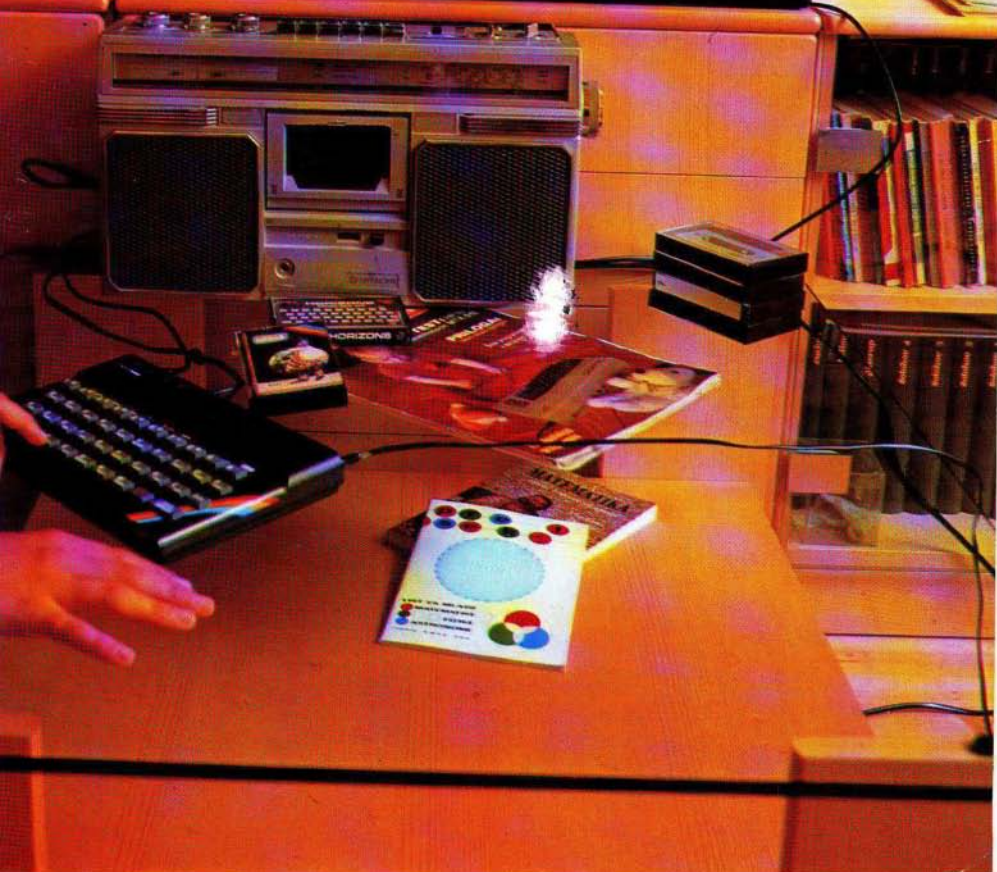


DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV
IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE
LETNIK 12 • LETO 1984/85

PRESEK

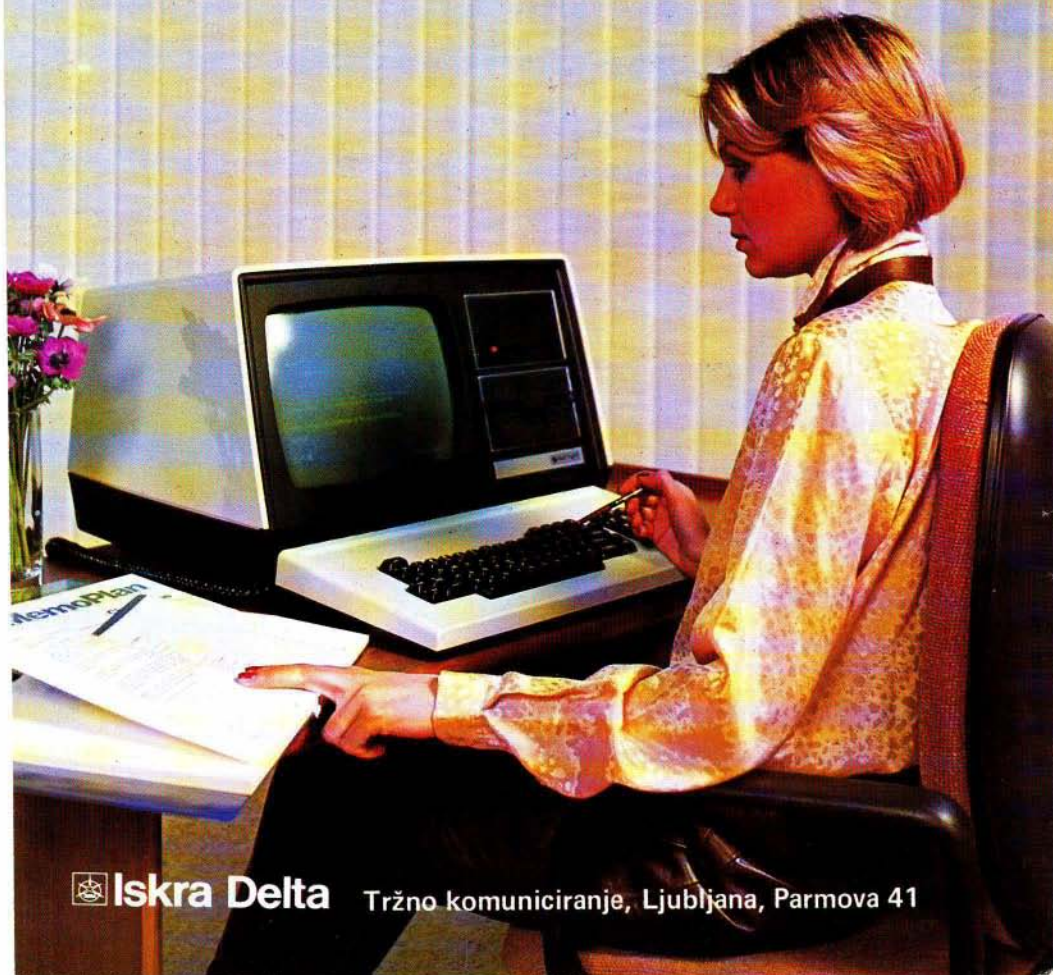
2



VELIKA KAPACITETA MALEGA RAČUNALNIKA

 **PARTNER**

Centralna procesna enota 128 KB pomnilnika
Diskovna enota Winchester, zmogljivost 10 MB
Disketna enota, zmogljivost 1 MB
Serijski vmesnik za tiskalnik
Operacijski sistem CP/M PLUS
Uporabniška dokumentacija



Iskra Delta

Tržno komuniciranje, Ljubljana, Parmova 41

VSEBINA

ASTRONOMIJA	Gibanje planetov (Andrej Čadež, Bojan Dintinjana)	66
	Program "Planeti" na Radiu Študent (Tomaž Pisanski)	70
TEKMOVANJA	20. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	71
NALOGE	Izbrane naloge za učence od V. do VIII. razreda - rešitev str. 93 (Pavle Zajc)	74
NOVE KNJIGE	Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 2. del (prir. Ciril Velkovrh)	76
KRIŽANKA	Slikovna križanka "Karikature" (Pavle Gregorc)	80
RAČUNALNIŠTVO	Rešitve naloge "Bližnji potenci" (Tomaž Pisanski)	82
REŠITVE NALOG	10. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike — Rešitve nalog iz P-XII/1, str. 12 (Miran Černe, Igor Kukavica)	87
NOVICE	Razpis tekmovanja srednješolcev v eksperimentalnem znanju fizike (Andrej Kuhar)	95
RAZVEDRILO	BISTROVIDEC — Delfijski računalnik (Vladimir Batagelj)	75
	PREMISLI IN REŠI — Bližnji potenci - rešitev iz P-11/4, Televizija na otoku (Peter Petek)	78
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Dva "dokaza", da je $2=1$, O telesih (Izidor Hafner)	79
	Utrinka (Izbral Ciril Velkovrh)	85
	Osem (Lilijana Vrežanovič)	86
	Nekaj misli	94
NA OVITKU	Mikroračunalnik Sinclair Spectrum v Presekovem labo- ratoriju (Foto Marjan Smerke)	I
	Računalnik Partner — ISKRA Delta	II
	Mednarodna fizikalna olimpiada v Sigtuni na Švedskem — (Foto Bojan Golli)	III, IV

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Bojan Golli (tekmovanja - naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Bojan Mohar (matematika), Metka Luzar-Vlachy, Andrej Kmet, Jože Kotnik, Edvard Kramar (glavni in odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak (tekmovanja - naloge iz matematike), Andrej Likar (Presekova knjižnica - fizika), Franci Oblak, Peter Petek (naloge bralcev, premisli in reši, pisma bralcev), Tomaž Pisanski (računalništvo), Tomaž Skulj, Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

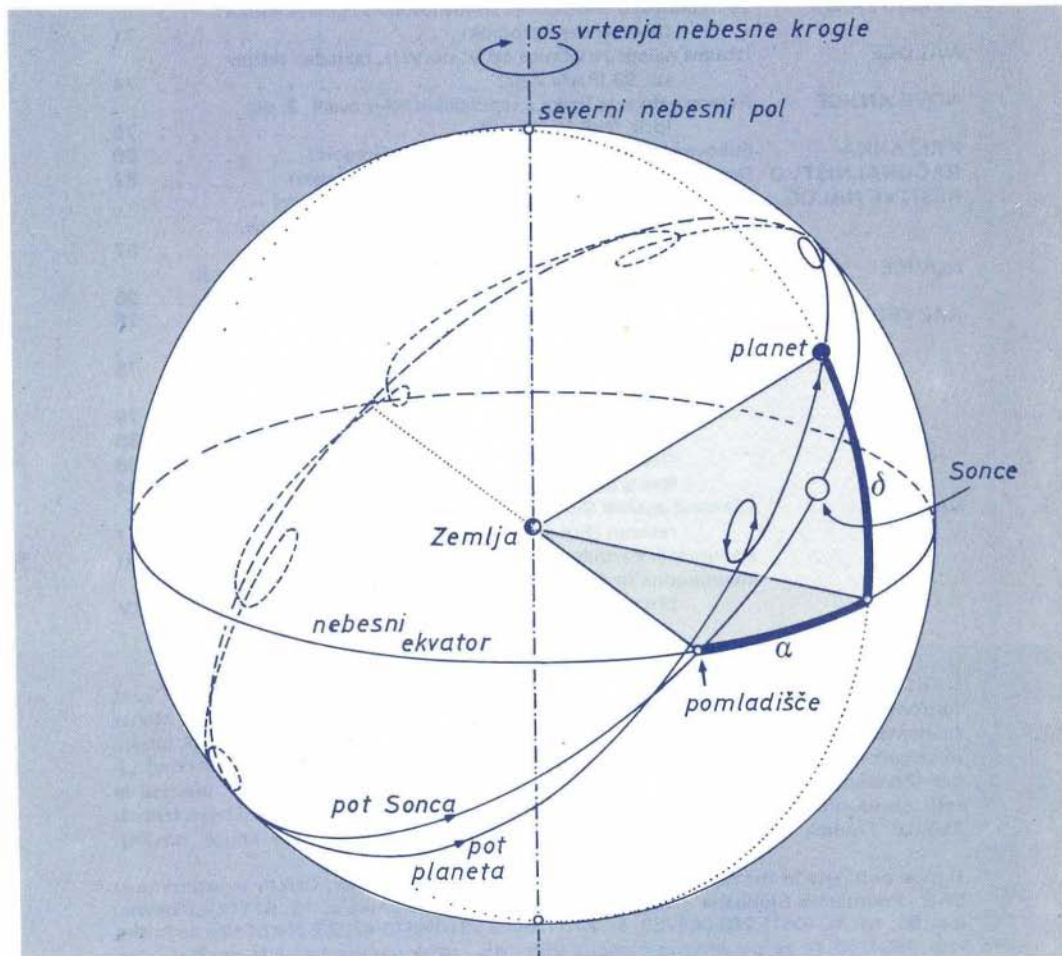
Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. št. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1984/85 je za posamezna naročila 250.- din, za skupinska naročila pa 200.- din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije.
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana.

