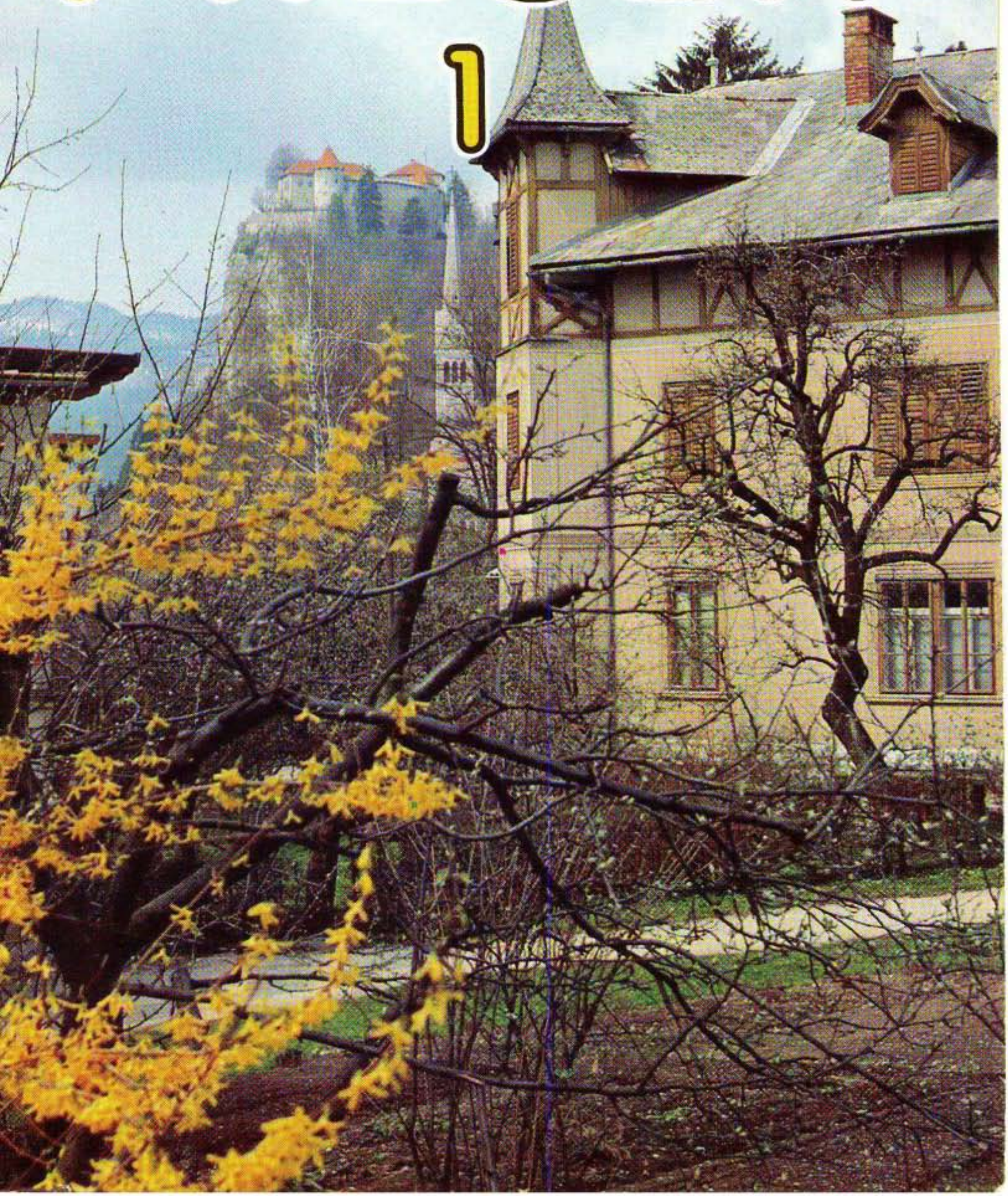
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 12, 1984-85,

PRESEK

1




MARINER 4. 1964. XI. 28
LÉGIPOSTA
20f
MAGYAR POSTA


SAN MARCO MŰHOLD 1964. XII. 15
LÉGIPOSTA
30f
MAGYAR POSTA


MOLNYIJA 1 • 1965. IV. 23.
LÉGIPOSTA
40f
MAGYAR POSTA


KÉTLÉPCSŐS M. RAKÉTA 1965. VI. 17.
LÉGIPOSTA
60f
MAGYAR POSTA


SHAPIR • 1965. VII. 5.
LÉGIPOSTA
1Ft
MAGYAR POSTA


SZONDA 3 • 1965. VII. 18.
LÉGIPOSTA
2,50Ft
MAGYAR POSTA


ПОЧТА СССР
14-16 ОКТЯБРЯ 1976
СОЮЗ-23
10
1976
В. Д. Зудов
В. И. Рождественский


10c
AIR MAIL
FIRST MAN ON THE MOON
UNITED STATES

PRESEK - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

12. letnik (1984/85) številka 1, strani 1 - 64

VSEBINA

U V O D N I K

KOT ŽE VRSTO LET JE TUDI LETOS Z NOVIM ŠOLSKIM LETOM PRED VAMI NOVA 1. ŠTEVILKA P R E S E K A. V UREDNIŠTVU LISTA UPAMO, DA VAM BO TUDI V PRIHODNJE VSAJ TAKO VŠEČ, KOT JE BIL VAM IN VAŠIM PREDHODNIKOM V NJEGOVI ENAJSTLETNI DOBI IZHAJANJA. TO POTRJUJE VELIKO ŠTEVILO NAROČNIKOV V PRETEKLIH LETIH TER PRENEKATERA USTNA IN PISMENA SPOROČILA, KI SMO JIH PREJELI.

Z NOVIM LETNIKOM UVAJAMO PRI PRESEKU DVE NOVOSTI. PRVA JE NOVA ZUNANJA OBLIKA, V KATERO SMO ODELI NAŠ LIST. PREPRIČANI SMO, DA VAM BO ŠE PRIVLAČNEJŠA KOT DOSLEJ. TUDI TEKSTE, KI SO SEDAJ VELIKO LEPŠE NATIPKANI, BOSTE GOTOVO ŠE RAJE PREBIRALI. NAŠA ŽELJA JE, DA BOMO SEDAJ S TAKO KVALITETNIM TISKOM NEMOTENO NADALJEVALI. DRUGA NOVOST PA JE UVEDBA NOVE RUBRIKE R A Č U N A L N I Š T V O. TO PODROČJE JE V ZADNJEM ČASU POSEBNO MED MLADIMI DOŽIVELO IZREDNO ZANIMANJE. ZATO JE PRAV, DA PRESEK OBJAVLJA ČIM VEČ PRISPEVKOV TUDI S TEGA PODROČJA.

TUDI TOKRAT SMO 1. ŠTEVILKO POSLALI NA VSAKO ŠOLO VSAJ V TOLIKŠNEM ŠTEVILU KOT ZADNJO V LANSKEM LETU. UČITELJE MATEMATIKE IN FIZIKE PROSIMO, DA PRESEK PRIPOROČIJO UČENCEM IN DIJAKOM, TER NAM ZBRANA NAROČILA POSREDUJEJO VSAJ DO 20. SEPTEMBRA 1984, DA BOMO VEDELI, KAKŠNO NAKLADO LAHKO NAROČIMO ZA NASLEDNJE ŠTEVILKE.

