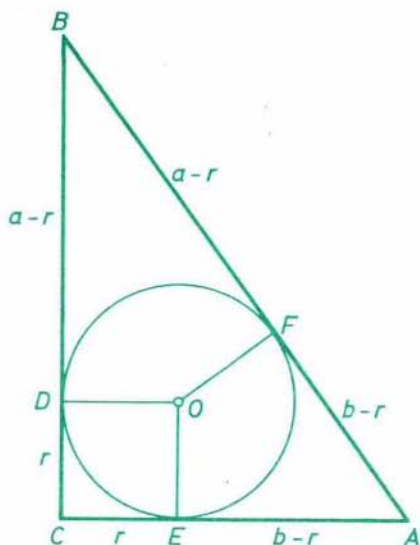
$$CD = R - a^2/R \quad (4)$$

Ker je kot CAE enak 60° , je v pravokotnem trikotniku ACE stranica $AE = R/2$ in $CE = R\sqrt{3}/2$. V pravokotnem trikotniku CDE je še $DE = R/2 - a$ in po Pitagorovem izreku

$$CD^2 = (R/2 - a)^2 + 3R^2/4 \quad (5)$$

Vstavimo (4) v (5), uredimo in dobimo zahtevano enakost.

Dragoljub M. Milošević
Prev. Peter Petek



NALOGE ZA MLADE MATEMATIKE

– rešitve s str. 48

- Števila so: a) 12, 24, 36, 48
b) 21, 42, 63, 84
- Površina parka $p = 45000 \text{ m}^2 = 0,045 \text{ km}^2$
- Obseg kvadrata meri 72 cm.
- Na lok iztegnjenega kota nanese trikrat po 54° . Tako dobimo kot $180^\circ - 3 \cdot 54^\circ = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$.
- 13504, 15304, 31504, 35104, 51304, 53104, 13540, 15340, 31540, 35140, 51340, 53140.
- $S = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 6)$
 $S = 7 \cdot n + 21, S = 7 \cdot (n + 3)$
a) n je liho število, b) n je sodo število.

7. $1/6$

8.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121} \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120}$$

Ker je $2/3 > 1/2$, $4/5 > 3/4$, $6/7 > 5/6$, ... in $120/121 > 119/120$, sledi, da je $x > y$ in $x^2 > xy$. Toda

$$x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}, \text{ zato je } x^2 > \frac{1}{121} \text{ ali}$$

$$x > 1/11.$$

9. Reši sam!

10. V raztopini se je spremenila samo količina vode, količina soli pa je ostala ista. Soli je 100 kg. $(10/100) = 10$ kg. Skupna količina raztopine je 80 kg. $x\%$ od 80 kg je 10 kg. $x = 12,5$. Raztopina je 12,5 odstotna.

11. $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SCB$. Zakaj? $2x = \sphericalangle ASC$. Zakaj? $180^\circ - 2x = 2x$
 $x = 90^\circ - a$

$$12. \frac{1}{4} (a + b + c + d) = 25$$

$$\frac{1}{3} (a + b + c) = 22$$

$$a + b + c = 66$$

$$\frac{1}{4} (66 + d) = 25$$

$$d = 34$$

$$13. \quad 13^2 - \frac{5^{11} \cdot (5^2 - 1)}{5^9} = 13^2 + 5^2 \cdot 24 = 769$$

$$14. \text{ a) } n > 0 \quad \text{ b) } n < 0$$

$$15. A\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), B(a, 0), C\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), D\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), E(-a, 0), F\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$16. r = 20 \text{ cm}$$

$$17. r = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

$$o = (2\pi a \sqrt{2}) / 2$$

$$o = \pi a \sqrt{2}$$

18. Štirikotnik $ABCD$ je romb. Stranico označimo z a .

