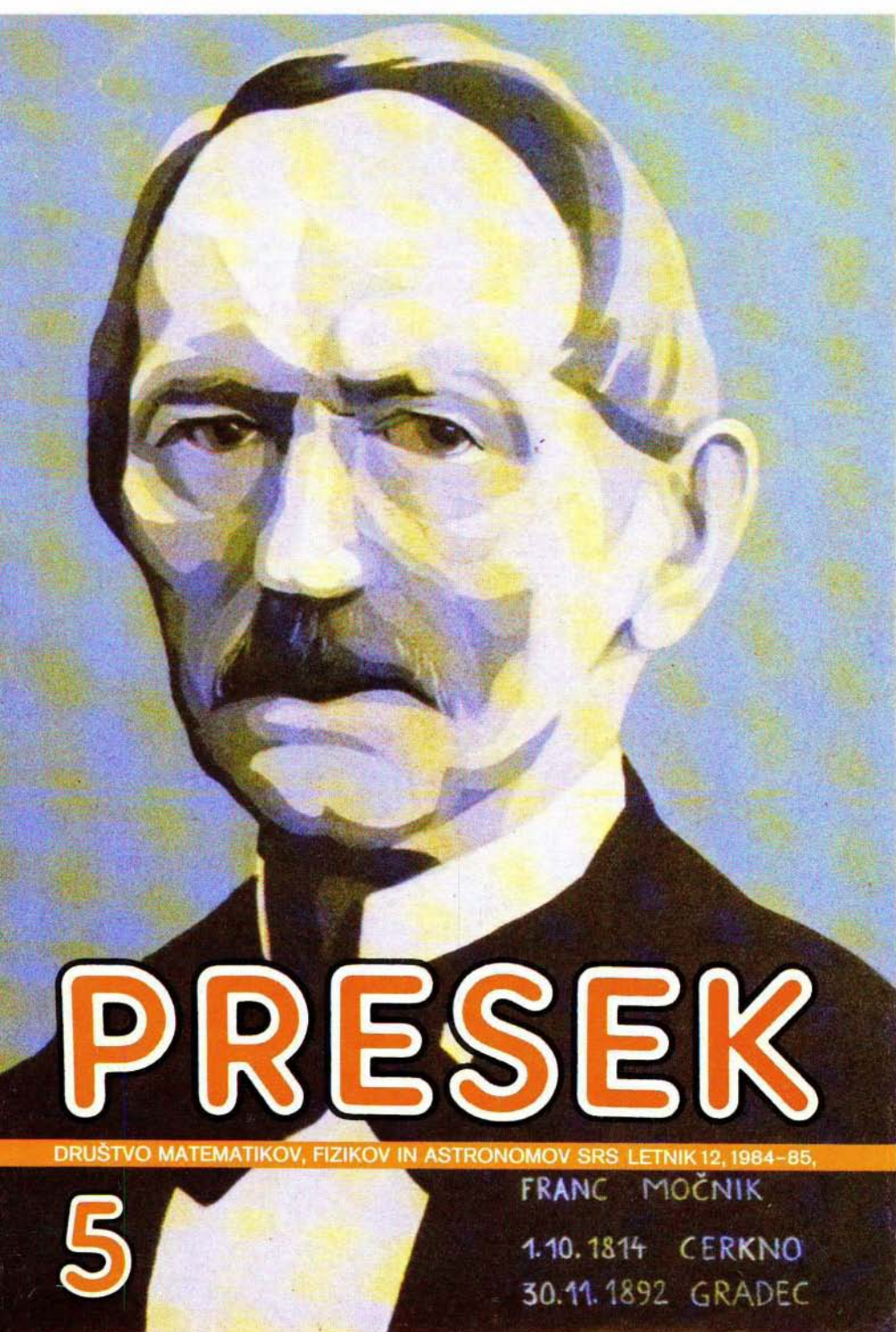




PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 12, 1984-85,

FRANC MOČNIK

1.10. 1814 CERKNO

30.11. 1892 GRADEC

5

VSEBINA

MATEMATIKA	Naloge iz stare računice (Peter Legiša) 225
	O nekaterih nerešenih problemih iz teorije števil (Joso Vukman) 229
NOVE KNJIGE	Rakovec J., Matematične strukture (Zlatan Magajna) 232
FIZIKA	Hitreje kot svetloba? (Janez Strnad) 233
NOVICE	Franc Močnik in njegovo delo (Peter Legiša) . . 242
	3. poletna šola računalništva — razpis (Andrej Brodnik) 244
NALOGE	Geometrijska neenakost (Šefket Arslanagić) . . 245
RAČUNALNIŠTVO	Želva in podprogram POLY (Rok Sosič) 246
	Lomljene spirale (Roman Rojko) 252
	Še o nalogi "Bližnji potenci" (Roman Drnovšek) 254
REŠITVE NALOG	Križanka — rešitev iz P/XII-4 (Pavle Gregorc) . 256
RAZVEDRILO	KRIŽANKA "Franc Močnik" (P. Gregorc) . . 240
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Umetniki. Dvojčki filatelisti. Trojke — rešitev str. 256 (Dušica Boben) 243, 251, 255
	BISTROVIDEC — Sto (Vladimir Batagelj) III
	PISMA BRALCEV — (Ciril Velkovrh) IV
NA OVITKU	Rafko Terpin, FRANC MOČNIK — ob občnem zboru DMFA SRS v Cerknem leta 1983 (Foto Valerija Gnezda) I

PRESEK — LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME 12. letnik, šolsko leto 1984/85, številka 5, strani 225-256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Bojan Golli (tekmovanja - naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Bojan Mohar (matematika), Martin Čopić, Andrej Kmet, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak (tekmovanja - naloge iz matematike), Andrej Likar (Presekova knjižnica - fizika), Franci Oblak, Peter Petek (glavni urednik, naloge bralcev, premisli in reši), Dušica Boben (pisma bralcev), Tomaž Pisanski (računalništvo), Tomaž Skulj, Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1984/85 je za posamezna naročila 250.- din, za skupinska naročila pa 200.-.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije.
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana.

© 1985 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 763

NALOGE IZ STARE RAČUNICE

Če ste že kdaj brskali po starih knjigah, se boste gotovo strinjali, da so stari učbeniki lahko zelo zanimivo branje. Večkrat iz njih dobimo mnogo boljše sliko o nekdanjih časih, o stopnji znanja in o izobrazbi takratne družbe kot iz kakega leposlovnega dela. Lep primer za to so računice doktorja Franca Močnika (1824–1892). Ta slovenski matematik, doma iz Cerknega, je bil verjetno najuspešnejši pisec matematičnih učbenikov ne samo pri nas, ampak – lahko rečemo – v vsej srednji Evropi. Njegovi osnovnošolski in srednješolski učbeniki matematike, pisani originalno v nemščini, so bili prevajani in izdajani od Prage, Lvova do Beograda in Plovdiva, od Milana do Tirane. Največ jih je bilo tiskanih na Dunaju, in to v prav neverjetnem številu izdaj (tudi štirideset in več). Mnoge Močnikove knjige so bile zelo hitro prevedene v slovenščino.

Danes so eden najzanimivejših delov teh učbenikov naloge. Oglejmo si torej, na kakšnih primerih so se učili računanja otroci pred 125 leti. Toliko je namreč preteklo od izdaje Močnikove *Računice za slovenske šole na deželi v avstrijskem cesarstvu*, izdane *Na Dunaji. V cesarsko kraljevski zalogi šolskih bukev 1859*. Iz te knjige sem izbral nekaj nalog in jim pripisal sem ter tja kakšen komentar. Pri tem me je vodila misel, da podatki v nalogah vsaj približno odsevajo takratno stvarnost. Besedila namenoma nisem preveč posodabljal.

Za seznanitev z velikimi števili ima računica najprej nekaj statističnih podatkov:

★ Kranjska pokrajina ima 14 mest, 17 trgov, 3174 vasi in šteje do 463956 ljudi. Koroška ima 319224 stanovavcev.

Računica je izšla malo pred uzakonitvijo metričnega sistema. Zato so v njej še zmeraj stare mere:

★ Triglav je visok 9436 čevljev, Ljubelj pa 4361 čevljev nad morjem. Za koliko je Triglav višji kakor Ljubelj?

★ Gotovo je to, da glas v eni sekundi preleti 1050 čevljev. Kako daleč je tedaj človek od hudournega oblaka, ako zmore, kar se blisk utrne, 5 sekund naštet, dokler groma ne sliši?

Prav zanimivo si je skozi naloge malo ogledati tudi socialno strukturo takratne družbe. Denarni sistem je bil takle: 1 *goldinar* = 100 *krajcarjev*.

★ V neki fabriki je 235 delavcev, kateri dobivajo vsak po 18 goldinarjev na mesec; koliko primejo vsi skupaj v 1 mesecu, koliko v 1 letu?

- ★ Služabnik zasluži na dan po 70 krajcarjev, koliko pa v 1 mesecu?
- ★ Dninar (delavec) zasluži v ponedeljek 56 krajcarjev, v torek pa 52 krajcarjev; koliko je zaslužil?
- ★ Tesar zasluži na dan 85 krajcarjev, koliko pa na teden?
- ★ Zidar zasluži v 6 dneh 10 1/2 goldinarja; koliko pa na dan?
- ★ Mati najamejo 6 teric. Če vsaki po 16 krajcarjev od dneva plačajo, koliko znese plačilo (na dan) vsem?

Razlike v dohodkih so morale biti za današnje pojme večkrat nepojmljive:

- ★ Neki pisar potegne na leto 865 goldinarjev plačila; koliko mu ostane, če je 693 goldinarjev 51 krajcarjev izdal?
- ★ Dekla ima 24 goldinarjev letnega plačila. Gospodinja opazi, da ni zvesta, in ji slovo da; pet tednov je služila; koliko je v denarjih prejela?

Dekla je torej delala praktično le za hrano in streho nad glavo.

Poglejmo si, kako so v nalogah opisani nekateri drugi dogodki.

- ★ Ožbe gre v mesto svojega brata soldata obiskat: pelje ga v krčmo in mu plača dober obed. Dobila sta juho, govedino, nekaj kruha, bokal vina in nazadnje pečenko in salato. Po obedu vpraša Ožbe krčmarja za račun. Krčmar reče: juha z govedino velja 38 krajcarjev, kruh 8 krajcarjev, vino 32 krajcarjev in pečenka s salato 42 krajcarjev; zdaj pa sama zrajtajte, koliko znese.
- ★ Jelenov Jožek, prav priden učenec, gre v četrti razred nemških šol v mesto. Oče ga od pet do glave novo oblečejo; za klobuk in kapo plačajo 4 goldinarje, za suknjo, telovnik in hlače 17 goldinarjev, za plašč 12 goldinarjev in za obutalo 9 goldinarjev. Koliko jih je veljala cela obleka?

Morda ste že slišali, da je bila nekdanja dobra obleka velik izdatek in je zato služila tudi dvajset let in več. Kot pravijo, pa sta bili tudi kvaliteta blaga in izdelave mnogo boljši kot danes.

Še nekaj nalog o živilih:

- ★ Krčmarica plača štacunarju za 2 čoka sladkorja, ki sta 14 funtov tehtala, 5 goldinarjev 75 krajcarjev. Po čem je funt plačala? (1 funt je bil približno pol kilograma, 100 funtov je dalo 1 cent).

