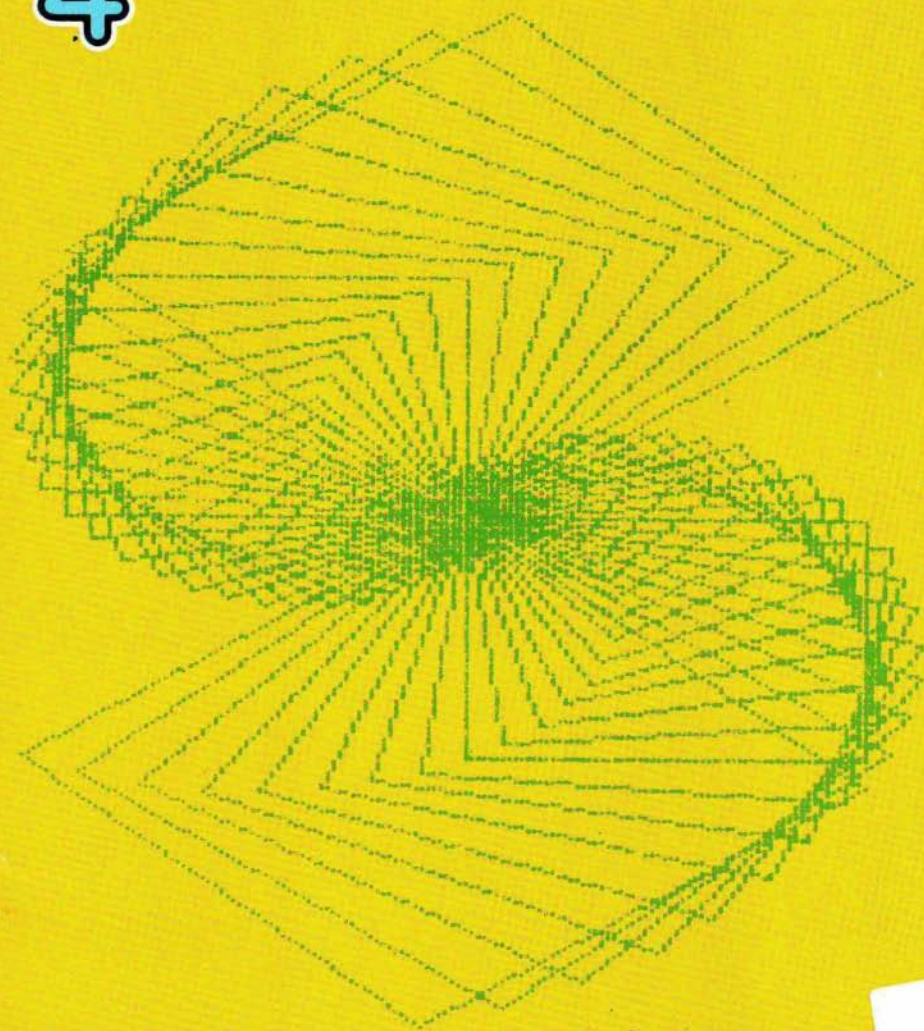


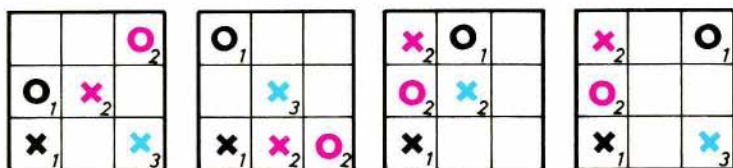
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 12, 1984-85,

PRESEK

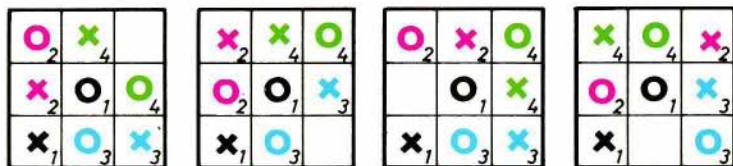
4



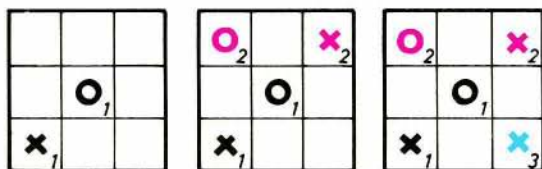
KRIŽCI IN KROGCI – dopolnilna rešitev



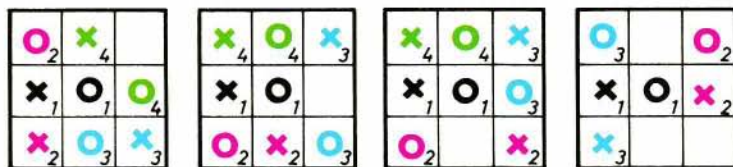
Slika 2



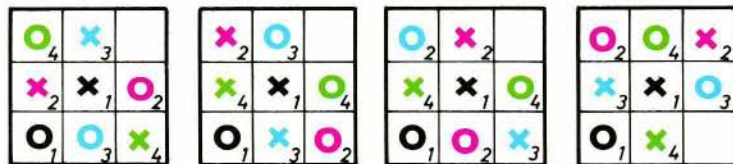
Slika 3



Slika 4



Slika 6



Slika 7

Slike 2, 3, 4, 6 in 7 k članku na strani 189.

P R E S E K — LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
letnik 12., leto 1984/85, številka 4, strani 161 — 224

ASTRONOMIJA	Najstarejši atlas kometov (Karli Dolenc)	162
RAČUNALNIŠTVO	Hi kvadrat z računalnikom (Tomaž Pisanski)	163
	Uvod v želvino grafiko (Rok Sosič)	167
FIZIKA	Merjenje hitrosti vetra, 2. del (Jože Rakovec)	IV, 171
	O atomih (Janez Strnad)	176
	Natečaji — 16. mednarodna fizikalna olimpiada v Portorožu	181
TEKMOVANJA	Nadomestni upor verige upornikov (Roman Drnovšek)	182
	Zvezno tekmovalje mladih fizikov v Strumici — rešitve na str. 218 (Božidar Casar)	185
	25. mednarodna matematična olimpiada (Uroš Seljak)	187
RAZVEDRILO	PREMISLI IN REŠI — Dopolnitev rešitve Križci in krogci, Trikotni šotor na vrtu tete Amalije (Peter Petek)	II, 189, 191
	SLIKOVNA KRIŽANKA Z GESLOM (Pavle Gregorc)	192
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Ponarejena zlatnika (Tomaž Pisanski)	190
	Obstajata vsaj dve rešitvi. Mislim, torej sem. Kje je napaka? (Izidor Hafner)	184, 191, 194
	POSKUSI, PREMISLI, ODGOVORI — rešitev nalog iz P XI/3, str. 143 in P XII/1, str. 59 — Taljenje snega (Martin Čopič)	195
MATEMATIKA	Ocenjevanje približka števila π na osnov preproste statistične metode (Edvard Kramar)	196
	Reševanje enačb in neenačb, v katerih nastopa absolutna vrednost — naloga str. 220 (Izidor Hafner)	201
	Test hi kvadrat (Tomaž Pisanski)	204
NOVICE	Grška abeceda (Aleksandra Pirkmajer)	209
	Novi častni člani društva (Ciril Velkovrh)	214
	PISMA BRALCEV (Dušica Boben)	215
	Srečanje mladih raziskovalcev računalnikarjev (Andrej Brodnik)	217
	Prva letna šola fizike (Jure Bajc)	217
REŠITVE	Slikovna križanka Planimeter — iz P XII/3, str. 144 (Pavle Gregorc)	220
NOVE KNJIGE	Smullyan R., Alica v deželi ugank	221
	Šporer Z., 1, 2, 3, ... mi več znamo brojati. Računanje problema nema (Dušica Boben)	221
	Hišni računalnik (Peter Petek)	223
	Kurillo J., S fotografom v naravi (Ciril Velkovrh)	224, III
NA OVITKU	Želvina grafika	I
	Slike k članku Križci in krogci na str. 189	II
	Simetrija v naravi (Foto Ciril Velkovrh)	III
	Slike k članku na str. 171: Anemograf VMZ 21 in ročni vetromer RVM 96, ki ju izdeluje Inštitut J. Stefan (Foto Marjan Smerke)	IV

username: student
 geslo : regresija

NAJSTAREJŠI ATLAS KOMETOV

Marca lani so kitajski znanstveniki objavili vest, da so odkrili najstarejši atlas kometov na svetu. Kot poročajo, je to svilen knjižica, ki so jo našli v bližini kraja Čangša v provinci Hunan in je po ocenah strokovnjakov stara 22 stoletij. Nekateri celo domnevajo, da je ta knjižica kopija še starejšega originala iz leta 400 p.n.št.

Knjiga vsebuje okoli 250 risb in opisov. 29 skic (med njimi sta dve slabo ohranjeni) prikazuje in opisuje komete. Kometi so narisani in opisani prese- netljivo dobro. Še posebej če upoštevamo, da so tedaj opazovali še s prostim očesom. Zanimivo je, da so tedanji astronomi že vedeli, da so repi kometov obrnjeni vedno stran od Sonca. Do tega spoznanja so evropski astronomi prišli šele 900 let pozneje — leta 1531. V knjigi so repe kometov razvrstili v tri skupi- ne: kratki prašni rep, dolgi prašni rep in plinski rep. Poleg tega vsebuje knjiga tudi nekaj zapisov o nenavadnih kometnih pojavih, kot je antirep (rep, obrnjen od glave kometa proti Soncu), razvidna pa je tudi klasifikacija kometnih glav.

Ta dokument je nov dokaz o visoki stopnji razvitosti starokitajske astro- nomije.

Prirejeno po: *Sky and Telescope*, Sept. 1984, Vol. 68, No 3

Karli Dolenc

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

12. letnik, šolsko leto 1984/85, številka 4, strani 161-224

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Bojan Golli (tekmovanja - naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Bojan Mohar (matematika), Martin Čopič, Andrej Kmet, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak (tekmovanja - naloge iz matematike), Andrej Likar (Prese- kova knjižnica - fizika), Franci Oblak, Peter Petek (glavni urednik, naloge bralcev, premisi in reši), Dušica Boben (pisma bralcev), Tomaž Pisanski (računalništvo), Tomaž Skulj, Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astrono- mov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Lju- bljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1984/85 je za posamezna naročila 250.- din, za skupinska naročila pa 200.-.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana.

© 1985 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 731

HI KVADRAT Z RAČUNALNIKOM

V prispevku z naslovom TEST HI KVADRAT smo spoznali statistično metodo, ki nam omogoča primerjati dejansko porazdelitev s teoretično. Med drugim lahko z njo ugotavljamo, ali je kocka, ki jo uporabljamo pri igri človek ne jezi se, poštena ali ne. Omenjeni članek je objavljen na str. 204.

Spomnimo se testa hi kvadrat. Denimo, da ima poskus n izidov. Naj bodo $O_1, O_2, \dots, O_n$ dejanske absolutne frekvence s katerimi se pojavljajo posamezni izidi pri ponavljanju poskusa. Naj bodo $E_1, E_2, \dots, E_n$ teoretične absolutne frekvence. Izraz

$$\chi^2(n-1) = (E_1 - O_1)^2/E_1 + (E_2 - O_2)^2/E_2 + \dots + (E_n - O_n)^2/E_n$$

imenujemo hi kvadrat z $(n - 1)$ prostostnimi stopnjami. V prejšnjem prispevku smo spoznali, kako lahko uporabimo izračunano vrednost.

V tem prispevku pa si oglejmo program v basicu, ki med drugim računa vrednosti hi kvadrat. Medtem ko program preverja, ali je vgrajeni generator slučajnih števil dober, posebni podprogram računa vrednost hi kvadrat. Bralci, ki želijo uporabiti program, ga morajo prilagoditi možnostim, ki jih ima njihov računalnik. Za lep izpis morajo upoštevati na primer število znakov v vrstici.

Oglejmo si nekaj značilnosti tega programa.

Vrstice 100 - 230: Glava programa. Vsebuje osnovne podatke o programu, pomemben del programske dokumentacije. Namesto komentarjev REM uporabljamo kar izpis PRINT. Rezerviramo prostor za največ 100 izidov.

Vrstice 240 - 310: Program sestoji iz treh klicev podprogramov: priprava podatkov, računanje in izpis rezultatov. Program simulira metanje kocke. Basic, ki ga uporabljamo, ima

```

100 REM      HI KVADRAT, programiral T.P., dne 24.1.1985
160 PRINT
170 PRINT " Računalnik meče 'kocko' z N ( <= 100 ) ploskvami"
180 PRINT
190 PRINT " O(1), ..., O(N) ... Dejanske frekvence"
200 PRINT " E(1), ..., E(N) ... Teoretične frekvence"
210 PRINT " M                ... Število poskusov"
220 PRINT
230   DIM O(100), E(100)
240 PRINT " Priprava podatkov "
250   GOSUB 1000
260 PRINT " Računamo hi kvadrat "
270   GOSUB 2000
280 PRINT " Izpis rezultatov "
290   GOSUB 3000
300 PRINT " Konec "
310   STOP
1000 REM Priprava podatkov .....
1010   INPUT " Slučajno število ";X
1020   RANDOMIZE(X)
1030   INPUT " Število izidov (6 za navadno kocko) ";N
1040   IF N < 2 OR N > 100 THEN GOTO 1030
1050   INPUT " Število poskusov ";M
1060   IF M < 5*N THEN GOTO 1050
1070   FOR I = 1 TO N
1080     LET O(I) = 0
1090     LET E(I) = M/N
1100   NEXT I
1110   FOR I = 1 TO M
1120     LET J = INT(RND*N) + 1
1130     LET O(J) = O(J) + 1
1140   NEXT I
1150   RETURN
2000 REM računanje hi kvadrat .....
2010   LET H2 = 0
2020   FOR I=1 TO N
2030     LET H2 = H2 + (O(I) - E(I))^2/E(I)
2040   NEXT I
2050   RETURN
3000 REM Izpis rezultatov .....
3010   PRINT
3020   PRINT "Izid      Dejanska      Teoretična "
3030   PRINT "      frekvenca      frekvenca  "
3040   PRINT "*****"
3050   FOR I = 1 TO N
3060     PRINT I,O(I),E(I)
3070   NEXT I
3090   PRINT "*****"
3100   PRINT
3110   PRINT "Število izidov      = ",N
3120   PRINT "Število poskusov    = ",M
3130   PRINT "Število prostostnih stopenj = ",N-1
3140   PRINT "Vrednost hi kvadrat  = ",H2
3150   RETURN

```

vgrajeno funkcijo RND, ki vrne slučajno število med 0 in 1. V resnici zaporedje klicev funkcije RND ne vrača slučajnega zaporedja števil ampak le zaporedje števil, ki se vede, kot da bi bilo slučajno.

Vrstice 1000 - 1150: Podprogram za branje in pripravo podatkov. Določi podatke N, M, O in E. Če bi želeli z računalnikom računati hi kvadrat za primere iz prispevka TEST HI KVADRAT, bi morali ta podprogram spremeniti, tako da bi bral podatke O in E.

Vrstice 2000 - 2050: Računanje hi kvadrat. Iz N, M, O in E naračunamo hi kvadrat H2.

Vrstice 3000 - 3150: Podprogram za izpis rezultatov. Iz priloženih primerov vidimo, da še ni v najlepši obliki. Tako smo izpisali kar pet decimalk števila hi kvadrat, čeprav bi zadoščali že dve decimalki. Seveda pa bi lepšanje izpisa podaljšalo program, zato take izboljšave prepuščamo bralcem.

Računalnik meče 'kocko' z N (≤ 100) ploskvami

O(1), ..., O(N) ... Dejanske frekvence
E(1), ..., E(N) ... Teoretične frekvence
M ... Število poskusov

Priprava podatkov
Slučajno število ? 1984
Število izidov (6 za navadno kocko) ? 6
Število poskusov ? 600
Računamo hi kvadrat
Izpis rezultatov

Izid	Dejanska frekvenca	Teoretična frekvenca
1	111	100
2	99	100
3	107	100
4	85	100
5	103	100
6	95	100

Število izidov	=	6
Število poskusov	=	600
Število prostostnih stopenj	=	5
Vrednost hi kvadrat	=	4.30002
Konec		

Računalnik meče 'kocko' z N (≤ 100) ploskvami

O(1), ..., O(N) ... Dejanske frekvence
E(1), ..., E(N) ... Teoretične frekvence
M ... Število poskusov

Priprava podatkov

Slučajno število ? 112

Število izidov (6 za navadno kocko) ? 10

Število poskusov ? 1000

Računamo hi kvadrat

Izpis rezultatov

Izid	Dejanska frekvenca	Teoretična frekvenca

1	105	100
2	94	100
3	93	100
4	101	100
5	98	100
6	104	100
7	95	100
8	103	100
9	101	100
10	106	100

Število izidov	=	10
Število poskusov	=	1000
Število prostestnih stopenj	=	9
Urednost hi kvadrat	=	2.02001
Konec		

Bralca vabimo, da pogleda v razpredelnici iz prejšnjega prispevka, ali je generator slučajnih števil prestal preprost statistični test. Če ga ni, mu nikakor ne smemo zaupati in moramo poiskati boljšega. Če pa je generator test uspešno prestal, pa to še ne pomeni, da je dober, saj bi se prav lahko "spotaknil" ob kakšnem drugačnem testu. O generatorjih slučajnih števil bomo spregovorili kdaj drugič.

Tomaž Pisanski

UVOD V ŽELVINO GRAFIKO

Izraz želva ima v računalništvu že dvajsetletno zgodovino. V začetku 60.let ga je uporabil britanski nevropsiholog Grey Walter za majhne robote na kolesčkih. Kasneje so jih izpopolnili na univerzi MIT v ZDA. Premikali so se na ukaza FORWARD (naprej) in RIGHT (desno). To terminologijo je prevzela skupina za razvoj programskega jezika LOGO in razvijati se je začela želvina grafika.

Želva je bila že omenjena v Preseku XI/4 in nam je pomagala risati zmajeve krivulje. Zmore še precej težje preizkušnje in delček njenega sveta bom skušal prikazati v naslednjih številkah. Večina gradiva je iz knjige, ki sta jo napisala Harold Abelson in Andrea A. diSessa - Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics, MIT Press, 1981.

Večina vas je verjetno že zaslutila, da bomo pisali o računalnikih in računalniški grafiki. Vsi programi bodo napisani v programskem jeziku pascal. Vsak ukaz namišljeni želvi bo v resnici klic ustreznega podprograma. Podobni ukazi obstajajo tudi v pascalu Hi-soft H4PT z dodatnim paketom Turtle na računalniku ZX Spectrum. Uvod se je kar precej raztegnil in res je že čas, da preidemo k želvi.

Predstavljajte si, da lahko na računalniškem ekranu upravljate z majhno stvarco, ki jo imenujemo želva. Za začetek naj pozna le dva ukaza - FORWARD (naprej) in RIGHT (desno).

```
PROCEDURE forward ( distance:integer ) ;  
PROCEDURE right ( alfa:integer ) ;
```

Pri ukazu FORWARD se želva premakne v smer, v katero gleda, pri tem pa ji povemo še število korakov, ki naj jih naredi. Ukaz RIGHT pa jo zavrti za dano število stopinj v smeri urnega kazalca. Da je stvar bolj zabavna, nosi želva pero, ki pušča sled na prehojeni poti.