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{3}, \quad a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

$$p = 2 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

$$p = \frac{2}{3} \sqrt{3} r^2$$

Ploščina kroga: $p_1 = \pi r^2$

$$p_1 : p = \pi r^2 : \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot r^2$$

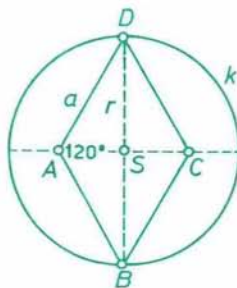
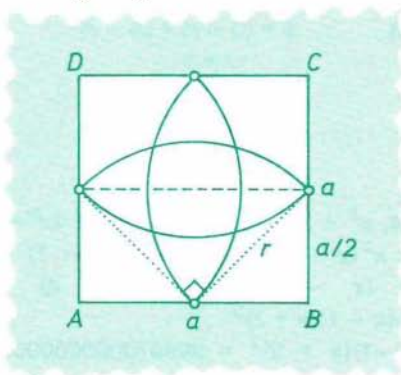
Ploščina romba je približno 36,7% ploščine kroga.

$$19. 2a : a\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3}$$

$$20. (5/6)x + 0,65x + (2/3)x + x = 226,8$$

$$x = 72$$

Števila so: 60; 46,8; 48; 72



21. V danem izrazu je zmanjševanec stalen, spremenljiv je odštevanec. Vrednost izraza bo največja, če je odštevanec najmanjši, to je 0. Izraz ne more biti manjši od 0, ker je kvadrat vsakega drugega števila pozitiven. $x - 3$ je enak 0, če je $x = 3$. Največja vrednost izraza je 5.

$$22. \frac{3}{x-5} \sqrt{(x^2-25)(x-5)} = \frac{3}{x-5} \sqrt{(x-5)(x+5)(x-5)} =$$

$$= \frac{3}{x-5} \sqrt{(x-5)^2(x+5)} = \frac{3 \cdot |x-5|}{x-5} \sqrt{x+5} =$$

$$= \begin{cases} 3\sqrt{x+5}, & x > 5 \\ -3\sqrt{x+5}, & -5 \leq x < 5 \end{cases}$$

Kvadratni koren obstaja, če je $x \geq -5$.

$$23. \quad 5 = (3-r) + (4-r)$$

$$r = 1$$

$$BP : PC = 2 : 1$$

$$AQ : QC = 3 : 1$$

$$AR : BR = 2 : 3$$

$$24. x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4 =$$

$$= x^2(x-1) + 4(x+1)(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 + 4x + 4) =$$

$$= (x-1)(x+2)^2$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 999970000000000$$

$$25. a_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + a_2^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

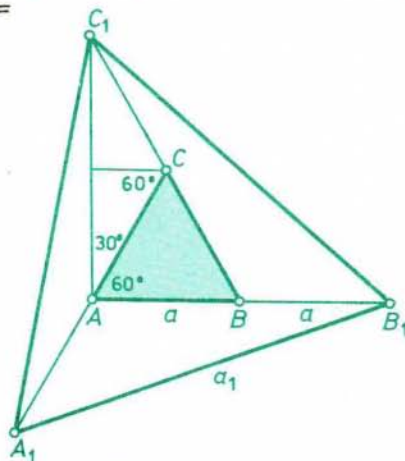
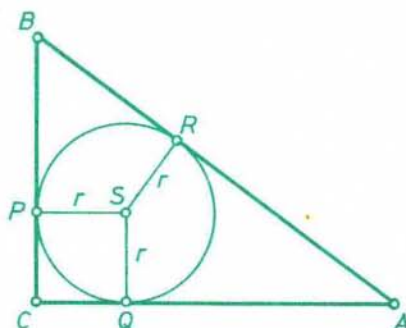
Stranico lahko določimo za dva poljubna trikotnika (a je v našem primeru 5 cm).

26. Stranico večjega trikotnika označimo z a_1 .

$$a_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2$$

$$AC_1 = a\sqrt{3}, \quad AB_1 = 2a$$

$$a_1 = a\sqrt{7}$$



$$p_1 = \frac{7}{4} a^2 \sqrt{3}, \quad p = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

Ploščina trikotnika se je povečala za 600%.

DOKAZ

Bralce, ki jih zanima reševanje logičnih ugank, bo prav gotovo razveselila knjiga ameriškega logika Raymonda Smullyana *Alica v deželi ugank*. Prevod je izšel pri Državni založbi Slovenije.

Liki iz *Alice v čudežni deželi* in *Alice v ogledalu* (obe imamo v slovenskem prevodu) angleškega pisatelja, logika in matematika Lewisa Carrolla nastopajo v *Alici v deželi ugank* v skoraj sto logičnih ugankah. Tu so uganke za desetletnike in odrasle, vsak lahko najde kaj zase.