© 1984 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 705

ASTRONOMIJA

GIBANJE PLANETOV



Slika 1. Grki so si predstavljali, da se kristalna krogla (nebesna krogla) z zvezdami vrtili okrog Zemlje v središču, Sonce in planeti pa se gibljejo po tej krogli, kot je narisano. "Levi" nebesnega telesa so podali z dvema koordinatama: rektascenzijo (α) in deklinacijo (δ). Čeprav Zemlja gotovo ni središče sveta, je tak opis leg nebesnih teles zelo prikladen in je še vedno v rabi.

Že od nekdaj so ljudje želeli vedeti, na katerem delu neba naj iščejo planete. Stari Grki so mislili, da so zvezde pripete na kristalni krogli, katere središče je v središču Zemlje. Predstavljali so si, da se ta krogla v slabem dnevu (v 23 urah in 56 minutah) zavrti okrog Zemlje. Planeti in Sonce pa naj bi se gibali po tej krogli v harmoničnem plesu. V skladu s tako predstavo je videti, kot da potuje Sonce enakomerno po velikem krogu nebesne krogle tako, da naredi en obhod v letu dni. Planetna gibanja po krogli pa so ob tem videti veliko bolj zamotana. Včasih se planet navidezno giblje približno v isti smeri kot Sonce (napredno), nato pa zastane in se začne za nekja časa gibati v nasprotni smeri (retrogradno), po ponovnem zastoju se zopet giblje napredno itd. (Glej sliko 1)

Stari Grki niso poznali zakonov, ki uravnavajo gibanja nebesnih teles in jih kot kaže niti niso iskali (razen Aristarha, ki je prvi menil, da morda uravnava gibanje planetov Sonce, ker je pač največje med planeti. Glej Presek VII/2.). Iskali pa so geometrijski opis planetnih tirov po nebesni krogli, kakor so jih opazili z Zemlje. Pri tem opravilu so bili dokaj uspešni in so znali na sicer kompliciran način dobro napovedati lege planetov na nebu. Njihov način opisovanja leg nebesnih teles s kotoma rektascenzije in deklinacije je bil tako posrečeno izbran, da ga uporabljamo še danes (slika 1).

Grški način računanja planetnih leg so uporabljali vse do 16. stoletja, ko je Kopernik pokazal, da so komplicirane poti planetov po nebesni krogli v resnici projekcija preprostega krožnega gibanja planetov okrog Sonca. Ta navidez preprosta ugotovitev je imela daljnosežne posledice, ker je vodila do zaključka, da ni Zemlja, ampak Sonce "središče sveta". Kopernikove ideje in borba zanje predstavljajo tako začetek enega najbogatejših obdobj človeške zgodovine, to je obdobja renesanse. Razen znanstvenih dosežkov je to obdobje zapustilo izredne dosežke še na področju zemljepisja, medicine, slikarstva, kiparstva in filozofije.

Že Kopernik se je zavedal, da njegova teorija ne daje povsem točnih napovedi, zato jo je poskušal izboljšati po vzorcu starih Grkov. Predstavljal si je, da se planeti "vozijo" okrog Sonca v kroglih, ki se kotalijo po krogih okrog Sonca. To nadaljevanje je sicer izboljšalo natančnost rezultatov, vendar pa je pomenilo korak v napačno smer.

Naslednji veliki korak pri razlagi gibanja planetov je naredil Johannes Kepler v 17. stoletju. Po dotedaj najbolj natančnih opazovanjih Tycha Braheja je odkril tri zakonitosti v zvezi z gibanjem planetov. Te zakonitosti — poimenujemo jih po njem — povedo tole:

- i) planeti se gibljejo okrog Sonca po elipsah, v katerih gorišču je Sonce;
- ii) zveznica med Soncem in planetom opisuje v enakih časih enake ploščine;
- iii) razmerje med tretjo potenco velike osi elipse in kvadratom obhodnega časa planeta okrog Sonca je za vse planete enako.

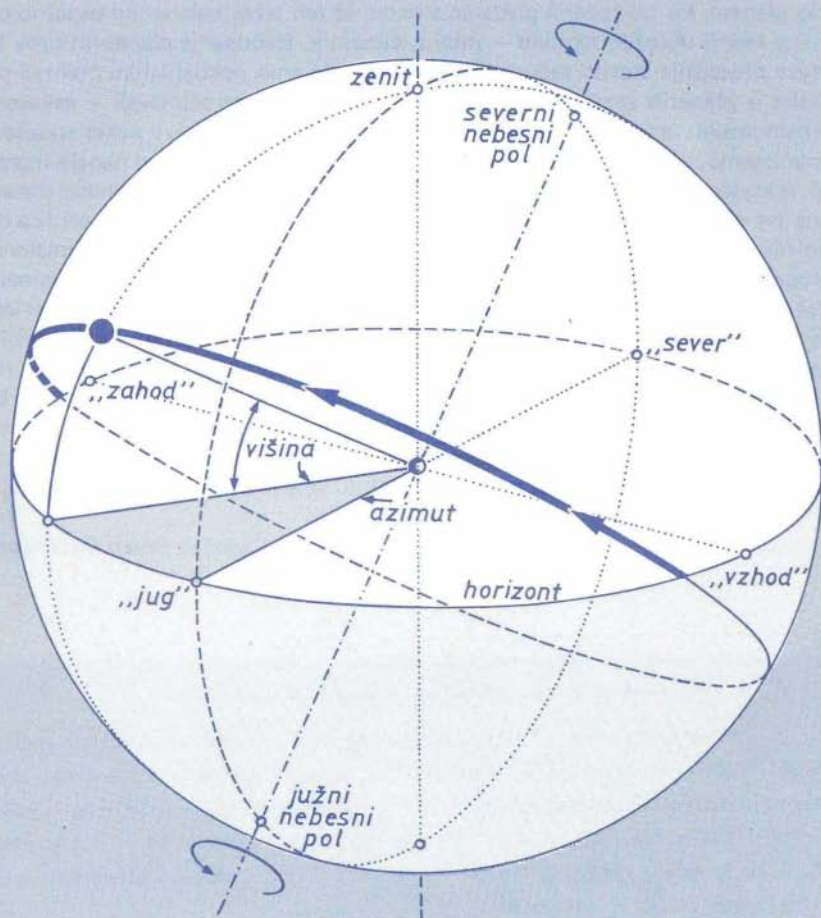
Največji dosežek, ki je bil tesno povezan z raziskovanjem planetnega gibanja, je bilo odkritje vzrokov za to gibanje. Našel jih je Newton okrog sedem-

deset let po objavi Keplerjevih zakonov, čeprav ob tem ne smemo spregledati tudi vloge drugih znanstvenikov in filozofov tistega časa, kot npr. Galileia Galileia, katerega velika zasluga je bila, da je meril gibanje teles na Zemlji in povezal ustrezne količine z enačbami. Newton je uspel Galilejeve ugotovitve posplošiti in jih jasno zapisati v obliki zaključene teorije gibanja. Krona Newtonove teorije pa je bilo dejstvo, da je mogel iz teorije gibanja, ki jo je izpeljal za telesa na Zemlji, izpeljati tudi vse tri Keplerjeve zakone, to je zakone, ki uravnavajo gibanje povsem nezemeljskih teles. Po tem odkritju, ki je Newtona močno razburilo, je v letu in pol napisal svoje znamenito delo "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", v katerem je postavil zakone gibanja, ki z majhnimi dopolnili veljajo še danes.

Problem gibanja planetov pa z Newtonom še ni bil rešen. Zaradi matematične zahtevnosti Newton ni mogel obravnavati privlačnih sil med planeti v Osončju, ampak je lahko upošteval samo privlačno silo med Soncem in planetom, kot da drugih planetov sploh ne bi bilo. Ta približek je precej dober, saj ima celo največji planet Jupiter kar tisočkrat manjšo maso od Sonca. Vendar pa so natančna astronomska opazovanja, ki so se začela vse bolj razvijati, kmalu pokazala, da tudi majhne sile med planeti (rekli so jim motnje) polagoma spreminjajo parametre Keplerjevih elips. Matematiki kot Lagrange, Laplace, Gauss, Jacobi in drugi so se intenzivno ukvarjali z računanjem planetnih tirov in upoštevanjem "motenj", ki jih vnašajo težne sile med planeti. Pri tem so odkrili celo vrsto matematičnih metod, ki so še danes nepogrešljivo orodje matematike in fizike. Največji uspeh teh prizadevanj je bilo odkritje do tedaj neznanega planeta Neptuna. Astronomi so že petdeset let opazovali planet Uran, ki ga je po naključju odkril Herschel (Presek II/3). Ugotovili so, da se njegova lega razlikuje od lege izračunane po Newtonovi teoriji gravitacije (z upoštevanjem motenj vseh znanih planetov) za nekaj več od ločne minute. (Brez teleskopa tako najhnegega odklona ne bi mogli zanesljivo izmeriti.) Leverrier v Franciji in Adams v Angliji sta menila, da to razliko povzroča privlačna sila še neodkritega planeta, ki je še dlje od Sonca kot Uran. Na osnovi te podmene sta izračunala, kje bi moral biti ta planet. Leverrier je tako izračunano lego sporočil nemškemu astronomu Galleju, ki je že prvo noč za tem našel novi planet zelo blizu mesta, ki ga je napovedal Leverrier.

Leverrierov uspeh je vzbudil iskanje še nadaljnjih neodkritih planetov, ker so opazili majhne nepojasnjene odklone od napovedanih leg tudi za Neptun in za najbližji planet Merkur. Skrivnost Neptunovih odklonov je bila pojasnjena leta 1930, ko je Tombaugh odkril zadnji planet Pluton. Odklone Merkura od izračunane tira pa je pojasnila v dvajsetih letih tega stoletja Einsteinova teorija gravitacije. (Os elipse, po kateri kroži Merkur, se zaradi privlačnih sil drugih planetov zavrti za nekaj tisoč ločnih sekund v stoletju, pri čemer pa so se računi razlikovali od opazovanj za 43 ločnih sekund.) Vzrok teh izredno majhnih odklonov ni še neodkriti planet, ampak dejstvo, da Newtonova teorija gravitacije ne velja povsem natančno. Bolje od Newtonove

obravnavala sile v težnem polju Einsteinova teorija gravitacije, vendar je razlika med napovedjo Newtonove in Einsteinove teorije tako majhna, da je ni bilo mogoče izmeriti za noben drug planet kot za Merkur.