Običajna računalniška grafika ima drugačne ukaze od želvine, zato pogledjmo, kako naredimo želvo. Ukaz za risanje črt se ponavadi imenuje DRAW(X,Y) in potegne črto od mesta peresa do točke (x,y). Poleg tega imamo še ukaz PLOT(X,Y), ki dvignjeno pero premakne v točko (x,y). Torej moramo poskrbeti za prehod iz polarnega v kartezični koordinatni sistem. Želvo bomo opisali s trenutnim položajem in smerjo, v katero gleda:

```

zelva = RECORD
    tx:integer ;      (* želvina x koordinata *)
    ty:integer ;      (* želvina y koordinata *)
    tangle : integer  (* želvina smer *)
END;

```

Napišimo najprej podprogram RIGHT. Ta je zelo preprost, saj spremenimo le smer, v katero gleda želva:

```

PROCEDURE right ( alfa:integer ) ;
BEGIN
    zelva.tangle := zelva.tangle - alfa ;
END;

```

Podprogram FORWARD pa je malce bolj zapleten. Izračunati moramo nov želvin položaj na vodoravni in navpični osi in narisati črto od starega do novega položaja:

```

PROCEDURE forward ( distance:integer ) ;
BEGIN
    zelva.tx := zelva.tx + round(distance*
cos(zelva.tangle*3.14159265/180.0));
    zelva.ty := zelva.ty + round(distance*
sin(zelva.tangle*3.14159265/180.0));
    draw(zelva.tx,zelva.ty) ;
END;

```

Za pisanje pravih računalniških programov nam manjka le še podprogram za inicializacijo - postavitve začetnih vrednosti:

```

PROCEDURE initturtle ;
BEGIN
    zelva.tx := 128 ;      (* postavimo x koordinato *)
    zelva.ty := 96 ;      (* postavimo y koordinato *)
    zelva.tangle := 0 ;    (* postavimo kot *)
    plot(zelva.tx,zelva.ty) ; (* narišemo želvo *)
END;

```

S tem smo dobili orodje za upravljanje želve in kar takoj jo lahko preizkusimo. Nekaj začetnih poskusov je na sliki 1.

```

FORWARD(100) ;
RIGHT(90) ;
FORWARD(50) ;
RIGHT(135) ;
FORWARD(150) ;

```



SLIKA 1

Kako pa bi narisali kaj bolj znanega, recimo kvadrat s stranico 100? Nič lažjega, rešitev je podprogram 1.

```

PROCEDURE kvadrat1 ;
BEGIN
  forward(100) ; right(90) ;
  forward(100) ; right(90) ;
  forward(100) ; right(90) ;
  forward(100) ; right(90) ;
END;

```

Če podprogram posplošimo za risanje kvadratov poljubne dolžine, dobimo podprogram 2.

```

PROCEDURE kvadrat2 ( a:integer ) ;
VAR
  i : integer ;
BEGIN
  FOR i:= 1 TO 4 DO BEGIN
    forward(a) ; right(90) ;
  END;
END;

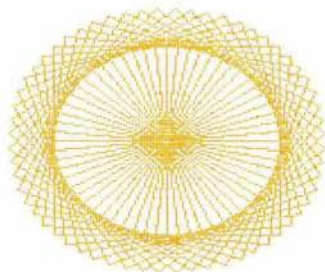
```

Samo en kvadrat na ekranu ni preveč zanimiv, z njegovo pomočjo pa lahko ustvarimo že kar spoštljive vzorce. Eden je na sliki 2, njegov program pa ima številko 3.

Da ne bi porabili preveč prostora, bo od vsakega programa napisan le bistveni del, ki pa ga ne bo težko dopolniti do konca.

Pogosto lahko s ponavljanjem določenega vzorca dobimo zapletene grafike. Poglejmo podprogram 4. Njegov učinek je prikazan na sliki 3.

Poskusimo kombinaciji v programu 5. Rezultata sta na slikah 4 in 5.



SLIKA 2

Program 3:

```

j : integer ;
...
FOR j := 1 TO 60 DO BEGIN
  kvadrat(50) ; right(6) ;
END;
...

```

Podprogram 4:

```

PROCEDURE kraca ;
BEGIN
  forward(32) ; right(90) ;
  forward(32) ; right(90) ;
  forward(16) ; right(90) ;
  forward(16) ; right(90) ;
  forward(32) ; right(90) ;
  forward( 8) ; right(90) ;
  forward( 8) ; right(90) ;
  forward(16) ;
END;

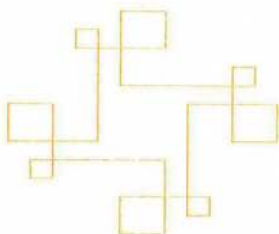
```

SLIKA 3



Program 5:

```
i : integer ;  
...  
FOR i := 1 TO 4 DO kraca ;  
...  
FOR i := 1 TO 8 DO BEGIN  
  kraca ; right(-45) ; forward(40) ;  
END;  
...
```



SLIKA 4



SLIKA 5

Naj za konec navedem še nalogo za najbolj zagrizene. Krog lahko približno narišemo kot 360-kotnik:

```
i : integer ;  
...  
FOR i := 1 TO 360 DO BEGIN  
  forward(1) ; right(1) ;  
END;  
...
```

Kar dobimo na zaslonu, niti približno ni podobno krogu. Zakaj?

Naloge:

1. Spreminjajte vrednosti pri podprogramih FORWARD in RIGHT in opazujte rezultat!
2. Kako moramo spremeniti realizacijo želve, da bo zgornji program res narisal krog?
3. Kako pa bi s pomočjo želve narisali elipso?

Rok Sosič

MERJENJE HITROSTI VETRA, 2. del

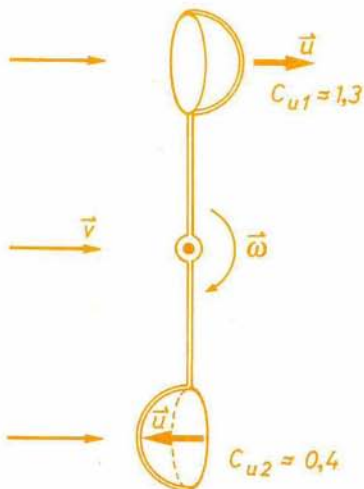
Danes za merjenje hitrosti vetra največ uporabljamo vrtljive *anemometre* z votlimi polkrogli. Ker veter piha v glavnem v horizontalni smeri (tipično razmerje med horizontalno in vertikalno komponento hitrosti je med 10^2 in 10^3), dobimo s takim anemometrom, ki je vrtljiv okrog vertikalne osi, skoraj celotno hitrost. Obenem merjenje hitrosti ni odvisno od smeri vetra. To določamo posebej s pomočjo *vetrokaza*, ki ima rep oblikovan na različne načine (glej prejšnjo številko Preseka).

Zaradi preprostosti za začetek vzemimo, da imamo na ročicah dolžine r le dve polkrogli s presekom S , ki se vrtita brez trenja v ležaju in ki sta v nekem trenutku v legi, kot je prikazana na sliki 1. Ker sta v tem trenutku votli polkrogli obrnjeni ena od vetra, druga pa v veter, sta sili *upora* v *sredstvu* na eno in drugo polkroglo različni. Zato se polkrogli vrtita, recimo pri stalnem vetru, ki ima hitrost $\vec{v}$, s kotno hitrostjo $\vec{\omega}$. Ob tem imata obodno hitrost $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, ena proti vetru, druga od njega. Hitrost u pa mora biti ravno pravišnja: ob enakomernem vrtenju brez trenja ni navora na sistem, (saj se prav zato ta vrti nepospešeno), kar pomeni, da morata biti sili na obe polkrogli enaki. Ob upoštevanju *kvadratnega zakona upora* torej velja

$$\frac{1}{2} \rho S C_{u1} (v - u)^2 = \frac{1}{2} \rho S C_{u2} (v + u)^2$$

Odtod dobimo

$$v = u \frac{1 + \sqrt{C_{u1}/C_{u2}}}{1 - \sqrt{C_{u1}/C_{u2}}}$$



Slika 1. Vrtenje dajalnika za hitrost vetra z dvema votlima polkroglama

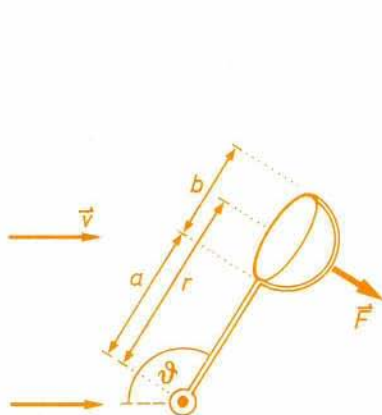
torej za vrednosti $C_{u1} \approx 1.3$ in $C_{u2} \approx 0.4$ približno velja $v \approx 3.5 u$, kar bi že bilo uporabno za približno umeritev takega anemometra: hitrost vetra je približno $3.5 \times r$ -kratna vrednost kotne hitrosti ω . Podrobnejša obravnava odkrije (kot že pri vetromeru na ploščo, prejšnja številka Preseka), da je seveda pomemben tudi dinamični vzgon, zato je treba napisati velikost tangencialne sile, ko je polkrogla v legi, ki jo določa kot θ glede na veter (slika 2a) takole:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \rho S (v^2 + u^2 + 2uv \cos \theta) C(\theta)$$

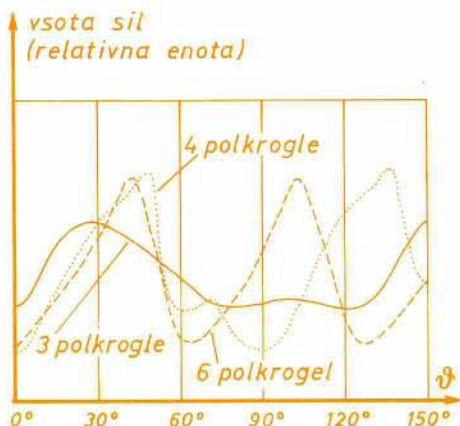
Ta sila se močno spreminja z lego polkrogle glede na veter, poleg tega pa imajo vrtljivi anemometri navadno tri, štiri, nekateri pa tudi več polkrogel. Zato se celotni navor $M = \sum F_i(\theta_i) \cdot r$ spreminja v enem obratu (slika 2b). Smiselno je določiti povprečni navor za ves obrat sistema z N polkrogliami

$$\overline{M} = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cdot r \, d\theta = \frac{1}{2} \rho S N r u^2 f(v/u)$$

Meritve kažejo, da je $f(v/u)$ npr. za sistem s tremi polkrogliami približno parabola: $f(v/u) = p + q(v/u)^2$, konstanti p in q pa sta odvisni še od konstrukcije (od razmerja med p in q , od tega, ali gre res za polkrogle ali pa so te nekoliko bolj stožčaste in podobno).



Slika 2a.



Slika 2b

Slika 2. Tangencialna sila na polkroglo se spreminja z vpadnim kotom vetra. Tudi vsota sil na ves sistem polkrogel se spreminja, v povprečju pa je preko enega obrata razmerje 1,05 : 1,00 : 1,12 za sistem s tremi, štirimi in šestimi polkrogliami pri $a = 52$ mm in $b = 102$ mm.

Ta navor vetra na merilni sistem je potreben za premagovanje trenja v ležajih (ki ga sicer skušajo čimbolj odpraviti, ni pa povsem zanemarljivo), pa za premagovanje še kakih drugih sil, na primer magnetnih. Mnogo vrtljivih anemometrov ima namreč pod dajalnikom s polkrogli generator električne napetosti, ki ga dajalnik vrti, in inducirana napetost je potem tista količina, ki jo odčitamo na instrumentu. Skala instrumenta pa je narisana kar v metrih na sekundo. Vrednosti lahko tudi kam zapisujemo. Tako dobimo *anemograf*. Pišemo na pisalnik s papirjem ali pa kar na magnetno kaseto.

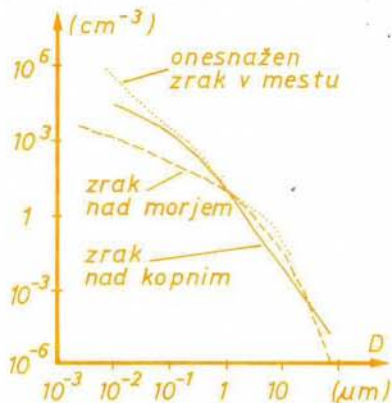
Med opisanimi anemografi je zanimiv tisti, ki ga v sodelovanju s Hidrometeorološkim zavodom SR Slovenije izdeluje Inštitut Jožef Stefan (slika 3). Ker so pri nas vetrovi po dolinah in kotlinah pogosto zelo šibki, so želeli čim nižji *prag instrumenta*, to je tisto najnižjo vrednost, pri kateri začne zanesljivo delovati. Zato so notranji navor skušali čimbolj zmanjšati. To so dosegli s posebnimi ležaji ter tako, da ne poganjajo generatorja, temveč štejejo frekvenco obratov dajalnika. Pod dajalnikom je plošča, ki ima po obodu izvrtane luknjice, nad njo je svetlobni vir, pod njo pa fotocelica, ki šteje svetlobne sunke, ko se plošča vrti. Podatke vodijo v integrator, kjer jih usklajujejo s podatki kvarčne ure, in ta integrator računa povprečne smeri in hitrosti vetra v nastavljenih časovnih intervalih od ene sekunde do več ur. Potem jih ali prikazuje na digitalni številčnici ali riše na pisalniku ali pa spravlja na magnetno kaseto za nadaljnjo uporabo — ali pa vse to skupaj. Vsa ta opravila vodi mikroročunalnik.

Principov za merjenje vetra je še več: *upor* in *dinamični vzgon* uporabljajo še anemometri na propeler, *zastojni tlak* pa Pitotova ali Prandtllova cev. Princip *ohlajevanja* zaradi vetra je osnova za nekatere preproste, pa tudi za zelo fine instrumente. Z njimi lahko merimo tridimenzionalne nepravilnosti v turbulentnem toku zraka ali pa hitrost pretakanja krvi po žilah: merimo električni tok, ki je potreben, da tanko žičko ali opno vzdržujemo pri stalni temperaturi, medtem ko snovni (zračni) tok mimo nje odnaša toploto proč. Toda vsi ti in podobni instrumenti imajo eno pomembno napako: s tem, da jih postavimo v tok, na ta tok bolj ali manj sami vplivajo in zato s samim merjenjem *pokvarimo* tisto, kar *želimo* pravzaprav *meriti*.

Pri merjenju vetra je nekaj načinov, kjer se tej nevšečnosti izognemo. Zvočni, radarski ali laserski anemometri merijo od daleč. Delajo na osnovi *sipanja* oddane energije nazaj proti izvoru, kjer jo merimo s sprejemnikom. Če se ta energija siplje na premikajočih se telesih, pride do *Dopplerjevega pojava*, do spremembe frekvence oddanega valovanja. Ta sprememba je mera za hitrost. Gre pa tudi brez upoštevanja sprememb frekvence. Oglejmo si kako!

V naravi je v zraku veliko najrazličnejših drobnih delcev: prašnih in dimnih, kapljic in kristalčkov raznih snovi ipd. Nastajajo pri tleh v naravi zaradi vetra, ob gozdnih požarih, ob vulkanskih izbruhih, rastline med cvetenjem oddajajo cvetni prah, ob razburkanem morju prskajo v zrak kapljice in tako naprej. Zadnje čase z industrializacijo tudi človek s svojimi aktivnostmi bistveno

prispeva k temu, zato jih je posebno veliko v naseljenih področjih (slika 4). Ti delci — *aerosol* jim pravimo — pa so pri tleh zaradi vrtnincev v zraku nekako združeni v bolj ali manj goste (nevidne) "oblake". Veter te oblake zanaša in ker so delci majhni in lahki, ni razlike med hitrostjo vetra in hitrostjo teh oblakov aerosola. Zato so zelo primerna tarča za merjenje hitrosti vetra s pomočjo sipanja svetlobe na njih.



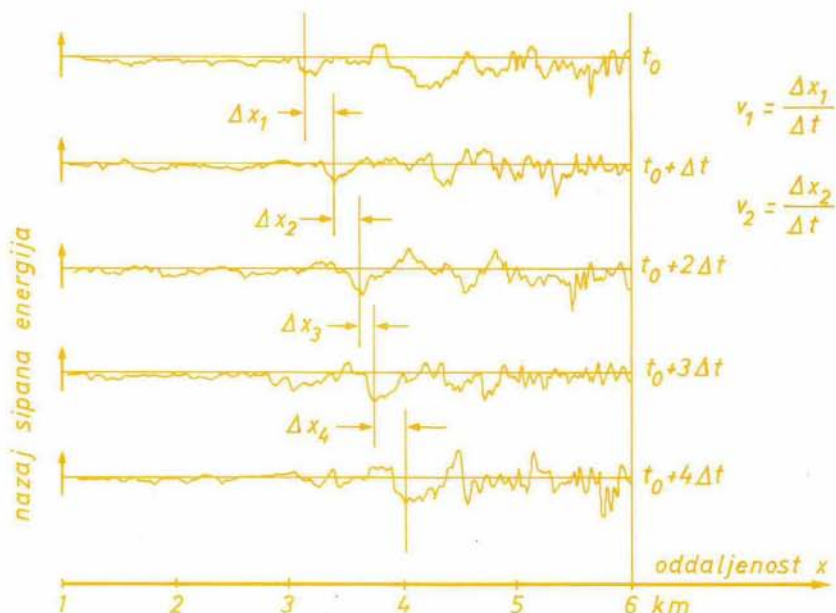
Slika 3. je objavljena na 4. strani ovitka

Slika 4. Porazdelitev števila delcev v zraku po velikosti (številska gostota $dN/d(\log D)$ v odvisnosti od premera D) v posameznih tipičnih zračnih masah.

Slika 5. Nazaj sipana energija laserskega žarka v odvisnosti od oddaljenosti, iz katere prihaja ta sipana energija. Iz pomikov značilnih oblik Δx v intervalih Δt računamo hitrost. (Tu je $\Delta t = 40$ s, vmesne slike niso narisane.)