Za to knjigo znani ameriški sestavljenec ugank Martin Gardner pravi, da se jo splača prebrati, celo če ne bi rešili niti ene same uganke. Torej gre za povest z ugankami.

Za naše nadaljnje delo izpustimo dogodke in povzemimo le nekaj ugank iz tretjega poglavja, ki niso pretežke.

Za vse te uganke velja, da so osebe, ki nastopajo v njih, popolnoma nore: vse, kar je prav, je zanje napačno, in vse napačno je zanje pravilno; ali pa so zdrave pameti: tisto, kar mislijo, je stoodstotno pravilno.

Kaj lahko sklepaš iz misli v naslednjih treh ugankah?

1. *Gosenica in kuščar*

Gosenica misli, da sta ona in kuščar Bill oba nora.

2. *Kuharica in mačka*

Kuharica meni, da ona in mačka nista obe pri zdravi pameti.

3. *Lakaj ribak in lakaj žabec*

Ribak misli, da je z njim in žabcem enako — da sta oba pri zdravi pameti ali oba nora.

REŠITVE

1.

Če je gosenica pri zdravi pameti, potem je tisto, kar pravi, to je, da sta oba, ona

in kuščar Bill, nora, resnica — in obratno: če sta oba nora, potem ima gosenica prav.

Vzemimo, da je gosenica pri zdravi pameti. Torej sta tako ona kot kuščar Bill nora. To pomeni, da je gosenica nora. To pa je nemogoče (da je gosenica pri pameti in še nora). Zato je predpostavka, da je gosenica pri pameti, napačna.

Vzemimo, da je Bill nor. Ker je gosenica nora, sta oba nora. Potem pa je res, kar meni gosenica, to je, da sta oba nora. Torej je gosenica pri zdravi pameti. To pa ni mogoče, zato je predpostavka, da je Bill nor, napačna. Bill je torej pri zdravi pameti.

Torej: Bill je popolnoma zdrav, gosenica pa nora.

Prepričajmo se še, da pogoji naloge niso protislovni. Ker je Bill zdrave pameti in je gosenica nora, je seveda izjava, da sta oba nora, napačna.

Zdaj prepišimo ta dokaz nekoliko drugače, predvsem vsak stavek v svojo vrstico, tiste stavke, ki so odvisni od dodatne predpostavke (ko na primer rečemo: Vzemimo, da je gosenica pri zdravi pameti), umaknimo za eno mesto, ki ga zaznamujemo z □.

1. Če je gosenica pri zdravi pameti, potem sta ona in Bill oba nora (dani podatek).
 2. Če sta ona in Bill oba nora, potem je gosenica pri zdravi pameti (dani podatek).
 3. □ Recimo, da je gosenica pri zdravi pameti (dodatna predpostavka).
 4. □ Potem sta oba nora. (Sledi iz 3 in 1.)
 5. □ Gosenica je torej nora. (Sledi iz 4.)
 6. □ Gosenica je v resnici nora. (Pri predpostavki, da je gosenica pri zdravi pameti, velja, da je tako pri pravi kot nora, to pa je protislovje, zato je nora.)
 7. □ Vzemimo, da je Bill nor (dodatna predpostavka).
 8. □ Potem pa sta oba nora. (Sledi iz 6 in 7.)
 9. □ Torej je res, kar meni gosenica. (Sledi iz 8 in 2.) (To pa ni mogoče, saj je gosenica nora, zato:)
 10. Bill ni nor.
 11. Končno: Bill je pri zdravi pameti, gosenica pa je nora. (Sledi iz 10 in 6.)
-
1. Če kuharica govori resnico, vsaj ena od njiju laže (pogoj naloge).
 2. Obratno: če ena od njiju laže, je kuharica pri zdravi pameti (pogoj naloge).
 3. □ Pa recimo, da je kuharica nora.
 4. □ Potem je seveda vsaj ena od obeh nora in zato vedno laže.
 5. □ Tedaj pa je kuharica pri zdravi pameti. (Sledi iz 4 in 2.)