Slika 2. Azimut in višina se za nebesna telesa stalno spreminjata, ker se nebesna krogla navidezno vrti okrog nas. Trenutni koordinati, azimut in višino, določimo takole: potegnemo navpični krog od zenita skozi nebesno telo do horizonta. Od točke, kjer ta krog seka horizont, pa do juga merimo azimut - ta kot je pozitiven, če je nebesno telo že na zapadu, in negativen, če je na vzhodni polovici neba. Višino merimo vzdolž navpičnega kroga od horizonta do točke, kjer se nahaja nebesno telo.

Gibanje planetov je torej problem, s katerim se je človeštvo ukvarjalo že več kot dva tisoč let, posamezni prispevki k njegovemu reševanju pa so pogosto pomenili izjemen napredek v razvoju znanosti.

Ob vsem velikem napredku znanosti, o katerem je bilo govora, pa še vedno ne znamo brez zapletenega računanja ugotoviti, na katerem delu neba naj iščemo planete, ko ob večerih gledamo v nebo. Iz teh težav nam lahko uspešno pomaga zadnji dosežek tehnike — mini računalnik. Računanje planetnih tirov zahteva precejšnje število računskih operacij, zato smo nekdanj lahko prebrali podatke o planetih samo v tabelah, ki so jih skrbno preračunavali v nekaterih astronomskih ustanovah, danes pa lahko z mini računalnikom v nekaj sekundah izračunamo, na katerem delu nebesne krogle se planet trenutno nahaja (njegovo rektascenzijo in deklinacijo — slika 1), trenutek vzhoda in zahoda danega dne ter višino nad obzorjem in njegov azimut ob katerikoli izbrani uri (Za definicijo višine in azimuta glej sliko 2.). V ta namen smo pripravili računalniški program, ki ga lahko uporabite na računalniku Spectrum, Apple ali podobnem. Naš program ne upošteva privlačnih sil med planeti, zato bodo izračunane lege najbolj točne za leto 1984, za datume trideset let pred tem letom in trideset let kasneje pa lahko pričakujete, da bodo lege, ki jih dobite po tem programu, napačne tudi za nekaj deset ločnih minut. Ko boste računalnik pognali, vas bo vprašal za podatke, ki jih potrebuje, in prav nič težko ne bo uganiti, kaj mu morate odgovoriti, da vam bo povedal planetne lege, pa tudi lego Sonca na nebu. Toliko zaenkrat o legah planetov pa obilo veselja pri njihovem opazovanju.

Andrej Čadež in Bojan Dintinjana

PROGRAM "PLANETI" NA RADIU ŠTUDENT

Našim bralcem bomo program za računanje leg planetov poslali kar "po zraku". Radio Študent bo verzijo za računalnik ZX Spectrum oddajal po radijskih valovih. Lastnike mavric vabimo, da ga posnamejo, če ga še niso uspeli presneti septembra, ko je že bil na sporedu. Radio Študent bo po izidu vsake številke Preseka predvajal Presekove programe. Prvo pošiljko programov lahko pričakujete okrog 15. decembra.

Bralci izven Ljubljane, ki ne ujamejo oddaje Radia Študent in učitelji, ki jih morebiti zanimajo verzije za druge računalnike z basicom, pa naj pišejo avtorju na naslov uredništva.

Tomaž Pisanski

TEKMOVANJA

20. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnjega republiškega tekmovanja za zlato Vegovo priznanje se je udeležilo rekordno število tekmovalcev, saj je tekmovalo 367 učencev, od tega 101 sedmošolec in 266 osmošolcev. Tekmovanje je bilo v soboto, 19. maja 1984, v petih regijah Slovenije.

Enajstčlanska komisija pod predsedstvom prof. *Terezije Uran* je izbrala in korigirala naloge, določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj in izbrala ekipo za zvezno tekmovanje, ki je bilo letos v *Sutomoru* v Črni gori. Vsi tekmovalci so prejeli Presekovne značke.

Zlato Vegovo priznanje so si prislužili učenci, ki so dosegli vsaj 15 točk od 25 možnih v 7. razredu in vsaj 13 točk od 25 možnih v 8. razredu. To so:

7. RAZRED

II. nagrada: *REBERNIK Katja*, V. Vlahović, Ljubljana

III. nagrada: *BRUS Mišo*, M. Nemec, Radeče, *FLERIN Polona*, V. Perko, Domžale, *SLANIČ Zoran*, Borci za severno mejo, Maribor,

OZBIČ Tatjana, Postojna, *BIZJAK Andrej*, IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, *MAGYAR Hajnalka*, D. Lugarič, Lendava, *ŽITNIK Boris*, F. Rozman—Stane, Maribor, *BLAŽICA Bojan*, M. Štrukelj, Nova Gorica, *VENCELJ Janez*, F. Prešeren, Kranj, *HABINC Rok*, V. Vlahović, Ljubljana, *VODOPIVEC Tadej*, dr. J. Potrč, Ljubljana, *MILIČ Primož*, D. Bordon, Koper, *POKORNY Boštjan*, V. Vlahović, Titovo Velenje, *RENKO Brane*, M. Nemec, Radeče, *MUNIČ Petra*, M. Štrukelj, Nova Gorica, *MIKOŠ Dado*, Revirski borci, Trbovlje, *GROBLER Andrej*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *LUKAN Iris*, Luis Adamič, Grosuplje, *KOSEM Rok*, F. Ravbar, Dol pri Ljubljani, *VILFAN Andrej*, M. Pečar, Črnuče, *CEHNER Irma*, J. B. Tito, Predoslje, *PIRŠ Gregor*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *GLAVNIK Aleš*, P. Voranc, Ljubljana, *HRIBERNIK Boštjan*, F. Pasterk—Lenart, Mežica, *ROŽMANEC Maja*, D. Kveder—Tomaž, Litija, *JANŠA Polona*, M. Pečar, Črnuče, *CIMPRIČ Jakob*, F. Bevk, Ljubljana, *ŠVAB Milada*, J. Mihevc, Idrija, *ROBBA Davorin*, IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, *NOVAK Matej*, S. Kosovel, Sežana, *MALEŠIČ Matjaž*, F. Osojnik, Ptuj, *BREST Janez*, 17. oktober, Beltinci, *IVANUŠA Blaž*, E. Kardelj, Logatec, *HRIBAR Barbara*, P. Voranc, Ljubljana, *MAROLT Matija*, L. Adamič, Grosuplje, *SMUKAVEC Tine*, dr. J. Mencinger, Boh. Bistrica, *PAVLIŠIČ Matjaž*, M. Jarc, Črnomelj, *RAJTER Alojz*, Lenart v Slov. Goricah, *HRŽENJAK Vesna*, B. Tušek, Miklavž, *PUKL Sašo*, V. Vlahović, Maribor, *POTOČNIK Boštjan*, F. Pasterk—Lenart, Mežica, *JUSTIN Špela*, M. Jarc, Ljubljana, *PANGERŠIČ Andrej*, M. Novak—Jovo, Ljubljana, *MOHORIČ Marjana*, S. Jenko, Kranj, *BRELIH Andrej*, Karav. Kurirjev NOB, Kor. Bela, *FRLEŽ Danilo*, Karav. kurirjev NOB, Kor. Bela, *GREGORIČ Gabrijela*, dr. F. Prešeren, Ribnica, *KAČ Uroš*, E. Kardelj, Lucija, *LAPANJA Iztok*, S. Gregorčič, Kobarid, *ZABOVNIK Samo*, M. Pintar—Toledo,

Titovo Velenje, *PIPUŠ Goran*, COŠ B. Mravljak, Titovo Velenje, *KNAPP Martina*, N. Cilenšek, Griže, *BILAČ Mojca*, F. Rozman—Stane, Maribor, *LADINEK Robert*, Radlje ob Dravi, *LESNIK Robi*, F. Rozman—Stane, Maribor, *GOLOB Uroš*, F. Vrunč, Slovenj Gradec

8. RAZRED

I. nagrada: *VOVK Edi*, F. S. Finžgar, Lesce, *MAVER Jerica*, Solkan, Nova Gorica,
 II. nagrada: *KRAMAR Martina*, IX. korpus NOVJ, Nova Gorica,
 III. nagrada: *ŽVANUT Breda*, D. Bordon, Koper, *SLIVNIK Tomaž*, P. Voranc, Ljubljana, *GAŠPERLIN Marjan*, F. Prešeren, Kranj,
LAMOVEC Andrej, X. SNOUB "Ljubljanske", Ljubljana, *VINTAR Zarja*, R. Jakopič, Ljubljana, *KOS Vojka*, J. Vega, Moravče, *ROBNIK Marko*, R. Iršič, Mislinja, *VRANIČ Andrej*, F. Vrunč, Slovenj Gradec, *PETROVIČ Dušan*, F. Vrunč, Slovenj Gradec, *POKORN Miran*, P. Kavčič, Škofja Loka, *TOMAŽEVIČ Aleš*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *KOLAR Matej*, S. Šlander, Celje, *GREŠOVNIK Igor*, Neznanih talcev, Dravograd, *MIKSIČ Andrej*, Lackov odred, Kamnica, *STRAH Matej*, T. Tomšič, Ljubljana, *KARAMUJA Sandra*, J. Moškrič, Ljubljana, *KREMŠER Brigita*, B. Ilich, Maribor, *JERAJ Robert*, L. Seljak, Kranj, *FAJFAR Andrej*, P. Voranc, Ljubljana, *KRAMAR Helena*, V. Vodnik, Ljubljana, *ZRIMEC Alexis*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *PERKO Boris*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *BOŽIČ Marjan*, J. Dalmatin, Krško, *PEHANI Špela*, P. Voranc, Ljubljana, *ORAŽEM Tadej*, J. B. Tito, Domžale, *SILVESTER Barbara*, P. Voranc, Ljubljana, *PETERC Sandi*, M. Pečar, Črnuče, *STRAZBERGER Aleš*, M. Šobar—Nataša, Novo mesto, *URH Gregor*, A. T. Linhart, Radovljica, *TEKAVEC Tomaž*, COŠ B. Mravljak, Titovo Velenje, *SKOK Božo*, D. Bordon, Koper, *JAMNIK Borut*, V. Šmuc, Izola, *HORVAT Bogdan*, Belokranjski odred, Semič, *MARUŠIČ Damjan*, P. Voranc, Ljubljana, *TROJER Marina*, L. Bratkovič—Bratuš, Renče, *SKENDER Karmen*, Zbora odposlancev, Kočevje, *KOS Nataša*, M. Štrukelj, Nova Gorica, *LENOŠEK Damjan*, Pohorski odred, Slov. Bistrica, *ŠIMEC Edi*, Oto Vrhunec—Blaž, Medvode, *KOGOVŠEK Sašo*, M. Novak—Jovo, Ljubljana, *BERGER Blaž*, X. SNOUB "Ljubljanske", Ljubljana, *FURMAN Vladi*, E. Kardelj, Poljčane, *POMPE Matevž*, I. Cankar, Vrhnika, *KUKAR Mojca*, P. Voranc, Ljubljana, *KOS Tonček*, Karav. kurirjev NOB, Kor. Bela, *KRIŽMAN Marina*, E. Kardelj, Lucija, *KOKALJ Ani*, C. Golar, Škofja Loka, *ČINČ Andrej*, K. Destovnik—Kajuh, Murska Sobota, *KUZMAN Tadeja*, S. Kosec, Šmartno pod Šmarno goro, *FIDLER Barbara*, Bratje Dobrotinšek, Vojnik, *MACUR Mirna*, A. Aškerc, Titovo Velenje, *MEHLE Alenka*, E. Kardelj, Lucija.