Z laserjem, ki v zelo kratkih intervalih (približno na vsako stotinko sekunde) odda svetlobni curek trajanja okrog 10 ns ($= 10^{-8}$ s), preiskujemo zrak okrog mesta merjenja. Na aerosolu se del svetlobe sipa nazaj proti oddajniku, kjer to nazaj sipano energijo merimo s sprejemnikom. Iz zaostanka med časom oddaje in sprejema lahko izračunamo, kako daleč je posamezen oblak aerosola. Seveda dobimo veliko odbojev: od vsakega oblaka, ki je v smeri svetlobnega curka, se nekaj sipa nazaj. Od enako gostih oblakov se sicer sipa enako energije, vendar gostota te sipane energije pada s kvadratom razdalje, ko se širi po prostoru, zato dobimo od oddaljenih oblakov aerosola manj energije. Če to upoštevamo, izračunamo krivulje intenzivnosti gostote oblakov v odvisnosti od oddaljenosti, kakršne so narisane na sliki 5. Take slike dobimo v gostih časovnih intervalih (na sliki 5 so narisane le nekatere od krivulj). Zaporedne slike krivulj si zapomnimo in jih primerjamo med seboj. Iz premikov značilnih oblik v zaporednih slikah lahko izračunamo hitrost premikanja oblaka aerosola in s tem hitrost vetra na tistem mestu, ki pripada posamezni značilni obliki. Vidimo, da smo pravzaprav dobili ne le hitrost v eni točki, temveč razporeditev hitrosti vetra na premici vzdolž laserskega žarka. Še več — če z žarkom otipavamo ves prostor okrog sebe, podobno kot to dela radar, dobimo lahko z merjenji iz enega mesta celo prostorsko sliko gibanja zraka.

Seveda je skoraj odveč pripomniti, da gredo podatki iz sprejemnika pri takemle merjenju kar naravnost v računalnik ali pa vsaj v mikroročunalnik. Ob tem pa lahko nekatere podatke zavržemo in ohranimo le nekatere. To storimo



z računskimi postopki, rečemo jim *matematično filtriranje*, ali pa s pravimi, elektronskimi filtri. Če nas na primer zanima povprečna hitrost vetra, bomo zavrgli vse tiste odboje, ki prihajajo iz oblakov aerosola, ki so majhni in ki se v času hitro spreminjajo. Če pa nas zanima na primer problem razširjenja onesnaževanja v zraku (ki je podobno širjenju aerosola), pa so prav ti podatki važni, saj govorimo o turbulentnih motnjah hitrosti, torej o tem, kako se onesnaženje z vrtinci širi v vse večji prostor.

Tule pa kar končajmo, saj smo od vozlov in boforov, s katerimi smo začeli v prejšnji številki Preseka, prišli prav do današnjih dni.

Jože Rakovec

Literatura:

1. Kleinschmidt, *Handbuch der Meteorologischen Instrumente*, Berlin, Springer, 1935
2. *Meteorological Monographs*, Vol 11, Meteorological Observations and Instrumentation, Boston, American Meteorol.Soc., 1970
3. Meteorological Office, *Meteorology for Mariners*, London, H.M.S.O., 1967
4. Eloranta et al., *The Determination of Wind Speed in the Boundary Layer by Monostatic Lidar*, *J. Applied Meteorol.*, 14, 1485 – 1489 (1975)
5. Wallace and Hobbs, *Atmospheric Science*, New York, Academic Press, 1977

O ATOMIH

Zagotovo ste že slišali za *atome*, če ne v šoli, pa kje drugje. Ali imate o njih kako predstavo? Ali se zavedate, kako majhni so? Celo za raziskovalce je znano, da skrbno premislijo o kakem pojmu, ko ga prvič vpeljejo, pozneje pa se drugi z njim bolj in bolj sprijaznjujejo in ga nazadnje uporabljajo, ne da bi ga v osnovi razumeli. Nekaj takega velja najbrž tudi za atome. Danes nas to ime spremlja že od otroštva. Tako vsakdanje se nam zdi in tako smo nanj navajeni, da ga uporabljamo, ne da bi si kaj dosti razbijali glavo s predstavami.

Nekatere tuje ankete kažejo, da veliko desetletnikov povezuje atom z orožjem. Ta zveza je napačna, saj sta jedrska energija in jedrsko orožje povezana kvečjemu z atomskim jedrom, ki je še kakih stotisočkrat manjši od atoma. Štirinajstletniki imajo manj takih predsodkov, borijo pa se z različnima predstavama o atomu v fiziki in v kemiji.

Del težav, na katere naletimo, ko si hočemo atom nazorno predstavljati, izvira iz tega, da veljajo v svetu atomov drugačni zakoni za gibanje kot v svetu velikih teles. Za drugi del težav pa je krivo to, da so atomi zelo zelo majhni. Oglejmo si nekaj mogočih zdravil za težave druge vrste.

V prvem letu pri fiziki – v sedmem razredu osnovne šole – ocenimo velikost molekule olja s poskusom. Na vodo v večji posodi kanemo kapljico olja s približno prostornino $0,1 \text{ mm}^3$. Kapljica se razleze po gladini na okoli 10 dm^2 . Če je plast olja na vodni gladini debela kako molekulo, podaja višina prizme s prostornino $0,1 \text{ mm}^3$ in ploščino osnovne ploskve $10 \text{ dm}^2 = 100\,000 \text{ mm}^2$ "premer" molekule:

$$0,1 \text{ mm}^3 / 100\,000 \text{ mm}^2 = 0,000\,001 \text{ mm} = 0,000\,000\,001 \text{ m} = 1 \text{ nm}$$

"Premer" molekule olja meri torej milijoninko milimetra ali milijardinko metra ali en nanometer. Premer smo dali v narekovaj, ker molekula olja ni kroglasta, ampak podolgovata.

Pisanje z ničlami ali z besedo zares opozori, da gre za zelo majhna števila, bolj kot pisanje z desetičnim eksponentom. Tako na primer S. Weinberg v uspešnici *Prve tri minute* namenoma ne uporablja desetičnih eksponentov. Vendar to ni dovolj. Dobro si je zamisliti še kak poskus z velikimi telesi, ki pokaže, kako majhni so atomi in kako številni so v telesih, s kakršnimi imamo opraviti v vsakdanjem življenju.

Enega izmed takih poskusov si je zamislil Francis William Aston, ki je znan po tem, da je po letu 1919 močno izpopolnil merjenje atomskih mas.

Prevezemimo kar malo prirejen odlomek iz knjige Milana Vidmarja:

"Koliko je vodnih molekul v kozarcu vode? Približno deset kvadrilijonov.

Oglej si število:

10 000 000 000 000 000 000 000 000

Aston je seveda upošteval težave, ki jih prinašajo velika števila, in je zato slikal dalje. Na veliko potovanje te vabi, nekam v sredino Tihega oceana. Nekam v sredino ogromnega sveta, napolnjenega z vodo. Tam zagrabi kupico in jo izlije v morje.

Vsebina kozarca izgine v neizmerni vodi. Kvadrilijoni njenih molekul se po-mešajo med bajno množico vrstnic. Vodni tokovi jih razganjajo na vse strani. Megle jih dvigajo v oblake, vetrovi jih ženejo bog ve kam. Počasi se porazgubijo na vse strani.

Počakaj, da zmelje čas nekdanjo kopico vodnih molekul do kraja. Pa si predstavlja, da so se nazadnje popolnoma enakomerno porazdelile po vsej vodi našega zemeljskega sveta. Vrni se domov. Pojdi v kuhinjo, vzemi v roko prazen kozarec in odpri pipo. Vnovič si ga napolni z vodo. Zopet bo objel deset kvadrilijonov vodnih molekul. Kaj praviš, ali bo med njimi katera izmed onih, ki si jih vrgel v Tihi ocean?

Aston odgovarja: okroglo dva tisoč jih bo zopet v kozarcu. Neverjetno, kaj ne?"

M. Vidmar nato nadaljuje: "Ameriški fizik Swann trdi, da ima vsak človek v sebi nakaj atomov, ki so nekoč velikemu Cezarju sestavljali telo. Zdi se mu, da Napoleonovih atomov še nimajo vsi ljudje, ker ti atomi še niso imeli dovolj časa, da se popolnoma razkrope po Zemlji. Swannova slika ni nič manj poučna kot Astonova."

Sledimo za vajo Astonovemu poskusu z računom. Da se izognemo težavam pri tipkanju Preseka, pišimo namesto ničel desetišne eksponente. Vemo, da je v enem kilomolu vode, to je v 18 kilogramih, Avogadrovo število, to je $6 \cdot 10^{26}$, molekul. V vrčku za 3 decilitre (3 "deci") je potem $0,3 \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{26} / 18 \text{ kg} = 10^{25}$ molekul. Deciliter vode ima namreč maso 0,1 kilograma. Za maso svetovnega morja najdemo v priročniku podatek $4 \cdot 10^{21} \text{ kg}$ (polna masa Zemlje meri $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). Tako pride na kilogram vode, ko se molekule iz našega vrčka enakomerno razdelijo po vsem svetovnem morju, okoli $10^{25} / 1,4 \cdot 10^{21} = 7100$ molekul. V vrčku za 3 decilitre je potem $0,3 \cdot 7100 = 2100$ prvotnih molekul.

Da je bil Astonov namišljeni poskus posrečen, priča tudi to, da ga najdemo opisanega v sodobnem avstrijskem srednješolskem učbeniku fizike. Poskus si lahko samo zamislimo, zares izvesti pa ga ne moremo, saj niti ne vemo, kako

dolgo bi morali čakati, da bi se voda premešala.* (Pri Cezarju in Napoleonu pa bi bilo treba še počakati na razkroj do anorganskih snovi.)

Kako majhni so atomi — po Presekovo

Vzemimo enakomerno vlažno platneno krpo po pranju iz pralnega stroja in jo stehtajmo s kuhinjsko tehtnico. V suhem vremenu jo na prostem obesimo na stojalo. Vsakih deset minut jo snamemo, stehtamo in obesimo nazaj.

Naša krpa s ploščino $50\text{ cm} \cdot 60\text{ cm} = 3000\text{ cm}^2$ tehta suha 80 gramov, vlažna pa 148 gramov, tako da je v njej 68 gramov vode. Diagram kaže časovno odvisnost njene mase med sušenjem. V 1 uri ali 3600 sekundah zgubi krpa 52 gramov vode, torej vsako sekundo

$$52\text{ g}/3600 = 0,014\text{ grama} = 0,000\,014\text{ kilograma}$$

V 18 kilogramih je $6 \cdot 10^{26}$ molekul, tako da zapusti krpo vsako sekundo

$$(6 \cdot 10^{26} / 18\text{ kg}) \cdot 14 \cdot 10^{-6}\text{ kg} = 4,7 \cdot 10^{20}\text{ molekul}$$

Če upoštevamo dvojno površino krpe $2 \cdot 3000\text{ cm}^2 = 6000\text{ cm}^2$, sledi, da zapusti vsak kvadratni centimeter površine v sekundi

$$4,7 \cdot 10^{20} / 6000 = 8 \cdot 10^{16}\text{ molekul}$$

Ne preseneti nas, da je to precej več kot pri prstanu in kovancu. Spremembo mase na sekundo je neposredno komaj mogoče opaziti. Atomi in molekule so zares zelo zelo majhni.

Pripomba. Fizika sušenja perila je zelo nepregledna. Na izid vpliva veliko podatkov, na primer: temperatura in vlažnost zraka, hitrost vetra, sonce, smer in višina stojala. Pri poskusu bomo dobili nekoliko drugačen rezultat, ko ga bomo ponovili kdaj drugič. Vendar gre le za desetiščni eksponent ali, kot pravimo fiziki, za velikostno stopnjo. Težko si je namreč zamisliti razmere, v katerih bi se perilo sušilo desetkrat počasneje ali desetkrat hitreje.

Sorodne pojave pa lahko opazujemo neposredno. J. L. Stull je opazil, ko je kupoval ženi ob petindvajsetletnici poroke enak prstan kot ob poroki, da se je masa prstana iz štirinajstkaratnega zlata zmanjšala za četrto grama. Hitro je izračunal, da se je vsako sekundo v petindvajsetih letih v povprečju odtrgalo od

* Mogoče je ugotoviti, kako hitro se mešajo plasti v oceanu. Na površju namreč v reakcijah delcev, ki jih rodijo v vrhnjih plasteh ozračja hitri, naelektrjeni delci iz vesolja, nastajajo molekule vode z atomom radioaktivnega vodikovega izotopa tritija (razpolovni čas 26,3 leta) namesto navadnega atoma vodika. Treba je le potegniti vzorce vode iz različnih globin in ugotoviti, kako pojema radioaktivnost tritija z globino.

prstana

$$0,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{26} / 120 \text{ kg} \cdot 25,3 \cdot 10^7 = 1,6 \cdot 10^{12}$$

atomov. Tudi to je presenetljiv rezultat. Pri tem smo upoštevali, da je masa povprečnega kilomola zlitine iz zlata, srebra in bakra 120 kg in da je v enem letu $3,2 \cdot 10^7$ sekund. Stull je pristavil, da so za podobna razmišljanja bolj kot prstani pripravniki kovanci, ki imajo vtisnjeno letnico izdelave.

... Ob vsakem dihu izdahne človek okoli 400 cm^3 zraka, tako da vsebuje en sam dih okoli 10^{22} molekul. V vsem zemeljskem ozračju je okoli 10^{44} molekul. Ena molekula je tedaj v enakem razmerju z dihom kot le-ta z vsem zemeljskim ozračjem. Če vzamemo, da je zadnji dih, denimo, Julija Cezarja zdaj že dodobra porazdeljen po ozračju, je verjetno, da z vsakim dihom vdihnemo eno molekulo iz tega diha. Človeška pljučka zajamejo okoli 2000 cm^3 zraka, zato je verjetno, da je v pljučih vsakega izmed nas kakih pet molekul, ki jih je z zadnjim dihom izdahnili Julij Cezar ...

J. Jeans, *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases*, Cambridge University Press, New York 1940, str. 32

citirano po A. A. Bartlett, *Examples of Atmospheric Arithmetic*, The Physics Teacher 21 (1983) 95

... Če bi vse molekule iz prgišča snega povečali do velikosti graha, bi bilo dovolj snega, da bi z njim pokrili vso površino Zemlje do vrha Eiflovega stolpa ali Rockefellerjevega centra, to je do višine 300 m ...

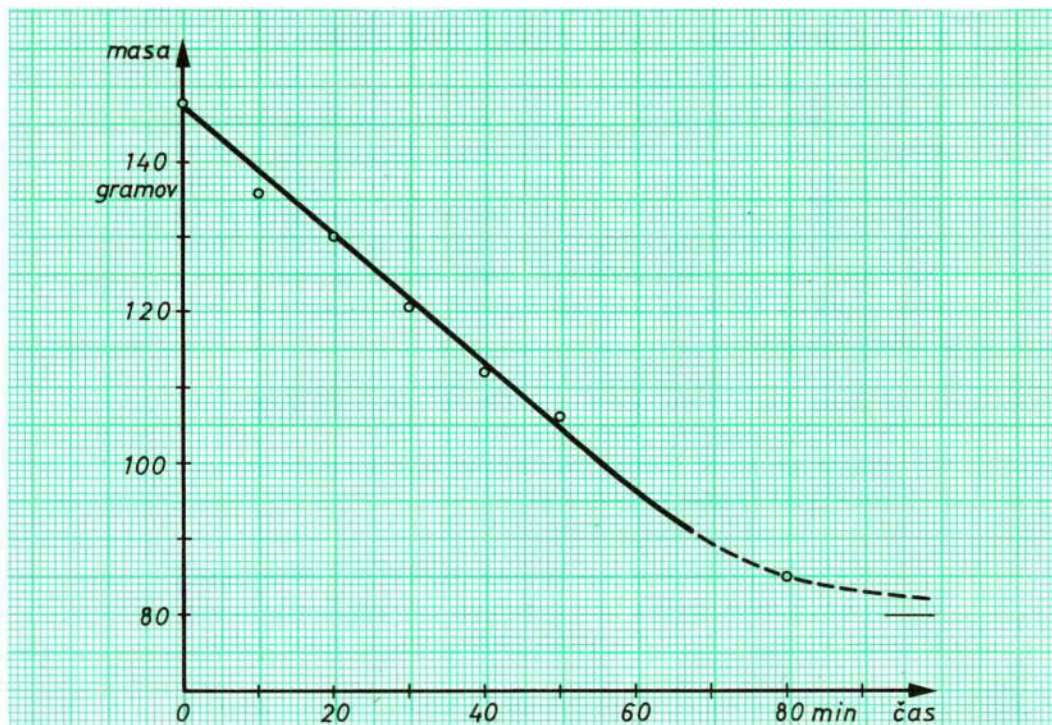
R. Howink, *Data: Mirror of Science*, American Elsevier, New York 1970, str. 26

citirano po F. T. Dietz, *More on Avogadro's Number*, The Physics Teacher 22 (1984) 515

Rečeno, storjeno. D. Nachtigallu je bilo treba samo upoštevati merjenja združenja nemške nikljeve industrije. To je namreč raziskalo, kako hitro se obrabijo kovanci za 1 nemško marko z maso 5,50 gramov iz zlitine 25% niklja in 75% bakra, ki so v obtoku od leta 1950. Preiskali so deset tisoč kovancev in ugotovili, da se masa kovanca zmanjša v povprečju za 0,0013 grama na leto. (Približno tolikšna je tudi povprečna masa umazanije na kovancu.) Ker je masa povprečnega kilomola 62 kg, zgubi kovanec vsako sekundo

$$0,0013 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{26} / 62 \text{ kg} \cdot 3,2 \cdot 10^7 = 4 \cdot 10^{11}$$

atomov. Če upoštevamo, da je prstan iz mehkejšje zlitine kot kovanci in da kovanci lahko tudi počivajo, nas ne preseneti to, da je drugi podatek manjši od prvega.



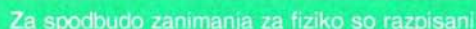
Ni gotovo, da si bralci po branju tega prispevka bolje predstavljajo, kako majhni so atomi, upamo pa, da se med branjem niso dolgočasili.

Janez Strnad

Literatura

M. Vidmar, *Oslovski most*, Ljubljana 1936,
 R. Sexl, I. Raab, E. Streeruwitz, *Physik*, Teil 1, Dunaj 1976, str. 73,
 J. L. Stull, *How small is an atom? (Very!)*, *Physics Teacher* 21 (1983) 458,
 D. Nachtigall, *Zur Anthropometrie der Anzahl und Grösse von Atomen*, *Physica didactica* 11 (1984) 126.

Portorož, Koper, 23.–30. 6. 1985



Vabljeni

dijaki, študenti, profesorji in vsi drugi

- 1 **IZVIREN FIZIKALNI EKSPERIMENT**
priprava poskusa in meritve
- 2 **TRI IZVIRNE FIZIKALNE NALOGE**
2 teoretični, 1 eksperimentalna za bistre učenčke
- 3 **RAČUNALNIŠKI PROGRAM IZ FIZIKE**
program za eksperiment primeren za pouk in učenje
- 4 **ESEJ O FIZIKALNEM DOGNANJU**
razmišljanje o izbranih dognanju v esejski ali pesniški obliki
- 5 **FIZIKA V FOTOGRAFIJI**
lep izvirni posnetek z aktualno vsebino, velikost vsaj 18 x 24 cm
- 6 **HUMOR V FIZIKI**
o fiziki, pouku, fizikih
a duhovita šala, anekdota
b karikatura, risba, strip
- 7 **FIZIKALNA POPEVKA**
aktualna fizikalna vsebina, življenjske naprave

PRIZNANJA Izbrana dela bodo razstavljen, tri najboljša tudi nagrajena (10.000,- din, 7.500,- din, 5.000,- din)

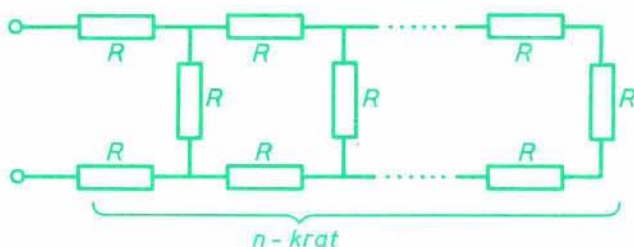
ROK za oddajo izvirnih del 30. maj 1985

NASLOV Fizikalna olimpiada, Jadranska c. 19, 81111 Ljubljana, p. p. 64

NADOMESTNI UPOR

VERIGE UPORNIKOV

Rešili bomo naslednjo nalogo o električnih vezjih: Izračunaj nadomestni upor verige enakih upornikov (glej sliko)! Vseh upornikov je $3n$, upor vsakega izmed njih pa je enak R .