Primerjajte (maloprodajno) ceno sladkorja z (grosistično) ceno medu:

- ★ Za 18 centov strdi se plača 242 goldinarjev 64 krajcarjev; po čem pa 1 cent?
- ★ Mesar kupi kozla za 7 goldinarjev, jalovko za 23 goldinarjev in kravo za 47 goldinarjev. Koliko znese to skupaj?
- ★ Če 1 funt teletine 18 krajcarjev velja, koliko se bo dalo za 4 funte?
- ★ Funt sira velja 45 krajcarjev, koliko velja 28 funtov?

Z redukcijami elektrike ni bilo težav; razsvetljava pa je vseeno imela svojo ceno:

- ★ Kako drag je funt voščenih sveč, če se za 21 funtov plača 9 goldinarjev 45 krajcarjev?

Obstajale so tudi usluge, ki jih danes ne poznamo več:

★ Tkavcu se plača tkavnine od vatla platna $1/5$ goldinarja; koliko se mu mora plačati od 28 $1/2$ vatla?

★ Pri Novaku so imeli čevljarja 26 dni; če so mu po dokončanem delu 14 goldinarjev 15 krajcarjev našteali, koliko je imel zaslužka vsak dan?

Nekatere naloge so bile tudi poučne:

★ Ako tobakar vsak dan po 3 smotke (cigare) pokadi, kakor je zdaj pri moških slaba navada, vsaka smotka pa 3 krajcarje velja, koliko tobakar v enem letu za prazen dim izmeče?

Veliko nalog ima opravka s trgovino, ki je v gospodarstvu imela pomembno vlogo:

★ Gorenec pride na Bizeljsko vina kupovat. V eni soseski ga nakupi 195 veder, v drugi 430 veder, v tretji 355 veder in v četrti 570 veder. Koliko veder vina je nakupil?

Zvemo tudi, kaj se je z vinom dogajalo pozneje:

★ Krčmar zmeša 4 vedra vina po 12 goldinarjev, 3 vedra po 14 goldinarjev in 5 veder po 15 goldinarjev. Kake cene bo zdaj vedro?

Dobiček v trgovini je bil povezan s tveganjem:

★ Štacunar kupi 1 cent in 50 funtov slabše kave, cent za 38 goldinarjev in prodaja funt po 60 krajcarjev. V kratkem, ko že 40 funtov po tej ceni prodaja, se cena v obče poniža in je prisiljen ostanek po 48 krajcarjev funt prodajati. Praša se, ali je na zgubi ali dobičku, če zraven tega še 4 goldinarje 30 krajcarjev posebnih stroškov ima?

Še tri naloge s tega področja:

★ Za 150 glav zelja dobim 6 goldinarjev; koliko bom dobil, če ga 500 glav po ravno tisti ceni prodam?

★ Julika prodaja v mestu štruco putra za 56 krajcarjev, piskerček masla za 52 krajcarjev in lončiček smetane za 24 krajcarjev; koliko ji vse to vrže?

★ Klobučar prodaja 36 klobukov po 4 goldinarje 15 krajcarjev; koliko izkupi zanje?

Iz nalog zvemo tudi za druge veje gospodarstva:

★ Žeblijar prodaja sodec (18 tavžent) žeblijev po 24 goldinarjev; koliko mu vrže 95 sodčkov?

★ V Idriji se pridela na leto okrog 3335 centov živega srebra, koliko je to v denarjih vredno, če se funt računa po 147 goldinarjev?

★ Kupec prodaja za 399 goldinarjev terpentina, cent po 19 goldinarjev; koliko centov je prodal?

★ Koliko velja 1 cent mila ali žajfe, če 9 centov 108 goldinarjev velja?

★ Cent premoga velja 75 krajcarjev; koliko bomo plačali za 20 centov?

Zdi se, da je bila sol sorazmerno draga, kar razloži, zakaj je Martin Krpan tihotapil prav ta proizvod:

★ Cent soli velja 19 goldinarjev; po čem pride četrtna centa?

Bistveno večji zneski nastopajo v nalogah o lastnini, posojilih, dolgovih. Ne pozabimo, da je bil to čas brezobzirnega kapitalizma, prav tistega, kakršnega je opisoval Karl Marx.

★ Trdin ima štiri kapitale posojene, od prvega vleče na leto (obresti) 95 goldinarjev, od drugega 78 goldinarjev, od tretjega 125 goldinarjev in od četrtega 218 goldinarjev; koliko dobi obresti na leto od vseh štirih kapitalov?

Trdin pomeni trdosrčnega človeka. Računica je torej hotela povedati, da je ta oblika dohodka moralno oporečna. Seveda pa tudi tvegana:

★ Nekdo je 7439 goldinarjev 27 krajcarjev dolžan, ima pa le 3526 goldinarjev 84 krajcarjev premoženja; koliko morajo posodniki zgubiti?

Knjiga ni obšla takratne politične ureditve:

★ Naš presvetli cesar Franc Jožef I. so bili 18. avgusta 1830 na Dunaju rojeni in so 18 let 3 mesce 14 dni stari vladarstvo avstrijskega cesarstva nastopili. Kdaj je bil nastop njih vlade, koliko so danes stari in koliko let je že njih modra vlada?

Še nekaj nalog iz obrestnega računa:

★ Nekdo preskrbi in nakupi svojemu tovaršu za 812 goldinarjev blaga; koliko znese povračilo za njegov trud po 2%?

★ Pri kupu za 428 goldinarjev se zavoljo gotovega plačila odjenja 4%; koliko manj je treba plačati?

★ Neka hiša je cenjena 5780 goldinarjev in je zavarovana pri neki družbi zoper ogenj za 1/10 %; koliko znese zavarovavno darilo (premija)?

Poučimo se lahko tudi o solidarnosti z ljudmi v stiski:

★ Med 83 pogorelcev se nabranih 29631 goldinarjev enako razdeli; koliko dobi vsakteri?

Vzgoja je poudarjala pridnost, gospodarnost in skromnost, kot nas pouči zgled s konca knjige:

★ Gospodar izkupi iz vina 225 goldinarjev, iz zrnja 186 goldinarjev, iz živine 109 goldinarjev in iz masla 45 goldinarjev. On pa plača gosposki 83 goldinarjev, družini 120 goldinarjev, za pripravo 39 goldinarjev in za sol 20 goldinarjev. Koliko je na leto prejel, koliko izdajal in koliko mu ostane? Prejel je 565 goldinarjev, odštél pa 262 goldinarjev, tedaj mu še ostane gotovih 303 goldinarjev. Pri tolikem dobičku mora biti dobra letina, skrben gospodar, pa tudi pridni ljudje.

Na koncu računice se sprosti tudi slog:

★ Pri zdravem človeku srce v 1 minuti po 70-krat udari; kolikokrat v 1 uri - v enem dnevu - v 1 letu? Oh čudo, da se ne razbije!

O NEKATERIH NEREŠENIH PROBLEMIH IZ TEORIJE ŠTEVIL

Znanost se izredno hitro razvija, saj skoraj ne mine dan, da ne bi zvedeli za kako pomembno znanstveno odkritje. Ali bo znanost sčasoma našla odgovore na vse probleme, ki jih danes še ne znamo rešiti? Težko si je predstavljati, da se bomo kdaj dokopali do dokončnih spoznanj, saj se nam z razširitvijo enega problema običajno pojavi vrsta novih. Tudi matematika je v zadnjih stoletjih napredovala z velikimi koraki, njen razvoj v zadnjih desetletjih pa je tak, da danes ni več matematika, ki bi se lahko pohvalil, da obvlada vso matematiko. Toda kljub neslutnemu razvoju obstajajo več sto in celo več tisoč let stari matematični problemi, ki še vedno čakajo na rešitev. Na tovrstne probleme naletimo pogosto v teoriji števil, veji matematike, ki proučuje lastnosti naravnih oziroma celih števil. V tem sestavku si bomo ogledali nekatere nerešene probleme iz teorije števil, ki so po svoji formulaciji preprosti in lahko razumljivi, njihove rešitve pa so tako zahtevne, da jim največji matematiki niso kos.

GOLDBACHOVA DOMNEVA

Goldbach (1690 — 1764) je leta 1742 izrekel naslednjo domnevo:

Vsako sodo število, ki je večje od dva, je vsota dveh praštevil.

Matematiki se že dobrih dvesto let ubadajo s tem problemom, vendar doslej te domneve še nihče ni dokazal ne ovrgel.

MERSENNOVA PRAŠTEVILA

Dokažimo naslednjo trditev:

Naj bo p naravno število. Če je $2^p - 1$ praštevilo, potem je tudi p praštevilo.

Pišimo p v obliki $p = mn$, kjer je n praštevilo. Trditev bo dokazana, če dokažemo, da je $m = 1$. Oglejmo si vsoto $1 + 2^m + 2^{2m} + \dots + 2^{(n-1)m}$. To je v bistvu vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja. Prvi člen tega zaporedja je 1, kvocient zaporedja pa 2^m . Z uporabo formule za vsoto členov geometrijskega zaporedja dobimo $1 + 2^m + 2^{2m} + \dots + 2^{(n-1)m} = ((2^m)^n - 1) / (2^m - 1)$. Z upoštevanjem $mn = p$ dobimo $2^p - 1 = (2^m - 1)(1 + 2^m + 2^{2m} + \dots +$

$2^{(n-1)m}$). Število $2^p - 1$ smo torej zapisali v obliki produkta dveh naravnih števil. Ker je $2^p - 1$ praštevilo in je očitno, da je drugi faktor večji od ena, mora biti prvi faktor ena, to pa pomeni, da je $m = 1$.

Dokazali smo torej, da je p praštevilo, če je $2^p - 1$ praštevilo. Samo po sebi se vsiljuje naslednje vprašanje: ali velja ta trditev tudi v nasprotni smeri? Natančneje povedano, ali je vedno $2^p - 1$ praštevilo, če je p praštevilo? Če za p postavimo zapovrstjo 2, 3 in 5, dobimo 3, 7 in 31, torej praštevila, vendar to še ničesar ne dokazuje. Praštevila oblike $2^p - 1$ imenujemo po matematiku *Mersennu* (1588 – 1648) Mersennova praštevila. Mersenne je vedel, da $2^p - 1$ ni vedno praštevilo, če je p praštevilo, saj je poznal primer $2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 23 \cdot 89$ in še mnogo drugih. S tem pa vsi problemi v zvezi z Mersennovimi praštevili še niso rešeni. Do današnjih dni je namreč ostal odprt problem, ali je Mersennovih praštevil neskončno ali pa samo končno mnogo.

V zvezi z Mersennovimi praštevili povejmo še to, da je Lucas leta 1876 dokazal, da je $2^{127} - 1$ praštevilo. Oglejmo si ta problem podrobneje, da si vsaj približno predočimo, s kakšnimi problemi se srečujejo matematiki, ki rešujejo probleme v teoriji števil. Kako bi ugotovili naravo števila $2^{127} - 1$? Preizkusiti je treba zapovrstjo, ali je to število deljivo s katerim izmed praštevil 3, 5, 7, Če ni deljivo z nobenim praštevilom, ki je manjše od $\sqrt{2^{127} - 1}$ (brez posebnih težav se namreč dokaže, da z večjimi praštevili ni potrebno preizkušati), potem je $2^{127} - 1$ praštevilo. V principu je enostavno, praktično pa je ta način neizvedljiv. Število $2^{127} - 1$ ima namreč, zapisano v desetiškem sistemu, 39 mest in opisani postopek bi vzel preveč časa vsakemu računarju, opremljenemu z najsodobnejšim računalnikom. Lucas se je torej moral pri reševanju problema dokopati do ideje, ki je spravila nalogo v okvir računskih zmogljivosti, in v tem je vrednost tega njegovega prispevka v teoriji števil.