NA ŽALOST SMO MORALI ZARADI SKOKOVITEGA NARAŠČANJA CEN PAPIRJA IN DRUGIH STORITEV NAROČNINO DVIGNITI NA 200.-DIN ZA SKUPINSKA NAROČILA (TER 250.- DIN ZA POSAMEZNIKE). KER TO POMENI NEKAJ ČEZ 30.- DINARJEV ZA IZVOD, VERJETNO IZDATEK ZA TAKO POUČNO, KORISTNO IN HKRATI ZABAVNO BRANJE NE BO PREVELIK. NAŠE ZVESTE UČITELJE PROSIMO, DA NAM ZBRANO NAROČNINO NAKAŽEJO ČIMPREJ, VSEKAKOR PA VSAJ DO KONCA KOLEDARSKEGA LETA.

Edvard Kramar

PRESEK IN RAČUNALNIŠTVO

V zadnjih desetih letih, odkar izhaja Presek, se je marsikaj spremenilo. Prav gotovo pa se je v tem času najbolj razmahnilo računalništvo. Prodrlo je v srednje šole, zdaj pa že tudi v osnovne šole in na domove. Po nekaterih ocenah je v Sloveniji že nekaj tisoč osebnih računalnikov, čeprav je uvoz računalnikov skoraj nemogoč. Upajmo, da se bodo razmere za nakup osebnega računalnika izboljšale, in bo tako dostopen mladim tudi v večjem številu.

Ne glede na to smo v uredniškem odboru Preseka sklenili, da bomo upoštevali želje mnogih bralcev in bomo velik del Preseka namenili računalništvu. V zadnjih letih je Presek objavljal naloge z republiških tekmovanj iz računalništva, vendar čutimo, da je to premalo. S to številko začenjamo novo rubriko: RAČUNALNIŠTVO. Če bo odmev med bralci ugoden in če bodo finančne razmere dopuščale, bomo računalniški del Preseka kmalu okrepili. Zaenkrat ne bomo obljubljali preveč. Vabimo pa vas, dragi bralci, da nam čimprej pošljete svoje prispevke, programe, želje in vprašanja iz računalništva.

Za konec pa še *nagradna naloga.* Napišite program, ki mlajšega bratca ali sestrico uči seštevanja. Najbolje je, če program zahteva tri števila, potem pa preveri, ali je tretje število vsota prvih dveh. Naloga je seveda preprosta. Zato bomo pri rešitvah upoštevali marsikaj: pravilnost programa, duhovitost dialoga in pa morebitne posplošitve (večkrat lahko sprašujemo, na koncu dobimo oceno in tako naprej).

Tomaž Pisanski

Pred časom nam je pisal *Marko Popovič* iz Ljubljane, dijak Srednje šole za Računalništvo. Zanima ga igra "Življenje", o kateri je Presek že večkrat pisal. Med drugim bi rad zvedel podrobnosti o programiranju igre za računalnik. Poprosili smo avtorja Romana Rojka, da v posebnem prispevku, ki ga objavljamo v tej številki, osvetli računalniško stran igre "Življenje".

Tomaž Pisanski

ŠE O IGRI ŽIVLJENJA

1. Uvod

Zaradi velikega zanimanja, ki sta ga povzročila članka o igri življenja v Preseku, sem sklenil povedati še kaj več o njunem nastanku.

Za igro življenja sem prvič slišal pred mnogimi leti v družbi prijateljev *Pod lipo*. Pritegnila me je, zato sem podrobnosti poiskal v reviji *Scientific American*, kjer jo je *Martin Gardner* opisal v svoji rubriki *Mathematical Games*. Svoje radovednosti pa s tem nisem potešil, vendar sem jo moral kar več let krotiti, dokler nisem končno dobil dostopa do primernega računalnika in s tem možnosti za raziskovanje zanimivega življenja celic.

2. Izvedba

Mikroračunalnik ID–80 se je izkazal kot nalašč za moje potrebe. Zaslon omogoča prikazovanje 96 krat 160 kvadratkov (celic), poleg tega pa nudi ta računalnik možnost programiranja v zbirniku. To pa je pomembna ugodnost, saj dosežemo s programiranjem v zbirniku največjo hitrost izvajanja. Ostali programski jeziki so večinoma vgrajeni v obliki interpreterjev, ti pa so znani kot zelo počasni.

S sodelavcem Štefanom sva se lotila dela in nastal je program, ki zmore izračunati in narisati nov rod celic v približno dveh sekundah. Tako sem se lahko lotil raziskovanja. Že znane osnove igre življenja in večina novih odkritij pa so našli prostor v obeh člankih. Slike sem narisal tako, da sem kolonijo celic na računalnikovem zaslonu fotografiral na črno-bel film in tako dobljene negative je Presek natisnil kot diapozitive (črne celice na belem ozadju). Zaslon je bil precej temen, da je slika lahko imela zadovoljivo ostrino, zato pa je bil osvetlitveni čas kar okoli dve sekundi. Fotoaparat sem seveda moral pritrditi na stojalo. Ker pa mi ti posnetki še niso zadoščali, sem posnel tudi film s kinokamero (super 8 mm film). Vsak rod celic sem posnel na eno sliko filma. Amaterski filmi se praviloma vrtijo s hitrostjo 18 slik na sekundo, se pravi 18 rodov na sekundo, to pa je že kar fantastična naglica, ki omogoča prav svojevrsten pogled v igro življenja. S tem so soglašali tudi udeleženci seminarja za računalništvo in uporabno matematiko, ko sem jim film predvajal. Hitrost seveda z lahkoto zmanjšamo s počasnejšim predvajanjem ali pa tako, da posnamemo isti rod celic večkrat zapored. Tako lažje spremljamo podrobnosti v razvoju igre.

Naj sedaj priznam, da ne vem za nobeno literaturo, kjer bi bila igra življenja bolj obširno razložena kot v Preseku. To seveda ne pomeni, da take literature ni. Zato prosim vsakogar, ki bi nanjo naletel, da me o tem obvesti preko Presekovega uredništva. Igra življenja me še vedno vznemirja in želim odkriti še katero od njenih skrivnosti. Predvsem bi se rad podal v barvno posplošitev igre. Zato pa bi potreboval dovolj močan računalnik z barvno grafiko in pa "neizmerne" količine časa. Niti ne vem natančno, kateri od obeh problemov je hujši. Če pa bom pri tem vendarle uspel, bo za to seveda prvi zvedel Presek. (Zato ti svetujem, da ostaneš še dolgo njegov naročnik!)