Rešitev:

1. Iskani nadomestni upor označimo z R_n . Naša naloga je določiti R_n v odvisnosti od R in n . Očitno je $R_1 = 3R$. R_{n+1} dobimo iz R_n , če le temu dodamo še tri upornike:

$$R_{n+1} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_n}} + R$$

$$R_{n+1} = 2R + \frac{R \cdot R_n}{R + R_n} = \frac{(2R + 3R_n) R}{R + R_n} \quad (1)$$

Po tej rekurzivni formuli izračunamo: $R_2 = \frac{11}{4} R$ in $R_3 = \frac{41}{15} R$.

2. Definirajmo zaporedji x_n in y_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$):

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n \quad (a)$$

(2)

$$y_{n+1} = x_n + y_n \quad (b)$$

Prvih nekaj členov zaporedja x_n je: 1, 3, 11, 41, ..., zaporedja y_n pa 0, 1, 4, 15, ...

3. Dokažimo s popolno indukcijo, da je

$$R_n = R \frac{x_n}{y_n} \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (3)$$

Za $n = 1$ je $R_1 = R \frac{x_1}{y_1} = 3R$, kar res velja.

Predpostavimo, da (3) velja za n in pokažimo, da tedaj velja tudi za $(n + 1)$. S tem namenom vstavimo (3) v (1):

$$R_{n+1} = 2R + \frac{R \cdot R \frac{x_n}{y_n}}{R + R \frac{x_n}{y_n}} = 2R + R \frac{x_n}{x_n + y_n} = R \frac{3x_n + 2y_n}{x_n + y_n}$$

Upoštevamo definiciji (2), pa dobimo: $R_{n+1} = R \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$. Tako je dokaz enakosti (3) končan.

4. Z uporabo računalnika, na katerem lahko programiramo, je mogoče izračunati poljuben x_n in y_n (s pomočjo (2)), medtem ko na običajnem žepnem računalniku pri velikih n to ni mogoče. Zato bi želeli določiti formule za x_n in y_n samo v odvisnosti od n .

Iz (2b) izpeljemo $x_n = y_{n+1} - y_n$, kar vstavimo v (2a) in dobimo:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = 3y_{n+1} - 3y_n + 2y_n$$

oziroma

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0 \quad (4)$$

Kako se v splošnem rešuje diferenčne enačbe oblike $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$ ($a, b \in \mathbf{R}$), piše na str. 116 v knjigi *Alojzija Vadrnala OSNOVE DIFERENČNEGA RAČUNA*, Knjižnica *Sigma*. V našem primeru bomo to opravili na kratko. Rešitev diferenčne enačbe (4) iščemo v obliki $y_n = t^n$. To vstavimo v (4) in dobimo:

$$t^{n+2} - 4t^{n+1} + t^n = 0$$

oziroma

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 1 &= 0 \\ t_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ker t_1 ni enako t_2 , je splošna rešitev enačbe (4) enaka:

$$y_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$$

Konstanti A in B izračunamo z upoštevanjem pogojev $y_0 = 0$ in $y_1 = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= A(2 + \sqrt{3}) + B(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Rešitev sistema teh dveh enačb z dvema neznankama je:

$$A = 1/(2\sqrt{3}) \quad \text{in} \quad B = -1/(2\sqrt{3})$$

Torej je:

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} ((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n) \quad (5)$$

Po kratkem računu iz $x_n = y_{n+1} - y_n$ dobimo:

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} ((2 + \sqrt{3})^n (1 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^n (1 - \sqrt{3})) \quad (6)$$

Ko (5) in (6) vstavimo v (3), je naloga rešena:

$$R_n = \frac{1 + \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n}{1 - (7 - 4\sqrt{3})^n} R$$

5. Poglejmo še primere, ko je veriga upornikov neskončna. Po kratkem premisleku ugotovimo: ko n raste čez vse meje, se kvocient x_n/y_n približuje vrednosti $(1 + \sqrt{3})$. Torej je: $R_\infty = R(1 + \sqrt{3})$.

Roman Drnovšek

OBSTAJATA VSAJ DVE REČI

Nekoč sem prof. Prijatelju očital, da se v dveh dokazih v knjižici *Matematične strukture I* sklicuje na trditev, da *obstajata vsaj dve reči*.

Čeprav je ni ne dokazal ne privzel kot aksiom. Pa mi je odvrnil:

"Če to ne bi bilo res, potem se midva zdajle ne bi pogovarjala."

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V STRUMICI

19. zvezno tekmovanje mladih fizikov je bilo od 13. do 15. maja 1983 v madežonskem mestecu Strumici, nedaleč od Dojranskega jezera. Poleg srednješolcev so se prvič pomerili na zvezni ravni tudi učenci osnovnih šol. Naša ekipa je bila sestavljena iz 13 najuspešnejših tekmovalcev z republiškega tekmovanja (11 srednješolcev in 2 osnovnošolca). Kot že nekaj let nazaj so bile tudi letos organizirane skupne priprave na VTOZD FIZIKA v Ljubljani nekaj dni pred tekmovanjem, kar se je izkazalo kot koristno.

Že v četrtek smo odpotovali z letalom do Skopja in potem nadaljevali pot do Strumice z avtobusom. Nastanili smo se v prijetnem novem hotelu "Car Samoil" v vasi Bansko blizu Strumice. Dva dni časa, ki smo ga imeli do tekmovanja, smo izkoristili za številna športna srečanja z ekipami iz drugih republik. Posebej uspešni smo bili v malem nogometu, kjer smo srbske vrstnike premagali kar s 5 : 1, pa tudi v namiznem tenisu smo bili strah in trepet za vse tekmovalce.

Po tekmovanju, ki je bilo v soboto od 9. do 13 ure, smo imeli organiziran izlet na Dojransko jezero. Izkoristili smo ga za otvoritev sezone kopanja. Pri igrah z žogo v vodi se je posebej izkazal naš spremljevalec Mark Pleško.

V nedeljo je bila podelitev priznanj in tudi tokrat se naša ekipa domov ni vrnila praznih rok. Posebej pa velja poudariti, da je bil Dean Mozetič že tretjič zapored izbran v našo olimpijsko ekipo.

Uvrstitev naših tekmovalcev:

Skupina O (osnovna šola)

- 1. nagrada: Jure JAVORŠEK, OŠ M. Vrhovnik Ljubljana
- pohvala: Aleš MAJDIČ, OŠ M. Vrhovnik Ljubljana

Skupina A (mekanika in toplota)

- 2. nagrada: Toni BIASIZZO, SNMKŠ Postojna
- 3. nagrada: Stanko GRUDEN, Šolski center Idrija
- pohvali: Andrej FILIPČIČ, SŠZD Nova Gorica
- Matjaž KOVAČEC, Gimnazija M. Zidanška Maribor

Skupina B (elektrika in magnetizem)

1. nagrada: Dean MOZETIČ, Gimnazija Koper
pohvali: Primož PRISTOVŠEK, SNŠ Ljubljana—Bežigrad
Božidar CASAR, Gimnazija Murska Sobota

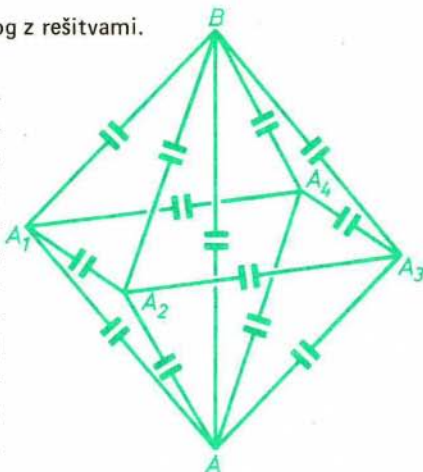
Skupina C (optika in atomika)

pohvala: Matjaž KAUFMAN, SNŠ Ljubljana—Bežigrad

Dodajam še nekaj zanimivejših nalog z rešitvami.

Skupina B, 2. naloga:

Izračunaj kapaciteto vezja med točkama A in B (na sliki 1), ko ga potopimo v dielektrik z dielektričnostjo $\epsilon_r = 2$ do ravnine $A_1A_2A_3A_4$. Pri tem je kondenzator, ki se nahaja na diagonali oktaedra, potopljen do polovice razdalje med ploščama. Vezje je sestavljeno iz 13 enakih ploščatih kondenzatorjev. Kapaciteta vezja med točkama A in B je v zraku enaka $C_0 = 12 \text{ pF}$. Predpostavi, da je električno polje le med ploščami kondenzatorjev.



Skupina C, 3. naloga:

Določi debelino vesoljske obleke astronavta, ki se nahaja daleč od vseh nesnih teles, tako da bo temperatura pod obleko enaka 310^0 K ! Človeško telo ima površino 2 m^2 , človek pa na dan poje hrano s kalorično vrednostjo $16 \times 10^6 \text{ J}$. Koeficient toplotne prevodnosti snovi, iz katere je napravljena obleka, je $0,026 \text{ W/mK}$. Predpostavi, da se zunanja stran obleke obnaša kot absolutno črno telo. Stefan – Boltzmanova konstanta je $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$.

Skupina O, 4. naloga:

Vsako jutro si skuhaš enako količino čaja z vodo iz vodovoda, ki ima vedno enako temperaturo. Čajnik segrevata dva grelca z uporom $R_1 = 100 \text{ ohmov}$ in $R_2 = 150 \text{ ohmov}$. Ko sta grelca vezana zaporedno, je čas kuhanja 10 minut.

- Kolikšen je čas kuhanja, če sta vezana vzporedno?
- Kolikšno količino juhe lahko segrejemo od 0^0 C do 30^0 C , če je specifična kapaciteta juhe $c = 4000 \text{ J/kgK}$, grelca pa sta vezana zaporedno na napetost 220 V ? (Toplotne izgube zanemari.)

Božidar Casar

25. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Letošnje jubilejno srečanje mladih matematikov — srednješolcev iz 34 držav — je potekalo v *Pragi* od 29. junija do 10. julija. V jugoslovansko ekipo, ki je bila izbrana na podlagi rezultatov zveznega tekmovanja, smo se uvrstili: Roman DRNOVŠEK iz Ljubljane, Andrej DUJELLA iz Zadra, Nikola LAKIĆ iz Kraljeva, Aleksandar MARKOVIĆ iz Beograda, Uroš SELJAK iz Nove Gorice in Aleksandar ZOROVIĆ iz Zagreba. Finančne težave so bile krive, da letos ni bilo sicer že običajnih priprav v Beogradu, od koder smo odpotovali v Prago z letalom 2. julija. Na poti nas je spremljal Miloš ARSENOVIĆ, naš predstavnik v žiriji Aleksandar VUČIĆ pa je odpotoval že prej. Dan kasneje se nam je pridružil še študent matematike iz Ljubljane Aleksandar JURIŠIĆ.

Slovesna otvoritev olimpiade je bila 3. julija, samo tekmovanje pa je potekalo 4. in 5. julija. Za reševanje treh problemov smo imeli vsak dan štiri ure in pol časa. Po tekmovanju je komisija pregledovala naše izdelke, tekmovalci pa smo si ogledali Prago in njeno okolico. Videli smo *Hradčane*, židovski geto s pokopališčem, *Staromestní trg* s slovečim urnim mehanizmom iz 15. stoletja, *Vaclavski trg*, umetnostno galerijo in grad *Karlštejn*. Ob večerih smo se zbirali v diskoteki, obiskali pa smo tudi slovite praške pivnice in vinarne ter si ogledali pantomimo v *Črnem teatru*.

Organizacija tekmovanja je bila vzorna, čeprav je bilo nekaj spodrsrljajev. Tako smo po krivdi organizatorja prvi dan zamudili za pol ure, velik problem pa je predstavljala tudi precejšnja oddaljenost našega prenočišča od jedilnice.

Veliko smo se družili z drugimi ekipami. Izmenjali smo precej nalog ter se pogovarjali v različnih svetovnih jezikih. Izmenjali smo si tudi naslove, tako da bomo nastale vezi lahko še bolj utrdili.

Slovesen zaključek tekmovanja je bil 9. julija v veliki avli *Karolinuma*. Daleč najboljša je bila tokrat ekipa *SZ* z 237 točkami. Osvojili so kar pet prvih nagrad in eno drugo nagrado, poleg tega pa še edino specialno nagrado za originalno rešitev 5. naloge. Za njimi so se razvrstile ekipe *Bolgarije*, *Romunije*, *Madžarske* in *ZDA*. Naša ekipa je s 105 točkami zasedla solidno 14. mesto. V naši ekipi so tretje nagrade osvojili Roman DRNOVŠEK, Andrej DUJELLA, Nikola LAKIĆ in Aleksandar MARKOVIĆ. Naslednji dan je večina ekip, med njimi tudi naša, odpotovala.

Za dodatno stimulacijo prihodnjih rodov tekmovalcev naštejmo še države gostiteljice prihodnjih olimpiad: *Finska* 1985, *Poljska* 1986, *Kuba* ali *Švedska* 1987, *Avstralija* 1988 in *Zahodna Nemčija* 1989.

Na tekmovanju smo reševali naslednje naloge:

1. Naj bodo x, y in z nenegativna realna števila, za katera velja enakost

$$x + y + z = 1$$

Dokaži neenakost

$$0 \leq xy + xz + yz - 2xyz \leq 7/27$$

2. Najdi naravni števili a in b , za kateri velja:
- (1) produkt $ab(a+b)$ ni deljiv s 7,
 - (2) število $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ je deljiv s 7^7 ! Obrazloži odgovor!
3. V ravnini sta dani dve različni točki O in A . Za vsako točko X iz ravnine, različno od O , označimo z $\alpha(X)$ velikost kota $\angle AOX$, izraženo v radianih ($0 \leq \alpha(X) < 2\pi$, kot se meri od kraka OA v smeri nasprotni vrtenju urnega kazalca). Označimo s $C(X)$ krožnico s centrom v O in polmerom

$$\overline{OX} + \frac{\alpha(X)}{\overline{OX}}$$

Predpostavimo, da je vsaka točka v ravnini obarvana z eno od končno mnogo barv. Dokaži, da obstaja v ravnini takšna točka Y , za katero je $\alpha(Y) > 0$, da se na krožnici $C(Y)$ nahaja točka, ki je obarvana z isto barvo kot točka Y !

4. Naj bo $ABCD$ takšen konveksen štirikotnik, da je premica CD tangenta na krog s premerom AB . Dokaži, da je premica AB tangenta na krog s premerom CD tedaj in samo tedaj, ko sta premici BC in AD vzporedni!
5. Označimo z d vsoto dolžin vseh diagonal ravnega konveksnega poligona z n temeni ($n > 3$), s p pa njegov obseg. Dokaži:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2$$

($\lfloor x \rfloor$ je največje celo število, ki ni večje od x)!

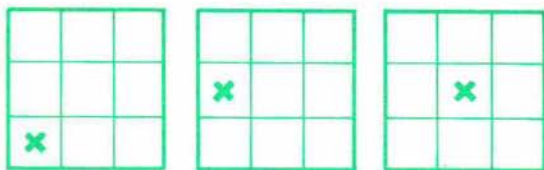
6. Naj bodo a, b, c in d liha cela števila, ki izpolnjujejo naslednje pogoje:
- (1) $0 < a < b < c < d$,
 - (2) $ad = bc$,
 - (3) $a + d = 2^k, b + c = 2^m$ za neki naravni števili k in m .
- Dokaži, da je $a = 1$!

Uroš Seljak

KRIŽCI IN KROGCI – dopolnilna rešitev iz P XII/3, str. 24 in 147

Stvar pa vendarle ni tako preprosta. Analizirati moramo vse možne poteke igre in ugotoviti, da ob pravilni igri obeh nasprotnikov končamo z remijem. Pomagali si bomo s sličicami, diagrami. Da bo lažje slediti poteku, bomo označili prvo potezo križca X in kroga O s črno barvo, drugo potezo z rdečo, tretjo z modro in četrto z zeleno. Prvo potezo bomo dali križcu, ki seveda potem zapolni tudi zadnje, deveto, še prazno polje.

Križec-X ima v bistvu za začetek tri možne poteze, to sledi iz simetrije kvadrata. Na sliki 1 so označene z a1, a2, b2.



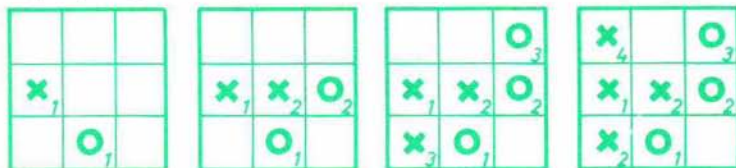
Slika 1

Analizirajmo najprej potezo a1. Če spet ne razlikujemo simetričnih odgovorov, ima O na razpolago pet možnosti: a2, a3, b3, c3, b2. Toda prve štiri vse peljejo k porazu kot kaže slika 2. Vsakokrat je druga poteza O izsiljena, modri križec v tretji potezi pa že daje dve dvojki in s tem zmago X v naslednji potezi.

Edina pravilna poteza v tej varianti je Ob2. Na sliki 3 so prikazani nadaljnji pravilni poteki za vse možne druge poteze X.

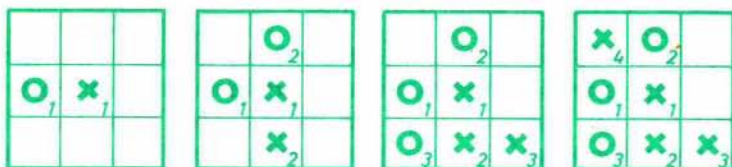
Zanimivo je, da druga poteza Xc3 skriva nevarno past. Če res sledimo Aleševi strategiji in postavimo krogec v vogal Oa3, križec zmaga z Xc1 (slika 4).

Poteza a2 krogcu ni tako nevarna. Edino b1 (ali b3) ne sme igrati, kot kaže slika 5. Enostavno remizira s potezo Ob2. Poteki partij so na sliki 6. X lahko celo izgubi, če igra v drugi potezi c2.