PERFEKтна ŠTEVILA

Obstajajo naravna števila, ki so enaka vsoti vseh svojih deliteljev, manjših od števila samega. Števila s to lastnostjo bomo imenovali perfektna. Perfektni števili sta na primer 6 in 28, saj je $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Perfektna števila so poznali že stari Grki. Res je, da so vedeli le za štiri perfektna števila, poleg 6 in 28 še 496 in 8128, vendar je že *Evklid* (3. st. pred. n. št.) dokazal naslednjo trditev:

Naj bo p naravno število. Če je $2^p - 1$ praštevilo, potem je število $2^{p-1}(2^p - 1)$ perfektno.

Euler (1707 – 1783) je Evklidov rezultat dopolnil s tem, da je dokazal verjetnost trditve v nasprotni smeri:

Vsako sodo perfektno število lahko zapišemo v obliki $2^{p-1}(2^p - 1)$, pri čemer je $2^p - 1$ praštevilo.

Obe trditvi skupaj bomo Evklidu in Eulerju na čast imenovali Evklid–Eulerjev izrek. Ker je dokaz tega izreka prezahteven, ga opuščamo. Z Evklid–Eulerjevim izrekom smo torej dobili zvezo med sodimi perfektnimi števili in Mersennovimi praštevili. Kako pa je z lihimi perfektnimi števili? S tem vprašanjem smo spet pri problemu, ki ga doslej še nihče ni rešil. Vsa doslej znana perfektna števila so namreč soda. Ni znano, če liha perfektna števila sploh obstajajo, vendar je matematikom uspelo dokazati naslednje: če obstaja kakšno liho perfektno število, potem je to število zelo veliko. Pa tudi s sodimi perfektnimi števili so še vedno težave. Res je, da jih danes poznamo več, kot so jih poznali Grki, toda še vedno ni znano, če je sodih perfektnih števil neskončno ali samo končno mnogo. Evklid–Eulerjev izrek nam namreč študij sodih perfektnih števil prevede na študij Mersennovih praštevil, zato je problem končnosti oziroma neskončnosti števila sodih perfektnih števil v tesni zvezi s problemom končnosti oziroma neskončnosti Mersennovih praštevil.

PITAGOREJSKE TROJICE IN FERMATOV PROBLEM

Če v pravokotnem trikotniku meri ena kateta 3, druga pa 4 enote, je dolžina hipotenuze 5 enot. O tem nas prepriča Pitagorov izrek, saj je $3^2 + 4^2 = 5^2$. Trikotnik s stranicami 3, 4 in 5 enot so že pred tisočletji uporabljali Egipčani za konstrukcijo pravega kota. Trojici števil 3, 4, 5 pravimo pitagorejska trojica. V splošnem imenujemo pitagorejsko trojico vsako trojico naravnih števil x , y , z , ki ustreza enačbi $x^2 + y^2 = z^2$. Takih pitagorejskih trojic je neskončno mnogo, saj je na dlani, da je pri poljubnem naravnem številu n trojica $3n$, $4n$, $5n$ tudi pitagorejska. Kaj pa, če vzamemo namesto enačbe $x^2 + y^2 = z^2$ enačbo $x^3 + y^3 = z^3$, ali pa splošno, enačbo $x^n + y^n = z^n$, kjer je eksponent n poljubno naravno število, večje od dva. Ali obstaja tudi v tem primeru trojica naravnih ali pa vsaj trojica od nič različnih celih števil x , y , z , ki reši enačbo? S tem vprašanjem smo že pri slovitem Fermatovem problemu. *Fermat* (1601 – 1665) je namreč trdil, da obstajajo tri od nič različna cela števila x , y , z , ki ustrezajo enačbi $x^n + y^n = z^n$ le v primeru, ko je $n = 2$, za vsa naravna števila, ki so večja od dva, pa takih treh od nič različnih celih števil ni. Na rob neke knjige je Fermat zapisal, da ima dokaz za svojo trditev, vendar ga zaradi premajhnega ro-

ba ne more navesti. Mnogo ljudi se je od tedaj ukvarjalo s tem problemom, med njimi je bilo nekaj največjih matematikov, vendar se še nikomur ni posrečilo dokazati ali pa ovreči Fermatove trditve. Obstajajo pa delni rezultati. Tako je na primer dokazano, da ni treh od nič različnih celih števil, ki bi ustrezala enačbi $x^n + y^n = z^n$, če je n manjši od 2521. Preprost dokaz za $n = 5$ je našel slovenski matematik svetovnega slovesa *Josip Plemelj* (1873 – 1967).

Povzemimo! Probleme, ki smo jih navedli, je reševalo zelo veliko ljudi, vendar se še nikomur ni posrečilo, da bi jih rešil v vsej splošnosti. Trud pa le ni bil popolnoma zaman, saj so pri reševanju izdelali več pripomočkov in postopkov, ki so se dali s pridom izkoristiti v mnogih drugih področjih matematike.

LITERATURA

Ivan Vidav, Števila in matematične teorije, Ljubljana: Mladinska knjiga, 1965 in 1975. 143 str. (Knjižnica Sigma; 11)

Joso Vukman

Rakovec J. Matematične strukture : Primeri in rešene naloge. Ljubljana, DMFA SRS 1985. 108 str. (Knjižnica Sigma ; 39) Cena 400,- (320,- din)

Mnogi bralci Preseka že poznajo knjige prof. Nika Prijatelja Matematične strukture I, II, III. Srednješolci posebno radi segajo po I. delu, ki obravnava teorijo množic. In prav njim bo pričujoča knjiga Janeza Rakovca najbolj dobrodošla.

Knjiga je razdeljena na dva dela. Prvi del je vsebinsko vezan na Matematične strukture I in obravnava množice, relacije in funkcije. Tu najdemo številne preproste primere, ki ilustrirajo definicije in izreke ter bolj in manj enostavne naloge. Vsaka naloga ima rešitev, odgovor ali napotek za reševanje. Omenim naj še, da so naloge povsem primerne za srednješolce, ki so se spoprijeli s teorijo množic.

Drugi del zbirke obravnava topološke strukture. Čeprav tudi ti primeri in naloge načeloma zahtevajo le poznavanje Matematičnih struktur III, menim, da bodo zanimivejši za študente matematike, saj obravnavajo splošne topološke prostore in ne le topologijo realne osi, ravnine oz. prostora. Srednješolci, ki bi se radi spoznali s topologijo, pa bodo raje najprej prebrali knjigo Janeza Rakovca Osnovni pojmi topologije, ki je tudi izšla v zbirki Sigma.

HITREJE KOT SVETLOBA?

Začnimo z nekoliko pustolovsko zgodbo, ki pa bi se dandanes lahko v celoti zares primerila. Mislimo si vesoljca na Luni na eni izmed odprav Apollo. Na temni strani postavita v razdalji 10 m merilnika 1 in 2, ki sta občutljiva za kratkotrajne svetlobne bliske, in ju priključita na elektronsko napravo za merjenje časa. Po daljšem premeščanju merilnikov, preskušanju in dogovarjanju s središčem odprave na Zemlji začneta s poskusi. Pri prvem zaznata merilnika kratkotrajna in šibka bliska, in sicer merilnik 2 30 nanosekund (1 nanosekunda = 1 milijardinka sekunde = 10^{-9} s) pozneje kot merilnik 1. Poskus večkrat ponovita. Če zmanjšata razdaljo na polovico, na 5 m, zazna merilnik 2 blisk 15 nanosekund pozneje kot merilnik 1. Pri večji ali manjši razdalji je zakasnitev vselej sorazmerna z razdaljo obeh merilnikov. Poskusa ni mogoče pojasniti drugače, kot da se premika od merilnika 1 do merilnika 2 svetlobni curek, ki bi ga videli na površju Lune kot pego, če bi imeli dovolj občutljive oči. To ni nič nenavadnega. Nenavadna pa je hitrost premikanja pege, ki jo dobimo po stari navadi: delimo pot s s časom t :

$$u = s/t = 10 \text{ m} / 30 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-1} = 3,3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 330 \text{ 000 km/s}$$

To je več od hitrosti svetlobe v vakuumu[☆] $c = 300 \text{ 000 km/s}$ in o tem je vredno podrobneje razmisliti.

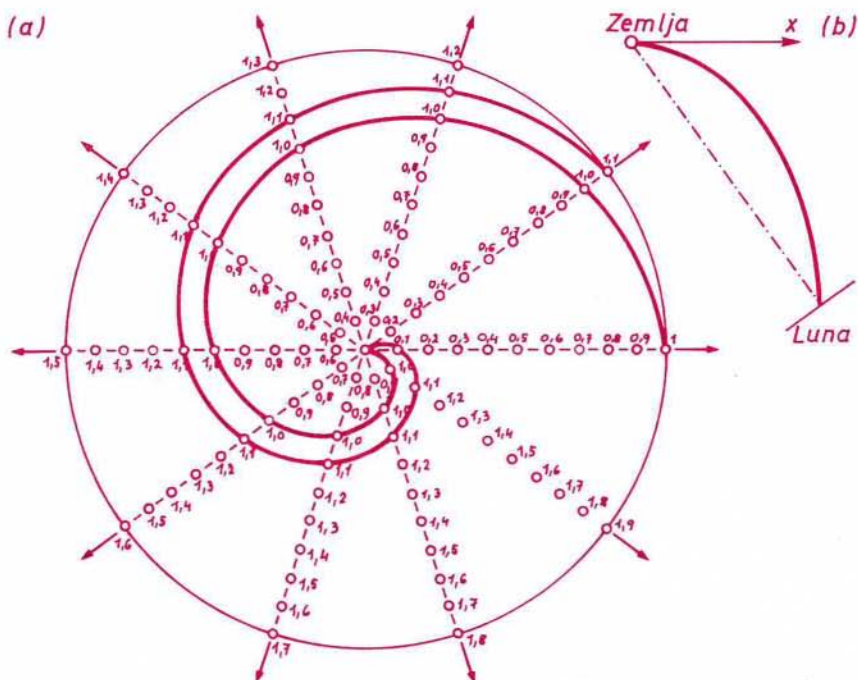
Kaj se med poskusom dogaja na Zemlji? V nekem observatoriju^{☆☆} svetijo ponoči na Luno z laserjem, ki oddaja močan vzporedni curek svetlobe in ki

☆ Svetlobna hitrost v praznem prostoru meri $c = 300 \text{ 000 km/s}$, natančneje $c = 299 \text{ 792,458 km/s}$. Od srede oktobra 1983 je navedena vrednost določena z dogovorom in ne več z merjenjem. Generalna konferenca za uteži in mere je namreč na zasedanju v Parizu sprejela novo definicijo metra: "1 meter je dolžina poti, ki jo prepotuje svetloba v vakuumu v časovnem razmiku $1/299 \text{ 792 458}$ sekunde."

☆☆ Zares so v McDonaldovem observatoriju v ZDA skozi astronomski daljogled svetili s kratkotrajnimi laserskimi bliski na Luno in lovili odbito svetlobo. Svetloba se je odbila na nekakšnem velikem mačjem očesu, ki sta ga na Luno prinesla vesoljca in ki je poskrbelo, da je bil odbiti curek natanko vzporeden vpadnemu. Po zakasnitvi, s katero se je svetloba vrnila na Zemljo, so natančno določili oddaljenost Lune. Za pot do okoli 384 000 km oddaljene Lune in nazaj je potrebovala svetloba dobri 2 sekundi. Vrteli pa laserja niso. To in merilnika z elektronsko uro smo si izmislili.

ga vrtijo. Os vrtenja je pravokotna na zveznico s pristajališčem vesoljcev na Luni in na zveznico obeh merilnikov. Laserski curek pri tem najprej oplazi merilnik 1 in malo pozneje merilnik 2.