3. Šolski algoritem

Oglejmo si sedaj algoritem za izračunavanje rodov v igri življenja. Sam postopek je sila enostaven. Potrebujemo dve matriki (imenujmo ju *p* in *q*), kamor bomo shranjevali kolonije celic. Vsak element matrike naj ustreza kvadratku (celici) na zaslonu in ga kot po navadi desežemo z navedbo vrstice (*i*) in stolpca (*j*), namreč *p*[*i j*]. Vrednost elementa naj bo 0, če je kvadratek prazen, in 1, če je tam celica. Sedaj se moramo pomeniti še o tem, kako bomo prikazovali celice na zaslonu. To je odvisno od tega, kakšne ukaze pozna računalnik v te namene. V najenostavnejšem primeru lahko, recimo, prižgemo celico v *i*-ti vrstici in *j*-tem stolpcu na zaslonu z ukazom *plot*(*i,j*), ugasnemo pa jo z *unplot*(*i,j*). Ta dva ukaza bomo uporabili tudi mi. Na sploh pa vlada na tem področju med računalniki precejšna zmeda in naj bo zato dejanska izvedba prepuščena programerju samemu.

Naj imata matriki *p* in *q* *mi* vrstic in *mj* stolpcev. Računalniku ju bomo predstavili takole (algoritem bomo opisali v programskem jeziku PASCAL):

```
VAR p, q: ARRAY [1..mi,1..mj] OF 0..1
```

Na tem mestu pa moramo omeniti še robni problem, ki se pojavi pri programiranju. Celice na robu matrike namreč ne morejo imeti polnega števila sosed. V teoriji se s tem problemom nismo ukvarjali, saj smo se igrali življenje na neomejeni ploskvi. Računalnikov zaslov in pomnilnik pa sta še kako omejena. Najenostavneje rešimo ta problem tako, da na robu celic sploh nočemo rojevati niti moriti. Zanki za vrstice in stolpce bosta zato v programu tekli od drugega pa do predzadnjega. Robni problem bi lahko dobil tudi drugačne rešitve, a se zdaj ne bomo ubadali z njimi.

Naslednji del programa bo iz starega rodu (matrika *p*) izračunal naslednji rod (matrika *q*) in sproti novi rod narisal na zaslon:

```
FOR i := 2 TO mi – 1 DO
FOR j := 2 TO mj – 1 DO
BEGIN
    (★ štetje sosed ★)
    a := 10 ★ p[i,j] +
        p[i–1,j–1] + p[i–1,j] + p[i–1,j+1] +
        p[i+1,j–1] + p[i+1,j] + p[i+1,j+1] +
        p[i,j–1] + p[i,j+1];
```

```
    (★ rojevanje in odmiranje celic ★)
    IF (a = 3) OR (a = 12) OR (a = 13)
    THEN BEGIN q[i,j] := 1; plot(i,j) END
    ELSE BEGIN q[i,j] := 0; unplot(i,j) END
END;
(★ prepis novega rodu v matriko p ★)
p := q
```

Števec sosed (spremenljivka *a*) je dvomesten. Enice povedo, koliko sosed ima kvadratek v *i*-ti vrstici in *j*-tem stolpcu, desetice pa, če v tem kvadratku celica sploh je.

Program mora seveda vsebovati tudi primeren način vnašanja (in popravljanja) kolonij celic na zaslonu. Vnos celic z navajanjem stolpcev in vrstic je zgolj izhod v sili.

Tega programa ni težko predelati za kak drug programski jezik. Opozorim pa naj, da bo ta program na mikroračunalniku zelo počasen. Program v PASCALU na računalniku ID–80 je bil vsak 60-krat počasnejši kot program v zbirniku. To razmerje se z razvojem sicer izboljšuje, vendar je še vedno velika razlika, če čakaš na nov rod dve ali pa dvajset sekund.

4. Izboljšave algoritma

Omenili bomo tri izboljšave. Dve bosta skrajšali čas računanja, tretja pa bo varčevala z računalnikovim pomnilnikom.

Najprej bomo zamenjali matriko z dvema indeksoma z matriko, ki bo imela samo en indeks (vektor), a seveda še vedno *mi* krat *mj* elementov. Primerjajmo oba načina indeksiranja med seboj:

dva indeksa	en indeks
$i-1, j-1$	$k-mi-1$
$i-1, j$	$k-mi$
$i-1, j+1$	$k-mi+1$
$i, j-1$	$k-1$
i, j	k
$i, j+1$	$k+1$
$i+1, j-1$	$k+mi-1$
$i+1, j$	$k+mi$
$i+1, j+1$	$k+mi+1$

Ta ideja ponuja tudi simpatično rešitev problema levega in desnega roba. Edini indeks namreč pri računanju teče od začetka do konca in se ne ozira na vrstice, kar na koncu učinkuje tako, kot da bi življenjski prostor igre zvili v valj, tako da se vsaka vrstica naravnost nadaljuje v naslednjo spodnjo, levega in desnega roba pa sploh ni. Potnik, ki bi zlezel čez desni rob zaslona, bi se avtomatično pojavil na levi strani. Problem zgornjega in spodnjega roba se seveda ne spremeni.

V prejšnjem algoritmu mora računalnik vsak element matrike poiskati 9 krat (za celico in njenih 8 sosed). To število lahko zmanjšamo na eno tretjino z uvedbo treh števcev (*a*, *b* in *c*). Poskusil bom opisati, kako to izgleda. Izberimo si poljubno celico, ki naj ji pripada indeks *k*. Števec *c* naj prešteje vse celice v kvadratkih *k*, *k−mi* in *k+mi* (torej celico samo z zgornjo in spodnjo sosedo). Nato prenesemo števec *c* v *b* in se premaknemo na naslednji kvadratek z indeksom *k*+1. Sedaj prištejmo števcu *b* zgornjo in spodnjo sosedo, ga prenesemo v števec *a*, se premaknemo na kvadratek *k*+2 in števcu *a* prištejemo celico z zgornjo in spodnjo sosedo. Na koncu vsebuje števec *a* vsoto vseh sosed kvadratka *k*+1. Za lažje razumevanju zapišimo to v obliki programa:

```
VAR p, q: ARRAY[1..max] OF 0..1;
...
b := 0; c := 0;
FOR k := mi + 1 TO max−mi DO
BEGIN a := b; b := c; c := 0;
     IF p[k−mi] = 1 THEN BEGIN a := a+1; b := b+1; c := c+1 END;
     IF p[k] = 1 THEN BEGIN a := a+1; b := b+10; c := c+1 END;
     IF p[k+mi] = 1 THEN BEGIN a := a+1; b := b+1; c := c+1 END;
     IF (a = 3) OR (a = 12) OR (a = 13)
     THEN q[k−1] := 1
     ELSE q[k−1] := 0
END
```

Oglejmo si sedaj še, kako lahko varčujemo s pomnilnikom. Dve matriki smo potrebovali, da smo lahko iz starega izračunali nov rod, pri tem pa se stari rod ni smel pokrivati. Očitno pa lahko eno matriko zamenjamo s tremi vrsticami, saj potrebujemo za vsako celico naenkrat le njene sosede. Nov rod lahko tako začasno zapisujemo v te tri vrstice, ko pa se pomikamo navzdol, pa lahko nov rod že prepisujemo v matriko nazaj. Če smo prej potrebovali v pomnilniku prostora za 2.*mi*.*mj* celic, pa zadošča sedaj že *mi*.*mj*+3.*mi* celic, kar se pri manjših računalnikih kar krepko pozna.