V ekipo za zvezno tekmovanje so se uvrstili vsi učenci sedmega in osmega razreda, ki so prejeli nagrado na republiškem tekmovanju.

NALOGE

7. RAZRED

1.
 Vrednost izraza $\frac{3 + 4,2 : 0,1}{(1 : 0,3 - \frac{7}{3}) \cdot 0,3125}$ je 3,6% nekega števila.

Izračunaj to število!

2.
 Poišči med ulomkoma $\frac{2}{3}$ in $\frac{5}{6}$ vse ulomke, ki imajo ali števec ali imenovallec enak 9! Števce in imenovalce izbiraj v množici naravnih števil.

3.

Pri napeljavi vodovoda sodelujeta dva bagerja. Prvi bi izkopal jarek v 20 urah, drugi bi ga zasul v 30 urah. Oba bagerja sta začela delati hkrati. Po 48 urah sta delo prekinila. Koliko jarka je ostalo izkopanega?

4.

Nariši romb $ABCD$ s podatki: $\overline{AC} = e = 6,5$ cm, $v = 3,5$ cm! Načrtovanje opiši po korakih. Pri kateri dolžini diagonale e naloga nima rešitve?

5.

Enakokrakemu trapezu s ploščino 5 cm^2 je včrtana krožnica s polmerom 1 cm. Kolik je obseg trapeza?

8. RAZRED

1.

Poišči vse pare naravnih števil a in b , katerih razlika kvadratov je 63! (Pot do rešitve izpelji računsko.)

2.

Trgovski potnik se je z avtomobilom odpeljal na poslovni sestanek. V prvi uri je prevozil 60 km. Tedaj je opazil, da bo za 30 minut zamudil sestanek, če bo pot nadaljeval z enako hitrostjo. Zato je hitrost povečal na 80 km/h in tako prispel na cilj 40 minut pred začetkom sestanka.

Kako daleč je potoval?

3.

V pravokotniku sta stranici v razmerju $\sqrt{2} : 1$. Če iz dveh nasprotnih oglišč narišeš pravokotnici na diagonalo, boš diagonalo razdelil na tri enake dele. Dokaži trditev!

4.

Enakokraki trapez ($a = 45^\circ$, $b = 3\text{ cm}$, $c = b$) zavrtimo okoli kraka b za 360° . Izračunaj prostornino nastalega telesa!

5.

Motorna čolna sta zasidrana v različnih krajih ob morju: prvi v kraju s koordinatama $x = 1$, $y = 2$, drugi v kraju s koordinatama $x = 14$, $y = 8$. Čolna izplujeta istočasno in z enakima hitrostma. Prvi čoln se giblje po premici $y = \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$, drugi pa po premici $y = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{2}$.

Ali se bosta čolna zaletela, če se oba gibljeta proti presečišču obeh premic? (Nariši sliko in odgovor utemelji z računom!)

Aleksander Potočnik

IZBRANE NALOGE za učence od V. do VIII. razreda

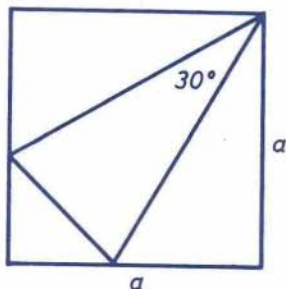
- 1) Določi vsoto vseh dvomestnih števil, ki imajo le cifre 2 ali 5!
- 2) V izrazu $2a^3 + 3b^2$ zamenjaj črki a in b s takimi ciframi, da bo vsota 625. Poišči vse rešitve!
- 3) Pokaži, da izmed 11 naravnih števil lahko izberemo dve števili tako, da bo njuna razlika deljiva z 10!
- 4) Dve premici, ki se sekata, oblikujeta štiri kote. Določi te kote, če je eden izmed njih 11-krat manjši od vsote drugih treh!
- 5) Pokaži, da je število 1680 produkt štirih zaporednih naravnih števil! (Pomagaj si z razcepom števila 1680.)
- 6) V krog $K(S, r)$ nariši tri enake kroge tako, da se paroma dotikajo med seboj in da se dotikajo danega kroga!
- 7) Nariši pravokotnik, katerega dolžina je dvakrat daljša od širine.
 - a) Pravokotnik razreži na dva dela tako, da lahko iz njih sestaviš: a) pravokotni trikotnik, b) enakokrak trikotnik!
 - b) Pravokotnik razreži na tri dele tako, da iz njih lahko sestaviš kvadrat!
- 8) Ob vseh štirih straneh pravokotnika ($a = 4$, $b = 3$) nariši kvadrate. Če zvežeš prosta oglišča, dobiš osemkotnik. Izračunaj njegovo ploščino!
- 9) Kdaj je vsota $a + b$ manjša od razlike $a - b^2$?
- 10) Imamo tri racionalna števila a , b in c , od katerih je eno pozitivno, eno negativno in eno enako nič. Ugotovi, katero od teh treh števil je pozitivno, katero negativno in katero je enako nič, če je

$$\frac{a(c - b)}{b} > 0$$

- 11) O trikotniku $\triangle ABC$ vemo, da sta od naslednjih štirih izjav dve pravilni:
 - 1) trikotnik $\triangle ABC$ je pravokoten
 - 2) $\sphericalangle A = 30^\circ$
 - 3) $AB = 2 \cdot BC$
 - 4) $AC = 2 \cdot BC$
 Določi ju in izračunaj obseg trikotnika, če je $BC = 1$!
- 12) Diagonala večjega kvadrata je enaka obsegu manjšega kvadrata s stranico a .
 - a) Kolikokrat je ploščina P večjega kvadrata večja od ploščine p manjšega kvadrata?
 - b) Za koliko procentov je P večja od ploščine p ?

- 13) Pokaži, da je ploščina enokrakega trikotnika s kotom ob vrhu 30° , ki je včrtan v kvadrat s stranico a , enaka tretjini ploščine kvadrata.

Pavle Zajc



BISTROVIDEC

DELFIJSKI RAČUNALNIKI

Današnji oreh sem izbral iz zbirke "Sunday Times Brain Teasers".

Tudi Delfijsko preročišče je sledilo napredku in pri sestavljanju prerokb uporablja tri računalnike. Najnovejši, letnik 1982, dá na vsako vprašanje pravi odgovor; najstarejši, letnik 1975, se vedno zlaže, medtem, ko so odgovori srednjega, letnik 1980, nepredvidljivi, enkrat resnični, drugič lažni.

Profesor Bitek, ki je bil na obisku v svetišču, je zastavil vsem trem računalnikom vprašanje: "Katerega letnika je največji računalnik?" Prvi računalnik je odgovoril: "1982"; drugi pa: "ni 1975". Profesor Bitek, ki je videl velikosti posameznega računalnika, ne pa njegove letnice, ni potreboval odgovora tretjega računalnika, ker je že izvedel pravi odgovor na svoje vprašanje.

Katerega letnika je največji računalnik?

Vladimir Batagelj

Golli B., Žitnik J.,
REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ,
2. del, 1971-1983. - Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in
astronomov SRS, 1984. - 112 str. (Knjižnica Sigma ; 37) 250.- din.

IZ PREDGOVORA

V knjižici so zbrane naloge z republiških tekmovanj in predtekmovanj iz fizike v letih od 1971 do 1983. S tem nadaljujeva zbirko Marjana Hribarja *Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj z nalogami do leta 1970*.

Naloge so razdeljene na tri poglavja, ki ustrezajo snovi 2., 3. in 4. razreda nekdanjega gimnazijskega programa fizike in hkrati tudi trem skupinam na republiških tekmovanjih. Namenjene so dijakom, ki radi rešujejo zahtevnejše fizikalne probleme in tako poglobljajo šolsko snov. Zbirka bo posebej dobrodošla pri pripravi na republiško tekmovanje. Prav tako jo priporoča študentom prvega letnika tehničnih in naravoslovnih smeri. Zbirka vsebuje tudi nekaj nalog z zveznih tekmovanj. Te naj bi bralcu dale občutek o zahtevnosti tega tekmovanja.

Bralcu priporoča, da poskusi vsako nalogo rešiti samostojno in šele nato preveri njeno rešitev. Reševanja fizikalnih problemov se pač ni mogoče naučiti le s pasivnim prebiranjem. Bralcu v pomoč sva dodala tudi nekaj napotkov za reševanje nalog.

Izpustila sva naloge, ki so preveč podobne nekaterim v predhodni zbirki in pa takšne, ki jih ni mogoče rešiti s srednješolskim znanjem ali pa so preveč izumetničene. Marsikatero nalogo je mogoče rešiti tudi po drugi, elegantnejši poti, a sva izbrala razumljivejšo.

NEKAJ NAPOTKOV ZA REŠEVANJE NALOG

1. Najprej temeljito razčleni nalogo in razmisli, kaj zahteva. Pomagaj si z eno ali več skicami, s katerimi ponazoríš začetno, končno in morebitne vmesne situacije pri nalogi. Zapiši podatke in izberi količine, s katerimi boš delal. Če se ti zdi, da nimaš dovolj podatkov, je sicer mogoče, da podatek manjka, bolj verjetno pa naloge nisi dobro razmislil. Pogosto se na koncu izkaže, da podatek ni potreben. V takšnem primeru pač računaj, kot da bi bil podatek znan. Nekateri podatki, na primer težni pospešek na površju zemlje ali gostota vode, so splošno znani in jih ne navajamo.