Da se bomo lažje pogovarjali, mislimo na curek elektronov namesto na curek svetlobe. Namesto Lune si mislimo valjast zaslon okoli izvira tako, da je izvir na njegovi geometrijski osi. Vzemimo, da je hitrost elektronov $v = 1 \text{ m/s}$, da se zavrti izvir enkrat v času $t_0 = 1 \text{ s}$ in da ima valj radij $r = 1 \text{ m}$. Radi bi dobili pregled nad gibanjem elektronov. V začetnem trenutku, ko začnemo meriti čas, naj bo izvir usmerjen po osi x . Elektron, ki ga tedaj zapusti, potuje enakomerno po tej osi in doseže valj po 1 sekundi. Desetino sekunde pozneje je izvir usmerjen pod kotom $(2\pi/t_0) \cdot t = 2\pi/10$, torej desetino polnega kota, proti osi x . Elektron, ki ga zapusti v trenutku $0,1 \text{ s}$, se enakomerno giblje proti valju in ga doseže v trenutku $1,1 \text{ s}$. V trenutku $0,2 \text{ s}$ je izvir usmerjen pod kotom



Slika 1. Izvir v izhodišču se zavrti enkrat v 1 sekundi in iz njega izhajajo elektroni s hitrostjo 1 m/s . V začetnem trenutku ($t = 0$) se gibljejo elektroni iz izvira po osi x . Ob točkah so navedeni trenutki, ko elektroni dospejo tja. Črtkano so narisani (za mirujočega opazovalca) tiri elektronov, sklenjeno pa trenutni slikli curka v trenutku 1 s in $0,1 \text{ s}$ pozneje. Curek sledi izviru, kot da bi bil z njim togo povezan (a). Dodana je še trenutna slika laserskega curka proti Luni, če se laser zavrti enkrat v $7,2$ sekundah (b).

$2.2\pi/10$ proti osi x in elektron, ki ga zapusti v trenutku $0,2$ s, zadene valj v trenutku $1,2$ s. Zdaj že vemo, kako gre račun dalje. Naposled kaže v trenutku 1 s izvir zopet v smeri osi x in se igra ponovi. Tiri vseh elektronov potekajo v radialni smeri in v tej smeri se vsak izmed njih giblje s hitrostjo v .

Namesto da bi zasledovali gibanje posameznega elektrona, se lahko vprašamo po trenutni sliki curka. Če bi bil v valju ostanek plina, katerega molekule bi ob trkih z elektroni sevale, bi jo lahko fotografirali. Na risbi (slika 1) jo dobimo, ko povežemo lege različnih elektronov ob enakem času, denimo v trenutku 1 s. Krivulja je znana kot *Arhimedova spirala*. Trenutna slika $\tilde{v}$ v trenutku $1,1$ s je enaka Arhimedova spirala, le da je za desetino polnega kota zasukana proti prvi. Mislimo si pač, da se curek vrti skupaj z izvirom, kot da bi bil s njim togo povezan. Podobnih slik smo vajeni pri daljnovzhodnih ognjenih obročih in vodnih kolesih za zalivanje vrta, le da pri njih curki isker ali vode ne izhajajo od osi.

S kolikšno hitrostjo se premika pega, to je presečišče curka in ovire? Odgovor je preprost, saj se curek zasuče za enak kot kot izvir, pega pa je v razdalji r od izvira. Enačbo $s = r\varphi$, ki povezuje lok s s središčnim kotom φ in radijem r , delimo s časom:

$$u = s/t = r(2\pi/t_0)$$

Pri tem smo za kot vstavili $\varphi = (2\pi/t_0)t$. Za naš primer je hitrost pege na valju $u = 1 \text{ m} \cdot (2\pi/1 \text{ s}) = 6,3 \text{ m/s}$ precej večja od hitrosti elektrona v . Namesto valja si lahko mislimo oviro kot del tangentne ravnine. Dobljeni rezultat velja tudi za ta primer.

V rezultatu ne nastopa hitrost elektronov. Zato ga brez skrbi uporabimo tudi za svetlobni curek. Z njim izračunamo, v kolikšnem času bi se moral laser enkrat zavrteti, da bi se pega na Luni premikala s hitrostjo $u = 3,3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$:

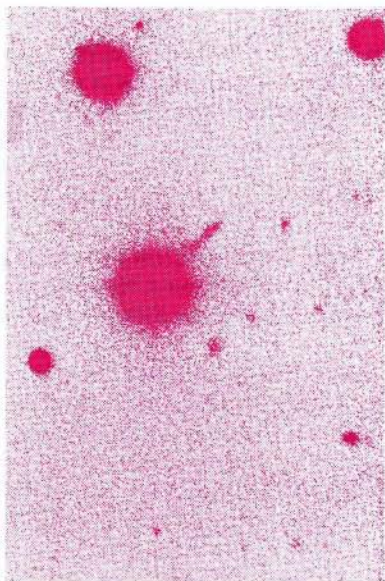
$$t_0 = 2\pi r/u = 2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} / 3,3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} = 7,2 \text{ s}$$

Laser bi bilo treba vrteti razmeroma počasi.

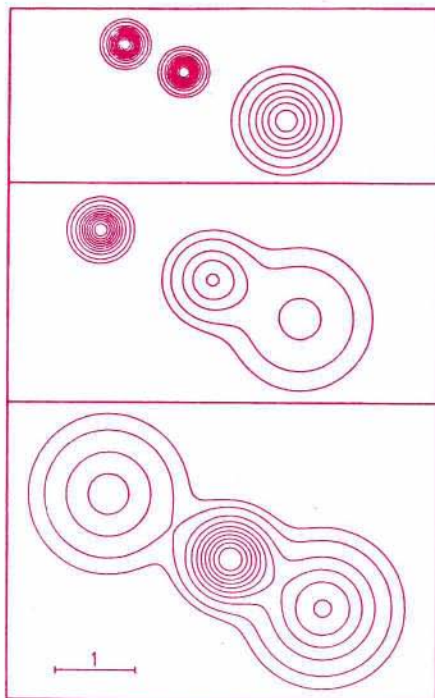
Zdaj si pogledjmo nekoliko podrobneje dogajanje ob oviri, na Luni ali na valju. Točko 2 ob merilniku 2 zadenejo drugi deli elektromagnetnega valovanja ali drugi elektroni kot točko 1 ob merilniku 1. Ne valovanje, se pravi energija, ne delci torej ne potujejo s hitrostjo u . S to hitrostjo pa tudi ne moremo prenašati sporočil od točke 1 do točke 2. Če bi hotel opazovalec ob točki 1 opazovalcu ob točki 2 poslati sporočilo, ki bi mu nekaj povedalo, bi moral imeti vsaj dve možnosti. Moral bi pritisniti na tipko telegrafa in jo popustiti, da bi pisalo pri drugem opazovalcu pisalo in ne bi pisalo, ali prižgati luč in jo ugasniti, da bi videl drugi opazovalec svetlobo in je ne bi videl. Pri curku, ki se zavrti vselej v enakem času, pa ni teh možnosti. Če oplazi curek točko 1, oplazi nekoliko pozneje neizogibno tudi točko 2 na svoji poti, kot da bi ves čas pri-

tiskali tipko telegrafa ali imeli ves čas prižgano luč. Če pa bi hoteli curek prekiniti, ko bi bila pega med točko 1 in točko 2, bi morali to storiti med izvirom in točkama 1 in 2. Ukaz za prekinitev bi potoval od točke 1 v nasprotni smeri curka in sprememba v curku bi potem potovala v smeri curka do točke 2 s hitrostjo svetlobe ali s hitrostjo elektronov. Tako bi sporočilo iz točke 1 do točke 2 zagotovo ne moglo prehiteti svetlobe.

Poskus s podobnim izidom lahko naredimo s curkom elektronov v cevi katodnega osciloskopa. Curek elektronov izhaja iz segrete katode in izstopa skozi odprtino v anodi. Če je anoda na primer na napetosti 100 V proti katodi, imajo elektroni hitrost 5900 km/s. Curek gre skozi prvi kondenzator z navpičnima ploščama in skozi drugi kondenzator z vodoravnima ploščama ter zadene fluorescenčni zaslon, na katerem vidimo svetlo pego. Če je na obeh konden-



Slika 2a



Slika 2b

Slika 2. Kvazar 3C 273 z značilno izboklino, ki kaže enega od obeh curkov snovi. Fotografijo so naredili s petmetrskim daljnogledom na Mt. Palomarju (a). Osrednji del in stranska curka kvazarja 3C 273, kakor so jih določili z radijskimi teleskopi na način, ki je opisan v besedilu. S slik je mogoče določiti navidezno hitrost odmikanja curkov, ki je večje od svetlobne hitrosti (b). Premik spektralnih črt proti rdečemu delu spektra kaže, da se kvazar oddaljuje s hitrostjo 0,16 c . Njegova oddaljenost meri skoraj 3 milijarde svetlobnih let.

zatorjih konstantna napetost, pega miruje. Pega pa se premika po zaslonu, če damo na kondenzatorju napetost, ki se spreminja s časom. S spremenljivo napetostjo dosežemo torej enak učinek kot z vrtenjem izvira. Hitrost pege lahko preseže svetlobno hitrost, če se napetost na kondenzatorjih dovolj hitro spreminja. Osciloskop mora imeti pač dovolj dober ojačevalnik, da sledi zelo hitrim spremembam napetosti na vhodu.

Nazadnje omenimo še zanimiv pojav, ki so ga zasledili astronomi pri opazovanju kvazarjev. Ti se kažejo pri opazovanju z daljnogledom kot navadne šibke zvezde (slika 2). Vendar se zelo hitro oddaljujejo, so zelo oddaljeni in sevajo močnejše kot sto milijard Sonc. Poleg tega oddajajo večinoma tudi izdatno radijsko valovanje. Kaže, da so nekateri kvazarji sestavljeni iz dveh in nekateri iz treh delov. Pri slednjih se zdi, da se od osrednjega telesa oddaljujejo kot stranski telesi curka sevajoče snovi na nasprotnih straneh. To so ugotovili po merjenjih z zelo kratkimi radijskimi valovi.

Pri enem od najnatančnejših merjenj so uporabili pet velikih radioteleskopov v zelo veliki medsebojni razdalji: Big Pine v Kaliforniji, Fort Davis v Teksasu, Green Bank v Zahodni Virginiji v ZDA, Algonquin Park v Ontariu v Kanadi in Effelsberg v Zahodni Nemčiji. Po dva in dva so povezali v par in opazovali hkrati z obema. Tako so pri valovni dolžini 2,8 cm dosegli ločljivost tisočinke kotne sekunde, kar je tisočkrat bolje kot pri opazovanju z najzmogljivejšimi daljnogledi. Pri kvazarju 3C 273 so lahko pojasnili opazovanja s privzetkom, da se stranski telesi navidez odmikata drugo od drugega z nekajkratno svetlobno hitrostjo.