Rado se zgodi in to bomo slej ko prej ugotovili, da je življenjski prostor celic občutno premajhen. Vendar ima zaslon omejene grafične možnosti. Če pa je računalnik dovolj velik in hiter, bi lahko imeli v pomnilniku veliko večji prostor, "skozi" zaslon pa bi opazovali le izbran del prostora. Vedeti pa moramo, da se z večjim življenjskim prostorom poveča čas za izračun novega rodu. In tudi pomnilnik ni ravno neomejeno velik. Morda bo zopet treba zadevo preložiti na kasnejši čas, ko bo tehnologija postregla z močnejšimi in, upajmo, tudi bolj dosegljivimi računalniki.

Roman Rojko

ŠE ENKRAT TABLICE ZA BRANJE MISLI

V tretji lanski številki Preseka (stran 144-145) je Izidor Hafner opisal tablice za branje misli. V tem sestavku si bomo ogledali, kako naučimo računalnik ugibanja števil. Program bomo napisali v programskem jeziku basic.

Osnovna zamisel postopka je naslednja:

1. izpis navodil, igralec si izbere število
2. ugibanje
3. izpis števila

Poglejmo posamezne podnaloge. Prva in tretja sta preprosti, zato ju ne bomo podrobneje razgrajevali. Ugibanje pa je zahtevnejše:

2. — ugibanje — :
2.1. za vsako tablico ponovi
2.1.1. izpiši tablico
2.1.2. zahtevaj odgovor
2.1.3. upoštevaj odgovor

Lani smo spoznali, da lahko s K tablicami ugibamo števila do $N = 2\uparrow K - 1$. Če se odločimo in K pribijemo, lahko tablice vnaprej pripravimo in jih zaporedoma izpisujemo. Mi bomo izbrali drugo pot in tablico sproti sestavljali in izpisovali. Pri tem bomo upoštevali, da tablico sestavlja $J1$ skupin s po Z zaporednimi števili. Na primer pri $K = 5$ je tretja tablica ($Z = 4$) takale:

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31

Mislim, da bodo ta pojasnila zadostovala za razumevanje programa od vrstice 560 do vrstice 740.

Ostane še vprašanje, kako na osnovi odgovorov določiti število, ki si ga je igralec izmislil. Postopek si bomo ogledali kar na odgovorih iz priloženega primera izvajanja programa:

odgovori:	ne	da	da	ne	ne	da
dvojiški zapis iskanega števila	0	1	1	0	0	1

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

desetiški zapis $0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$= (((((0 \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 0) \times 2 + 1 = 25$$

Srednješolci bodo v tem računu prepoznali Hornerjev postopek. Sedaj ne bo več težko razumeti priloženega basiškega programa.

Še nekaj nalog:

1. Priredi program za računalnik, ki ga poznaš.
2. Zamenjaj stavek LET K = 6 z branjem vrednosti spremenljivke K. Pred branjem izpiši ustrezno zahtevo.
3. Dopolni program tako, da bo omogočal več zaporednih ugibanj.
4. Pri K = 5 ugibamo števila med 1 in 31. Predelaj program tako, da bo ugotavljal, na kateri dan (v mesecu) je bil igralec rojen.

Vladimir Batagelj

```
110 REM
120 REM  Program  BINCA  v pogovoru odkrije število, ki si ga
130 REM  je igralec izbral. Program temelji na članku:
140 REM
150 REM     Izidor Hafner: Binarne kartice za branje misli.
160 REM                    Presek XI/3, stran 144-145
170 REM
180 REM  Programiral: Vladimir Batagelj, april 1984
190 REM
200 REM  Pomembnejše količine:
210 REM
220 REM    K  - število tablic ( <= 8 )
230 REM    N  = 2'K  - program odkriva števila med  1  in  N
240 REM    S  - iskano število
250 REM    L  - števec izpisanih elementov tablice
260 REM    Z  - prva vrednost na tablici
270 REM    J1 - število skupin na tablici
280 REM
290        PRINT
300        PRINT " M A G I Č N E   T A B L I C E"
310        PRINT
320        LET K = 6
330        LET N = 2↑K
340 REM
350 REM igralec si izmisli število
360 REM
```

```
370          PRINT " Izmisli si število med  1  in  "; N-1;
380          PRINT " in si ga zapomni. Izpisal ti"
390          PRINT " bom   "; K; " magičnih tablic.   Za";
400          PRINT " vsako izmed njih mi boš povedal, "
410          PRINT " ali je tvoje  število na njej.  Če ne";
420          PRINT " boš  lagal,  bom  odkril, "
430          PRINT " katero število si si izmislil."
440          PRINT
450 REM      REPEAT
460              PRINT " Pripravljen (DA/NE) ";
470              INPUT O$
480          IF  (O$<>"DA") AND (O$<>"da")  THEN 450
490          PRINT
500          PRINT " Začnimo ! "
510          LET S = 0
520          LET Z = N
530 REM
540 REM ugibanje
550 REM
560          FOR I = 1 TO K
570 REM      izpiši  i-to  tablico in vprašanje
580              LET J1 = N/Z
590              LET Z  = Z/2
600              LET P2 = -1
610              LET L  = 0
620              PRINT
630              FOR J = 1 TO J1
640 REM          izpiši j-to skupino elementov tablice
650                  LET P1 = P2 + Z + 1
660                  LET P2 = P1 + Z - 1
670                  FOR M = P1 TO P2
680                      IF  M < 10  THEN  PRINT " ";
690                      IF  M < 100 THEN  PRINT " ";
700                      PRINT M;
710                      LET L = L + 1
720                      IF  L = INT(L/8)*8  THEN  PRINT
730                  NEXT M
740              NEXT J
750 REM      zahtevaj odgovor
760              PRINT
770              PRINT " Ali je tvoje število na pravkar";
780              PRINT " izpisani tablici (DA/NE) ";
790              INPUT O$
800 REM      upoštevaj odgovor
810              LET S = 2*S
820              IF  (O$="DA") OR (O$="da")  THEN  LET S = S + 1
830          NEXT I
840 REM
850 REM izpiši iskano število
860 REM
870          PRINT
880          PRINT " Izmislil si si število "; S
890          PRINT
900          END
```

M A G I Č N E   T A B L I C E

Izmisli si število med 1 in 63 in si ga zapomni. Izpisal ti bom 6 magičnih tablic. Za vsako izmed njih mi boš povedal, ali je tvoje število na njej. Če ne boš lagal, bom odkril, katero število si si izmislil.

Pripravljen (DA/NE) ? sem
Pripravljen (DA/NE) ? da

Začnimo !

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Ali je tvoje število na pravkar izpisani tablici (DA/NE) ? ne

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Ali je tvoje število na pravkar izpisani tablici (DA/NE) ? da

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Ali je tvoje število na pravkar izpisani tablici (DA/NE) ? da

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Ali je tvoje število na pravkar izpisani tablici (DA/NE) ? ne

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Ali je tvoje število na pravkar izpisani tablici (DA/NE) ? ne

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Ali je tvoje število na pravkar izpisani tablici (DA/NE) ? da

Izmislil si si število 25

10. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Poročila šolskih komisij za tekmovanja srednješolcev iz matematike pričajo, da se je letošnjega jubilejnega desetega izbirnega tekmovanja v soboto, 17. marca, udeležilo približno 1300 učencev s 33 srednjih šol različnih usmeritev iz vse Slovenije. Zanimanje za matematiko med mladimi torej ni omejeno le na tiste, ki so se že sami odločili za študij naravoslovja. Še več: med njimi se najde tudi marsikak nadarjen reševalec težkih nalog, kot kažejo rezultati. Od skupno 210 predlaganih dijakov je republiška komisija za popularizacijo matematike na republiško tekmovanje povabila 150 učencev, od tega 24 iz usmeritev, ki niso naravoslovno-matematične.