Slika 5

Seveda bo največkrat X igral v prvi potezi Xb2, ker pač leži središčno polje na križišču dveh diagonal in še enega stolpca in ene vrstice. Pa vendar je zdaj krogcu lažje svetovati. Le v vogal mora postaviti svoj znak, pa bo remiziral, kot kaže slika 7, na vse možne odgovore X. Slika 8 prikazuje poraz O po napačni prvi potezi Oa2.



Slika 8

Kot vidite, ni lahko dati kratkih napotkov za pravilno igro. Bralci, ki se ukvarjate z računalnikom, lahko poskusite sestaviti program za igro križci in krogi. Potem si pa predstavljajte, koliko težje mora biti napraviti dober program za igranje šaha, ki je vendarle malce bolj komplicirana igra!

Slike 2, 3, 4, 6 in 7 so na II. strani ovitka.

PREMISLI IN REŠI

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

PONAREJENA ZLATNIKA

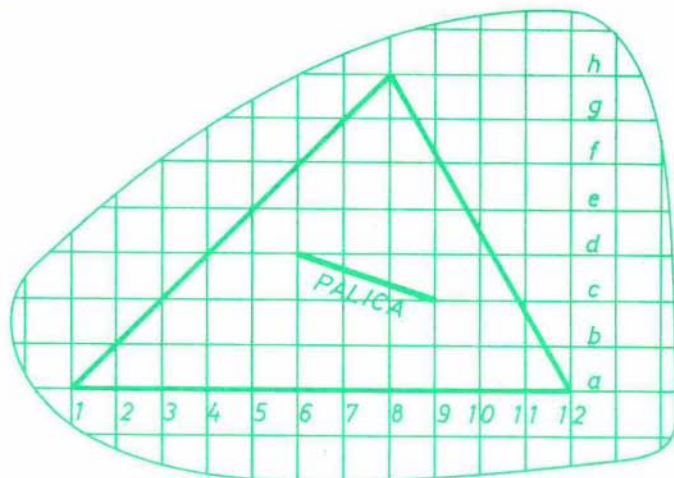
Med trinajstimi zlatniki sta dva prelahka. Na razpolago imamo tehtnico brez uteži. Radi bi določili ponarejeni par zlatnikov s čim manjšim številom tehtanj. Pred kratkim je v enem od svojih člankov prof. R. Tošič iz Novega Sada obravnaval splošni problem tehtanja ponarejenih zlatnikov. Pri tem je med drugim ugotovil, da je mogoče med trinajstimi zlatniki določiti par ponarejenih kovancev že s petimi tehtanji. Ker trinajst ni veliko število, vabimo bralce, da sami poiščejo pot do rešitve. Ali je pet najmanjše število tehtanj, s katerimi zagotovo najdemo ponarejeni par kovancev?

Tomaž Pisanski

Trikotni šotor na vrtu tete Amalije

Na sliki vidimo del vrta tete Amalije, pokrit je s kvadratnimi ploščami. Njeni nečaki Jožica, Polonca in Tomaž so prišli na obisk in teta jim je naročila:

"Glejte, postavili boste trikoten šotor po tlorisu, ki sem ga že označila. Zraven leži tudi palica, ki jo morate postaviti v eno od križišč med ploščami. Potem boste napeli še platno. Poskusite pa palico postaviti tako, da bo treba čim manj platna."



Dragi bralci, pomagajte jim. Uganite, tako rekoč na slepo postavite palico v eno od križišč, označenih s črko in številko, in izračunajte, koliko kvadratov platna bi tedaj potrebovali. Rešitve nam pošljite do 1. maja 1985.

Peter Petek

MISLIM, TOREJ SEM

Mislim, torej sem?
Že mogoče!
Ali pa je morda nekdo drug,
ki samo misli, da je jaz?

Izidor Hafner

SLIKOVNA KRIŽANKA Z GESLOM

		SESTAVIL PAVLE GREGORC	NASAD GOJENIH RASTLIN	ILUSTRA- TORKA	η η	PLANINA NAD TU- HINJSKO DOLINO	SULTA- NOV URADNI RAZGLAS	BIVŠI RUSKI VLADAR	OČE	
		GEOMET- RISKI POJEM								
		KNJI- ŽEVNIK								
		OTOK SZ OD SAR- DINJE								
	DEŽEVNI MESEC	NATRIJ			ISADORA DUNCAN			VOJNA POŠTA	PRAVI- LEN ZVOK	BABIL- BOGIN, LJUBEZNI
		DAN V TEDNU			OSIJEK					
GESLO KRI- ŽANKE										
IZKUŠNJA SPRET- NOST							NADALJ. GESLA			
							ploskev med 2 krogoma			
ŠPRANJA					PETER KLEPEC			NIKOLA TESLA		
					Umetnost (latin.)			ANGELA OCEPEK		
GORA NA KRETI				ALOJA					ANGL. Ž. IME	
				Ozvezdje na neb. ekvatorju						
LANTAN			PREPROST PLUG						ZDRA- VILNA RASTLINA	
			KOŽICA preko očesa							
		ROJSTNI KRAJ GREGOR- ČICA						GRŠKA BOGINJA NESREČE	DIVJA MAČKA	
		EUGENE IONESCO			desni pritok Z Morave					
		JADRAN- SKO OTOČJE			RENATA TEBALDI					
		ZVEZDA V ŠKOR- PJONU								

	RISBA MIHA STALEC	OPORNI STEBER	STREHA IZ TKANINE	FILM. REŽISER KAZAN	SKLADA-TELJ DELIBES	IVAN TAVČAR	NENADEN DVG	SPREVOD NA KONJIH		
	VISOK KAMNIT SPOMENIK									
	MAJHNA PALETA									
	ST. AMER. KOMIK					OLEG VIDOV				
PRIČEVIJE b ital. meji	JUŽNI SADEŽ					ŽUŽEL, KI PIČI			PRIPADNIK EAKIDOV	VZOREC, OBRAZEC
					D. PRITOK VOLGE					
KUTINA					POZNANA ŽENSKA					
				ZVONKO SPIŠIČ			Bogastvo gozdov			
				Lastnost zraslega			MISTER			
JAP. REŽ. Kurosava						MLINSKI ŽLEB				
NOVO MESTO						ANTON INGOLIČ				
	ZOLAJEV ROMAN						POJAV PRI GORENJU			
	Obdelana zemlja									
			SMUČI (SKAND.)				ITALIJ. PESNICA NEGRI			
			NARAVO-SLOVEC							
JELKA						VREDNOSTNI PAPIR	NORDIJ. BOGOVI NARAVNIH SIL	PARADIŽ		
JAP. IMPE-RIALIST. POLITIK (Hirobumi)					NOČNI LOKAL					
LEPLJIVA SNOV IZ CELULOZE					Podredni VEZNIK					
RADIO-AKTIVNA PRVINA										

KJE JE NAPAKA?

Peter: Lahko ti dokažem, da je vsako število a enako manjšemu številu b .

Janez: Neumnost, takoj bom našel napako v tvojem "dokazu".

Peter: Naj bo $a = b + c$, kjer je $c > 0$. Pomnožimo levo in desno stran z $a - b$:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$

Vržem ac na levo, na levi izpostavim a , na desni b in dobim:

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

Delim z $a - b - c$ in dobim $a = b$.

Torej: $a = b + c \Rightarrow a = b$.

Janez: Ker je $a = b + c$, je $a - b - c = 0$. Iz $a \cdot 0 = b \cdot 0$ pa ne sledi $a = b$; npr. $10 \cdot 0 = 11 \cdot 0$, toda $10 \neq 11$.

Peter: Tole si kar hitro rešil. Kako pa se kaj razumeš na kompleksna števila?

Janez: Obseg kompleksnih števil je vendar moj konjiček. Kar na dan s problemom.

Peter: Kaj že pomeni to, da je množica "obseg"?

Janez: Da za računske operacije veljajo takšni zakoni kot pri realnih številih.

Peter: No, potem pa kar na izpeljavo, da je $1 = -1$:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \quad (\sqrt{-1} = i, i^2 = -1, i = i)$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

$$1 = -1$$

Peter (po nekaj minutah): Boš končno že kaj rekel?

POSKUSI, PREMISLI, ODGOVORI

– rešitve nalog iz

P XI/3, str. 143 in P XII/1, str. 59

Dolgujemo vam odgovore na dve prejšnji vprašanji. Nalogo o merjenju upora sta najbolje rešila Borut LIKAR in Metka BURGER, oba iz Ljubljane, žreb pa je odločil, da dobi nagradno knjigo Borut. Odgovor je takle: Napravimo tri meritve. Z baterijo, katere gonilne napetosti ne poznamo, zvežemo najprej znani upor, nato neznani upor, na koncu pa še oba upora zaporedno in vsakič izmerimo tok. Tri meritve potrebujemo, če hočemo upoštevati tudi notranjo upornost baterije in upornost ampermetra. Tako dobimo tri zveze.

$$U = I_1 (R + R_n + R_a)$$

$$U = I_2 (R_x + R_n + R_a)$$

$$U = I_3 (R_x + R + R_n + R_a)$$

iz katerih lahko izračunamo R_x :

$$R_x = \frac{I_2 (I_1 - I_3)}{I_1 (I_2 - I_3)} \cdot R$$

Za nalogo o steklenički s čajem smo prejeli samo tri odgovore, od tega je le eden pravilen. Poslala nam ga je Marjana ZUPAN iz Mengša, za kar dobi knjigo. Pri stresanju vroči čaj segreje tudi zrak nad čajem, zaradi tega se poveča pritisk v steklenički, ki potisne čaj skozi cucelj. Seveda moramo stekleničko obrniti, preden se pritisk v steklenički skozi cucelj izenači z zunanjim pritiskom.

TALJENJE SNEGA

Postavljamo vam tudi novo vprašanje. Pozimi cestarji solijo ceste, da se sneg in led stalita. Seveda, boste rekli, slana voda zmrzne pri nižji temperaturi kot čista. Pa je le vredno, da si to taljenje malo ogledate. Vzemite v lonček nekaj snega, ko bo zapadel, in ga zmešajte z žlico ali dvema soli. Če imate termometer, ga vtaknite v mešanico, lahko pa tudi le pozorno opazujete zunanost lončka, ki naj bo kovinski. Izid poskusa vas bo mogoče nekoliko presenetil, vendar razlaga ne bo težka.

Martin Čopič

OCENJEVANJE PRIBLIŽKA ŠTEVILA π NA OSNOVI PREPROSTE STATISTIČNE METODE

Pojem verjetnosti v vsakdanjem življenju pogosto srečamo. Večkrat govorimo o bolj ali manj verjetnih dogodkih. Nekaj zgledov dogodkov, ki jim želimo izračunati ali vsaj oceniti verjetnost, je na primer: met šestice z igralno kocko, met dinarskega kovanca na grb, dogodek, da na slepo izberemo uporaben izdelek iz množice 10 izdelkov, izmed katerih jih je 9 uporabnih, dogodek, da čakamo na avtobus po prihodu na postajo manj od ene minute, če ta vozi redno in enakomerno na vsakih pet minut, itd. Natančna matematična definicija pojma verjetnosti je precej zapletena. Nekateri bralci jo bodo morda srečali v višjih razredih srednje šole ali kasneje. Povejmo samo to, da verjetnost nekega dogodka A opišemo s številom $P(A)$ med 0 in 1. Čim bližje je to število številu 1, tem bolj verjeten je dogodek. Verjetnost dogodka, ki se pri vsakem opazovanju zgodi, je 1. Pri nekaterih poskusih lahko iz simetričnosti situacij ugotovimo, kolikšna je verjetnost posameznih dogodkov. Vzemimo za primer metanje igralne kocke. Če je kocka pravilne oblike, ni nobenega razloga, da bi na kakšno stran bolj pogosto padala. Ker je strani šest, rečemo, da je verjetnost dogodka, da pade na primer število 2, enaka $1/6$. Verjetnost, da pade število 7 je 0, verjetnost dogodka, da pade na eno od števil 1 do 6, pa je 1. Podobno je pri metu pravilnega dinarskega kovanca verjetnost dogodka, da pade grb, enaka $1/2$. Pri vseh poskusih pa stvari seveda niso tako preproste, lahko se še na različne načine zapletejo.

Kot približek za verjetnost nekega dogodka pogosto vzamemo število, ki ga dobimo po tako imenovani statistični metodi. Denimo, da lahko naredimo serijo enakih poskusov in opazujemo, kolikokrat se je pri tem zgodil naš dogodek. Če se je pri n ponovitvah dogodek A zgodil m -krat, rečemo, da ima relativno frekvenco $f(A) = m/n$. Če naredimo več takih serij poskusov, vsako pri dovolj velikem n , se izkaže, da so take frekvence dogodkov blizu dejanskih verjetnosti $P(A)$ dogodka A . Za zgled navedimo nekaj rezultatov, ki so jih dobili pri n -kratnem metu kovanca. A pomeni dogodek, da kovanec pade na cifro.

n	m	$f(A)$
4040	1890	0.4900
8178	4086	0.4996
12000	5981	0.4984

Opazimo, da so relativne frekvence blizu dejanske verjetnosti $P(A) = 0.5$ (Da so vse vrednosti pod 0.5, je povsem slučajno). Bralec lahko še sam naredi nekaj serij poskusov. Pri tem je potrebno opozoriti še na nekaj stvari. Ni rečeno, da v primeru, ko število ponovitev poskusa povečamo, dobimo število, ki je bližje k $1/2$ kot v prejšnjem primeru. To opazimo tudi v zgornji tabeli. Zgodi se lahko tudi, da se relativna frekvenca zelo oddalji od pričakovane vrednosti. Teoretično je na primer možno, da kovanec vržemo stokrat – vsakič na grb. Ali lahko tedaj rečemo, da je verjetnost našega dogodka enaka 0?

Po uvodnem delu, ki nas je bežno seznanil s pojmom verjetnosti, si bomo ogledali preprost primer uporabe računalnika za ponazoritev nekega starega poskusa iz zgodovine verjetnostnega računa. Vzemimo, da smo na večji papir narisali na razdalji a vrsto vzporednih premic. Nato vzamemo iglo dolžine d (zaradi enostavnosti naj bo $d \leq a$) in jo na slepo večkrat vržemo na papir. Opazili bomo, da bo igla včasih presekala kakšno od vzporednic, včasih pa ne. Zanima nas verjetnost dogodka A , da igla seče eno od vzporednih premic. To nalogo, ki je ena od znamenitih nalog klasičnega verjetnostnega računa, je postavil in rešil leta 1777 G. Buffon.



Slika 1

Opisani dogodek sicer ni take vrste, kot je met kovanca ali kocke, vendar se z metodami višje matematike zlahka da izračunati njegovo verjetnost. Ker vsi bralci Preseka takega računa ne bi razumeli, bomo kar zapisali rezultat

$$P(A) = \frac{2d}{\pi a}$$

Najbolj zanimivo pri tem je, da v rezultatu nastopa število π , ki ste ga prvič srečali na primer pri obrazcih za obseg in ploščino kroga. Ravno ta prisotnost števila π je vzpodbudila vrsto ljudi k naslednjemu poskusu. Iglo so vrgli zelo velikokrat (n -krat) in prešteli, kolikokrat je padla čez eno od črt (m -krat). Relativno frekvenco $f(A) = m/n$ so vzeli za približek zgornje verjetnosti in od tod ocenili približek za število π

$$\pi \doteq \frac{2dn}{am}$$

Zapišimo samo nekaj rezultatov, ki jih najdemo navedene v raznih knjigah (pri tem je $a = 1$)

eksperimentator	d	leto	število poskusov	ocena za π
Wolf	0.8	1850	5000	3.1596
Smith	0.6	1855	3204	3.1553
de Morgan	1.0	1860	600	3.1370
Fox	0.75	1894	1120	3.1419

Število π , o katerem je Presek že pisal, ima neskončen neperiodičen decimalni zapis ($\pi \doteq 3.14159265\dots$), kar pomeni, da ga ne moremo zapisati v obliki ulomka. Za računanje čim večjega števila njegovih decimalnih mest je znanih vrsta drugih uspešnejših metod. Zgornji poskus z metanjem igle prav gotovo ne more prinesiti velike natančnosti. Vzeti ga moramo le kot zanimivost.

Metanje igle lahko zelo nazorno posnemamo z računalnikom. Zaradi enostavnosti vzemimo, da je $d = a$. Spodaj je narejen zgled programa v basicu za hišni računalnik ZX Spectrum, z majhnimi spremembami pa ga bo bralec lahko uporabil tudi na kakšnem drugem računalniku. Vzeli smo $a = 50$ enot in na ekranu narisali dve vzporednici na tej razdalji. Slučajnost pri metu generiramo s funkcijo RND, ki pomeni na slepo izbrano realno število med 0 in 1. Lego igle določimo s slučajnim kotom med 0^0 in 180^0 ($fi = PI \star RND$) in slučajno razdaljo ene konice igle od zgornje vzporednice ($b = INT(a \star RND)$). Dodali smo še slučajni pomik v levo ali desno (stavek 85), da igla pada nekako po celem ekranu, vendar to ne vpliva na rezultat. Program sproti ne briše igel, kar bi pomenilo, da namesto ene igle vržemo n enakih igel. Lahko pa bi uredili tudi brisanje igel. Programu se da dodati še vrsto drugih dodatkov, na primer, da zaslišimo zvok, ko igla preseka premico (stavek 130), da se tam morda pojavi svetlobni znak, uporabimo barvne učinke itd.