Poskusimo preprosto pojasniti to veliko navidezno hitrost. Vzemimo, da odda kvazar v razdalji več milijard svetlobnih let v trenutku $t = 0$ v točki 1 curek elektronov s hitrostjo v pod kotom φ proti zveznici z Zemljo (slika 3). Radijski valovi, ki nastanejo tedaj v okolici točke 1, dospejo do Zemlje po času $t_1 = r/c$, če je r oddaljenost kvazarja. Čas t_1 meri več milijard let; pojav, ki ga opazujemo danes, se je zgodil na kvazarju pred tolikšnim časom.

Po času $t = l/v$ dosežejo elektroni točko 2 v oddaljenosti l od točke 1. Točka 2 je v razdalji $r - l \cos \varphi$ od Zemlje in valove iz točke 2 opazimo po času $(r - l \cos \varphi)/c$ od trenutka, ko so elektroni zadeli točko 2 in tam sprožili sevanje valov. Do nas pridejo valovi iz točke 2 po času $t_2 = t + (r - l \cos \varphi)/c$. Navidezna hitrost je določena kot kvocient navidezne razdalje in časa potovanja. Opazovalec na Zemlji nameri tedaj prečno na smer opazovanja navidezno hitrost

$$u = l \sin \varphi / (t_2 - t_1) = l \sin \varphi / (l/v - l \cos \varphi / c) = v \sin \varphi / (1 - v \cos \varphi / c)$$

Za drugi curek elektronov, ki potuje na nasprotno stran, velja podoben račun. Upoštevati moramo le, da se v njem elektroni oddaljujejo od nas, če so se v prvem curku približevali. Tako dobimo za navidezno hitrost $u' = v \sin \varphi / (1 + v \cos \varphi / c)$. Navidezna hitrost, s katero se prvi curek oddaljuje

od drugega, je določena z razliko

$$u - (-u') = u + u' = 2v \sin\varphi / (1 - v^2 \cos^2\varphi / c^2)$$

Z minusom pred u' smo upoštevali, da ima ta hitrost nasprotno smer kot hitrost u .

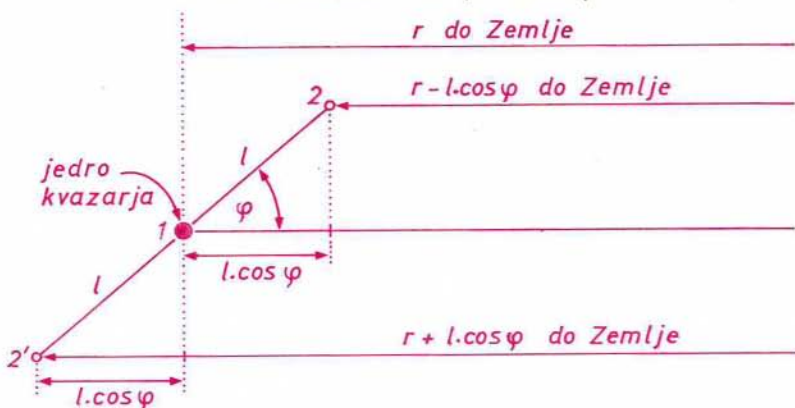
Denimo, da se elektroni gibljejo s hitrostjo $v = 0,9 c$. (Tolikošno hitrost imajo elektroni s kinetično energijo 700 000 elektronvoltov.) Če je kot $\varphi = 30^\circ$, dobimo $u = 0,9c \cdot \sin 30^\circ / (1 - 0,9 \cos 30^\circ) = 2,04c$ in $u' = 0,9c \cdot \sin 30^\circ / (1 + 0,9 \cos 30^\circ) = 0,25c$ ter $u + u' = 2,29c$.

Omenimo še drugačno razlago istega pojava, po kateri ne gre za potovanje elektronov, ampak svetlobe. Zato govorijo o "svetlobnem odmevu". Osrednji del kvazarja odda orjaški blisk in svetloba potuje po redki snovi stranskega dela na eni in na drugi strani. Ta snov sama ne seva in ni treba da se hitro giblje. Na poti po njej pa svetloba sproži sevanje radijskih valov na vse strani, tudi proti nam. Nekaterih delov snovi svetloba še ni zajela, druge pa je že, tako da z radijskimi valovi opazujemo premikanje meje med obema območjema. Navidezno hitrost te meje dobimo kar iz zapisanih enačb za elektrone, ko v nadomestimo s c :

$$u = c \sin\varphi / (1 - \cos\varphi) \quad u' = c \sin\varphi / (1 + \cos\varphi)$$

in

$$u + u' = 2c \sin\varphi / (1 - \cos^2\varphi) = 2c / \sin\varphi$$



Slika 3. Curek elektronov potuje iz točke 1 v točko 2. Na Zemlji se zdi, da je navidezna hitrost u večja od svetlobne hitrosti. Curek elektronov na nasprotni strani potuje iz točke 1 v točko 2'. Navidezna hitrost je u' . Curka se odmikata drug od drugega z navidezno hitrostjo $u + u'$.

Slika 4 . Še en pojav, pri katerem lahko naletimo na hitrost, večjo od svetlobe: Ravni valovi potujejo po morju s hitrostjo c_1 , pri čemer tvorijo valovne črte z ravno obalo kot Θ . Pršec S , ki nastane tam, kjer zadene obalo valovni vrh, potuje po obali s hitrostjo $c_1/\sin\Theta$. Ta hitrost je lahko večja od svetlobne hitrosti. Pri pravokotnem vpadu, ko je kot Θ enak nič, postane celo neskončna: pršec se ob vsakem valovnem vrhu pojavi po vsej obali istočasno. Pribijmo, da s to hitrostjo ne potujejo ne deli snovi ne energije ne sporočila. Risba je vzeta iz knjige L.C.Epsteina *Relativity Visualized* (Ponazorjena relativnost).



Pri kotu $\varphi = 30^\circ$ imamo $u = 3,73c$, $u' = 0,27c$ in $u + u' = 4c$.

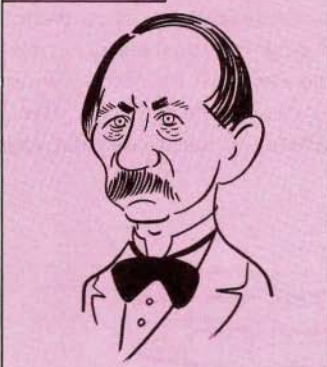
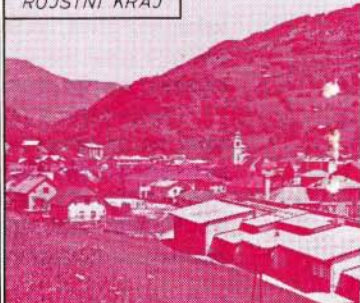
Tako smo nakazali samo dve preprosti razlagi za veliko navidezno hitrost v kvazarjih. S tem pojava nikakor nismo do kraja pojasnili. Najprej je mogoče merjenje z radijskimi teleskopi razlagati tudi drugače. Poleg tega pa je treba pojave, ki se dogajajo v globini vesolja, opisati s precej bolj zapletenimi enačbami.

Vse dosedanje eksperimentalne izkušnje kažejo, da je svetlobna hitrost v vakuumu meja, ki je ne more preseči ne hitrost delcev ne hitrost potovanja energije v valovanju ne hitrost prenašanja sporočil. To spoznanje je vgrajeno v *posebno teorijo relativnosti*.

Večja hitrost ni prepovedana, če gre za geometrijsko ali navidezno hitrost, torej ne za hitrost delcev, energije ali sporočil. Če boste brali o vesoljcih, ki potujejo hitreje kot svetloba, sodi zgodba zagotovo v znanstveno fantastiko. Enako velja za zgodbo, v kateri energija ali sporočila potujejo hitreje od svetlobe. Vendar naši zgledi kažejo, da ni vse kar se zdi hitrejše kot svetloba, le-znanstvena fantastika.

Janez Strnad

SLIKOVNA KRIŽANKA

1814 - 1892			SESTAVIL PAVLE GREGORČ		SKUPINA 4 PEVCEV	VODNA ŽIVAL	OTTO HANN	VASE ZAGLEDAN ČLOVEK	NAPLA- ČILO	MOČNIKOV E			
			ZNAK VLADAR, ČASTI		K	R	O	N	A				
			MOČAN VETER		V	I	H	A	R				
			ZAČETEK ABECED		A		B	RADIJ				R	A
			MESTO J OD TEHERANA		A		B	NADIA TILLER				R	A
					F		R	A	N			C	UKRAJIN. MESTO, KJER JE BIL PROFESOR
PRESEK	NJEGOVA PEDAGOŠ. DELA	ZMAGA PRI SAHU	M	A	T	LAHNA TKANINA		T	I	L	GRŠKI BOG LJUBEZNI		
						VSTOPNI- CA					P M Rel renk		
ŠTEVILO V OBLIKI a/b	V	L	O	M	E	K	PROUČUJE JO OPTIKA		S	V	E		
							... ZE DONG						
SLOVEN. HEROJNA (TONČKA)	Č	E	Č	TOVARNA V MARIBORU		T	A	M	SOK "TALISA"		O		
									ZDENKO KALIN		R		
VREDNO- STNI PAPIR	B	O	N	PLANINA V BOHINJU		EVOLU- CIJA		R	2	2	V		
						IZBRANA DRUŽBA					O		
OTOČJE V TIHEM OCEANU	E	N	I	V	E	T			O	K	SOMBOR		
IZUMITELJ TESLA	N	I	K	O	L	A	ROJSTNI KRAJ						
													
IVO DANEV	I	D	GUSTAV IPAVEC		G	I						IME ČRKE n	
			RENATA TEBALDI										
JAPONSKI BORILNI ŠPORT	K	A	R	A	T	E							
PREBIVA- LEC ISTRE	I	S	T	R	A	N							

BIBLIOGRAF 1907-1985

PIJAČA
SLOVANOVRVI
ENIH
ca na Pi-
tj. polot,T
L
O
B
AA
DUHO
ŠERČER
LJUBOO
XNJEVOV
UČITELJ
NA GIMNA-
ZIJUPABLO
CASALSSL. GLED.
IGRALEC
(FRANCE)C
E
R
K
N
O

PRESEK	KOROŠKA (PESN.)	PRIPOMO- ČEK ZA TEHTANJE	SRČECE	KAZALNI ZAJMEK	ADA	PTICA UJEDA	BALETNIK OTRIN
ZNANST. DELAVCI V MUZEJU	R	V	S	T	O	S	I
MAJHEN OTROK	O	T	R	O	Č	E	K
STVAR	R	E	Č	HERCE- GOVEC	E	R	O
PLOD JASLANE							
I	O	Z	E	IZVOR	LUKA V IZRAELU	BIL JE ŠOLSKI	ZVOK PRI PADCU
A	T	NAJMANJŠI OBROK ENERGIJE	K	V	A	N	T
B	A	JOSIP PLEMELJ	PRVI BAJE- SLOVNI LETALEC	I	K	A	R
O	N	J	HEROJ KONČAR	R	A	D	E
			ENAKA VOKALA				
L	π	T	I	DRAGOCE- NA KOVINA	ZVEZA SINDIKAT.	R	S
	Nem. sklad. (Daniel)				DEPARTMA V FRANCIJI		
K	S	JUNAK "POD SVO- BODNIM SONCEM"	I	2	T	O	K
O	P	REKA V ANGLIJI	VARUH DOMA PRI- RIMLJANIH	L	A	R	ORGAN VIDA
ERNEST EYPPER	E	E	REKA SKO- ZI FIRENCE	A	R	N	O
RENIJ			EINSTEINIJ				
R	E	S	E	T	N	I	K
E	R	K	N	O	KOTOR	X	O

FRANC MOČNIK IN NJEGOVO DELO

Pred dvema letoma je aktiv asnovne šole v Cerknem s sodelovanjem Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije priredil razstavo matematičnih učbenikov Franca Močnika. Čeprav se na ogled postavljene knjige niso odlikovale s kako posebno opremo ali lepimi ilustracijami, so uživale nedeljeno občudovanje obiskovalcev. Kako tudi ne, saj je bilo različnih naslovov toliko, da je bilo težko verjeti, da je vse to delo enega samega človeka. Poleg originalov v nemščini je bilo tu veliko število prevodov. Videli smo lahko slovenske izdaje, ki so izšle skoraj obenem z nemškimi: "Napeljevanje iz glave poštovati za prvi klas ljudskih šol" (1846), pa "Napeljevanje v računstvo za drugi in tretji klas farnih in glavnih šol" (1847). Tu je bila tudi v Beogradu izdana "Algebra za gimnazie Knjažestva Srbije", ki predstavlja eno od kakih *štirideset* Močnikovih knjig, izdanih v srbskem jeziku.