Kot se boste ob reševanju lahko sami prepričali, letošnje naloge niso bile prav nič lahke. Upamo le, da bodo letošnji tekmovalci to razumeli kot izziv in vzpodbudo ter tudi naslednje leto tako množično sodelovali.

1. RAZRED

1) Če veš, da za realna števila a, b in c velja:
$$a+b+c=0 \quad \text{in} \quad a^2+b^2+c^2=1$$
izračunaj vrednost izraza $a^4+b^4+c^4$
2) Najmanj kolikokrat zaporedoma moraš zapisati število 1984, da bo tako nastalo število deljivo s 198?
3) Dan je trikotnik $\triangle ABC$. Konstruiraj premico p, ki seče stranici AC in BC zaporedoma v točkah M in N, tako da bo veljalo $\overline{BN}=\overline{NM}=\overline{MC}$!
4) Dokaži, da v vsakem številskem sistemu z osnovo, ki je večja od 2, obstaja cifra, na katero se ne more končati kvadrat naravnega števila!

2. RAZRED

1) Določi definicijsko območje in nariši graf funkcije
$$y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$
2) Naj bo T eno do presečišč krožnice K_1 s središčem S_1 s krožnico K_2 s

središčem S_2. Skupna tangenta obeh krogov, ki leži na istem bregu premice (S_1, S_2) kot točka T, se dotika krožnice K_1 v točki D_1, krožnice K_2 pa v točki D_2. Če je $\measuredangle TS_1S_2 = \alpha$ in $\measuredangle TS_2S_1 = \gamma$, koliko je $\measuredangle D_1TD_2$?

3) Daljici AB in CD ležita v prostoru v poljubni legi. Točka M je središče daljice AB, točka N pa središče daljice CD. Dokaži, da velja:

$$\overline{AD} + \overline{BC} \geqslant 2\overline{MN}$$

4) Naj bo K množica vseh točk na krožnici, B in $\check{C}$ pa takšni njeni podmnožici, da je $B \cup \check{C} = K$, $B \cap \check{C} = \emptyset$. (Točke iz B imenujemo "bele", točke iz $\check{C}$ pa "črne".) Dokaži, da lahko krožnici K včrtamo enakokrak trikotnik tako, da bodo vsa oglišča elementi iste množice (B ali $\check{C}$), torej vsa iste "barve"!

3. RAZRED

1) Dokaži, da za vsako realno število x velja

$$0 < \sin^4 x + \cos^6 x \leqslant 1$$

2) Poišči vse realne rešitve enačbe

$$\log_y x + \log_x y = 2.\sin xy$$

3) V ravnini leži konveksni četverokotnik $ABCD$. Poišči vse točke P v prostoru, za katere ima izraz $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ najmanjšo vrednost!

4) V ravnini leži n točk ($n \in \mathbf{N}$) tako, da je razdalja med poljubnima dvema vsaj 1. Pokaži, da je število parov točk iz te množice z medsebojno razdaljo točno 1 manjše od $3n$!

4. RAZRED

1) Dani sta aritmetični zaporedji 1, 5, 9, ... in 4, 15, 26, ... Določite vsa števila, ki so členi obeh zaporedij!

2) V čašo, katere notranja ploskev nastane z vrtenjem parabole $y = x^2$ okoli ordinatne osi, spustimo kroglico s polmerom r. a) Določi največji polmer r, pri katerem se kroglica ne zagozdi v čaši! b) Če se zagozdi, izračunaj razdaljo med dnom čaše in središčem kroglice!

3) Dolžina stranskega roba pravilne tristrane piramide je b, kot med stranskima ploskvama pa . Izračunaj dolžino a stranice osnovne ploskve!

4) V ravninskem koordinatnem sistemu imamo množico točk S s celoštevilskimi koordinatami.

a) Če je S končna množica, ali je mogoče, da je vsaka točka iz S oddaljena točno za 1 od natanko treh drugih točk množice S?

b) Kaj pa, če je množica S neskončna?

Gorazd Lešnjak

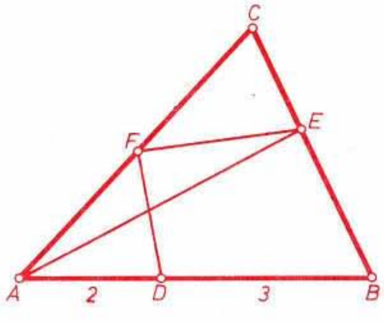
TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV V TRSTU

Prvega marca 1983 so se mladi tržaški matematiki (pod tem izrazom imamo v mislih dijake tržaških italijanskih in slovenskih gimnazij ter dijake mednarodne šole v Nabrežini - menda pa je bil test poslan tudi pripadnikom italijanske manjšine v Jugoslaviji) udeležili matematičnega tekmovanja pod naslovom 34th *Annual American High School Mathematical Examination.*

V treh urah so morali udeleženci odgovoriti na 30 vprašanj, katerih težavnost je postopno naraščala od začetnih napol šaljivih pa do končnih čisto resnih, pravih trdih orehov.

In kako so se odrezali? Najvišje število točk: 104 (od teoretično možnih 150) so dosegli trije tekmovalci: dva dijaka italijanske gimnazije v Trstu in *Matjaž Mencej*, Ljubljančan, ki obiskuje mednarodno gimnazijo (Zavod združenega sveta) v Nabrežini.

Da bodo bralci Preseka videli, za kaj je tu šlo, objavljamo zadnja tri vprašanja.



Slika 1

28. Trikotnik ABC (slika 1) ima ploščino 10. Točke D, E in F so vse različne od A, B in C. D leži na AB, E na BC in F na CA. Dalje je $\overline{AD} = 2$ in $\overline{DB} = 3$. Če imata trikotnika ABE in četverokotnik $DBEF$ enako ploščino, potem mora ta ploščina biti:

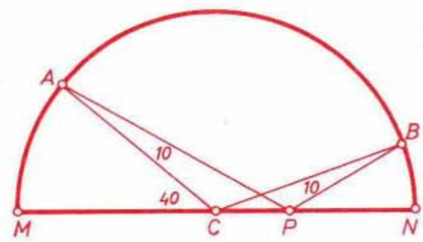
(A) 4 (B) 5 (C) 6

(D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$ (E) nedoločena

29. Točka P leži v ravnini, ki jo določa kvadrat s stranico 1. Oglišča kvadrata, šteta v smeri, nasprotni smeri vrtenja urinih kazalcev, naj bodo A, B, C in D. Razdalja $\overline{PA}$ naj bo u, $\overline{PB} = v$ in $\overline{PC} = w$. Če je $u^2 + v^2 = w^2$, je največja možna razdalja $\overline{PD}$:

(A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$

(C) $2 + \sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $3 + \sqrt{2}$



Slika 2

30. Na polkrogu s premerom MN in središčem C sta dani točki A in B, na polmeru CN pa točka P. Če je $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP = 10^\circ$ in $\sphericalangle MCA = 40^\circ$, koliko meri $\sphericalangle BCN$? (slika 2)

(A) 10° (B) 15° (C) 20°
(D) 25° (E) 30°

Drago Bajc

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

NEVARNA LITERATURA

Matematik E. Schmidt je bil doma v Tartuju na Estonskem, delal pa je v glavnem v Berlinu. Ko se je nekoč v začetku stoletja - torej še za časa carizma v Rusiji - vračal domov, je imel med drugimi knjigami tudi delo iz teorije množic. Vestni uradniki, ki so pazili na meji, da ne bi prišle v Rusijo kakšne prekucuške ideje, so v tej knjigi na več mestih opazili izraz "moč množice". To jim je zvenelo tako prevratniško, da so knjigo na mestu zaplenili.

Schmidt je omenil to dogodivščino kolegu matematiku C. Caratheodoryju, ki je tudi delal v Berlinu, bil je Grk po rodu, Grčija pa je bila tiste čase še pod turškim otomanskim imperijem.

"Nekaj podobnega se je zgodilo tudi meni," je rekel Caratheodory. "Ko sem šel na obisk k sorodnikom v Grčijo, sem imel med prtljago tudi neko francosko knjigo o mehaniki. V knjigi je bil omenjen stroj, ki napravi 50 vrtljajev v minuti (*cinquante révolutions per minute*). Turški uradniki so mi jo ročno zaplenili, saj bi petdeset *revolucij* na minuto zamajalo še tako trdno državo."

Peter Petek

FIZIKALNA OLIMPIADA PRI NAS

Matematično fizikalna tekmovanja od občinskih do zveznih vsi dobro poznamo, saj v PRESEKU redno pišemo o njih. Manj pa je znano, da se ta tekmovanja nadaljujejo tudi v mednarodnem merilu, podobno kot je to pri različnih športnih tekmovanjih. Podobnost je celo v imenu, saj ima tudi najbolj imenitno mednardno fizikalno tekmovanje naslov *fizikalna olimpiada*. Razlika je le v pogostosti fizikalnih olimpiad. Le-te so vsako leto in vsakič v drugi državi. Fizikalne olimpiade so začele na pobudo Poljske vzhodnoevropske države leta 1967 in letos bo na Švedskem že petnajsta fizikalna olimpiada. Število udeleženk se počasi veča, a je v glavnem omejeno na evropske države, od drugod sta v zadnjih letih prišli le DR Vietnam in Kuba. Jugoslavija je sodelovala na prvih treh fizikalnih olimpiadah, nato nekaj let ni sodelovala, v zadnjih štirih letih pa je ponovno reden gost na teh vrhunskih fizikalnih tekmovanjih za srednješolce. Kot posebno zanimivost naj povemo, da bomo prihodnje leto organizirali tako tekmovanje pri nas v Portorožu.

Kako poteka fizikalna olimpiada? Vsaka država lahko pošlje na tekmovanje po pet srednješolcev, ki tekmujejo v reševanju fizikalnih računskih nalog ter v izvedbi in analizi fizikalnega poizkusa. Celotno tekmovanje traja okrog 10 dni in po tekmovanju, ko komisija pregleduje izdelke, imajo udeleženci dovolj časa, da se spoznajo, si izmenjajo vsakovrstne izkušnje in si ogledajo znamenitosti kraja in okolice, kjer poteka tekmovanje. Pa še v kakem športnem tekmovanju se lahko pomerijo - bolj za šalo kot zares.

Nekatere vzhodnoevropske države posvečajo fizikalni olimpiadi izredno pozornost in njihove tekmovalce pripravljajo univerzni učitelji, ki iz večjega števila kandidatov izberejo na koncu pet najboljših. Zato ni presenetljivo, da so tudi uvrstitve teh tekmovalcev prav pri vrhu. Vzadnjih letih so bili najboljši fiziki srednješolci iz Sovjetske zveze. Jugoslovanski srednješolci so se uvrstili v srednji del razpredelnice, kar je v skladu z našimi pripravami in z zanimanjem, ki ga kažemo za te vrste tekmovanja. Naše tekmovalce izberemo na podlagi rezultatov, ki jih dosežejo na zveznem tekmovanju mladih fizikov približno mesec dni pred olimpiado. Kakih posebnih priprav ne organiziramo. Dejstvo, da so tudi nekateri naši dijaki dosegli na olimpiadah lepe uspehe, kaže na njihovo osebno prizadevnost za poglobljeno delo pri fiziki in seveda na pomoč, ki jim jo nudijo učitelji in mentorji. Če hočemo doseči v Portorožu boljše uvrstitve, bomo morali pristopiti k organiziranim in pravočasnim pripravam perspektivnih mladih fizikov.

Med samim tekmovanjem bo tudi nekaj prireditev, ki bodo zanimive za širši krog naših mladih fizikov. Pripravili bomo vrsto zanimivosti, kot tekmovanje iz splošnega znanja fizike (KVIZ) in tekmovanje iz poznavanja aktualnih dosežkov v fiziki. Po uradnem tekmovanju pa bo mogoče preizkusiti svoje znanje v reševanje eksperimentalne naloge. O vseh možnostih vas bo PRESEK pravočasno obvestil.

Zvonko Trontelj

28. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Tekmovanja, ki je bilo v soboto, 7. aprila 1984, na *Srednji tehniški šoli* v Celju, se je udeležilo 148 tekmovalcev iz vse Slovenije, od tega 36 dijakov prvega, 38 dijakov drugega, 35 dijakov tretjega in 39 dijakov četrtega razreda. Skupno s STŠ Celje ga je organizirala celjska podružnica DMFA SR Slovenije ob finančni podpori celjskega združenega dela.

Ob otvoritvi tekmovanja so tekmovalce in njihove spremljevalce pozdravili: ravnatelj STŠ Celje *Jože Geršak,* direktor Razvojnega centra Celje *Tone Zimšek* kot predstavnik pokroviteljev in tajnik tekmovalne komisije *Gorazd Lešnjak.*

Za reševanje naslednjih nič kaj lahkih nalog so imeli sodelujoči dve uri in pol časa.

1. RAZRED

1) Skupno točko obeh diagonal trapeza $ABCD$ označimo s T. Če je $AB \parallel CD$, označimo s S_1 ploščino trikotnika ΔABT, s S_2 ploščino trikotnika ΔBCT, s S_3 ploščino trikotnika ΔCDT in s S_4 ploščino trikotnika ΔDAT. Izrazite ploščini S_2 in S_4 s ploščinama S_1 in S_3!

2) Za cela števila x, y in z vemo, da 6 deli vsoto $x + y + z$ in vsoto $x^2 + y^2 + z^2$. Pokaži, da tedaj 6 deli vsoto $x^n + y^n + z^n$, kjer je n poljubno naravno število!