2. Odloči se, katere zakone boš pri reševanju uporabil. Najbolj preprosto je delati z ohranitvenimi zakoni: z ohranitvijo gibalne količine, kinetične in potencialne energije, z ohranitvijo masnega ali električnega toka in podobnimi. Vendar ob tem dobro razmisli, če ohranitveni zakon res velja ter na katera telesa ali količine se nanaša.
3. Enačbe rešuj po možnosti splošno in šele na koncu vstavi podatke. Preden se lotiš reševanja enačb, poglej, če imaš na voljo toliko enačb, kolikor je neznanih količin. V nasprotnem primeru poišči dodatno zvezo med neznanimi količinami. Posebno pri daljših nalogah je koristno izračunati kakšen vmešen rezultat. Ta ti je lahko v oporo pri nadaljnjem računanju.
4. Ko si dobil rezultat v splošni obliki, preveri, če je iskana količina smiselno odvisna od podanih količin; čas potovanja kamna po zraku, na primer, ne more biti obratno sorazmeren z dometom. Odvisnost si predoči tudi grafično. Včasih lahko že vnaprej napovemo linearno, kvadratično ali eksponentno odvisnost neke količine. Poglej, kako se izraz obnaša v primerih, ko je katera od količin enaka 0 ali pa gre preko vsake meje. Pogosto v takšnem primeru dobiš že znan rezultat.
5. Preveri, če ima rezultat pravilne enote. Ta preskus je eno najmočnejših orodij pri odkrivanju morebitne napake. Razmisli tudi, ali je velikost rezultata smiselna. Včasih se zgodi, da so podatki nesmiselni, bolj verjetno pa je nesmiselno velik ali majhen rezultat posledica napake v računanju. Hitro poglej, če se nisi zmotil pri pretvarjanju enot ali pri računu z desetiškimi faktorji.
6. Na koncu razmisli, če nalogo lahko rešiš tudi po drugi poti. Takšen preskus je uspešnejši kot pa ponovno računanje po isti poti, saj se je v tem primeru težko izogniti morebitni napačni predpostavki, ki smo jo zagrešili.

Za predstavitev nove knjige v Knjižnici Sigma smo pripravili kar predgovor obeh avtorjev, saj sta v njem povedala o knjigi prav vse, kar bi radi povedali bralcem Preseka tudi mi. Res pa je tudi, da sta se avtorja v veliki meri ob nastajanju rokopisa pogovarjala s člani uredniškega odbora in tudi upoštevala prav vse njihove predloge. Kot dodatek pa smo objavili še njuno navodilo za reševanje nalog, ki bo prišel prav ne le mladim fizikom in matematikom pri tekmovanjih, pač pa tudi med rednim šolskim poukom. Na koncu knjige je objavljen seznam dostopnejših zbirk nalog, ki jih priporočata avtorja najbolj zagretim dijakom za fiziko in za fizikalna tekmovanja.

PREMISLI IN REŠI

REŠITEV NALOGE "BLIŽNJI POTENCI" IZ ČETRTE ŠTEVILKE P-11

Dobili smo 52 rešitev, večina reševalcev je našla bližnji potenci 2^{19} in 3^{12} , le nekaj se jih je zaustavilo prej. Rešitve so nam poslali:

Boštjan Antončič iz Kopra, Stanka Anžel s Ptuja, Aleš Bajt iz Novega mesta, Marko Baloh iz Žirovnice, Vlado Blagus iz Titovega Velenja, Ivi Čakš iz Celja, Jernej Čop iz Ljubljane, Roman Drnovšek iz Škofje Loke, Irena Dolinar iz Kranja, Marina Dvoršak iz Maribora, Martina Ekart iz Maribora, Katja Gartner iz Maribora, Mateja Gričar iz Hrastnika, Marko Gubenšek iz Celja, Matjaž Hartman iz Orehove vasi, Brigita Hvala s Ptuja, Peter Hudovernik s Polšice, Aleš Jančigaj iz Ljubljane, Franc Jerala iz Kranja, Andreja Jurica iz Slov. Konjic, Matej Klemenčič iz Ljubljane, Martina Knapp iz Griž, Pija Kunstek iz Ljubljane, Igor Lavrič iz Grosupljega, Andrej Leban z Jesenic, Dejan Likovič iz Celja, Oriana Marsešič iz Zazida, Jerica Maver iz Nove Gorice, Vida Mesec z Jesenic, Matjaž Miklavčič iz Hoč, Boštjan More iz Idrije, Andrej Macedoni iz Ljubljane, Suzana Orthaber iz Majšperka, Boris Polajžer iz Šmarja Sap, Pavle Popović iz Ljubljane, Alenka Potočnik iz Kranja, Lojzka Rajter iz Lenarta, Martina Rečnik iz Slovenskih Konjic, Jože Sadar iz Žužemberka, Jure Simšič iz Ljubljane, Mare Strehar iz Domžal, Milan Šernek iz Velike Polane, Matjaž Štefan iz Ankarana, Igor Šturm iz Škofje Loke, Primož Švigelj iz Kranja, Igor Velepčič iz Domžal, David Verbič iz Šempetra, Mitja Vidrih iz Ljubljane, Matjaž Vogel s Prevalj, Rudi Volf iz Trziča, Ivica Vončina iz Idrije, Andrej Zalar iz Šentjurja pri Celju.

Izžrebal smo Matjaža Vogla, Igorja Lavriča in Mitjo Vidriha. Poslali smo jim knjigo A. Vadnal: Osnove diferenčnega računa, ki je izšla v Sigmii.

Nekaj reševalcev nas je opozorilo na neprecizno formulacijo naloge, ki dopušča tudi trivialno rešitev $2^0 = 3^0$. Nekateri so do rešitve naloge prišli z računalnikom. V rubriki Računalništvo objavljamo tri take rešitve R. Dernovška, J. Čopa in D. Likoviča z našim komentarjem.

TELEVIZIJA NA OTOKU

Guliver se je odločil, da bo na Otoku (glej J. Swift, Guliverjeva popotovanja!) postavil mrežo televizijskih pretvornikov. Otok ima obliko kroga s polmerom 1,5 km. Televizijski pretvornik pokrije s svojim signalom krog s polmerom 1 km. Pomagajte Guliverju razmestiti pretvornike, tako, da jih bo čim manj in da bo s signalom pokrit vsak kotiček Otoka.

Peter Petek

DVA "DOKAZA", DA JE $2 = 1$

Pri dokazih bomo privzeli naslednjo definicijo in izrek teorije množic:
D. Dve množici sta enaki, če imata iste elemente.

I. Če sta dve množici enaki, imata enako mnogo elementov.

Zdaj "dokažimo", da je $2 = 1$.

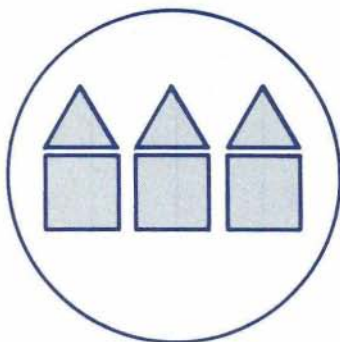
"Dokaz 1": Množica, ki ima za svoja edina elementa dve množici, A in B , je dvoelementna. Če je $A = B$, je $\{A, B\} = \{A\}$. Torej je $2 = 1$.

"Dokaz 2": Koliko elementov ima naslednja množica?

Janez: Šest.

Peter: Tri.

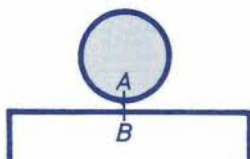
Torej je $6 = 3$. Če obe strani delimo s 3, dobimo $2 = 1$.



O TELESIH

Geometrijska telesa smo spoznali na njihovih realnih modelih. Tako sta nam kroglica iz krogličnega ležaja ali frnikula predstavljali model geometrijske krogle. Toda tu imamo dve možnosti: "zaprta" krogla, ki vsebuje tudi točke na površju in "odprta" krogla, ki vsebuje le točke, katerih razdalja od središča je manjša od radija krogle. Katera od teh dveh je bolj predstavljena z modelom, (npr. frnikulo)? Morda bo kdo presenečen, toda frnikula bolj predstavlja odprto kroglo. Zakaj?

Pa recimo, da verjamemo, da realni modeli bolj ustrezajo zaprti krogli. Isto velja potem za kocko. Položimo kroglo na kocko. Potem obstaja na krogli točka A , ki je najbližja kocki, in točka B na kocki, ki je najbližja krogli. Ker pa krogla in kocka nimata skupnih delov, je $A \neq B$. Potem pa je razdalja med A in B različna od 0. Še več, krogla se ne bo nikoli dotaknila kocke.



Izidor Hafner

SLIKOVNA KRIŽANKA »KARIKATURE«

									SESTAVIL PAVLE GREGORC	MAJHNA DEKLICA	Tek: izdel: pokri
HOMER- JEV EP			VSTOP- NICA			VRSTA KAMNA			ANTON POLENEC		
ČAR				NAJVIŠJE GOROVJE SVETA							
SKAND. M. IME				REDKA AFRIŠKA ŽIVAL						GOROVJE v J. Ameriki	
										MUSLIM. M. IME	
RAZJEDA V SLUŽ- NICI				SRD, MRŽNJA				NATRIJ			M.
								Sl. novinar, himalajec (ZORAN)			Tek. v ž
PERJE PRI REPI				JUNAK IZ TROJE, USTANOV. LACIJA					NABIREK VOSKA PRI SVEČI		
NAJV. GORA NA KRETI				ORGAN pri kravi					NOETOVA BARKA		
				ENOČLE- NIK					REŽISER WELLES		
KARLO- VAC			VRSTA testenin								
			BARVA igral. kart								
	VULKAN NA FILI- PINIH	PEVSKI ZBOR				TIRNICA				OŽINA NA MALAKI	AC
		ZMAGA PRI ŠAHU				TOPEL VETER					
Gl. mesto JORDA- NIJE					Skandi- nav. država						
					BARIJ						
OBROBJE GOZDA								BORILNA PRIPRAVA			
OSMANI								MESTO V ZAHODNI FRANCIJI			

81

REŠITVE NALOGE »BLIŽNJI POTENCI«

Naloga o bližnjih potencah, ki je bila objavljena v Preseku XI/4, se je glasila: poišči med števili do milijon dve potenci števil 2 in 3, ki se relativno čim manj razlikujeta.

Roman Drnovšek je nalogo rešil na dva načina. Prva rešitev je matematična in uporablja verižne ulomke (glej prispevek Petra Legiša: Verižni ulomki, Presek 1982/83, št. 1).