Težko boste verjeli, toda samo v madžarskem jeziku je izšlo kakih petdeset različnih prevodov Močnikovih učbenikov za osnovno in srednjo šolo. Približno enako velik kup bi sestavljale italijanske izdaje. Le nekaj krajši je seznam čeških in poljskih, slovenskih in hrvaških prevodov. Dolgi so tudi spiski romunskih in ukrajinskih izdaj. Močnikove knjige imamo tudi v albanščini in bolgarščini.

Na razstavi je vzbujalo pozornost še nekaj drugega, in sicer število izdaj, ki so jih doživeli ti učbeniki. Videli smo lahko napise "dvainštirideseta izdaja", "osemintrideseta izdaja" ...

Povejmo zdaj nekaj o piscu te neverjetno uspešne serije. Franc Močnik se je rodil leta 1814 v Cerknem. Doma so imeli kmetijo in gostilno. V Ljubljani je hodil v licej, kjer ga je učil tudi Matija Čop. Nato se je vpisal na bogoslovje v Gorico, ga končal, vendar ni postal duhovnik, pač pa učitelj na glavni šoli v Gorici.

Zdi se, da je takrat Močnik začutil v sebi nekakšen notranji klic, ki ga je usmeril v pozneje tako uspešno kariero. Ohranjeno je pismo prijatelju, v katerem piše: "Učiteljevo delo je verjetno važnejše, kot se nam zdi. Gre tudi za vzgojo mladeničev, ki naj bi sestavljali prihodnji srednji razred, za vse večjo blaginjo in moralo ..." Takrat je srednja šola bila namenjena le zelo majhnemu številu mladih, ki so po končanem študiju lahko računali na precejšen vzpon po družbeni lestvici.

Ob poučevanju matematike je Močnik študiral in leta 1840 v Gradcu dobil naslov doktorja filozofije. Isto leto je izdal prvo knjigo, priročnik za pouk računstva. Leta 1846 pa so po predhodni odobritvi dvorne študijske komisije začeli tiskati njegove računice, ki so se takoj uveljavile tako znotraj avstrijskega cesarstva kot v nekaterih sosednjih državah. Pozneje je začel pisati še učbenike za srednje šole, tako da je čez kakih deset let s svojimi knjigami pokrival vse smeri osnovnega in srednjega šolstva. Do svoje smrti je te knjige predeloval in prilagajal potrebam časa, pozneje pa so to delali drugi in tako nekatere učbenike ohranili pri življenju celo do druge svetovne vojne.

Vrnimo se k življenjepis. Potem, ko je bil nekaj let v službi daleč od domovine — na tehniški akademiji v Lvovu in na vseučilišču v Olomucu — se je leta 1850 vrnil v Ljubljano kot deželni šolski svetovalec. Ta položaj je bil združen s precejšnjimi pooblastili in izkoristil jih je za to, da je uveljavil slovenščino v šolah na Kranjskem. Čeprav so ga poznali kot človeka mehkega srca, je bil pri tem odločen in brezkompromisen. Ko so se učitelji na ljubljanski normalki upirali vpeljavi slovenščine, jim je zagrozil kar z odpustom! Tako je slovenščino postavil v enakopraven položaj z nemščino. Njegova zasluga je tudi, da so izšli slovenski Abecednik ter Prvo in Drugo berilo.

Leta 1860 se je preselil v Gradec, kjer je opravljal enako službo kot v Ljubljani. V Gradcu je živel do smrti leta 1892. Omenimo naj, da je kot priznanje za svoje delo dobil viteški naslov.

Morda se boste vprašali, kako bi na nekdanj tako uspešne Močnikove učbenike gledali danes. Avtor teh vrstic lahko zapiše, da imajo knjige še po sto in več letih poseben čar. Razlaga je živa in nazorna, zgledi in naloge so življenjski. Bralcu postane hitro očitno, da gre za delo zelo nadarjenega in sposobnega človeka. Kot tako v mnogih pogledih še danes zbuja občudovanje.

Peter Legiša

Umetniki

Kistič, Škrabalič, Maskič in Gudalovič so svetovno znani umetniki. Eden od njih je slikar, drugi pisatelj, tretji igralec in četrti glasbenik.

Kistič in Maskič se nista nikoli srečala in nobeden od njiju ni bil nikoli na koncertu glasbenika. Pisatelj je nedavno končal Gudalovičevo biografijo, v načrtu pa ima tudi Kističevo biografijo. Pred kratkim pa je, kakor tudi Škrabalič, poziral slikarju.

Razmisli, s katerimi vrstami umetnosti se ukvarjajo Kistič, Škrabalič, Maskič in Gudalovič!

3. POLETNA ŠOLA RAČUNALNIŠTVA – razpis

Letos bo že v tretje v prvih dneh julija poletna šola računalništva. Pričela se bo v soboto, 29. junija, in končala naslednjo nedeljo, 7. julija. Tokrat bodo prvič povabljeni tudi udeleženci iz tujine. Če se želiš prijaviti tudi ti, izpolni prijavnico in jo pošlji najkasneje do 7. junija na naslov:

Gibanje "Znanost mladini"
za 3. poletno šolo računalništva
Lepi pot 6
61001 Ljubljana

Odgovor na prijavo boš dobil do 17. junija 1985.

Ker je udeležba omejena, bomo ob prevelikem zanimanju naredili izbor na podlagi rezultatov Tekmovanja iz računalništva in Srečanja mladih raziskovalcev.

Program dela skupin je naslednji:

1. Umetna inteligenca
2. C — jezik v računalniški delavnici
3. Povezava PC s Sistemom — 1
4. Izdelava svetlobnega peresa za računalnik Dialog
5. Osnove računalniške grafike
6. Osnove in principi programiranja v zbirniku
7. Kako hitro lahko sortiramo

Andrej Brodnik

PRIJAVNICA

Podpisani
stanujoč
se prijavljam za skupino številka V primeru prevelikega zanimaja za
skupino, bi želel delati v skupini in Znam programske jezike
.....
Hodim v šolo:
razred:

GEOMETRIJSKA NEENAKOST

Dokaži, da v pravokotnem trikotniku velja neenakost:

$$c + h > a + b$$

kjer sta a in b kateti, c hipotenuza, h pa višina na c !

REŠITEV. Ker je $c > a$ in $c > b$, je $c - a > 0$ in $c - b > 0$. Sledi:

$$\begin{aligned}(c - a)(c - b) &> 0 \\ c^2 - ac - bc + ab &> 0 \\ c^2 + ab &> ac + bc \\ c + ab/c &> a + b \\ c + h &> a + b\end{aligned}$$

ker je v pravokotnem trikotniku $h = ab/c$. S tem je dokaz končan.

Oglejmo si še en dokaz iste neenakosti. Tu bomo uporabili tudi nekaj trigonometrije. Vsak ve, da velja:

$$1 + \sin^2 a \cos^2 a > 1$$

če je a ostri kot trikotnika. Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}1 + 2 \sin a \cos a + \sin^2 a \cos^2 a &> \sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a \\ (1 + \sin a \cos a)^2 &> (\sin a + \cos a)^2 \\ 1 + \sin a \cos a &> \sin a + \cos a \\ 1 + a/c \cdot b/c &> a/c + b/c \\ c + ab/c &> a + b\end{aligned}$$

od tod pa zaradi $h = ab/c$ sledi neenakost, ki jo dokazujemo.

Šefket Arslanagić, Trebinje
Prevedel Bojan Mohar

ŽELVA IN PODPROGRAM POLY

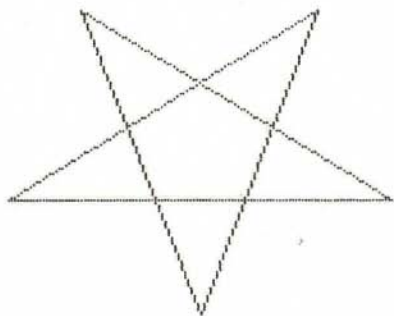
V prejšnjem Preseku smo si ogledali osnovna ukaza za delo z želvino grafiko — podprograma FORWARD in RIGHT.

Eno izmed najpreprostejših zaporedij ukazov ima ime POLY. Želva se pomakne za dano število korakov, obrne za dano število stopinj in ponovi postopek (podprogram 1).

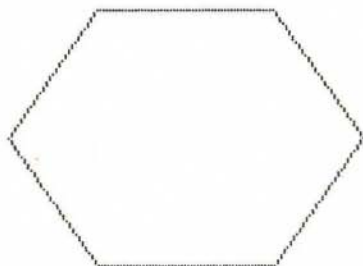
Podprogram 1:

```
PROCEDURE poly ( stranica,kot:integer ) ;  
BEGIN  
  WHILE TRUE DO BEGIN  
    forward(stranica) ; right(kot) ;  
  END;  
END;
```

Izmed risb, ki so nastale s podprogramom POLY, sta dve na sliki 1.



POLY(120,144)



POLY(55,60)

SLIKA 1

Marsikdo se bo začudil, ko bo v podprogramu POLY videl neskončno zanko. Vendar moramo upoštevati, da POLY še ni 'pravi' računalniški podprogram, ampak le zaporedje ukazov za želvo. Ta pa ima veliko potrpljenja in bo pač neskončno dolgo risala po zaslonu, oziroma tako dolgo, dokler je ne

ustavimo - z izklopom računalnika, s tipko BREAK ali s čim podobnim.

Ker je naš namen, da raziščemo želvino pot in ne vemo, kdaj se ta začne ponavljati, je podprogram POLY z neskončno zanko kar primeren. Če pa je na računalniku prekinjanje programa zelo neprijetno ali celo uniči natipkan program, lahko POLY zapišemo drugače (podprogram 2).

Podprogram 2:

```
PROCEDURE poly ( stranica,kot:integer ) ;
CONST
    max = 1000 ;  (* 'dovolj' veliko $tevilo *)
VAR
    i : integer ;
BEGIN
    FOR i := 1 TO max DO BEGIN
        forward(stranica) ; right(kot) ;
    END;
END;
```

Neskončno zanko smo nadomestili s končno zanko, pri kateri smo zgornjo mejo določili kar po občutku. Tako so odpadli problemi z zaustavljanjem programa. Na isti način lahko preoblikujemo vse podprograme za želvo, ki imajo neskončno zanko.