6. Torej je kuharica pri pravi (saj smo pri predpostavki, da je nora, prišli do protislovja).
7. Potem pa vsaj ena od njiju ni pri pravi. (Sledi iz 1.)
8. Potem pa mačka ni pri pravi. (Sledi iz 6 in 7.)
9. Kuharica je torej pri pameti, mačka pa ne. (Sledi iz 6 in 9.)

3.

Iz danih podatkov ni mogoče ugotoviti, kako je z ribakom, lahko pa dokažemo, da je žabec pri zdravi pameti. To dokažemo takole:

Ribak je bodisi pri pravi ali pa nor.

- ☐ Recimo, da je ribak pri pravi.
- ☐ Potem je tudi žabec pri pravi (saj ribak govori resnico in pravi, da sta oba istega tipa).
- ☐ Sedaj pa predpostavimo, da je ribak nor.
- ☐ Potem pa je žabec pri pravi (saj sta različnih vrst, ribak pa je nor).

Žabec je torej pri pravi.

NALOGE

Naloge, ki sledijo, smo si izposodili iz knjige R. Smullyana *The lady or the tiger?*

Inšpektorja Craiga so poklicali, da bi pregledal nekaj umobolnic, za katere so sumili, da v njih ni vse v redu. V bolnišnicah so bili le pacienti in zdravniki. Nekateri od ljudi so bili popolnoma prisebni, tako da so vedno govorili resnico, ostali pa popolnoma neprisebni, tako da so vedno govorili neresnico.

1. V prvi bolnišnici je Craig govoril ločeno z Jonesom in Smithom.

"Kaj veste o Smithu?" je vprašal Craig Jonesa.

"Zdravnik v bolnišnici je," je odgovoril Jones.

Nekaj minut kasneje je Craig vprašal Smitha o Jonesu.

"Pacient je," je odgovoril Smith.

V tej bolnišnici je nekaj norobe. Kaj?

2. V drugi bolnišnici je Craig srečal človeka, ki je izjavil nekaj takšnega, da je Craig sklepal, da gre za prisebnega pacienta, da torej ne sodi v bolnico. Kaj je ta človek rekel?

3. V tretji bolnišnici je neki človek izjavil nekaj takšnega, da je Craig sklepal, da gre za neprisebnega zdravnika. Kaj je ta človek rekel?

4. V četrti bolnišnici je Craig srečal dva človeka, A-ja in B-ja. A je menil, da je B nepriseben, B pa, da je A zdravnik. Craig se je zavzel, da enega od njiju odstranijo iz bolnice. Katerega?

Kriptaritem z dvema kartama

— rešitev iz P-12/3, str. 147

Dobili smo 53 rešitev, vse so bile pravilne, nekatere s popolno razlago, druge le z navedbo števil. Poslali so jih: Aleš BAJT iz Novega mesta, Sonja BIZJAK iz Ajdovščine, Vid BOBNAR iz Škofje Loke, Kornelija BRECL iz Maribora, Helena ČRETNIK iz Ljubljane, Franjo ČRETNIK z Vrhlike, Katja DAMIJ iz Ljubljane, Jure DOBNIKAR iz Slov. Bistrice, Edi DROLC iz Kamnika, Rasto ĐUKIĆ iz Črnuč, Andrej FERJANIČ iz Trbovelj, Mateja GAZVODA iz Kranja, Saša GOTZL iz Ljubljane, Janika GREGORIČ iz Ljubljane-Polja, Barbara GUZINA iz Ljubljane-Polja, Jane HAUČIČ iz Ljubljane, Štefan HORVAT iz Lendave, Tamara JERAJ iz Ljubljane (poslala je kar 5 enakih rešitev), Aleš JANČIGAJ iz Ljubljane, Franc JERALA iz Kranja, Andreja JURICA iz Slov. Konjic, Matej KLEMENČIČ iz Ljubljane, Martina KNAPP iz Griž, Simon KOMPARA iz Podnanosa, Aleš KONCI-LJA iz Trbovelj, Andrej LEBAN z Jesenic, Boža LEPEJ iz Orehove vasi, Danica LIKAR iz Spodnje Idrije, Aljoša LIČEN iz Črnič. Oriana MARSETIČ iz Zazida, Jerica MAVER iz Nove Gorice, Srečko MIHELIČ iz Gradišča, Alain NOVAK iz Maribora, Irena PENAŠ iz Kranja, Irina PIRJEVEC iz Portoroža, Milena PISKAR iz Motnika, Dušanka PRIMC iz Ilirske Bistrice, Boris RATEJ iz Poljčan, Irena RAVNIK iz Žirovnice, Mateja ROTOVNIK iz Ruš, Jože SADAR iz Žužemberka, Jordan SLAVI iz Škofljice, Tomaž STRGAR iz Komende, Milan ŠERNEK iz Velike Polane, Vladka ŠETINA iz Mengša, Damjan TEPINA iz Kranja, Samao VALIČ iz Portoroža, Rudi VOLF iz Tržiča, Janez VOVK iz Ljubljane, Alenka VRHOVNIK iz Ljubljane, Simona ŽLOF iz Šentjurja pri Celju, Dejan ŽOHAR iz Štor in učenci 8. razredov OŠ Tone Tomšič iz Ljubljane.