Denimo, da sta a in b taki števili, da je $2^a = 3^b$. Če enakost logaritmiramo in preoblikujemo, dobimo $b/a = \log 2 / \log 3 = 0.6309$. Seveda je to število iracionalno, zato ga ne moremo zapisati v obliki ulomka celih števil. Če pa nas zanima le približek, lahko število $\log 2 / \log 3$ izrazimo v obliki verižnega ulomka in zanj poiščemo racionalne približke z majhnimi imenovalci. Roman je napisal program v pascalu, ki dano racionalno število razvije v verižni ulomek.

```
PROGRAM verizniulomki(input,output);
  VAR p,q,i,k : integer;
      a       : ARRAY [ 1 .. 100 ] OF integer;
  PROCEDURE verizni(x,y,n : integer);
  BEGIN (* verizni *)
    IF x > 1 THEN
      BEGIN
        a[n] := x DIV y; k := k + 1;
        verizni(y, x MOD y, n + 1)
      END
    END (* verizni *) ;
  BEGIN (* glavni program *)
    writeln(' Vpiši števec in imenovalec ulomka ');
    readln(p,q); k := 0;
    verizni(p,q,1);
    write('[' );
    FOR i := 1 TO k DO write(a[i], ' ');
    writeln(']')
  END.
```

Program je lepo napisan. Moti nemara le število 100, ki se brez pojasnila pojavlja v njem. Namesto 100 bi lahko zapisali tudi kako drugo veliko število. Toliko mest je namreč Roman rezerviral za števce verižnih ulomkov. Zato je

lepše, če 100 nadomestimo s konstanto, ki jo seveda napovemo s stavkom CONST. Roman se je odločil za število 100, ker je vedel, da na običajnih računalnikih z običajno aritmetiko ne moremo imeti prevelikih celih števil p in q in je prostora za verižni ulomek dovolj. Če bi vzel namesto 100 kakšno bistveno manjše število, pa bi pri kakšnih čudnih podatkih na kakem računalniku utegnilo priti do prekoračitve. Morda obstajajo računalniki, ki so namenjeni za delo z velikimi števili in je na njih največje celo število maxint tako veliko, da v Romanovem programu utegne postati $n > 100$. Skratka, proceduro verizni se spodobí popraviti tako, da javi napako, če postane n prevelik. Ob tem razmišljanju pa se pojavlja naslednje vprašanje. Kako velik bi moral biti maxint, da bi v programu verizniulomki spremenljivka n (in z njo tudi k) lahko zavzela vrednost 101? Nalogo lahko še malo drugače zasukamo. Med pravimi ulomki z majhnimi imenovalci poišči tiste, ki imajo najdaljši razvoj v verižni ulomek.

Roman je vzel za $\log 2 / \log 3$ približek $631/1000$. Če poženemo program verizniulomki s podatkom 631 in 1000, dobimo [0 1 1 1 2 2 4 2 1 3]. Mi smo za $\log 2 / \log 3$ vzeli $6309/10000$. Romanov program nam je dal rezultat [0 1 1 1 2 2 3 1 1 1 13 1 2]. Poglejmo si nekaj skupnih približkov.

Verižni ulomek	=	b/a	2^a	3^b	napaka
[0 1]	=	1/1	2	3	$(3 - 2)/2 = 50.00\%$
[0 1 1]	=	1/2	4	3	$(4 - 3)/3 = 33.33\%$
[0 1 1 1]	=	2/3	8	9	$(9 - 8)/8 = 12.50\%$
[0 1 1 1 2]	=	5/8	256	243	$(256 - 243)/243 = 5.35\%$
[0 1 1 1 2 2]	=	12/19	524288	531441	= 1.36%
[0 1 1 1 2 2 4]	=	53/84	prevelika		= 0.21%
[0 1 1 1 2 2 3]	=				

Ker mora biti $2^a < 1000000$, je $a < 20$. Ker mora biti $3^b < 1000000$, mora biti $b < 13$. Od tod lahko sklepamo, da sta potenci z $a = 19$ in $b = 12$ najbližji med vsemi potencami 2^a in 3^b do 1000000.

Roman je to trditev preizkusil z drugim programom, ki poišče najbližji potenci s preizkušanjem vseh možnosti.

Romanov program smo čisto malo popravili. Ker smo ga preizkusili na računalniku Partner, ki ima žal maxint = 32767, smo se morali omejiti na števila, ki so dosti manjša od milijona. Vpeljali smo konstanto n . Pri preizkusu smo vzeli $n = 32000$. Roman je relativno napako meril tako, da je

razliko potenc delil z večjo, mi jo delimo z manjšo od obeh potenc. To pa ne vpliva bistveno na rezultat.

```

PROGRAM bliznjipotenci(output);
  CONST n = 100000; (* največje število *)
  VAR   a,b,aiskani,biskani,x,y,z : integer;
        r,rmin : real;
BEGIN
  rmin := 1;
  FOR a:=1 TO trunc(ln(n)/ln(2)) DO (* pregled vseh potenc števil *)
    FOR b:=1 TO trunc(ln(n)/ln(3)) DO (* 2 in 3 do n *)
      BEGIN
        x := round(exp(a*ln(2)));
        y := round(exp(b*ln(3)));
        z := abs(x - y);
        IF x < y THEN r := z/x (* določitev relativne napake *)
          ELSE r := z/y;
        IF r < rmin THEN (* določimo a in b z najmanjšo *)
          BEGIN (* relativno napako *)
            rmin := r;
            aiskani := a; biskani := b;
            writeln(a:5,b:5,x:5,y:5,r:7:4);
          END
        END;
        writeln('Bližnji potenci sta 2 na ',aiskani,' in 3 na ',biskani);
        writeln('Relativna napaka je ',rmin:7:4)
      END
    END
  END.

```

Jernej Čop nam je poslal program v basicu. Pri reševanju je uporabljal računalnik Sinclair ZX-Spectrum. Program smo preizkusili na Partnerju in je delal, ko smo zmanjšali dve konstanti. Jernejev program izpiše vse pare potenc, ki se razločujejo za manj kot 10%. Dobil je naslednje rezultate:

2 na 8 = 256	
3 na 5 = 243	razlika je 13, kar je 5.35%
2 na 11 = 2048	
3 na 7 = 2187	razlika je 139, kar je 6.79 %
2 na 19 = 524288	
3 na 13 = 531441	razlika je 7153, kar je 1.36 %

To je seveda najboljši rezultat med števili do milijona. Pri večjih številih opozarja Jernej še na naslednje potence:

2 na 65 in 3 na 41, ki se razlikujeta za	1.15%,
2 na 84 in 3 na 53, ki se razlikujeta za	0.21%,
2 na 103 in 3 na 65, ki se razlikujeta za	1.58%.

Tudi **Dejan Likovič** iz Celja nam je poslal kratek program v basicu, ki ga z malenkostnimi popravki objavljamo.

```
5 C1 = 2
10 FOR X = 1 TO 12
15 A = INT(3*X)
20 FOR Y = X TO 19
40 B = 2*Y
50 C = A/B
60 IF B > A THEN C = B/A
80 IF C < C1 THEN C1 = C:A1=A:B1=B:X1=X:Y1=Y
100 NEXT Y:NEXT X
105 C1 = (C1-1)*100
110 PRINT "3 + "X1"="A1
120 PRINT "2 + "Y1" = "B1
130 PRINT "ODSTOTEK ..."C1
```

Dejanova stavka

```
20 FOR Y = 1 TO 19
25 IF X > Y THEN NEXT Y.
```

smo nadomestili z novim enakovrednim stavkom 20. Naš računalnik namreč ni prenesel dveh stavkov NEXT Y za isti FOR. Ko smo ga popravili, pa je program dal pravilen odgovor. Seveda bi se dalo program še lepše napisati. Tako se v basicu spodobi vselej pisati besedico LET v prireditvenih stavkih.

Za konec si oglejmo še naš basiški program, ki za poljubni osnovi in za poljubno zgornjo mejo računa bližnji potenci. 

V televizijski reportaži smo slišali:

Lunin modul ima štiri in ne tri noge zato, ker "so tri točke potreben, ne pa tudi zadosten pogoj za določitev ravnine".

V časopisnem članku smo lahko prebrali:

Astronavti se ne oddaljujejo preveč od modula zato, ker je Luna, ki je manjša od Zemlje, bolj ukrivljena in če bi se astronavti preveč oddaljili, ne bi videli modula in se ne bi znali vrniti.

Iz knjige: V. Devide, MATEMATIKA KROZ KULTURE I EPOHE
Izbral *Ciril Velkovrh*

```
100 REM POTENCI
120 LET D = 0
130 LET T = 0
140 LET D2 = 1
150 LET T3 = 1
160 LET N = 100
170 INPUT "OSNOVI";B2,B3
175 INPUT "MEJA";M
180 REM
190 IF D2 < T3 THEN 230
200 LET T3 = B3*T3
210 LET T = T + 1
220 GOTO 260
230 REM
240 LET D2 = B2*D2
250 LET D = D + 1
260 REM
270 LET S = D2
280 IF S > T3 THEN LET S = T3
290 LET E = ABS(D2-T3)/S*100
300 IF E > N THEN 330
310 LET N = E
320 PRINT D,T,D2,T3,E
330 REM
340 IF S < M THEN 180
360 END
```

S tem programom smo poiskali z $B2 = 2$ in $B3 = 19$ in $M = 200000$ potenci 2^{17} in 19^4 , ki se razločujeta le za 0.58 odstotka. Bilo bi zanimivo poznati med števili do milijon tisti dve potenci, ki se najmanj ločita. Seveda veljajo le "prave" potence, ki imajo eksponente vsaj 2.

Tomaž Pisanski

OSEM

Tovarišica vpraša Branka: "No, Branko, koliko je polovica od osem?"

Branko: "Kako pa, vodoravno ali navpično?"

Tovarišica: "Kako to misliš?"

Branko: "Ja, vodoravno je 0, navpično pa 3!"

Ali znaš tudi ti razložiti rešitev?

Lilijana Vrežanovič

REŠITVE NALOG

10. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE – rešitve nalog (str. 12 P-XII/1)

1. RAZRED

1.

Da bi lahko izračunali vrednost izraza $x = a^4 + b^4 + c^4$ z upoštevanjem podatkov: $a + b + c = 0$ in $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, najprej kvadriramo poslednjo enakost:

$$\begin{aligned}1 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = \\&= x + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = x + 2y\end{aligned}$$

Preostane nam izračun vrednosti izraza $y = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Iz $a + b + c = 0$ dobimo s kvadriranjem:

$$0 = (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) = 1 + 2(ab + bc + ca)$$

ali $2(ab + bc + ca) = -1$, kar še enkrat kvadriramo:

$$\begin{aligned}1 &= 4(ab + bc + ca)^2 = \\&= 4((a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2(ab)(bc) + 2(bc)(ca) + 2(ca)(ab)) = \\&= 4y + 8abc(a + b + c) = 4y\end{aligned}$$

$$\text{Torej je } y = -\frac{1}{4} \text{ in } x = a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2y = \frac{1}{2}$$

2.

Število je deljivo s 198 natanko tedaj, ko je deljivo z 2, z 9 in z 11 hkrati. 1984 je sodo število in zato je sodo tudi na opisani način sestavljeno število: 198419... ..841984. Označimo z n iskano število zapisov števila 1984 in uporabimo kriterija za deljivost z 9 in z 11:

a) vsota cifer mora biti deljiva z 9:

$$n \cdot (1 + 9 + 8 + 4) = 22n = 9k$$

b) alternirajoča vsota cifer mora biti deljiva z 11:

$$n \cdot (1 - 9 + 8 - 4) = -4n = 11h$$

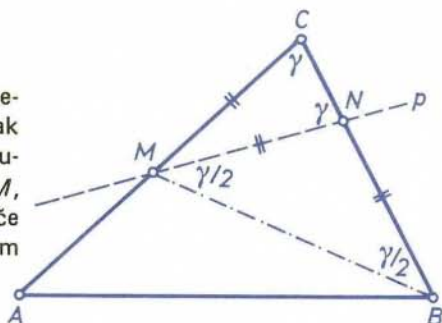
Prva enakost pove, da mora biti n deljiv z 9, druga, da mora biti deljiv tudi z 11. Torej je n najmanjši mnogokratnik števila 99. Najmanjše število zapisov je zato 99.