Taka rešitev ni najlepša, saj se lahko zgodi, da želva še ni narisala celotne poti ali pa jo je večkrat ponovila. Radi bi torej napisali podprogram POLY, kjer bi se želva ustavila natanko takrat, ko bi prvič narisala celotno pot.

Pri tem nam je v veliko pomoč naslednji izrek.

Naj bo *celotni obrat* vsota vseh kotov, za katere se obrne želva z ukazom RIGHT.

Izrek o periodi podprograma POLY:

Pot, ki jo nariše podprogram POLY, se začne ponavljati natanko takrat, ko celotni obrat želve doseže mnogokotnik števila 360. Če se želva naenkrat obrne za kot, ki je mnogokratnik števila 360, potem pot ni periodična in želva uide v neskončnost.

Poskusi dokazati izrek. Vsa oglišča poti ležijo na krogu. Dokaz te trditve je precej preprost in naj bo za domačo nalogo. Torej so vse stranice poti hkrati tudi tetive enega samega kroga. V tem krogu pa sta natanko dve tetivi z dano dolžino in smerjo. Ena tetiva ne pride v poštev kot želvina pot, saj bi želva v naslednjem koraku odkorakala iz kroga. Tako nam ostane le ena možna tetiva

z dano smerjo in s tem smo izrek dokazali. Želva začne ponavljati pot, ko zopet gleda v prvotno smer – obrnila se je za kot, ki je mnogokratnik števila 360.

Zanimivo je, da smo periodo podprograma POLY ugotovili brez vpeljave koordinatnega sistema. Želva si jo lahko sama izračuna le s seštevanjem opravljenih obratov in pri tem ne potrebuje nobenih zunanjih pripomočkov.

Sedaj z lahkoto napišemo popravljen podprogram POLY, ki se bo znal pravi čas ustaviti (podprogram 3).

Podprogram 3:

```
PROCEDURE poly1 ( stranica,kot:integer ) ;
VAR
  obrat : integer ;
BEGIN
  obrat := 0 ;
  REPEAT
    forward(stranica) ; right(kot) ;
    obrat := obrat + kot ;
  UNTIL obrat MOD 360 = 0 ;
END;
```

Naloga:

Podprogram POLY uporabite pri sestavljanju podprograma NPOLY in NSTAR:

```
PROCEDURE npoly ( n:integer ) ;
PROCEDURE nstar ( n:integer ) ;
```

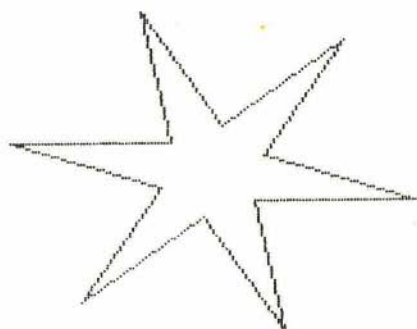
NPOLY naj nariše pravilni n-kotnik, NSTAR pa n–krako zvezdo.

Podprogram POLY lahko malce spremenimo in opazujemo nastale slike.

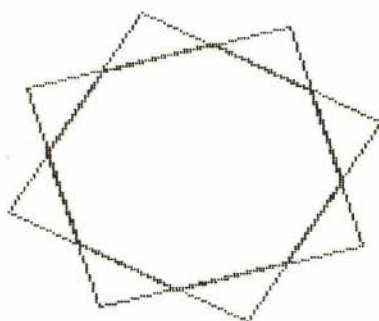
Na hitro si bomo ogledali nekaj preprostih izpeljank. Raziščite njihovo obnašanje pri različnih vhodnih podatkih, nato pa poskusite še sami najti podobne podprograme.

Z majhno spremembo podprograma POLY dobimo NEWPOLY (podprogram 4). Dva primera izhoda sta na sliki 2.

```
PROCEDURE newpoly ( stranica,kot:integer ) ;
BEGIN
  WHILE TRUE DO BEGIN
    forward(stranica) ; right(kot) ;
    forward(stranica) ; right(2*kot) ;
  END;
END;
```



NEWPOLY(50,100)



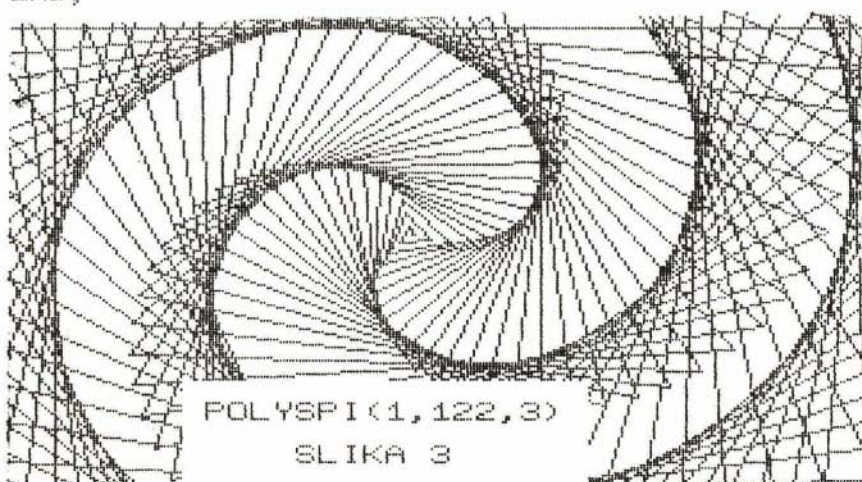
NEWPOLY(60,45)

SLIKA 2

Če spreminjamo dolžino stranice, dobimo podprogram POLYSPI (podprogram 5). Slika 3 prikazuje učinek POLYSPI na zaslonu.

Podprogram 5:

```
PROCEDURE polyspi
( stranica,kot,prirastek:integer ) ;
BEGIN
  WHILE TRUE DO BEGIN
    forward(stranica) ; right(kot) ;
    stranica := stranica + prirastek ;
  END;
END;
```



POLYSPI(1,122,3)

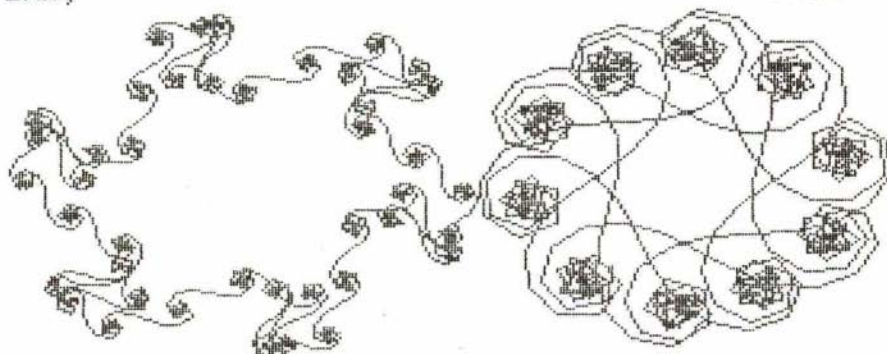
SLIKA 3

Pri podprogramu POLYSPI smo spreminjali stranico, pri INSPI pa spreminjamo kot (podprogram 6). Rezultat podprograma INSPI lahko vidimo na sliki 4.

Podprogram 6:

```
PROCEDURE inspi
    ( stranica,kot,prirastek:integer ) ;
BEGIN
    WHILE TRUE DO BEGIN
        forward(stranica) ; right(kot) ;
        kot := kot + prirastek ;
    END;
END;
```

Slika 4



INSPI(5,4,21)

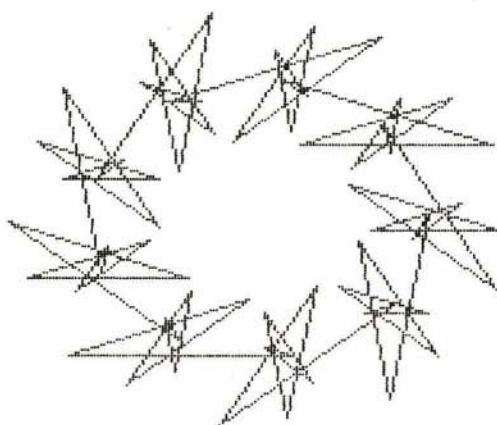
INSPI(13,2,10)

SLIKA 4

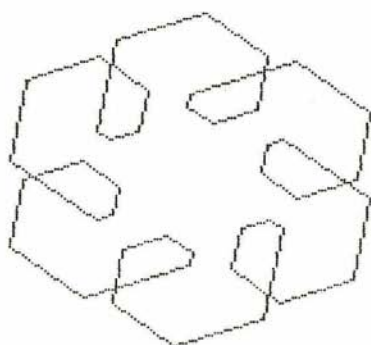
POLYSPI lahko malo zapletemo in tako dobimo podprogram SPIRO (podprogram 7). Nastale figure se imenujejo *spirokotniki* in dva primera sta na sliki 5.

Podprogram 7:

```
PROCEDURE spiro ( stranica,kot,max:integer ) ;
VAR
    i :integer ;
BEGIN
    WHILE TRUE DO BEGIN
        FOR i := 1 TO max DO BEGIN
            forward(i*stranica) ; right(kot) ;
        END;
    END;
END;
```



SPIRO(10, 160, 7)



SPIRO(5, 60, 7)

SLIKA 5

Naloge:

1. Za večino naravnih števil n obstaja več različnih n -krakih zvezd. Napiši podprogram NSTAR1, ki bo za dani n narisal vse možne n -krake zvezde!
2. Kateri od podprogramov poly(5,5) in poly(6,6) pokrije večjo površino?
3. Z opisanimi podprogrami poišči čimveč zanimivih figur!

To je bilo nekaj primerov iz bogatega sveta podprograma POLY in izpeljav. Upam, da jih je dovolj, da se boste sami spustili v nadaljnje raziskovanje njegovih skrivnosti.

Rok Sosič

Dvojčki filatelisti

V filatelističnem društvu "Znamka" so med najaktivnejšimi člani tudi štirje pari dvojčkov. Na zadnjih treh sestankih društva je bil navzoč le po eden od vsakega para.

Ana, Bojana, Cvetka in Davor so bili na prvem sestanku, Emil, Mojca, Davor in Bojana na drugem, Miran, Ana, Bojana in Emil pa na tretjem sestanku. Ivo je imel gripo in ni bil na sestankih.

Bi znal poiskati vse pare dvojčkov?

LOMLJENE SPIRALE

1. Vsi vemo, kaj je *mnogokotnik*. Mnogo *daljic* spnemo tako, da postane vsako *krajišče* skupno natančno dvema daljicama, razen seveda obeh skrajnih. Če združimo še ti dve krajišči, dobimo *sklenjen* mnogokotnik. Krajiščem rečemo *oglišča*, daljicam pa *stranice* mnogokotnika. Mnogokotniku nekateri pravijo kar lomljena črta. V geometriji se običajno ubadamo s sklenjenimi mnogokotniki, katerim se stranice ne križajo. Še bolj so nam všeč konveksni (izbočeni), med njimi pa še posebej cenimo pravilne, ker imajo vse stranice enako dolge, pa tudi notranji koti so si enaki med seboj.

2. *Spirala* je manj preprosta krivulja. Njena bistvena značilnost je, da po večkrat (lahko tudi neskončno krat) obkroži določeno točko, ta pa se zaradi tega imenuje *pol* spirale. Po spiralah se zgledujejo vzmeti v urah, brazde na gramofonskih ploščah, nanje se spoznajo polži, pa tudi spiralne galaksije.