Izžrebali smo Katjo Damij, Matejo Gazvoda in Mateja Klemenčiča. Vsakemu smo poslali knjigo Diofantske enačbe *Josipa Grassellija*, ki je pravkar izšla v Sigmii.

Objavljamo rešitev, ki jo je poslala Martina Knapp:

Največje število, ki ga potenciramo in še dobimo štirimestno število, je 21^3 . Potenčni eksponent mora biti večji od 1, torej je lahko 2 ali 3. Ostanemo nam še naslednje možnosti:

$$12^2, 32^2, 42^2, 52^2, 62^2, 72^2, 82^2, 92^2, 13^3$$

Če te vrednosti izračunamo, $12^2 = 144$, $32^2 = 1024$, $42^2 = 1764$, $52^2 = 2704$, $62^2 = 3844$, $72^2 = 5184$, $82^2 = 6724$, $92^2 = 8464$ in $13^3 = 2197$, vidimo, da le število 13^3 ustreza kriptaritmu.

PREMISLI IN REŠI

Objavljamo še nekaj kriptaritmov naših bralcev.
Janez Vovk je sestavil kemijski in Presekov kriptaritem

$$\text{OH}^{\text{H}} = \text{BAZA}$$

$$\text{OSA}^{\text{R}} = \text{PRESEK}$$

Milan Šernek predlaga kriptaritem s prometnima znakoma

$$\text{P}^{\text{TI}} = \text{STOP}$$

Jane Haučič pošilja kriptaritem

$$\text{OS}^{\text{S}} - \text{SO}^{\text{S}} = \text{ZNOJ}$$

Kriptaritem Jureta Dobnikarja pa ima kar več rešitev.

$$\text{ANTI/TI} = \text{KAK}$$

Poišči vse!

Rešitve kriptaritmov naših bralcev boste našli v naslednji številki.

Peter Petek

Tokrat vam zastavljamo športno uganko

Za ljubitelje nogometa

Športni reporter je pomotoma poročal, da je rezultat športne napovedi 247654. Ugotovi, kolikokrat so v tem tednu zmagali domačini, kolikokrat gostje ter kolikokrat je bil rezultat tekem neodločen. Rešitve nam pošljite do 1. oktobra 1985.

Ciril Velkovrh

PISMA BRALCEV

V zadnjem trenutku smo prejeli naslednje prijazno pismo kolegov iz Slovenskih Konjic:

Učitelji, ki smo vključeni v naš aktiv, smo redni bralci Preseka. Večinoma nam je všeč njegova oblika in vsebina, vendar menimo, da je premalo nalog za osnovnošolce. Presek je edina slovenska revija s tega področja, zato naj bi po našem mnenju vsebovala več nalog za delo pri dodatnem pouku in drugih interesnih dejavnostih z naravoslovno—matematičnega področja. Vsako leto učence navdušujemo, da postajajo naročniki Preseka, in prav bi bilo, da bi revija lahko tudi zares koristno večkrat uporabljali. Pripravljeni smo tudi aktivno sodelovati pri zbiranju primernih nalog. Želimo, da bi naš predlog upoštevali. Pri nadaljnjem delu vam želimo čimveč delovnih uspehov in vas tovariško pozdravljamo!