Naj navedemo nekaj rezultatov, zaokroženih na 5 decimalnih mest

n	m	$f(A)$
98	57	3.43860
234	150	3.14094
239	152	3.14474
357	220	3.24545

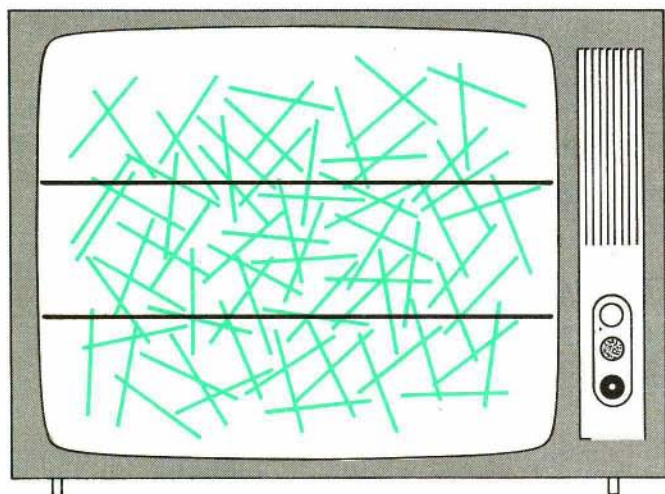
```

5 REM metanje igle
6 REM in računanje približka za število pi
7 REM
10 INPUT "število metov"; n
15 PRINT "število metov ";n
20 LET a=50: LET m=0
30 PLOT 0,70: DRAW 255,0
40 PLOT 0,120: DRAW 255,0
50 FOR i=1 TO n
60 LET b=INT(a*RND): LET fi=PI*RND
70 LET x1=a*COS(fi): LET y1=a*0.5*SIN(fi)
80 LET z1=70+b-y1: LET z2=70+b+y1
85 LET c=INT(150*RND)+50
90 PLOT c,z1: DRAW x1,2*y1
100 IF z1 < 70 AND z2 > 120 THEN GO TO 140
110 LET m=m+1
120 PRINT AT 3,3; m;" ";i
130 BEEP 0.5,3
140 NEXT i
150 PRINT "približek za pi = ";2*n/m
160 STOP

```

Bralec, ki ima dostop do računalnika, bo gotovo tudi sam poskusil posnemati metanje igle (ali igel) na računalniku, pri tem bo spreminjal program po svoji želji. Če vzamemo večje število poskusov (n), lahko izključimo risanje, saj nas zanima samo rezultat na koncu. Velja opozoriti, da prevelikega števila n pravzaprav nima smisla vzeti, saj rezultati ne bodo bistveno boljši, zaradi vsakokratnega računanja nekaterih funkcij pa bo računalnik kar precej časa "mlel". Prav tako nima smisla iti na lov za čim boljšim približkom števila π . Ker poznamo

veliko njegovih decimalnih mest, bi lahko poskus priredili tako, da bi ga prekinili v trenutku za nas najbolj sprejemljivega približka. To pa ni poskus v zgornjem smislu, ko je število metov vnaprej izbrano. Drug način grobe potvorbe rezultatov pa bi bil, da bi vzeli ulomek, ki je dober približek za število π , kot je na primer star kitajski približek $355/113$, in bi nekomu sporočili, da nam je pri 355-kratnem metu igle ta sekala vzporednico 226-krat. V resnici je prav malo verjetno (da se ugotoviti celo verjetnost tega dogodka, in sicer je manjša od 0.034), da se nam bo ravno to zgodilo. Omeniti velja še dejstvo, da smo zgoraj privzeli, da je generator slučajnih števil (RND) na računalniku dobro narejen, da dobro posnema slučajno izbiro realnega števila med 0 in 1, kar pa je zopet le približek.



Slika 2

Ob koncu naj še omenimo, da obstaja več posplošitev Buffonove naloge, na primer ravnino lahko tudi v drugi smeri razdelimo z vzporednicami, namesto igle lahko vzamemo poljuben konveksen lik iz kartona, pločevine ali podobnega materiala. Verjetnost ustreznega dogodka je zopet izražena s številom π .

Edvard Kramar

REŠEVANJE ENAČB IN NEENAČB, V KATERIH NASTOPA ABSOLUTNA VREDNOST – naloge so objavljene na str. 220

V zadnjem času na tekmovanjih srednješolcev vse pogostejše srečamo naloge, v katerih nastopa absolutna vrednost. Take naloge rešujemo tako, da absolutno vrednost odpravimo, pri tem pa nalogo rešujemo na dveh tujih si podpodročjih. Če je treba poiskati množico realnih števil x , za katere je izpolnjen pogoj $F(\dots, f(x) \mid \dots)$, potem se nam naloga razcepi na dva dela glede na to, ali je $f(x) \geq 0$ ali $f(x) < 0$. V enem primeru iščemo števila x , za katera je $f(x) \geq 0$ in $F(\dots f(x) \dots)$, v drugem primeru pa x -e, za katere je $f(x) < 0$ in $F(\dots -f(x) \dots)$. Po definiciji absolutne vrednosti:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{če je } a \geq 0 \\ -a, & \text{če je } a < 0 \end{cases}$$

velja

$F(\dots |f(x)| \dots)$ natanko tedaj, ko je $(f(x) \geq 0 \text{ in } F(\dots f(x) \dots))$ ali $(f(x) < 0 \text{ in } F(\dots -f(x) \dots))$

Nalogo bomo sistematično reševali takole:

$$\begin{array}{ccc} & F(\dots |f(x)| \dots) & \checkmark \\ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ F(\dots f(x) \dots) \end{array} & \left| \right. & \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ F(\dots -f(x) \dots) \end{array} \end{array}$$

Črta nam pomeni, da imamo dva podprimera, ki ju ločeno obravnavamo. Glavnega pogoja, to je $F(\dots |f(x)| \dots)$, nam ni treba več upoštevati (zato ga okljukamo), ker je pri pogoju $f(x) \geq 0$ ekvivalenten pogoju $F(\dots f(x) \dots)$, pri pogoju $f(x) < 0$ pa je ekvivalenten $F(\dots -f(x) \dots)$. Zapisu, ki ga na ta način dobimo, bomo rekli *drevo*.

Če v nalogi nastopa več absolutnih vrednosti, se podprimeri še naprej delijo na podprimere. Pri tem pa se najprej znebimo *notranjih* absolutnih vrednosti.

Za zgled rešimo naslednje enačbe in neenačbo:

- a) $|2x + 7| = 5$
- b) $|x + 2| + |x + 7| = 7$
- c) $|2|x| + 4| = 5$
- č) $||2x - 6| - 5| > 1$

a)

$$\begin{array}{lcl}
 2x + 7 \geq 0 & \checkmark & |2x + 7| = 5 \quad \checkmark \\
 x \geq -7/2 & & 2x + 7 < 0 \quad \checkmark \\
 2x + 7 = 5 & \checkmark & x < -7/2 \\
 x = -1 & & -(2x + 7) = 5 \quad \checkmark \\
 & & -2x - 7 = 5 \quad \checkmark \\
 & & x = -6
 \end{array}$$

Množica rešitev je enaka $\{-1, -6\}$.

Kadar pogoj, ki nastopa v drevesu, nadomestimo na vseh vejah z ekvivalentnimi pogoji, ga lahko odključamo, kar pomeni, da ga ni treba več upoštevati. Če imamo na neki veji med seboj protislovne pogoje (npr. $x \leq 0$ in $x > 2$), to vejo označimo z znakom $\perp$ (ki spominja na znak za slepo ulico, v logiki pa se pogosto uporablja za neresnično izjavo, npr. $0 = 1$). Taki veji rečemo *mrtva* veja.

Na koncu moramo upoštevati vse neodključane pogoje. Tako dobimo množico rešitev na posameznih vejah, ki je lahko tudi prazna. Celotna množica rešitev je unija množic rešitev po posameznih vejah.

b)

$$\begin{array}{lcl}
 x + 2 \geq 0 & \checkmark & |x + 2| + |x + 5| = 7 \quad \checkmark \\
 x \geq -2 & & x + 2 < 0 \quad \checkmark \\
 x + 5 \geq 0 & \checkmark & x < -2 \\
 x \geq -5 & & x + 5 < 0 \quad \checkmark \\
 x + 2 + x + 5 = 7 & \checkmark & x < -5 \\
 2x = 0 & \checkmark & x \geq -5 \\
 x = 0 & & -(x + 2) + (x + 5) = 7 \quad \checkmark \\
 & & 3 = 7 \quad \perp \\
 & & x < -5 \\
 & & -(x + 2) + (x + 5) = 7 \quad \checkmark \\
 & & -2x = 14 \quad \checkmark \\
 & & x = -7
 \end{array}$$

Množica rešitev je enaka $\{0, -7\}$.

c)

$$\begin{array}{lcl}
 x \geq 0 & & |2|x| + 4| = 5 \quad \checkmark \\
 |2x + 4| = 5 & \checkmark & x < 0 \\
 2x + 4 \geq 0 & \checkmark & -2x + 4 = 5 \quad \checkmark \\
 x \geq -2 & & -2x + 4 \geq 0 \quad \checkmark \\
 2x + 4 = 5 & \checkmark & x \leq 2 \\
 x = 1/2 & & -2x + 4 < 0 \quad \checkmark \\
 & & x > 2 \\
 & & -2x + 4 = 5 \quad \checkmark \\
 & & -2x = 1 \quad \checkmark \\
 & & x = -1/2
 \end{array}$$

Rešitvi sta $1/2$ in $-1/2$.

č)

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{l}
 2x - 6 \geq 0 \quad \checkmark \\
 x \geq 3 \\
 |2x - 6 - 5| > 1 \quad \checkmark \\
 |2x - 11| > 1 \quad \checkmark \\
 2x - 11 \geq 0 \quad \checkmark \\
 x \geq 11/2 \\
 2x - 11 > 1 \quad \checkmark \\
 x > 6
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 ||2x - 6| - 5| > 1 \\
 \\
 \\
 \\
 2x - 11 < 0 \quad \checkmark \\
 x < 11/2 \\
 -(2x - 11) > 1 \quad \checkmark \\
 -2x + 11 > 1 \quad \checkmark \\
 x < 5
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 2x - 6 < 0 \quad \checkmark \\
 x < 3 \\
 |-(2x - 6) - 5| > 1 \quad \checkmark \\
 |-2x + 1| > 1 \\
 -2x + 1 \geq 0 \quad \checkmark \\
 x \leq 1/2 \\
 -2x + 1 > 1 \quad \checkmark \\
 -2x > 0 \quad \checkmark \\
 x < 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Na prvi veji so neodkljukani pogoji $x \geq 3$, $x \geq 11/2$, $x > 6$. To da za množico rešitev interval $(6, \infty)$. Na drugi veji je množica rešitev interval $[3, 5)$. Na tretji veji so neodkljukani pogoji $x < 3$, $x \leq 1/2$, $x < 0$. Množica rešitev je $(-\infty, 0)$. Na četrti veji je množica rešitev $(1, 3)$. Ker je $(1, 3) \cup [3, 5) = (1, 5)$, velja

$$\{x; ||2x - 6| - 5| > 1\} = (-\infty, 0) \cup (1, 5) \cup (6, \infty)$$

Seveda pa bi lahko na vejah napravili še en korak: na tretji veji bi zapisali pogoj $x \in (-\infty, 0)$, ki upošteva vse druge pogoje, ki so ostali neodkljukani, in nato te odkljukali. Podobno bi naredili za druge veje. Pri končni rešitvi bi nato upoštevali na vsaki veji le zadnjo vrstico,

Kadar rešujemo nalogo, v kateri nastopa več absolutnih vrednosti tako, da niso ena znotraj druge, lahko odpravimo vse naenkrat. Če moramo rešiti neenačbo

$$|2x - 1| < |x - 1|$$

razbijemo množico realnih števil s točkama $x = 1/2$ in $x = 1$ na tri dele, ki jih podajajo pogoji $x \leq 1/2$, $1/2 < x \leq 1$, $1 < x$. Reševanje zdaj poteka takole:

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{l}
 x \leq 1/2 \quad \checkmark \\
 -(2x - 1) < -(x - 1) \quad \checkmark \\
 -2x + 1 < -x + 1 \quad \checkmark \\
 0 < x \quad \checkmark \\
 x \in (0, 1/2]
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 |2x - 1| < |x - 1| \quad \checkmark \\
 1/2 < x \leq 1 \quad \checkmark \\
 2x - 1 < -(x - 1) \quad \checkmark \\
 3x < 2 \quad \checkmark \\
 x < 2/3 \quad \checkmark \\
 x \in (1/2, 2/3)
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 1 < x \\
 2x - 1 < x - 1 \\
 x < 0 \\
 \perp
 \end{array}
 \end{array}$$

Rezultat: $\{x; |2x - 1| < |x - 1|\} = (0, 2/3)$

Izidor Hafner

TEST HI KVADRAT

Pri mnogih družabnih igrah uporabljamo kocko. Če je kocka poštena, pade šestica z verjetnostjo $1/6$. To pomeni, da lahko v povprečju pričakujemo na vsakih šest metov eno šestico. Če vržemo kocko 60 krat, lahko pričakujemo približno 10 šestic.

Včasih se nam zazdi, da šestica noče pasti. Ali je kocka morda obtežena, torej nepoštena? Statistika pozna metodo, s katero lahko dokaj zanesljivo preverimo, ali je kocka obtežena ali ne. Metodi rečemo **test hi kvadrat**. Čeprav je ozadje te metode precej zamotano in ga na tem mestu ne moremo razložiti, pa je sama uporaba testa hi kvadrat zelo preprosta in uporabna.

Za pomoč sem prosil svoja sinova. Pobrskali smo malo in našli tri kocke. Vsako smo vrgli 60 krat. Rezultate smo zabeležili v preglednici 1.

ŠTEVILO PIK	I	1	2	3	4	5	6	I	SKUPAJ
RDEČA KOCKA	I	5	16	8	14	12	5	I	60
ČRNA KOCKA	I	7	8	8	11	10	16	I	60
BELA KOCKA	I	6	10	10	9	14	11	I	60
TEORETIČNO	I	10	10	10	10	10	10	I	60

PREGLEDNICA 1 Rezultati metov treh kock. Prikazane so absolutne frekvence (število pojavitev posameznih izidov). Najbolj sumljivo se vede rdeča kocka, ker dejanske frekvence najbolj odstopajo od teoretičnih. Ali je obtežena?

Dodali smo vrstico s teoretičnimi absolutnimi frekvencami. Ker je pri pošteni kocki verjetnost, da pade na katerokoli od svojih šestih ploskev enaka, so verjetnosti posameznih izidov vse enake $1/6$. Ker so te verjetnosti (pravimo jim tudi relativne frekvence) vse med seboj enake, bi po 60 metih teoretično pričakovali za vsak izid 60 $\cdot 1/6 = 10$ pojavitev. Zato smo postavili v zadnjo vrstico preglednice 1 same desetke, teoretične absolutne frekvence. Dejanske absolutne frekvence odstopajo od teoretičnih, kar je popolnoma razumljivo, četudi so kocke ²⁰⁵ poštena. Če dejanske frekvence malo odstopajo od teoretičnih, lahko z veliko verjetnostjo sklepamo, da je kocka

poštena. Če pa dejanske frekvence močno odstopajo od teoretičnih, tedaj je malo verjetno, da gre za pošteno, neobteženo kocko.

Test hi kvadrat napravi dvoje. Dejanskim in teoretičnim frekvencam priredi število, s katerim merimo odstopanje frekvenc. Čim večje je dobljeno število, tem večje je odstopanje. Za odstopanje dopuščamo dve razlagi. Lahko, da gre za slučajno odstopanje ali pa gre (poleg slučajnega) še za sistematično odstopanje, torej teoretične frekvence ne ustrezajo dejanski porazdelitvi. V našem primeru pomeni prva hipoteza, da gre za slučajno odstopanje poštene kocke, druga pa, da imamo opravka z obteženo kocko.

Čas je, da si pogledamo vso stvar čisto splošno, potem pa se bomo vrnili k našim kockam. Denimo, da ima poskus n izidov. Denimo, da poskus ponovimo N krat. Naj bodo $E_1, E_2, \dots, E_n$ teoretične absolutne frekvence, $O_1, O_2, \dots, O_n$ dejanske absolutne frekvence. To pomeni, da se je pri N ponovitvah poskusa izid i zgodil O_i -krat, medtem ko smo pričakovali, da se zgodi E_i -krat. Izraz

$$\chi^2_{(n-1)} = (E_1 - O_1)^2/E_1 + (E_2 - O_2)^2/E_2 + \dots + (E_n - O_n)^2/E_n$$

imenujemo hi kvadrat z $(n - 1)$ prostostnimi stopnjami. V statističnih priročnikih lahko najdemo preglednice za hi kvadrat. Za naše namene bo zadostovala preglednica 2.

Preden si pogledamo, kaj pravi hi kvadrat za naše kocke, še pomembno opozorilo. Če je teoretična absolutna frekvenca kakega dogodka premajhna, je tudi zanesljivost testa hi kvadrat vprašljiva. Običajno zahtevamo, da je vrednost vsakega E_i vsaj 5. Kaj pa, če vrednost kakega E_i ni tako velika? Tedaj pa imamo dve možnosti. Zaporedje poskusov lahko povečamo (v našem primeru: kocko večkrat vržemo) in tako dosežemo, da je teoretična absolutna frekvenca vsakega izida vsaj 5. Druga, preprostejša možnost pa je, da združimo malo verjetne izide v nove, bolj verjetne. To možnost si bomo ogledali kasneje.

ŠTEVILO
PROSTOSTNIH
STOPENJ

P = 10% P = 5% P = 1% P = 0.1%

2	I	4.6	6.0	9.2	13.8
3	I	6.3	7.8	11.3	16.3
4	I	7.8	9.5	13.3	18.5
5	I	9.2	11.1	15.1	20.5
6	I	10.6	12.6	16.8	22.5
7	I	12.0	14.1	18.5	24.3
8	I	13.4	15.5	20.1	26.1
9	I	14.7	16.9	21.7	27.9
10	I	16.0	18.3	23.2	29.6
12	I	18.6	21.0	26.2	32.9
14	I	21.1	23.7	29.1	36.1
16	I	23.5	26.3	32.0	39.3
18	I	26.0	28.9	34.8	42.3
20	I	28.4	31.4	37.6	45.3
25	I	34.4	37.6	44.3	52.6
30	I	40.3	43.8	50.9	59.7
40	I	51.8	55.8	63.7	73.4
60	I	74.4	79.1	88.4	99.6
80	I	96.6	101.9	112.3	124.8
100	I	118.5	124.3	135.8	149.5

PREGLEDNICA 2 Vrednosti hi kvadrat. Denimo, da ima poskus 6 izidov in je vrednost hi kvadrat enaka 12.7. Število prostostnih stopenj je 5. Pogledamo v vrstico s petimi prostostnimi stopnjami in vidimo, da leži 12.7 med 11.1 in 15.1. Verjetnost, da so odstopanja med dejanskimi in teoretičnimi frekvencami zgolj slučajna, je manj kot 5% in več kot 1%. Pesimist bo verjetno hipotezo o slučajnem odstopanju zavrnil. Če bi bila vrednost hi kvadrat pri istih pogojih 18.5, pa lahko hipotezo mirno zavrremo, saj je verjetnost manjša od enega odstotka. Zelo verjetno gre za resnično neujemanje med teoretičnimi in dejanskimi frekvencami. Običajno se vnaprej dogovorimo, katero mejo vzamemo za ločilo med sprejetjem oziroma zavrnitvijo hipoteze. Ta meja je običajno bodisi 5% bodisi 1%. Če pa je število prostostnih stopenj tako, da ga ni v naši preglednici, si pri oceni pomagamo z dvema vrsticama, tisto, ki je neposredno pred, in tisto, ki je za manjkajočo vrstico.

Najbolje je, da se vrnemo k našim trem kockam. Pokazali bomo, kako lahko uporabimo preglednico 2. Najbolj sumljiva je rdeča kocka, saj sta pri 60 metih padli enica in šestica samo po 5 krat.

$$\chi^2(5) = (10 - 5)^2/10 + (10 - 16)^2/10 + (10 - 8)^2/10 + (10 - 14)^2/10 + (10 - 12)^2/10 + (10 - 5)^2/10 = 11$$

Iz preglednice 2 razberemo, da je vsaj v petih odstotkih mogoče pričakovati tako odstopanje, če gre zgolj za slučajnost.

Zato ne moremo sklepati, da je kocka nepoštена. (Ko smo kasneje še nekajkrat ponovili poskus z isto kocko, smo vsakič dobili mnogo bolj prepričljivo potrditev, da gre za pošteno kocko.) Vrednost hi kvadrat za črno kocko je 5.4, za belo pa je še manjša, o čemer se lahko zdaj bralec prepriča kar sam.