3) Dan je enakostranični trikotnik ΔABC z dolžino stranice 1. Množica M je presek krogov s polmeri 1 in s središči v točkah A, B in C. Pokaži, da za poljubni točki množice M (ali z njenega roba) velja, da sta oddaljeni kvečjemu za 1!

4) V neki deželi je n $(n \geqslant 3)$ mest. Vse medsebojne razdalje teh mest so različne. Iz vsakega mesta vodi ravna enosmerna cesta v najbližje mesto.

   a) Pokaži, da obstajata mesti, ki ju povezujeta dve enosmerni cesti (po ena v vsako smer)!

   b) Pokaži, da se popotnik, ki krene po teh cestah in obišče še vsaj dve drugi mesti, ne more več vrniti na začetek svoje poti!

2. RAZRED

1) Dokaži, da za pravokotni trikotnik s hipotenuzo c, katetama a in b ter polmerom včrtanega kroga ρ velja:

$$2\rho + c \geqslant 2\sqrt{ab}$$

2) Poišči vse funkcije f, za katere pri poljubnih pozitivnih realnih številih x in y velja:

$$x^{f(y)} = y^{f(x)}$$

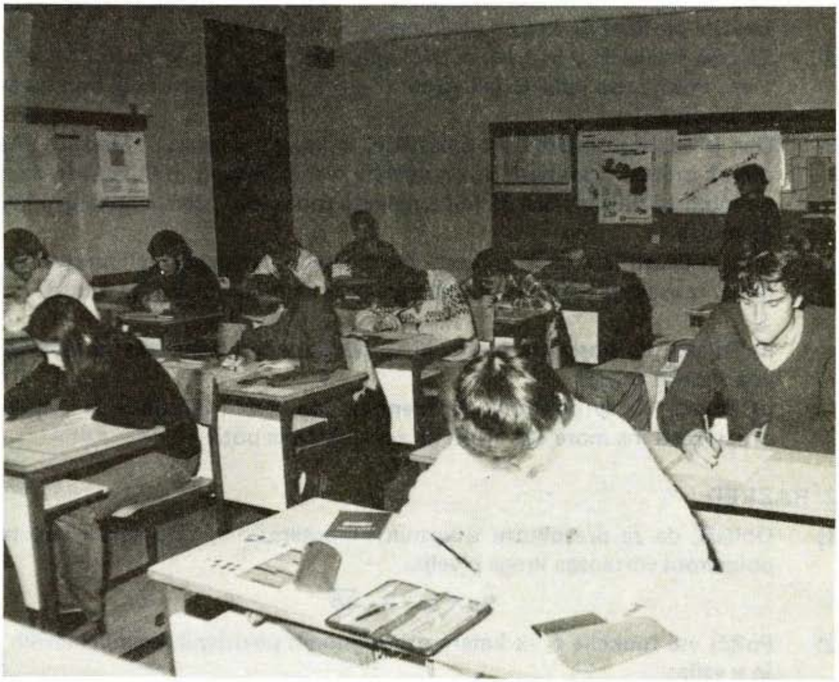
3) Krog K s polmerom r se dotika daljice AB z dolžino c. Kje sme ležati dotikališče D, da obstaja trikotnik ΔABC, ki mu je krog K včrtan?

4) Dana je tabela:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & 1984 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1984 & 1 & 2 & \cdots\cdots & 1983 \end{bmatrix}$$

Tabelo lahko spreminjaš tako, da vsem številom v poljubni vrstici ali v poljubnem stolpcu prišteješ (ali odšteješ) isto celo število. Ali lahko s temi spremembami dosežeš, da bodo v tabeli ostale same ničle?

Sl. 1. Dijaki srednjih šol med reševanje matematičnih nalog



3. RAZRED

1) Funkcija $g(x) = [x]$ daje za vsak realen x tisto največje celo število, ki ni večje od števila x ("celi del"). Zgledi: $[3,5] = 3$, $[-3,5] = -4$ in $[k] = k$, če je k celo število.
Ali je funkcija f, ki je za vsak realen x določena s predpisom $f(x) = x - [x] + \sin x$, periodična?
2) Zaporedje $\{p_n\}$ je določeno s prvim členom $p_1 = 2$ in z dogovorom, da je p_n največje praštevilo, ki deli število $1 + p_1p_2p_3...p_{n-1}$.
Dokaži, da število 5 ni člen zaporedja $\{p_n\}$!
3) V tabeli velikosti $n \times n$ so števila vpisana tako, da sta poljubni dve vrstici tabele različni. Dokaži, da obstaja stolpec, ki ga lahko zbrišemo, pa bo ostanek tabele še vedno imel zgornjo lastnost!
4) Naj bo a poljubno celo število, za katerega je vrednost izraza $a^6 + 2a^3 - 16a^2 + 1$ kvadrat lihega števila. Pokaži, da je tedaj tudi število $a^3 + 4a + 1$ kvadrat nekega lihega števila!

Sl. 2. Matematike se ne boj, in je ne sovraži

4. RAZRED

1) Funkcija f je definirana na intervalu $[0,1]$ in izpolnjuje pogoje:

a) $f(x) \geqslant 0$ za vsak $x \in [0,1]$;

b) $f(1) = 1$;

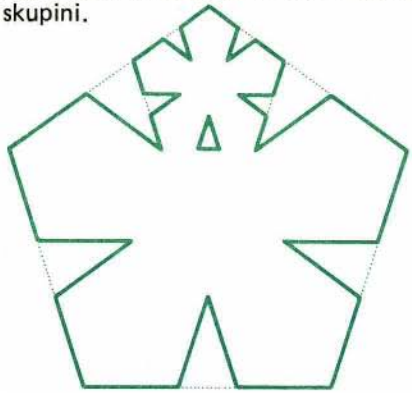
c) $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$.

Dokaži, da za vsak $x \in [0,1]$ velja ocena: $f(x) \leqslant 2x$

2) Dve ploskvi tetraedra sta skladna enakostranična trikotnika s stranico a. Drugi dve ploskvi sta pravokotna enakokraka trikotnika. Koliko meri polmer včrtane krogle?

3) Če veš, da je poznavanje obojestransko, dokaži naslednjo trditev: vsako družbo ljudi lahko razdelimo v dve skupini tako, da ima vsak član prve skupine vsaj polovico znancev v drugi skupini in vsak član druge skupine vsaj polovico svojih znancev v prvi skupini.

4) Iz lista v obliki pravilnega petkotnika s stranico a izrežemo pet trikotnikov tako, da dobljeni lik sestavlja šest skladnih pravilnih petkotnikov. Postopek ponavljamo na robnih petkotnikih, središčne petkotnike pa ohranjamo. Izračunajte razmerje dolžin stranic zaporednih petkotnikov! Izračunajte razmerje ploščin prvotnega petkotnika in limitnega lika!