Dragi kolegi! Vašega pisma smo se po eni strani razveselili, po drugi pa nam nalaga še dodatno posebno skrb. Z vašim predlogom se popolnoma strinjamo, saj vemo, da je 3/5 vseh naročnikov učencev iz osnovnih šol. Vašo željo smo upoštevali že v prvi letošnji številki in pripravili krajšo zbirko nalog ter nekaj nalog iz šolskih in občinskih tekmovanj v prejšnjih letih. Obenem bi vas radi opozorili na Zbirke nalog z republiških tekmovanj za 5., 6., 7. in 8. razred osnovnih šol, ki smo jih izdali pred dvema letoma v Preseku in Presekovi knjižici, katere popoln seznam je bil objavljen v šesti številki Preseka. Še posebej veseli pa smo vaše ponudbe, da ste pripravljeni sodelovati pri nadaljnjih zbirkah. Z veseljem sprejemamo vašo ponudbo ter vas vabimo, da nam zbrane naloge z rešitvami čimprej pošljete. Takih sodelavcev nam je vedno primanjkovalo, ne samo pri nalogah, pač pa tudi pri drugih prispevkih za Presek. Večkrat nam je primanjkovalo tudi člankov, zaradi česar je Presek nekajkrat izšel prepozno. Vaše prispevke bodo naši uredniki pregledali in jih pripravili za objavo. Vsekakor pa se priporočamo, da tudi letos pridobite čimveč naročnikov za Presek.

Po objavi Lojzetovih znamk smo dobili v uredništvo Preseka še nekaj pisem z znamkami. V zadnji številki Preseka iz preteklega šolskega leta smo vam obljubili, da bomo objavili najlepše. Znamk je veliko in pri objavi si bomo pomagali s pomanjševanjem. Odložili smo se, da bodo te znamke še večkrat krasile ovitke Preseka. Izbrali jih bomo iz pošilk, ki so nam jih poslali Marko

iz Kamnika, Bernarda in Marko iz Ljubljane, Peter iz Maribora, Andrej in Dani iz Celja, Samo iz Portoroža in Peter iz Trzina. Znamke bodo po objavi seveda dobili nazaj, zraven pa še Presekovo knjižico Začetki sodobne fizike.

Z našo akcijo bomo še nadaljevali. Ne pošiljajte pa nam več znamk iz astro-navtike. Bolj bi bile zaželene upodobitve znanih fizikov in matematikov, ki so verjetno tudi bolj redke. Peter iz Trzina si želi, da bi objavili tudi slike na škaticah vžigalic – seveda take z matematično, fizikalno ali astronomsko vsebino. Predlagamo, da nam pišite o svojih idejah in nam seveda tudi kaj pošljete.

Profesor dr. Janez Strnad nam je za začetek posodil zanimiv izraelski bankovec. Kdo je na njem upodobljen, nam upam, ni treba posebej napisati.



Dani nam je v pismu še napisal, da si želi Presek večkrat na leto. Dragi Dani, verjetno si že v uvodniku prebral, da se tudi Presek bori s finančnimi težavami. Čeprav je v uredništvu Preseka veliko matematikov in fizikov, ki, verjemi, znajo dobro računati, trenutno ne znajo pri vseh podražitvah in drugih problemih ustvariti še več kvalitetnih in ne predragih Presekov.

Samo iz Portoroža pa bi v Preseku rad prebral kaj o Halleyevem kometu. Željo mu bomo poskušali izpolniti. Tudi križank, ki jih rad rešuje, na bomo ukinili.

Bralci Vesna Nemec in Kornelija Brelec iz Maribora, Barbara Pajk iz Celja, Polona Ropret iz Bohinjske Bele in Jože Kašman iz Ljubljane so nam poslali pravilne odgovore za fotokrožek. Polona pa nam je napisala še konec pesmice iz stare osnovnošolske čitanke:

*Ti tam peti v tretji klopi
"Koliko je šest krat pet?"
Majhen mož na prste stopi:
"Šest krat pet je trideset."*

*"Vrane družijo se rade.
Pet na smreki jih sedi.
Puška počí, ena pade,
koliko jih še sedi?
Kaj se tebi zdi?"*

*"Nobena!"
"Glej ga, glej, glavica bistra!
majhen deček, velik mož.
S časom boš še za ministra,
ako vedno priden boš."*

Vsem bomo poslali knjižnico Začetki sodobne fizike.