V resnici smo metali črno in belo kocko skupaj in smo si v preglednici 3 zabeležili vse izide.

Če bi želeli neposredno uporabiti test hi kvadrat, bi morali za vsakega od 36 enako verjetnih izidov dobiti absolutno teoretično frekvenco vsaj 5. To pa pomeni vsaj 180 metov parov kock. Ker sta šla sinova na dvorišče igrati nogomet, sam pa nisem imel dovolj časa, sem se odločil, da bi bilo bolje šteti vsoto pik na obeh kockah. Vsoto 2 dobimo na en sam način: $2 = 1 + 1$. Vsoto 3 dobimo na dva načina: $3 = 2 + 1 = 1 + 2$. Vsoto štiri dobimo že na tri načine $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3$ in tako dalje.

BELA KOCKA									
		I	1	2	3	4	5	6	I SKUPAJ
ČRNO	I	1	I	0	3	3	1	0	0 I 7
	R	I	2	I	1	0	1	0	3 3 I 8
	N	I							
	A	I	3	I	1	1	1	1	3 1 I 8
	K	I	4	I	1	0	2	2	3 3 I 11
	O	I							
A	C	I	5	I	2	3	1	2	1 1 I 10
	K	I							
	A	I	6	I	1	3	2	3	4 3 I 16
I SKUPAJ		I	6	10	10	9	14	11	I 60

PREGLEDNICA 3 Šestdeset metov parov kock. Imamo 36 enako verjetnih izidov. Ker je teoretična absolutna frekvenca vsakega izida le 60/36, kar je manj kot 5, ne moremo uporabiti testa hi kvadrat.

V preglednici 3 moramo seštevati števila po diagonalah od levo spodaj, do desno zgoraj. Tako dobimo preglednico 4.

VSOTA PIK ČRNE IN BELE KOCKE	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	SKUPAJ
DEJANSKA ABSOLUTNA FREKVENCA	0	4	4	4	3	10	12	8	7	5	3	60
TEORETIČNA ABSOLUTNA FREKVENCA	10	20	30	40	50	60	50	40	30	20	10	
	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	60

PREGLEDNICA 4 Vsota pik na dveh kockah po 60 metih. Izidi niso med seboj enako verjetni. Štiri vsote (2,3,11,12) so premalo verjetne za neposredno uporabo testa hi kvadrat.

Če združimo prva dva izida (vsoti 2 in 3) ter zadnja dva izida (vsoti 11 in 12) porazdelitve s preglednice 4, dobimo končno porazdelitev preglednice 5 z devetimi izidi, na kateri pa lahko uporabimo test hi kvadrat.

POPRAVLJENA VSOTA PIK ČRNE IN BELE KOCKE	(2,3)	4	5	6	7	8	9	10	(11,12)	SKUPAJ
DEJANSKA ABSOLUTNA FREKVENCA	4	4	4	3	10	12	8	7	8	60
TEORETIČNA ABSOLUTNA FREKVENCA	30 -- 6	30 -- 6	40 -- 6	50 -- 6	60 -- 6	50 -- 6	40 -- 6	30 -- 6	30 -- 6	60

PREGLEDNICA 5 Popravljen vsota pik na dveh kockah po 60 metih. Vse teoretične frekvence so dovolj velike. Test hi kvadrat z osmimi prostostnimi stopnjami pokaže, da statistično ne moremo ovreči predpostavke, da gre za pošteni kocki.

Ker je računanje vrednosti hi kvadrat zamudno, bomo v naslednjem prispevku pokazali, kako si pri tem lahko pomagamo z računalnikom.

GRŠKA ABECEDA

Znanje grščine je pri nas od generacije do generacije omejeno na vse manjši krog ljudi. Kljub temu pa je grščina še vedno navzoča na vseh ravneh našega življenja. Tako v svetu znanosti in umetnosti kot tudi v našem vsakdanjem življenju se pogosto srečujemo z grškimi izrazi, če že odmislimo velik pomen grške kulturne dediščine za našo civilizacijo. Mnoge grške besede so postale sestavni del našega jezika in jih često uporabljamo, ne da bi se zavedali njihovega grškega izvora. Tudi besedi matematika in fizika izvirata iz grščine, prva iz glagola "mathano" (učim se), druga pa iz samostalnika "physis" (narava).

Tudi imena nekaterih grških črk so domača širokemu krogu ljudi, saj pogosto uporabljamo izraze, kot so alfabet za abecedo, analfabet za nepismenega človeka, alfa in omega za začetek in konec, delta za posebno obliko rečnega ustja ipd. Marsikdo pa se pri svojem študiju sreča s potrebo po znanju celotne grške abecede in namen tega sestavka je seznaniti bralca s pravilno pisavo in poimenovanjem posameznih grških črk.

Spodnja razpredelnica prikazuje pisavo 24 velikih in malih grških črk, njihova imena in latinsko transkripcijo.⁽¹⁾ Grška abeceda ali grški alfabet je doživel številne razvojne spremembe. Obliko, imena in zaporedja črk so Grki v osnovi prevzeli od Feničanov, ki so iznašli fonetično abecedo z 22 znaki, prvo te vrste v zgodovini. Grki so njihovo pisavo prilagodili svojim potrebam in ji dodali znake za samoglasnike. Prvotno so tudi Grki pisali od desne proti levi, šele pozneje se je uveljavila pisava z leve na desno. Razvoj grške abecede kaže tudi številne dialektalne posebnosti, ki jih lahko razdelimo na dve osnovni inačici: vzhodno ali jonsko in zahodno ali halkidsko. Določene črke so označevale v vzhodni in zahodni inačici različne glasove. Velike črke grške abecede, kot jo poznamo danes, so črke jonske abecede, ki je bila v Atenah sprejeta za uradno pisavo ob ortografski reformi, ki jo je leta 403 pr.n.št. izvedel arhont Eukleides in se je sčasoma razširila na ves helenski svet.

Od Grkov so pisavo sprejeli Rimljani, in sicer v njeni zahodni ali halkidski

(1) Transkribirati pomeni prepisati iz ene v drugo, v našem primeru iz grške v latinsko pisavo. Latinska transkripcija torej pomeni, da grško črko ali besedo napišemo namesto z grškimi črkami z ustreznimi črkami latinice tako, da ostane originalna izgovorjava nespremenjena. Te vrste transkripcija je pomembna še posebej zato, ker se v raznih sestavkih grške besede ponavadi pojavljajo v latinski transkripciji, saj znajo grški alfabet brati in pisati le maloštevilni, pa tudi pisalni stroji z grškimi črkami so precej redki.

Velike	Male	Ime		latinska transkripcija
A	α	ἄλφα	alfa	a
B	β	βῆτα	beta	b
Γ	γ	γάμμα	gama	g
Δ	δ	δέλτα	delta	d
E	ε	ἕψιλόν	epsilon ¹⁾	e
Z	ζ	ζῆτα	zeta	z, dz
H	η	ἦτα	eta	ē
Θ	θ	θῆτα	theta	th
I	ι	ἰῶτα	jota	i
K	κ	κάππα	kapa	k
Λ	λ	λά(μ)βδα	la(m)bda	l
M	μ	μῦ	mi	m
N	ν	νῦ	ni	n
Ξ	ξ	ξῖ	ksi	x, ks
O	ο	ὀμικρόν	omikron ²⁾	o
Π	π	πί	pi	p
P	ρ	ῥῶ	ro	r, rh
Σ	σ, ς ³⁾	σίγμα	sigma	s
T	τ	ταῦ	tau	t
Υ	υ	ῦψιλόν	ipsilon ¹⁾	y
Φ	φ	φῖ	fi	ph, f
X	χ	χῖ	hi	ch, h, kh
Ψ	ψ	ψῖ	psi	ps
Ω	ω	ὦμέγα	omega ²⁾	o

1) Ψιλόν (pridevnik, srednji spol) pomeni "enostavno", torej pomeni ε ψιλον "enostavni e" (kratki e) za razliko od η, ki označuje dolgi e, in υ ψιλόν pomeni "enostavni y".

2) Μικρόν pomeni "majhno", μέγα pa "veliko", torej pomeni ὀ μικρόν "mali o" (kratki o) za razliko od ὦ μέγα, ki pomeni "veliki o" (dolgi o).

3) Sigma se piše v začetku in sredi besede kot σ, na koncu besede in včasih tudi v sestavljenkah na koncu prvega dela pa kot ς. Npr. φύσις (physis, narava), προσ-φέρω ali προσ-φέρω (prosphero, prinašam).

Za grško kulturo velja, da je nepogrešljivi sestavni del naše civilizacije. Isto lahko rečemo tudi o grški pisavi, saj je grški alfabet postal osnova za številne današnje abecede, med katerimi sta tudi naša latinica in cirilica.

Samo poznavanje grških črk pa seveda še ne zadostuje, če hočemo prebrati ali napisati grško besedo. Zato naštejmo še nekaj osnovnih posebnosti grške pisave.

1. Samoglasniki v začetku besede imajo v zapisu vedno ali krepki ali šibki pridih. Krepki pridih (ϵ) se izgovarja kot "h", šibki pridih (ϵ) pa se ne izgovori. Na primer

$\eta\delta\omicron\nu\eta$ (hēdonē, veselje)
 $\alpha\rho\epsilon\tau\eta$ (aretē, vrlina)

2. Tudi ρ na začetku besede ima vedno označen krepki pridih. Na primer
 $\rho\eta\tau\omega\rho$ (rhētor, govornik)

Dva ρ sredi besede lahko pišemo ali s pridihom ali brez ($-\rho\tilde{\rho}-$ ali $-\rho\rho-$).

3. Vse grške besede razen redkih izjem imajo na enem od zadnjih treh zlogov označen naglas. Grščina pozna tri vrste akcentov, za katere veljajo točno določena pravila: akut ($\acute{}$), gravis ($\grave{}$) in cirkumfleks ($\tilde{}$). Akut stoji na tistem od zadnjih treh zlogov, ki je naglašen. Gravis stoji le na zadnjem zlogu, če sledi besedi še druga beseda. Cirkumfleks pa stoji le na dolgem zadnjem ali dolgem predzadnjem zlogu. Npr.

$\rho\alpha\tau\eta\rho$ (patēr, oče)
 $\mu\eta\tau\eta\rho$ (mētēr, mati)
 $\phi\iota\lambda\acute{o}\sigma\phi\omicron\varsigma$ (philósophos, filozof)
 $\phi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ (physikòs lógos, prirodoslovno znanje)
 $\pi\lambda\omicron\tilde{\upsilon}\tau\omicron\varsigma$ (plútōs, bogastvo)

Ταῦτα, ὦ Ἀθηναῖοι, καὶ ἀληθῆ ἔστιν καὶ εὐέλεγκτα. εἰ γὰρ δὴ ἔγωγε τῶν νέων τοὺς μὲν διαφθείρω, τοὺς δὲ διέφθαρχα, χρῆν δήπου, εἴτε τινὲς αὐτῶν πρεσβύτεροι γεγόμενοι ἔγνωσαν, ὅτι νέοις οὖσιν αὐτοῖς ἐγὼ κακὸν πῶποτέ τι ξυμβούλευσα, ἢ νυνὶ αὐτοὺς ἀναβαίνοντας ἐμοῦ κατηγορεῖν καὶ τιμωρεῖσθαι· εἰ δὲ μὴ αὐτοὶ ἤθελον, τῶν οἰκείων τινὰς τῶν ἐκείνων, πατέρας καὶ ἀδελφοὺς καὶ ἄλλους τοὺς προσήκοντας, εἴπερ ὑπ' ἐμοῦ τι ἐπεπόνθεσαν αὐτῶν οἱ οἰκεῖοι, νῦν μεμνῆσθαι. πάντως 10

Slika 3. Primer grške pisave; Platon: Sokratova Apologija

4. V pisavi se pojavlja tudi t.im. "iota subscriptum" (podpisani i), ki pa se ne izgovarja. Npr.

ζῶον (dzōon, živo bitje, žival)

5. Poleg tega imamo še nekatere izgovorne posebnosti:

(a) Dvoglasniki z ipsilonom se izgovarjajo, kot sledi:

ου kot "u", ευ kot "eu" in αυ kot "au".

(b) Znak γ se izgovarja kot "n" pred κ, γ, χ in ξ. Npr.

φάλαγξ (phalanks, falanga)

Zdaj, ko smo se seznanili z nekaterimi osnovnimi značilnostmi grške pisave, lahko preverimo in utrdimo svoje znanje branja in pisave grških črk s sledečima vajama:

(1) Transkribiraj v latinico:

Ἑλλάς (Grčija) (Hellás)

Ἑλλήν (Grk) (Héllēn)

Ἰλίον (Troja) (Ílion)

Ὀδυσσεύς (Odisej) (Odysseús)

ἀστρονομία (zvezdoslovje) (astronomía)

ἀριθμητική (računstvo) (arithmētikē)

ἱστορία (zgodovina) (historía)

γεωγράφος (zemljepisec) (geōgráphos)

γεωμέτρης (zemljemerec) (geōmétrēs)

υγίεια (zdravje) (hygíeia)

(2) Napiši z grškimi črkami:

bíos (življenje) βίος

arithmós (število) ἀριθμός

phýsis (narava) φύσις

mathēmatikós (matematik) μαθηματικός

geōmetría (zemljemerstvo) γεωμετρία

philosophía (ljubezen do modrosti) φιλοσοφία

logikós (pameten) λογικός

psyché (življenjska sila, duša) ψυχή

politikós (državnik) πολιτικός

musikós (glasbenik) μουσικός

Aleksandra Pirkmajer

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω

NOVI ČASTNI ČLANI DRUŠTVA

Slovensko Društvo matematikov, fizikov in astronomov šteje že preko 800 članov. Največ jih deluje v srednjih in osnovnih šolah, veliko pa jih je tudi v raznih podjetjih, inštitutih ter na višjih in visokih šolah. Poklicna dejavnost slovenskih matematikov, fizikov in astronomov je dokaj raznolika. Kvaliteta slovenskega matematičnega in fizikalnega pouka kakor tudi znanstvenega dela je znana tudi zunaj meja naše ožje domovine. Obsežno pa je tudi udejstvovanje članov pri društvenih dejavnostih, kjer popularizacija naših strok med mladimi zavzema vidno mesto: tekmovanja, izdajanje knjig v Knjižnici Sigma ter izdajanje Preseka — lista za mlade matematike, fizike in astronome.

Številčnost in aktivnost se odraža tudi pri imenovanju častnih članov društva. Poleg dosedanjih članov (prof. dr. Josip Plemelj, prof. dr. Lavo Čermelj ter prof. dr. Fran Dominko) je občni zbor društva v lanskem koledarskem letu imenoval še dva nova člana. To sta prof. dr. ALOJZIJ VADNAL in prof. Jože Povšič. Dr. Vadnala bralci poznajo po nekaterih prispevkih v našem listu. Najbolj pomembno njegovo delo v okviru popularizacije matematike pa so prav gotovo njegove knjige, ki so izšle v Knjižnici Sigma. Do sedaj je objavil naslednja dela:



Slika 1. Prof. dr. Alojzij Vadnal prejema visoko društveno priznanje

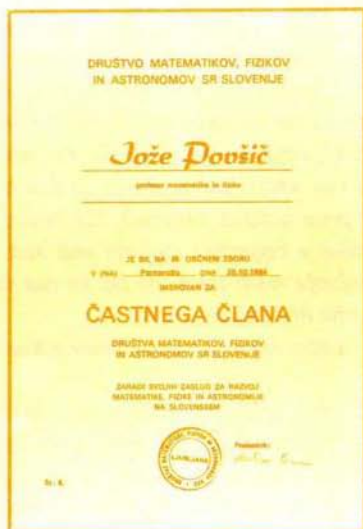
Elementarni uvod v verjetnostni račun, Funkcije, 1. del, Funkcije, 2. del (skupaj z F. Lebedincem), Rešeni problemi linearnega programiranja, Diskretno dinamično programiranje, Osnove diferenčnega računa.

Drugi nagrajenec, prof. JOŽE POVŠIČ, se je več desetletij ukvarjal z zbiranjem življenjepisov in objavljanjem del starejših slovenskih matematikov ter sam izdal tudi naslednje knjige:

Bibliografija Franca Močnika, Bibliografija Jurija Vege, Bibliografija Franca Hočevarja, Bibliografija Riharda Župančiča, Bibliografija Josipa Plemlja in nekaterih odmevov na njegova dela v mednarodni matematični in fizikalni literaturi, Jurij Vega. Ob 200 letnici izida njegovega prvega logaritmovnika.

Vsa zbrana in objavljena dela toplo priporočamo mladim ljubiteljem matematike, obema slavljencema pa v imenu naročnikov Preseka iskreno čestitamo k visokemu imenovanju.

Ciril Velkovrh



Slika 2. Priznanje, ki ga je dobil prof. Jože POVŠIČ.

PISMA BRALCEV

Dragi Presek!

Že dlje časa opažam, da je člankov iz astronomije v Preseku čedalje manj in da je tukaj treba nekaj storiti. Zato sem pisal že lani, a obljube, da bom tudi sam kaj pripomogel k izboljšanju stanja, nisem držal. Tokrat sem se odločil in vam končno napisal članek, ki ga povzemam po ameriški reviji Sky and Telescope in mislim, da bo za večino bralcev zanimiv. Zavedam se, da to ni najboljša oblika populariziranja astronomije in da bi bilo bolje, če bi pisal kaj iz "do-

mačih logov", a mislim, da je vsaj to bolje kot nič. V prihodnje pa vam nameram poslati kakšen članek iz amaterske astronomije, s katero se aktivno ukvarjam in bi jo s tem približal bralcem.

Drugače mi je Presek všeč in sem zelo vesel nove računalniške rubrike, seveda če ne bo ta ovirala množine člankov, katerim je Presek namenjen – matematiki, fiziki in astronomiji. Pri novi obliki Preseka pa me zelo moti, da je postal tisk večji, večji naslovi in sploh potrata s papirjem na vsakem koraku, kar list prav gotovo siromaši. Če revijo primerjamo z izdavi izpred npr. 6 let, je razlika v bogastvu vsebine več kot očitna. Zakaj to? Upam, da boste vsa ta vprašanja rešili tako, da bo za nas vse najbolje, in vam pri tem želim še veliko uspeha in delovne sreče.

Lepo vas pozdravlja Dolenc Karli iz Titovega Velenja.

Lepa hvala za Vaše pismo in za prispevek, ki smo ga z veseljem objavili. Tudi dobronamerne kritike smo veseli in si jo bomo dobro zapomnili. Glede večjega tiska in "potrate" papirja pa nismo Vašega mnenja. Morda je na prvi pogled res videti, da je sedaj na eni strani manj napisanega, toda če bi prešteli vse znake ene strani starega Preseka in novega Preseka, bi prišli do drugačnega zaključka. Sedanji Presek je pisan na novem pisalnem stroju, ki ima tudi drugačne črke in njihovo organiziranost. Znaki so različno široki in tako v eni vrstici konstantne dolžine ni vedno enako število znakov, kot je to pri običajnih pisalnih strojih. In ne samo to, število znakov je v primerjavi s prejšnjim načinom pisanja večje. Tako je tudi število znakov na posamezni strani večje, kljub temu da je razmik med vrsticami malce večji kot prej. Poleg tega pa smo tudi mnenja, da je novi način pisanja preglednejši in lepši. Upamo, da se po mnenju večine vendarle nismo preveč zmotili.