(Opomba: Nalogo je mogoče lepo rešiti tudi brez poznavanja kriterijev deljivosti.)

3.

Denimo, da smo tako premico že načrtali. Kot $\angle ACB$ označimo z γ . Trikotnik $\triangle NCM$ je enakokrak (MN in MC sta skladni), zato je tudi kot $\angle CNM$ enak γ . Trikotnik $\triangle MNB$ je prav tako enakokrak, zato ima skladna kota $\angle NBM$ in $\angle NMB$. Njuna vsota je enaka kotu $\angle MNC$, ki je zunanji kot trikotnika $\triangle MNB$. Zato oba merita $\gamma/2$. Odtod sledi konstrukcija:

Najprej razpolovimo kot γ in ga nanesemo pri oglišču B tako, da en krak sovpada s stranico BC . Presečišče drugega kraka s stranico AC je točka M , točko N pa dobimo kot presečišče krožnice s središčem v M in polmerom MC s stranico BC .



4.

Osnovo številskega sistema označimo z n . V tem sistemu se števili končujeta na isto cifro natanko tedaj, ko je njuna razlika deljiva z n . Denimo, da sta števili a in b taki. Osnova n deli razliko $b - a$, zato deli tudi razliko kvadratov: $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. To pa pomeni, da se števili a^2 in b^2 tudi končujeta na isto cifro. Torej zadostuje, da si ogledamo kvadrate števil, ki imajo v tem sistemu v zapisu eno samo cifro, torej števil $0, 1, \dots, n-1$. Razlika kvadratov števil 1 in $n-1$, ki sta v sistemu z osnovo n , ki je večja od 2, različni, je:

$$(n-1)^2 - 1 = n(n-2)$$

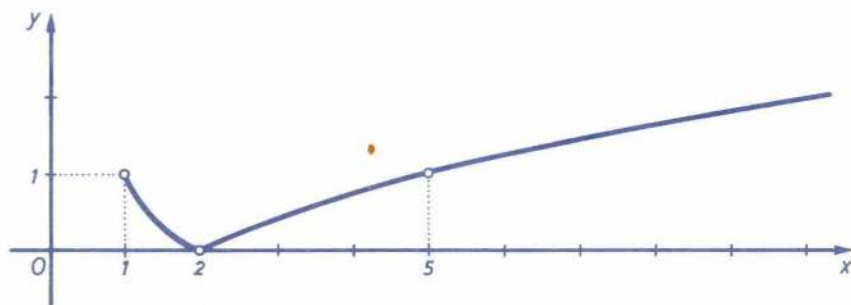
in je deljiva z n . To pomeni, da je cifer, s katerimi se končujejo kvadrati, manj kot različnih ostankov pri deljenju z n . Skratka, obstaja vsaj ena cifra, na katero se kvadrat naravnega števila v sistemu z osnovo n ne more končati.

2. RAZRED

1.

Izraz pod korenem je kvadrat binoma: $y = \sqrt{(1 - \sqrt{x-1})^2}$ ali $y = |1 - \sqrt{x-1}|$. Iz tega zapisa vidimo, da mora biti $x-1 \geq 0$, kar pomeni,

da je definicijsko območje poltrak $x \geq 1$. Pri risanju grafa upoštevamo, da je za $x < 2$ izraz $1 - \sqrt{x-1}$ pozitiven in je zato $y = 1 - \sqrt{x-1}$, za ostale vrednosti iz definicijskega območja pa negativen, torej: $y = -(1 - \sqrt{x-1})$. Še graf:

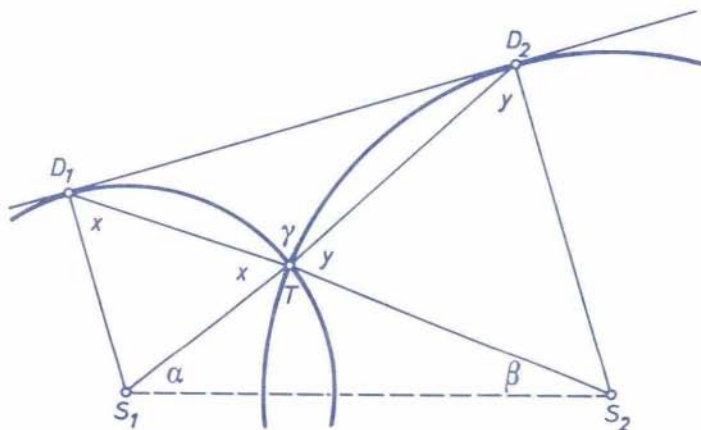


2.

Naj bo $\alpha = \angle TS_1S_2$, $\beta = \angle TS_2S_1$, $\gamma = \angle D_1TD_2$, $x = \angle S_1TD_1$ in $y = \angle D_2TS_2$ (glej skico!). Upoštevajmo, da sta kota $\angle S_1D_1D_2$ in $\angle D_1D_2S_2$ prava in da je zaradi $\overline{S_1D_1} = \overline{S_1T}$: $x = \angle S_1D_1T$, zaradi $\overline{S_2D_2} = \overline{S_2T}$ pa tudi $y = \angle S_2D_2T$. Iz trikotnika $\triangle D_1TD_2$ izvedemo: $(\frac{\pi}{2} - x) + (\frac{\pi}{2} - y) + \gamma = \pi$ ali $\gamma = x + y$.

Upoštevamo še, da (koti z vrhom v točki T) je:

$x + y + \gamma + (\pi - (\alpha + \beta)) = 2\pi$ ali $x + y + \gamma = \alpha + \beta + \pi$. Iz obojega dobimo: $\gamma = (\alpha + \beta + \pi)/2$.



3.

Nalogo najlažje rešimo s pomočjo vektorjev. Označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Potem je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ in $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$. Na drugi strani je

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

in zato velja: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Za to vsoto napišemo trikotniško neenakost: $2\overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{2MN}| = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|$ ali $2\overrightarrow{MN} \leq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. To pa smo ravno morali dokazati.

4.

Na krožnico vrišemo oglišča pravilnega petkotnika. Očitno poljubna tri oglišča določajo enakokrak trikotnik. Imamo pet oglišč in le dve barvi, torej so vsaj tri oglišča iste barve. Katerakoli tri izmed teh pa določajo iskani trikotnik.

3. RAZRED

1.

Funkcijske vrednosti funkcij $\sin$ in $\cos$ ležijo na intervalu $[-1, 1]$, zato je za vsak $x \in \mathbf{R}$: $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ in $0 \leq \cos^2 x \leq 1$. Zato je $\sin^4 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^3 \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ista vsota je zato nenegativna. Obe funkciji nimata skupnih ničel, zato je vsota pozitivna.

2.

Obe strani enačbe najprej proučimo. Vemo, da je $\log_y x \cdot \log_x y = 1$ in tako imamo na levi strani enačbe vsoto števila $t = \log_x y$ in njegove obratne vrednosti. Za izraz $t + 1/t$ pa velja, da je po absolutni vrednosti večji ali enak 2. Enačaj je možen le za $t = 1$ ($x = y$) in za $t = -1$ ($xy = 1$).

Tudi absolutna vrednost desne strani je omejena: nikoli ne preseže vrednosti 2. Če je $xy = (2k + 1/2)\pi$, imamo na desni vrednost 2, če pa je $xy = (2k - 1/2)\pi$, vrednost -2 .

V drugem primeru dobimo $1 = (2k - 1/2)\pi$, kar ni res za noben $k \in \mathbf{Z}$. V prvem primeru pa zvemo: $x^2 = (2k + 1/2)\pi$, kar nam za $k = 0, 1, 2, \dots$ da rešitev:

$$x = y = \sqrt{(2k + 1/2)\pi}$$

pri čemer moramo seveda izbrati pozitivne vrednosti korena, saj logaritem sicer ni definiran.

3.

V konveksnem četverokotniku $ABCD$ označimo z S presečišče diagonal. Za poljubno točko P v prostoru veljata trikotniški neenačbi: $\overline{AC} \leq \overline{AP} + \overline{PC}$, $\overline{BD} \leq \overline{BP} + \overline{PD}$. Pri tem veljata enačaja le, če je P na diagonalah, AC v prvem, oziroma le na diagonalah BD v drugem primeru. Oba enačaja hkrati veljata le, če je $P = S$. Vse to nam pove, da je

$$\overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS} + \overline{DS} \leq \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$$

in S je iskana točka.

4.

V množici z n točkami imamo skupno $n(n-1)/2$ parov različnih točk. Torej je trditev zanimiva le za $n(n-1)/2 \geq 3n$ ali $n \geq 7$. Sleherna točka množice ima lahko kvečjemu 6 sosed na razdalji 1 (pravilni šestkotnik in središče!), saj so medsebojne razdalje sosed vsaj 1. Vseh točk je n , vseh takšnih parov torej kvečjemu $6n/2 = 3n$ (vsak par štejemo le enkrat). Robne točke množice tega pogoja (6 sosed) ne morejo izpolniti, zato velja stroga neenakost.

4. RAZRED

1.

Zapišimo splošna člena obeh zaporedij: $a_n = 1 + 4(n-1)$, $b_n = 4 + 11(n-1)$.

Skupni členi obeh zaporedij so rešitve linearne diofantske enačbe $1 + 4(k-1) = 4 + 11(h-1)$ ali $11h - 4k = 4$. Iz te enačbe sledi, da mora biti h deljiv s 4, torej $h = 4q$ in potem še $k = 11q - 1$. Zaporedje skupnih členov je tedaj

$$s_n = 44n - 7 = a_{11n-1} = b_{4n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2.

Zaradi osne simetrije zadošča gledati osni presek obeh teles. Osni presek roba čaše je parabola $y = x^2$, roba kroglice pa krožnica s središčem v točki $(0, d)$ in s polmerom r : $x^2 + (y - d)^2 = r^2$. Odtod dobimo enačbo za ordinate presečišč obeh krivulj: $y^2 + (1 - 2d)y + (d^2 - r^2) = 0$ in pogoj smiselnosti $y \geq 0$. Sedaj odgovorimo:

a) Če se kroglica ne zagozdi, pade na dno in je zato $r = d$. Enačba $y^2 + (1 - 2r)y = 0$ ima tedaj poleg predpisane rešitve $y = 0$ še rešitev $y = 2r - 1$. Slednja nam za $r \leq 1/2$ ne nagaja (smiselnost!). Če pa je $r > 1/2$, se telesi sekata, kar ni mogoče. Največji polmer, pri katerem se kroglica še ne zagozdi, je torej $1/2$.

b) Če se kroglica zagozdi (kar se po a) zgodi le za $r > 1/2$), sme imeti enačba za presečišči le eno rešitev. Diskriminanta enačbe je tedaj 0 ali $(1 - 2d)^2 - 4(d^2 - r^2) = 4r^2 + 1 - 4d = 0$. Tako izvemo: $d = r^2 + 1/4$, $r > 1/2$.