Dobili smo tudi prijazno pismo gospoda profesorja Štefana Močilnika iz slovenske gimnazije v Celovcu, katerega v celoti objavljamo:

Ob 150-letnici rojstva fizika Jožefa Stefana je te dni izšla posebna znamka, ki jo je izdala avstrijska pošta.

Pošiljam Vam — in morda je še med fiziki kakšen navdušen filatelist — nekaj znamk v spomin na tega velikega moža.

Mi Korošči smo še zato veliko bolj ponosni nanj, ker je bil naš rojak in Slovenec; Avstrija pa je tudi ponosna na njega, ker je s svojim bogatim znanstvenim delom tudi veliko doprinesel k njegovemu ugledu doma in v širnem svetu. V znak hvaležnosti so mu postavili na Dunaju spomenik, v Celovcu pa so namestili na rojstni hiši v Ebentalerstrasse 88 spominsko ploščo, na kateri je zapisano:

"In diesem Haus wurde am 24. März 1835 der Physiker Josef Stefan der Entdecker des nach ihm benannten Strahlengesetzes geboren."

Dušica Boben

BARVANJE ZEMLJEVIDOV

Od 8. do 19. aprila 1985 je bil v Dubrovniku podiplomski tečaj iz topološke in algebrske teorije grafov.

Posebej privlačna so bila predavanja prof. B. Jacksona iz ZDA. Vanje je vpletel tudi nekaj žonglerskih točk, za kar je pravi mojster (slika 1). Žonglerskih spretnosti so se hitro navzeli tudi drugi udeleženci tečaja, med njimi Presekov urednik T. Pisanski (slika 2).



Osrednja tema Jacksonovih predavanj so bili problemi barvanj zemljevidov. Začetke imajo v kratkočasnih nalogah, kot je naslednja.

1. naloga: Nekaj enakih kovancev položimo na ravnino tako, da vsak v celoti leži na njej. Kovance nato pobarvamo tako, da nobena sosednja (dotikajoča se) kovanca nista enake barve. Koliko najmanj barv potrebujemo, da lahko to vedno naredimo?

Državo imenujemo m -perij, če jo sestavlja m med seboj nepovezanih delov. Zemljevid je M -peričen, če je vsaka država na njem m -perij, za nek $m \leq M$, in je vsaj ena med njimi M -perij. M -perični zemljevid je *pravilno* pobarvan, če so vsi deli iste države enako pobarvani in so deli držav s skupno mejo različno pobarvani. Jackson in Ringel sta leta 1983 rešila *problem M-perijev*. Pokazala sta, da $6M$ barv zadostuje za pravilno barvanje kateregakoli ravninskega M -peričnega zemljevida in, da obstajajo zemljevidi, ki jih ne moremo pravilno pobarvati z manj barvami.

2. naloga: Ali bi znal najti primer takega zemljevida za $M = 2$?

In še nekoliko sodobnejša naloga:

3. naloga: Države so 2-periji, ki imajo en del na planetu A, drugi del pa na planetu B. Koliko najmanj barv je potrebnih, da lahko pravilno pobarvamo vsak tak zemljevid?

Bistrovidec

Vladimir Batagelj

RAČUNALNIŠTVO

NARIŠIMO HRIB

Eden od ciljev računalniške grafike je tudi čimbolj verno posnemanje narave. Pri tem moramo uporabljati kar najbolj preproste postopke, saj je grafika znan "požeruh" računalniškega časa.