3. Sedaj pa bomo križali spirale z mnogokotniki. Križancem bomo rekli *lomljene spirale*. Naredili jih bomo tako, da bomo premico v pravilnih razmakih lomili in jo navijali okoli središčne točke (pola). Taka lomljena spirala je pravzaprav sestavljena iz tetiv kake prave gladke spirale.

4. Objavljamo program, ki zna narisati dvojno lomljeno spiralo (navito v obe smeri). Prirejen je za računalnik Spectrum. Samo navijanje lomljene spirale opravi računalnik seveda po svoje. Za pol si izbere sredino zaslona, nato pa si izbere še poltrak z začetkom v polu, na njem pa nariše točko, ki je od pola oddaljena za približno polovico višine zaslona. Ta poltrak nato zavrti za izbrani kot, točko na njem približa polu za izbrano razdaljo, nato pa poveže točko s prejšnjo in nastala je prva stranica lomljene spirale. S takim vrtenjem poltraka in pomikanjem točke na njem nariše celotno lomljeno spiralo, kolikor je pač gre na zaslon. Program nas na začetku vpraša po številu kotov, ki jih ima lomljena spirala pri enem obkrožanju pola (od tod izračuna kot vrtenja poltraka po formuli $\text{kot} = 2\pi/n$), nato pa vpraša še po razdalji, za katero je vsako naslednje oglišče bližje polu (prirastek je negativna vrednost). Opozoriti moramo, da število kotov ni nujno celo število. Najlepše lomljene spirale dobimo prav pri necelih vrednostih.

5. Sedaj pa ste vi na vrsti. Dopolnite ta program po svojem okusu. Vpeljite barve, naj vam program nariše le enojne lomljene spirale ali pa naj riše samo vsako drugo stranico. To je le nekaj predlogov. Pa obilo zabave!

```

100 REM -----
110 REM      Program za risanje
120 REM      lomljenih spiral
130 REM -----
150 LET mx=255
160 LET my=175
170 LET sx=mx/2
180 LET sy=my/2
190 LET px=23677
200 LET py=23678
220 REM mx,my velikost
230 REM sx,sy središče
240 REM px,py naslova
    koordinat prejšnje
    točke pri DRAW
260 DEF FN x()=r*COS a+sx-PEEK px
270 DEF FN y()=r*SIN a+sy-PEEK py
290 REM funkciji za računanje
    oglišč lomljene spirale
310 INPUT "Število kotov = "; n
320 INPUT "Prirastek polmera = "
    ; s
330 LET a=0: LET b=2*PI/n:
    LET r=sy
340 CLS : PLOT FN x(), FN y()
350 LET a=a+b: LET r=r+s:
    IF ABS r>sy THEN GO TO 310
360 DRAW FN x(),FN y():
    GO TO 350

```

Primeri vhodnih podatkov:

```

3      -2
4.1    -1
2.9    -1

```

ŠE O NALOGI »BLIŽNJI POTENCI«

Prispevek je odmev na članek Tomaža Pisanskega: Rešitve naloge "Bližnji potenci", Presek 1984/85, št. 2. V tem članku je med drugim govor o verižnih ulomkih, ki jih zapišemo v obliki:

$$V_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots \frac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (1)$$

kjer so a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) cela števila, ki izpolnjujejo pogoje:

$$a_0 \geq 0, a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, \dots, a_{n-1} \geq 1, a_n \geq 2 \quad (2)$$

Dolžina verižnega ulomka je v tem primeru enaka n . V omenjenem članku avtor postavlja vprašanje, kakšno mora biti (največje celo število na računalniku) *maxint*, da obstaja verižni ulomek z dolžino, večjo od 100, pri čemer števec in imenovalc tega ulomka ne smeta preseči *maxint*.

Vzemimo verižni ulomek (1) in določimo $a_1, a_2, \dots, a_n$ tako, da bosta števec in imenovalc nastalega ulomka čim manjša. Očitno mora veljati $a_1 = 0$. Sedaj postavimo:

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{1}{a_i + \frac{1}{\dots \frac{1}{a_n}}}$$

kjer so p_i in q_i ($i = 2, 3, \dots, n$) naravna števila in sta si p_i, q_i tuji števili. Očitno velja:

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{1}{a_i + \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} \quad \text{oziroma} \quad \frac{p_i}{q_i} = \frac{q_{i+1}}{a_i q_{i+1} + p_{i+1}}$$

Ker sta p_{i+1} in q_{i+1} tuji si števili, velja isto tudi za q_{i+1} in $(a_i q_{i+1} + p_{i+1})$ in se torej zadnji ulomek (na desni) ne more krajšati. Torej velja:

$$p_i = q_{i+1} \quad \text{in} \quad q_i = a_i q_{i+1} + p_{i+1} \quad (3)$$

Od tod ugotovimo, da sta p_i in q_i (pri danih p_{i+1}, q_{i+1}) najmanjša, če so števila $\hat{a}_i$ čim manjša ($i = 2, 3, \dots, n$). Glede na pogoje (2) določimo: $a_2 = 1, a_3 = 1, a_{n-1} = 1, a_n = 2$. Izračunajmo sedaj vrednosti teh verižnih ulomkov pri različnih n :

$$n = 2: \quad V_2 = 1/2$$

in podobno $V_3 = 2/3, V_4 = 3/5, V_5 = 5/8$. Hitro spoznamo, da v ulomkih nastopajo števila Fibonaccijevega zaporedja. O tem zaporedju je bilo v Preseku napisanih že več člankov, zato bi navedli le definicijo tega zaporedja

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Iz definicije se lahko izpelje:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

Prvih nekaj členov tega zaporedja je 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Domnevamo, da je $V_n = f_n/f_{n+1}$. Če v (3) vstavimo $a_i = 1$, dobimo: $q_i = q_{i+1} + q_{i+2}$ in $p_i = q_{i+1}$. Poleg tega je $V_2 = 1/2$. Oboje potrjuje našo domnevo. Zdaj lahko zaključimo: števec in imenovalec ulomka, ki ima kot verižni ulomek dolžino n , nista manjša od f_{n+1} oziroma če je maxint manjši od f_{n+1} , potem je maksimalna dolžina verižnega ulomka na takem računalniku $(n-1)$. V našem primeru mora biti maxint manjši od f_{102} ($n = 101$), da v programu "verižni" (glej omenjeni članek) ne bo prišlo do prekoračitve.

Na koncu naj dodamo, da je $f_{102} = 9,274 \cdot 10^{20}$. Za zapis tega števila bi rabili 70 bitov ($2^{70} > f_{102} > 2^{69}$) oziroma 128-bitni računalnik, ker je dolžina besede največkrat potenca števila 2.

Roman Drnovšek

Trojke

Napiši "nesrečno" številko 13 in "srečno" številko 7 samo s pomočjo trojk!

Prev., prir. iz knjige M. Polonijo, Matematički problemi za radoznalce
Dušica Boben

REŠITVE NALOG

REŠITVE NALOG s strani 243, 251, 255

TROJKE

Ena od rešitev: $13 = 3.3 + 3 + 3/3$
 $7 = 3.3 - 3 + 3/3$

DVOJČKI FILATELISTI

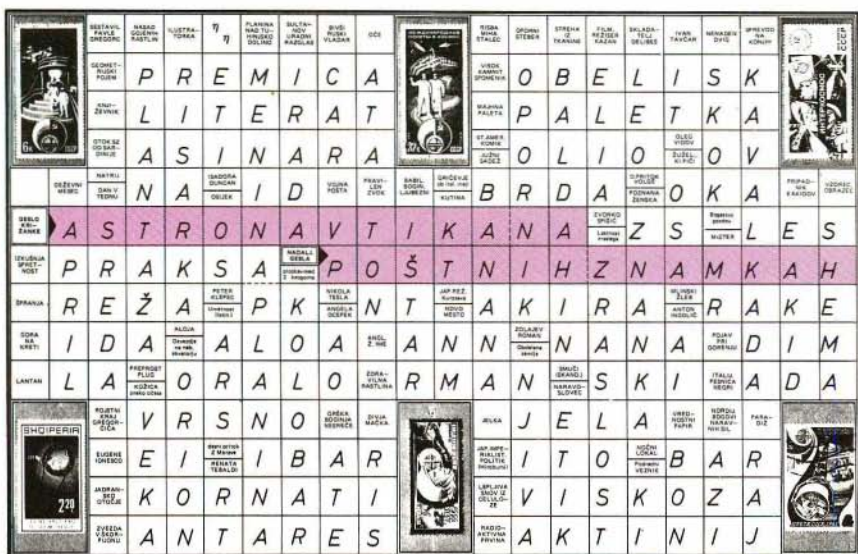
Bojana in Ivo, Ana in Mojca, Cvetka in Emil, Davor in Miran

UMETNIKI

Maskič je pisatelj, Kistič je igralec, Škrabalič je glasbenik in Gudalovič je slikar.

Dušica Boben

Slikovna križanka z geslom – rešitev iz P/XII-4



RAZVEDORILLO

STO

Med vsak par sosednjih cifer v zaporedju

9 8 7 6 5 4 3 2 1

ali na začetek zaporedja vstavimo minus ali plus ali pa ju staknemo. Vrstnega reda cifer pri tem ne smemo spremeniti. Nato izračunamo vrednost tako dobljenega izraza. Na primer:

$$9-8+7+65-4+32-1 = 100$$

$$-9-8+76-5+43+2+1 = 100$$

Poišči še druge izraze, ki imajo vrednost 100!

Izraz z vrednostjo 100 lahko dobimo tudi v primeru, ko so cifre urejene v naraščajočem vrstnem redu

$$123+4-5+67-89 = 100$$

Seveda ni edini.

Dodajmo med operacije še množenje. Tedaj dobimo na primer:

$$9+8+7+654 \times 3-2 \times 1 = 1984$$

Na koliko različnih načinov lahko izrazimo števila 1984, 1985 in 1986?

Čeprav se lahko naloge lotimo s svinčnikom in papirjem, je veliko enostavneje sestaviti kratek program in počakati, da računalnik izpiše rezultate. Naloga ni preobsežna, saj je število vseh izrazov v prvi oziroma drugi nalogi okrog deset tisoč, pri tretji pa okrog sto tisoč. Pošljite nam svoje rešitve!

Vladimir Batagelj

Bistrovidec

NIKOLA TESLA MED IZUMITELJI

Naš sodelavec Marko Petkovšek, asistent na oddelku za matematiko na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, je bil v lanskem šolskem letu na študijskem izpopolnjevanju v Združenih državah Amerike. Ves čas je preživel na univerzi v Puttsburghu, kjer je ena izmed dvoran posvečena Jugoslaviji, v njej pa originalna slika slovenskega slikarja Mateja Sternena "Jurij Vega". Ker smo v tujino kolegu redno pošiljali Presek, nam je pozimi poslal štiri znamke, ki jih objavljamo v tej številki Preseka. Vas mladi bralci, pa to pot vabimo, da v enciklopedijah poiščete imena slavnih mož, katerih portreti so odtisnjeni na znamkah, in nam pošljete njihove kratke življenjepise.

Nekatere znamke, ki nam jih je poslal naš bralec Majcen Dani iz Celja, smo objavili v četrti številki Preseka v Slikovni križanki. Žal niso tiskane v štirih barvah, ker si Presek v celoti tega ne more privoščiti. Vsekakor pa smo našemu novemu sodelavcu hvaležni za poslane znamke in za sodelovanje.

Tudi drugi so nam poslali znamke. Izbor najlepših bomo objavili naslednje šolsko leto.

Ciril Velkovrh