3.

Oglišča pravilne tristrane piramide označimo z A, B, C in D , pri čemer je D vrh piramide. Trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle ACD$ sta skladna, zato sta višini na stranico AD v obeh trikotnikih enako dolgi. Trikotnik $\triangle BTC$ (glej skico) je zato enakokrak s kotom φ ob vrhu T , ki ga določata obe višini. Če označimo $x = \overline{BT}$, je

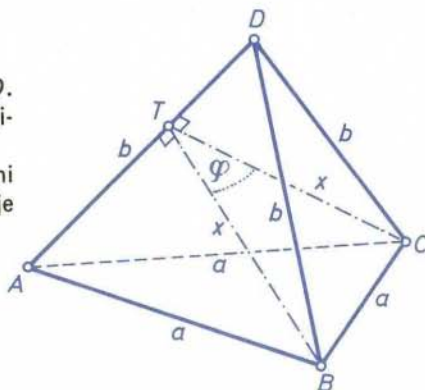
$$x = \frac{a}{2 \cdot \sin(\varphi/2)}$$

Potem si ogledamo še trikotnik $\triangle ABD$. V njem zaznamujemo višino na stranico a s črko v in upoštevamo:

a) ploščina trikotnika je po eni strani $(b \cdot x)/2$, po drugi $(a \cdot v)/2$. Zato je $bx = av$.

b) Pitagorov izrek:

$$v^2 + \frac{a^2}{4} = b^2$$



Po krajšem računu dobimo zvezo:

$$a = b \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2(\varphi/2)}}$$

4.

Če je množica S končna, obstajajo v njej točke z največjo ordinato. Med vsemi temi obstaja iz istega razloga točka z največjo absciso ("vogalna" točka)*. Ta točka je oddaljena za 1 od kvečjemu dveh točk množice S . Pogoji torej v končnih množicah ne more biti izpolnjen.

Primer, ki pokaže, da je to mogoče za neskončne množice, pa je

$$S = \{(x, y), y \in \{0, 1\}, x \in \mathbb{Z}\}$$

Miran Černe, Igor Kukavica

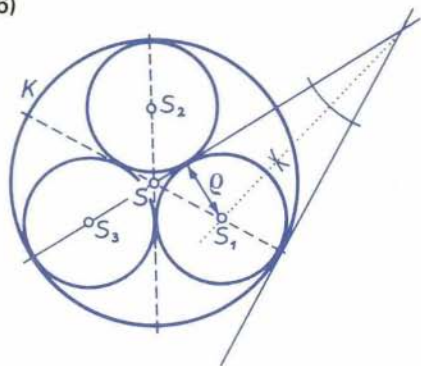
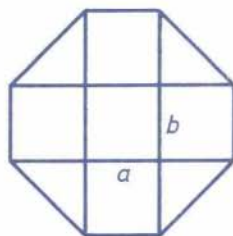
IZBRANE NALOGE

za učence od V. do VIII. razreda

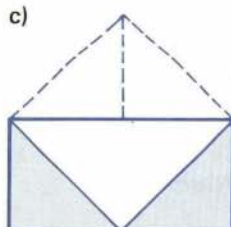
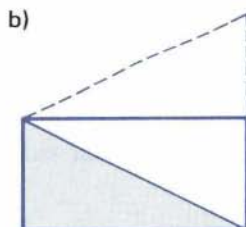
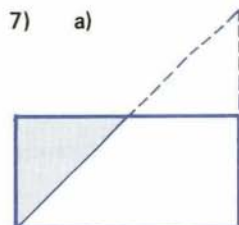
— rešitve s strani 74

- 1) Vsota je 154.
- 2) $a + b = 12$, $(a, b) \in \{ (3,9), (4,8), (5,7), (6,6), (7,5), (8,4), (9,3) \}$
- 3) V enajstih naravnih številih sta zagotovo dve taki števili, ki imata na koncu enako cifo (cifer je 10). Zato se razlika takih dveh števil končuje z ničlo; torej je deljivo z 10.
- 4) Premici se sekata pod kotom 30° (150°).
- 5) Zaporedna števila so: 4, 5, 6 in 7.
- 6)

8) $p = 2(a^2 + b^2) + 3ab$



- 9) Vsota bo manjša od razlike za $-1 < b < 0$.
- 10) Takoj se vidi, da morata biti $a \neq 0, b \neq 0$, zato je $c = 0$.
- 11) Trikotnik je pravokoten, s kotom 30° .
 $\sigma = 3(1 + \sqrt{3})$
- 12) Ploščina večjega kvadrata je 8-krat večja od manjšega kvadrata (ali večja za 700%).

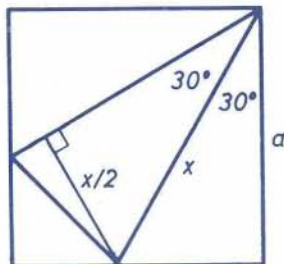


13)

$$x = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$p = \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$p = \frac{a^2}{3}$$



ŠE NEKAJ MISLI

Zviti ljudje znanost prezirajo, preprosti se ji čudijo, modri pa jo koristijo (Bavcon).

Misel je podobna vodnjaku — voda je najprej kalna, počasi pa se zbistri (Kitajska modrost).

Nikdar v življenju mi ni bila matematika nadležna, ne pri prenašanju na druge, ne meni samemu. Bila mi je potreba in umetniški užitek, ki ga more vsak matematik razbrati iz mojih del (J. Plemelj).

Kdor se zaveda, da zna malo, ve veliko (Hebrejska modrost).

Če zaprete vrata vsem zmotam, bo tudi resnica ostala zunaj (Tagore).

Ni široke ceste, niti bližnjice do znanja (Evklid).

Če sem videl dlje kot drugi, je to zato, ker sem stal na ramenih velikanov (Newton).

RAZPIS TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV V EKSPERIMENTALNEM ZNANJU FIZIKE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov razpisuje dopisno tekmovanje srednješolcev v reševanju eksperimentalnih nalog iz fizike. S tekmovanjem želimo vzpodbuditi zanimanje za eksperimentalno fiziko in poglobiti ustrezno znanje in spretnosti. Najuspešnejši dijaki se bodo lahko udeležili mednarodne fizikalne olimpiade v Portorožu in Kopru konec junija 1985. Dva dni bodo gosti Društva in se bodo z izbranimi srednješolci iz vse Jugoslavije pomerili na istih eksperimentalnih nalogah kot tekmovalci na olimpiadi.

Tekmovalne naloge bodo objavljene v dveh delih v tej in v naslednji številki Preseka. Razpis bo objavljen tudi v drugih matematično-fizikalnih glasilih Jugoslavije.

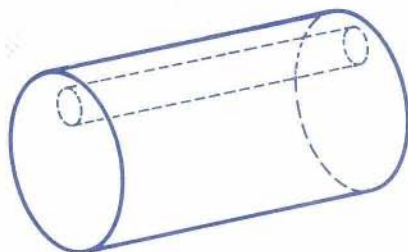
Pogoji dopisnega tekmovanja:

1. Dijaki tekmujejo posamezno. Tekmovalec na koncu izdelka napiše izjavo, da je nalogo reševal samostojno, brez pomoči mentorjev in sodelovanja sošolcev. Mentorje zato prosimo, da danih nalog ne obravnavajo pred iztekom razpisa.
2. Rešitve pošiljajte na uredništvo Preseka, Jadranska 19, 61 111 Ljubljana, p.p. 64, z oznako: "eksperimentalne naloge". Zadnji rok za oddajo prvih petih nalog je 15. februar 1985.
3. Pri izbiri najboljših reševalcev bomo upoštevali:
 - a) število rešenih nalog,
 - b) način reševanja in predstavitev,
 - c) uspeh na šolskem in republiškem tekmovanju iz fizike v šolskem letu 1984/85.
4. Udeleženci tekmovanja v Portorožu in Kopru (20 do 30 iz Slovenije) bodo znani po zveznem tekmovanju iz fizike.

Naloge:

(Naloge so izbrane z dosedanjih fizikalnih olimpiad.)

1. Izmeri specifično toploto petroleja ali kakšne druge netopljive tekočine! Pri meritvi lahko uporabiš tehtnico, kalorimeter, termometer, malonapetostni izvor, stikala, električni grelec, kozarec, vodo in petrolej (Varšava 1967, Poljska).
2. V enega izmed dveh enakih valjev je vzporedno z osjo zvrtna okrogla luknja (slika 1). Robni ploskvi obeh valjev sta pokriti s tankima ploščama, tako da se valja na videz ne razlikujeta. Določi gostoto snovi, iz katere sta valja, in razmik med osjo luknje in osjo valja (Bukarešta 1972, Romunija)! Opiši potek namišljenega poskusa!
3. Z merilnim trakom izmeri goriščne razdalje dveh zbiralnih in ene razpršilne leče. Določi lomni količnik stekla, iz katerega sta zbiralni leči! Lomni količnik vode je 1,33 (Moskva 1970, ZSSR). Leče izberi sam.
4. Z univerzalnim instrumentom in uporniki izmeri odvisnost moči baterije od toka. Določi notranji upor in gonilno napetost! Nariši koristno moč, celotno moč in izkoristek v odvisnosti od zunanjšega upora (Sofija 1971, Bolgarija)! Uporabi 4,5 V baterijo.
5. V zaprti škatli je upornik, v drugi kondenzator in v tretji tuljava. Kako bi razpoznal, kaj je v škatli, če sta na njej le priključni puši? Metodo preskusi na izbranem uporniku, kondenzatorju in tuljavi (Budimpešta 1968, Madžarska)!



Napotki za pisanje poročila:

1. Naštej vse potrebščine, ki si jih uporabil pri poskusu!
2. Skiciraj poskus in opiši potek merjenja! Piši jasno in čitljivo, saj bomo lahko le na podlagi tvojega pismenega izdelka ugotovili, če si nalogo pravilno reševal!
3. Če si za izvedbo meritve naredil kako napravo sam, nariši njeno skico s približnimi dimenzijami!
4. Naredi več meritev! Izračunaj povprečne vrednosti in oceni napako pri merjenju!
5. Kako si ocenil natančnost uporabljenih merilnih naprav?
6. Kjer se da prikaži rezultate meritev grafično!

Andrej Kuhar

Slika 1. Najprej je bilo na sporedu tekmovanje v reševanju teoretičnih nalog.

Slika 2. Dan počitka so dijaki izkoristili za potep po Stockholmu. Nekateri so takooooo uspešno reševali naloge.

Slika 3. Pri eksperimentalnih nalogah so se tekmovalci srečali z moderno opremo: osciloskopom in sinusnim generatorjem ter laserjem. (Glej fotografijo na IV strani ovitka.)

Slika 4. Med našimi dijaki je bil najuspešnejši Matjaž Žitnik iz Maribora (na sliki stoji na desni), ki je osvojil pohvalo.

Bojan Golli



2



1



4

**MEDNARODNA
FIZIKALNA
OLIMPIADA V SIGTUNI
NA ŠVEDSKEM
(od 24. 6. do 1. 7. 1984)**