Pisala nam je tudi Zdenka iz Nove Gorice, učenka SŠTP v Ljubljani.

Draga Zdenka!

Oprosti, ker ti odgovarjamo šele sedaj. A pot od pisma do odgovora ni tako enostavna in kratka. Veseli nas, da si zadovoljna s Presekom in da si uspešna v šoli.

Prosila si, da bi napisali kaj o linearnem programiranju. O tem je Presek že pisal. Članek poišči v Preseku IV/1 na straneh 8 – 13. Morda bomo kdaj drugič še kaj napisali o tem. Če pa te stvar bolj resno zanima, se lahko oglasiš v matematični knjižnici na Jadranski 19, kjer ti bodo z veseljem poiskali še kakšno knjigo o linearnem programiranju.

Lepe pozdrave tebi, tvojim sošolcem in profesorjem!

SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV RAČUNALNIKARJEV

Mladi računalnikarji, ki so celo leto pripravljali naloge, so se dobili 1. junija na Fakulteti za elektrotehniko v okviru 19. srečanja mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije Gibanje "Znanost mladini".

Prijavljenih je bilo kar 17 nalog in vse so bile zelo kvalitetne, kar je potrdila tudi komisija, sestavljena iz univerzitetnih profesorjev. Z nekaj dodatki in izboljšavami, bi lahko bile tudi zgledne diplomske naloge.

Naloge so reševale probleme z različnih področij. Tri so bile recimo "šolsko" obarvane in so reševale problem sestavljanja urnikov. Žal ena med njimi ni bila dokončana zaradi slabe aparaturne in sistemske programske opreme. Podobno usodo sta doživela tudi interpret za jezik EDL in BASIC. Slednjega bi verjetno ob ustreznem računalniku avtor dodelal v prav uporabno programsko opremo, saj vključuje tudi zasnovo zaslonkega urejevalnika (Spectrum ima npr. vrstičnega) in sistem za odpravljanje napak (debugger).

Kaže, da so v Celju zelo zagreti za aparaturno opremo, saj so bile vse štiri naloge s tega področja in oblikujejo nekakšno celoto. Prva naloga prikazuje osnovne elemente programiranega avtomata, ki preraste v mikroračunalnik, če mu dodamo monitorski program v bralnih pomnilnikih (ROM). Z eno od oblik teh pomnilnikov (EPROM-eraseble and electrically programmable read only memory) se je s teoretične strani spoprijela druga naloga in njene izsledke takorekoč uporabila tretja. Celoten mikroračunalnik (NANOCOMP) je bila tema četrte naloge. Vse skupaj je zelo zanimiv projekt, toda kaj, ko mladih Celjanov ni bilo na zagovor.

Andrej Brodnik

PRVA LETNA ŠOLA FIZIKE

Od 18. do 22. junija je na Bledu potekala prva letna šola fizike, katere udeleženec sem bil tudi sam. V šoli je bilo 18 dijakov prvih letnikov srednjih šol iz vse Slovenije, ki so se najbolje uvrstili na republiškem tekmovanju iz fizike (SVIO). Podobno kot matematiki smo tudi mi prebivali v hiši dr. Josipa Plemlja. Zajtrk smo si pripravljali kar sami, a je bil vseeno dober. Na predavanja, ki so bila od devetih do dvanajstih, smo hodili v osnovno šolo, kjer smo tudi kosili. V prostem času smo se kopali v jezeru, se sprehajali v naravi, igrali košarko in poslušali glasbo. Na predavanjih smo spoznavali merjenja in merilne instrumente, poglobljali svoje znanje o elektroniki, pod vodstvom mentorjev izdelali model elektronskega merilnika temperature in se za konec posvetili še Soncu in zvezdam — astronomiji. Mislim, da je bila šola glede na to, da je bila organizirana prvič, uspešna, pogrešal sem le računske naloge, s katerimi bi preveril novo pridobljeno znanje. Šola nam bo ostala v lepem spominu, saj smo se udeleženci pobliže spoznali med seboj, si izmenjali izkušnje in se naučili vsak kaj novega, nekateri več, drugi manj.

Jure Bajc

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V STRUMICI – rešitve nalog s str. 185

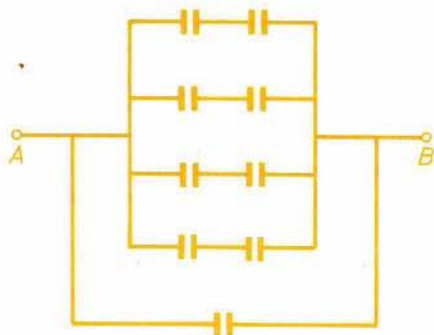
Rešitev B–2

Zaradi simetrije vezja in zaradi enakih kapacitet kondenzatorjev so točke A_1 , A_2 , A_3 , A_4 na enakem potencialu oziroma med njimi ni napetostne razlike. Na kondenzatorjih, ki so vezani med te točke, torej ni naboja. Vodnik $A_1A_2A_3A_4$ lahko skupaj z ustreznimi kondenzatorji brišemo iz vezja. Poenostavljeno vezje je prikazano na sliki 2.

Izrazimo kapaciteto posameznega kondenzatorja (C_x) s kapaciteto celotnega nepotopljenega vezja. Velja

$$C_0 = 4\left(\frac{1}{\frac{1}{C_x} + \frac{1}{C_x}}\right) + C_x = 3C_x$$

ali
$$C_x = \frac{C_0}{3}$$



Ko vezje potopimo, se poveča kapaciteta potopljenih kondenzatorjev in diagonalnega kondenzatorja, potopljenega do polovice. Celotna kapaciteta vezja je tedaj

$$C_0 = 4\left(\frac{1}{\frac{1}{2C_x} + \frac{1}{C_x}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{4C_x} + \frac{1}{2C_x}}\right) = 4C_x$$

$$C_0 = (4/3)C_0 = 16\text{pF}$$

Rešitev C–3

Astronavt odda vsako sekundo energijski tok

Enak energijski tok oddaja tudi astronautova obleka, zato lahko izračunamo njuno zunanjo temperaturo T_z

$$j = P/S = \sigma T_z^4$$

$$T_z = \sqrt[4]{P/(S\sigma)} = 201^0 \text{ K}$$

Enak energijski tok mora seveda prehajati tudi skozi obleko. Velja

$$P = \frac{S\lambda (T_N - T_z)}{d}$$

$$d = \frac{S\lambda (T_N - T_z)}{P} = 3 \text{ cm}$$

Pripomniti pa je treba, da je naloga idealizirana, saj vzamemo, da astronaut ves čas oddaja enak toplotni tok, kar pa seveda ni mogoče.

Rešitev O-4

a) Delo, ki ga prejme čaj, je v obeh primerih enako:

$$A_{zap} = A_{vzp}$$

$$\frac{U^2}{R_1 + R_2} t_1 = \frac{U^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} t_2$$

$$t_2 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} t_1 = 2,4 \text{ min}$$

b) Če sta grelca vezana zaporedno, velja

$$mc\Delta T = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_1 \quad \text{in}$$

$$m = \frac{U^2 t_1}{(R_1 + R_2) c \Delta T} = 0,968 \text{ kg}$$

Božidar Casar

REŠEVANJE ENAČB IN NEENAČB, V KATERIH NASTOPA ABSOLUTNA VREDNOST

NALOGE

1. Reši enačbe oziroma neenačbe:

a) $|x| > |x+1|$

b) $|2x+1| < |x+1|$

c) $||x+1| - |x-1|| < 1$

d) $\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| = 1$

e) $|2\sqrt{2|x|-1} - 1| = 3$

f) $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$

g) $\left| \frac{3x+1}{x-1} \right| \leq 3$

h) $|x+2| > |x-1| + x$

2. Dokaži, da je izjava $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$ tautologija! Torej lahko definiramo absolutno vrednost na dva načina:

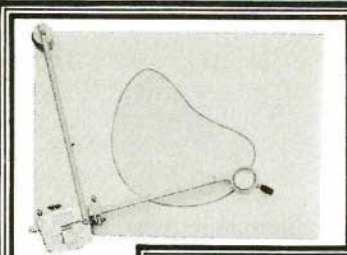
$$y = |x| \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y = x) \vee (x < 0 \wedge y = -x) \text{ ali}$$

$$y = |x| \Leftrightarrow (x \geq 0 \Rightarrow y = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow y = -x)$$

Izidor Hafner

SLIKOVNA KRIŽANKA

REŠITEV iz P XII/3

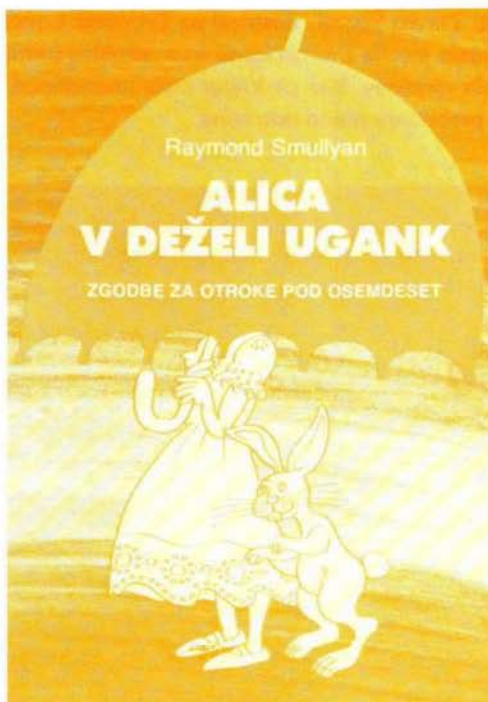


	POROČE- VALKA	ROMAN T. SVETINE	FILIP KUM- BATOVIČ
PAR JENJE SRNJADI	P	R	S
REKA POZABE V GRŠKI MITOLOGIJI	L	E	T
SKLIC V TABORIŠČU	A	P	E
DEVETI INTERVAL	N	O	N
PERZIJA	I	R	A
MARK TWIN	M	T	GLAVNO MESTO SAUDOVE ARABIJE
FINSKI ARHITEKT SAARINEN	E	E	RUMENKA- STO RJAVA BARVA
UKANA	T	R	I
NEKDANJI ALPINIST (FRANC)	E	K	A
Ž. IME	R	A	D

Raymond Smullyan, ALICA V DEŽELI UGANK, 151 str. kart. 750.- din

je zanimiva novost na našem knjižnem trgu. Knjiga sodi v področje rekreacijske matematike in je namenjena vsem starostim. To pove tudi podnaslov "Zgodbe za otroke pod osemdeset". Zgodbe so logične uganke, ki jih je avtor postavil v pravljичni svet Lewisa Carrolla (Alica v čudežni deželi). Alica z zdravo pametjo zelo uspešno rešuje te uganke. Želimo, da bi tako dobro šlo tudi bralcem. Uganke pa so v knjigi tudi rešene.

Knjigo dobite v vseh knjigarnah in pri Državni založbi Slovenije, Mestni trg 26 Ljubljana.



ŠPORER Zlatko, 1, 2, 3, ... MI VEČ ZNAMO BROJATI, Školska knjiga, Zagreb, 1984, 16 str.

ŠPORER Zlatko, RAČUNANJE PROBLEMA NEMA, Školska knjiga, Zagreb, 1983, 190 str. + pril. velike

Verjetno se še spominjate lanske 5/6 številke Preseka, "Oh, ta matematika", ki jo je napisal Zlatko Šporer, ilustriral in komentiral pa Nedeljko Dragič. Vam je bila všeč?

Zlatko Šporer je velik prijatelj mladih, posebno tistih, ki jim matematika dela preglavice. Spomnil se je tudi prvošolčkov in jim napisal knjigo "1, 2, 3, ... mi več znamo brojati". V njej se na igriv način naučimo šteti do 10 in primerjati med seboj števila po velikosti. Tanko knjižico, ki jo je prijetno ilustriral Radivoje Gvozdanović, lahko priporočate svojim mlajšim bratom ali sestram. Če pa so že malo starejši in se že jezijo s poštevanke, množenjem in deljenjem, jim svetujte, naj preberejo knjigo "Računanje problema nema". Tudi to je napisal Zlatko Šporer, ilustriral pa Zvonimir Lončarić. Videli boste še, kako se zapisujejo števila z vžigalicami in z raznobarvnimi kockami, ki jih zlepite iz priloženih modelov. Ker pa knjigi nista prevedeni v slovenščino, bo pomoč mlajšim pri prebiranju nujno potrebna.

Dušica Boben

V članku RIMSKE ŠTEVILKE IN RAČUNANJE Z NJIMI, ki je bil objavljen v tretji številki Preseka na strani 110, se zadnji račun na strani 119 glasi pravilno takole (dopolnjena je tudi literatura) :

M	D	C	L	X	V	I
t TTTTT T' ← DXXXXIX						
TTTT						
VV tttt TTY tt TTTT t ← MMCCCXXXXV						
t T tttV TTTTVV T' t TTTTVV T' t TTTTVV T' t TTTTVV T'						
T TTTT t TTTT						

Posebej naj opozorim na strani 30, 52 in 78 v Križaničevi knjigi *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga 1960 in na stran 40 v Devidejevi knjigi *Matematika v kulturah in epohah*, Skolska knjižnica 1979 (sl. prevod 1984).

HIŠNI RAČUNALNIK, Mladinska knjiga 1984, 232 strani, (24 x 30 cm) z barvnimi fotografijami in risbami v trdi vezavi, cena 3.300.- din

Vsekakor je treba pohvaliti Mladinsko knjigo, da se je tako hitro odzvala velikemu zanimanju za računalnike vseh vrst pri nas. Čeprav se z računalniki ne ukvarjam poklicno, sem z velikim zanimanjem prebral knjigo Hišni računalniki, ki jo je po angleškem izvirniku pripravila skupina naših strokovnjakov. Prav gotovo je za zanimivost in preglednost knjige "kriva" množica lepih barvnih slik, ki lepo dopolnjujejo besedilo.

Na 232 straneh najdemo odgovore na najrazličnejša vprašanja v zvezi s hišnim računalnikom. Kakšne so teoretične osnove delovanja računalnika? Kateri računalniki so na voljo v svetu in pri nas? Cene računalnikov. Ali porabi veliko elektrike? Kako se igramo z njim? Programiranje v Basicu.

Resda se področje računalništva tako hitro razvija, da bodo posamezni podatki v knjigi nujno že v letu ali dveh zastareli, vendar to ne zmanjšuje vrednosti knjige. Kdor hoče slediti razvoju, mora tako rekoč vsak dan prebrati kaj novega.

Knjigi je dodan droben Slovar računalniških izrazov, ki seveda ne more biti popoln že zaradi prave računalniške naglice, s kakršno je bil sestavljen.

Peter Petek

NAROČILNICA

DA želim prejeti knjigo:

010161186 HIŠNI RAČUNALNIK —
— 3.300 din

Priimek

Ime

Ulica (ali vas), hišna štev.

Pošta

Poštna štev.

Zaposlen(a) pri (naslov)

Štev. oseb. izk.

Datum: _____

Podpis: _____

Za naročilo po povzetju zadošča vaš naslov in lastnoročni podpis.

Plačal(a) bom:

- ☐ po povzetju, to je v celotnem znesku ob prejemu knjige
- ☐ v zaporednih mesečnih obrokih, pri čemer je najmanjši obrok 800 din, največje število obrokov pa je 10. Pri plačilu v največ treh obrokih ni obresti, v 4 do 6 obrokih je 6% obresti, pri plačilu v 7 do 10 obrokih pa je 10% kreditnih obresti.

Strinjam se z navedenimi prodajnimi pogoji. Znesek bom poravnal(a) pod pogoji, ki sem jih označil(a) takoj po prejemu računa in položnic natekoči račun: Mladinska knjiga, TOZD Založba, Ljubljana, 50101-603-46486. Izjavljam, da v primeru, če ne bom plačal(a) dveh obrokov najetega kredita, pooblašчам organizacijo združenega dela, v kateri sem zaposlen(a), da nakazuje preostale obroke iz mojih rednih osebnih dohodkov. Morebitne napake bom reklamiral(a) najkasneje v osmih dneh; poznejših reklamacij založba ne bo opoštevala. Morebitne spore rešuje pristojno sodišče v Ljubljani.

KURILLO Jurij, S FOTOGRAFOM V NARAVI. — Ljubljana, ČZP Kmečki glas, 1981. — 159 str. ; 20 cm. — Cena 400.- din.

To pot vam predstavljamo že četrto slovensko knjigo o fotografiji (glej Presek VIII, str. 127, VIII, str. 188 in 189). Kot vse dosedanje ima tudi ta uvod posvečen zgradbi fotografskega aparata, njegovim bistvenim delom ter raznim dodatnim pomagalom. Posebno poglavje je posvečeno filmom, črno-belim in barvnim, z močno, srednjo in slabo občutljivostjo. Glavni del knjige nas pouči, kako fotografiramo. Nadrobno je pojasnjena osvetlitev, ostrina in kompozicija, ki jih želimo oziroma moramo dobiti na filmu. Pri fotografiranju v naravi je slednje še prav posebno pomembno. Bralci Preseka so se lahko srečali z lepimi posnetki iz narave v 5. letniku Preseka, kjer je prof. dr. Ivan Kuščer objavil v nadaljevanjih opise svojih posnetkov v naravi pod skupnim naslovom Enajsta šola iz fizike. Ti članki so bili v celoti objavljeni tudi v 5. številki devetega letnika. Na fotografijah iz narave ne najdemo le življenja, temveč tudi mnogo zanimivih fizikalnih pojavov, s področja matematike pa vsaj pojave simetrije (rože), kombinatorike in grafov. Pri tem so zelo uporabni fotografski pripomočki, kot so teleobjektivi (fotografiranje živih bitij) in vmesni obročki (fotografiranje majhnih predmetov iz bližine). Zadnji del knjige je posvečen naravoslovcem. Priporočamo vam, da si z veliko mere potrpežljivosti tudi sami ustvarite kolekcijo fotografij ali barvnih diapozitivov, ki jih boste posneli sami. Na njih poiščite vsaj nekaj matematičnih in fizikalnih zakonov. Za astronomijo pa morate objektiv (seveda mnogo večji) nameriti v nasprotno smer.

Ciril Velkovrh

Slika 1. Vrane družijo se rade. Pet na žici jih sedi. Puška počí, ena pade. Koliko jih še sedi? (Pravilne odgovore pošljite do 1.4. 1985 na naslov: PRESEK, 61111 Ljubljana, pp 64, s pripisom "Za fotokrožek". Med pravičnimi rešitvami bomo izžrebali dva nagrajenca, ki bosta prejela knjižni nagradi.)

Slika 2. Na živalih in rastlinah najdemo mnogo strukturnih in barvnih simetrij.