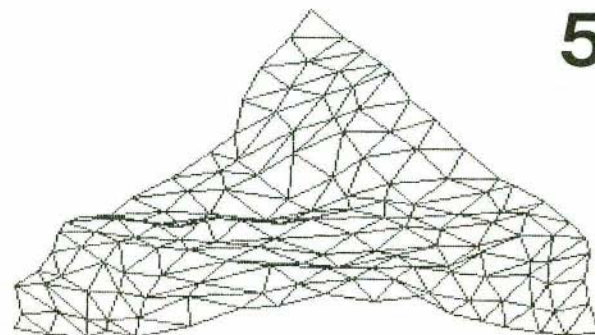
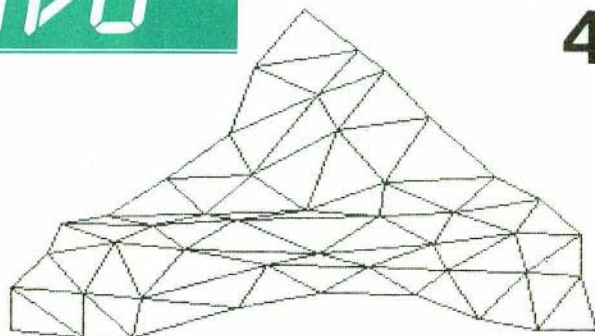
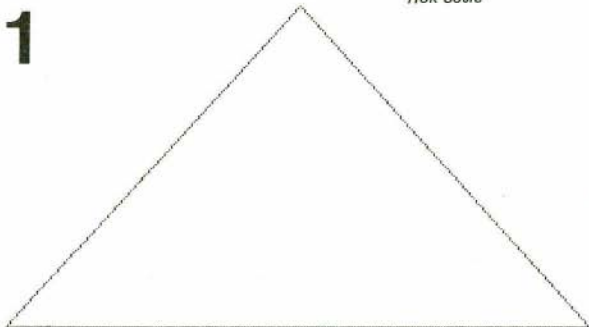
Obstaja zelo enostaven postopek za risanje hribov. Pri podjetju Lucasfilm v Kaliforniji so ga uporabili v nekaterih filmih, na primer v filmu Vojna zvezd.

Postopek je prikazan na sedmih sličicah. Vzamemo poljuben trikotnik in ga razdelimo na štiri podobne

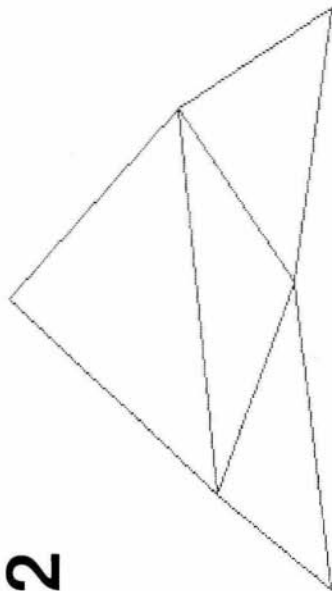
trikotnike (dokaži, da to vedno lahko naredimo), nato pa tri skupna oglišča naključno malo premaknemo. Postopek ponavljamo z vsakim dobljenim trikotnikom, dokler ne dosežemo omejitvev, ki jih postavlja računalnik — velikost pomnilnika, kakovost grafike.

Na prvi pogled je računalniški program zelo preprost, vendar skriva v sebi nekaj pasti, ki pa niso pretežke. Poskusite ga napisati, pa jih boste odkrili.

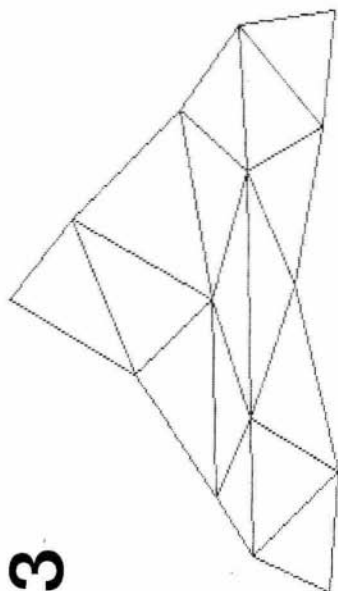
Rok Sosič



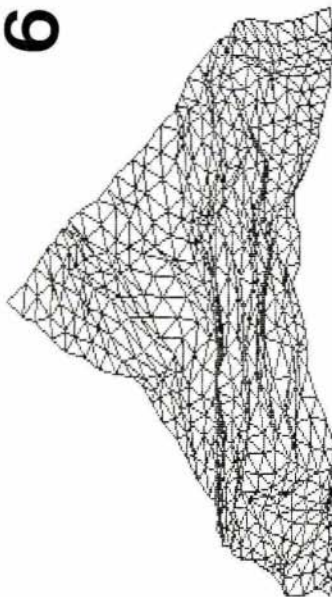
2



3



6



7