Medtem ko so tekmovalci reševali naloge, so njihovi spremljevalci, člani tekmovalne komisije, predstavnik Zavoda za šolstvo, zastopniki učencev in drugi zainteresirani ob okrogli mizi razmišljali, kakšna naj bi bila matematična tekmovanja v novih poreformnih šolskih pogojih. Na eni strani imamo namreč enotno matematično tekmovanje, na drugi strani pa je število ur pouka matematike po posameznih usmeritvah različno, različni so tudi učni načrti. V izredno živahni in zavzeti razpravi je bilo podanih več predlogov, največ podpore pa je bil deležen naslednji:

1. Predtekmovanje naj bi potekalo v dveh fazah. Najprej bi izvedli po šolah tekmovanje za učence nematematičnih smeri. Enotne naloge zanj bi pripravila tekmovalna komisija pri DMFA SR Slovenije. Mesec dni pozneje bi po šolah organizirali tekmovanje za učence matematične usmeritve, ki pa bi se ga udeležili tudi najuspešnejši tekmovalci prvega tekmovanja. Najboljšim iz prve faze bi šole lahko na zaključnih slovesnostih ob koncu leta podelile posebna priznanja.
2. Republiško tekmovanje bi bilo enotno, udeležili pa bi se ga lahko le najboljši udeleženci drugega predtekmovanja.

Prisotni so razpravljali tudi o problemih poučevanja matematike v razredih z nematematično usmeritvijo in izrazili željo, da šole, ki organizirajo svoja interna tekmovanja, o tem poročajo tudi v *Preseku*.

Po končanem tekmovanju je bilo za vse udeležence organizirano kosilo, po katerem pa je več kot polovica tekmovalcev odpotovala domov. Tako je bila udeležba na ogledih delovnih organizacij *LIBELA* in *AERO* ter celjskih znamenitosti skromna, kar daje misliti, da to ni najprimernejši način zaposlitve učencev v času do razglasitve razultatov, zlasti kadar so naloge zahtevne in je kraj tekmovanja oddaljen za večino sodelujočih.

Ob zaključku tekmovanja je tekmovalce pozdravil predstavnik celjskih družbenopolitičnih organizacij *Stane Poklič*. Predsednik tekmovalne komisije *Tomaž Pisanski* je razglasil rezultate in podelil priznanja. Letošnji dobitniki so:

1. RAZRED
2. nagrada: Jure BAJC, SNŠ Ljubljana; **3. nagrada:** Miha MULEJ, SNŠ Ljubljana; Mateja ŠAJNA, NSC Nova Gorica; Matevž MALEJ, SPNMŠ Koper; Renata POŽUN, SNŠ Brežice; Blaž ZMAZEK, STŠ Celje; **pohvala:** Martina PFAJFER, SPŠPRNMU Kranj; Mojca LORBEK, SPNMŠ Koper; Bojan KUZMA, SNŠ Ljubljana; Tomaž JARM, SNŠ Ljubljana; Srečko MILANIČ, NSC Nova Gorica; Jure MENCINGER, SNŠ Ljubljana; Magdalena JEJČIČ, NSC Nova Gorica; Alenka KAVČIČ, SŠR Ljubljana; Marko FILLI, SPNMŠ Koper.

2. RAZRED
1. nagrada: Jože FABČIČ, SNMKSŠ Postojna; **3. nagrada:** Damjana KOKOL, SŠPRNMU Kranj; Marko TOPIĆ, SNŠ Ljubljana; Grega CIGLER, SNŠ Ljubljana; Matjaž ŽELJKO, SŠR Ljubljana; **pohvala:** Pavle POPOVIĆ, SNŠ Ljubljana; Primož GABRIJELČIČ, SNŠ Ljubljana; Jože ULAGA, STŠ Celje.

3. RAZRED
1. nagrada: Toni BIASIZZO, SNMKSŠ Postojna; **2. nagrada:** Roman DRNOVŠEK, SNŠ Ljubljana; **3. nagrada:** Izidor JEREBIC, SŠPRNMU Kranj; Marko KOSELJ, CSUI Jesenice; **pohvala:** Dejan ŠEMROV, NSC Nova Gorica; Sašo STRLE, SŠ za ELEKTRONIKO Ljubljana; Boris ZGRABLIČ, SPNMŠ Koper; Primož RUTAR, SNŠ M.Z. Maribor.

4. RAZRED
2. nagrada: Uroš SELJAK, NSC Nova Gorica; **3. nagrada:** Igor MLAKAR, SŠC R.M. Kamnik; **pohvala:** Miroslav REPAR, SDŠ Sežana; Vlado ROBAR, SNŠ M.Z. Maribor; Stanko GRUDEN, SNMŠ Idrija; Jure ŠKARABOT, SNŠ M.Z. Maribor.

V ekipo SR Slovenije na zveznem tekmovanju, ki je bilo 21. in 22. aprila letos v *Smederevski Palanki*, pa so se uvrstili:

1. razred: Jure BAJC, Miha MULEJ in Mateja ŠAJNA;
2. razred: Jože FABČIČ, Damjana KOKOL, Grega CIGLER, Marko TOPIĆ in Matjaž ŽELJKO;
3. razred: Toni BIASIZZO, Roman DERNOVŠEK, Izidor JEREBIC in Marko KOSELJ;
4. razred: Uroš SELJAK, Igor MLAKAR, Vlado ROBAR in Jure ŠKARABOT.

Svečanost je z glasbo zaključil kvartet celjskih srednješolcev.

Jožica Dolenšek

NALOGE

TRI NALOGE O KROŽNICI

Ali obstaja takšna krožnica v xy ravnini, da:

a) na njej ni točke (x,y) z racionalnima koordinatama?

b) imajo vse točke na njej racionalne koordinate?

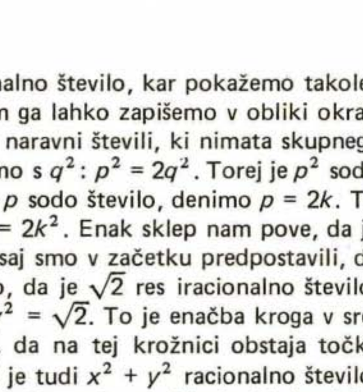
c) imajo vse točke na njej iracionalne koordinate?

Rešitev:

a) Potrebovali bomo, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število, kar pokažemo takole: recimo, da $\sqrt{2}$ je racionalno število. Potem ga lahko zapišemo v obliki okrajšanega ulomka: $\sqrt{2} = p/q$, kjer sta p in q naravni števili, ki nimata skupnega delitelja. Enakost kvadrirajmo in pomnožimo s q^2: $p^2 = 2q^2$. Torej je p^2 sodo število. Ker je kvadrat lihega števila lih, je p sodo število, denimo $p = 2k$. To vstavimo v prejšnjo enakost in dobimo $q^2 = 2k^2$. Enak sklep nam pove, da je tudi število q sodo. To pa je protislovje, saj smo v začetku predpostavili, da je ulomek p/q okrajšan. Od tod sklepamo, da je $\sqrt{2}$ res iracionalno število.

Oglejmo si krožnico z enačbo $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$. To je enačba kroga v središčni legi s polmerom $\sqrt[4]{2}$. Pa denimo, da na tej krožnici obstaja točka (x,y) z racionalnima koordinatama. Potem je tudi $x^2 + y^2$ racionalno število, od koder sledi, da je $\sqrt{2}$ racionalno število. To pa je protislovje. Na krožnici z enačbo $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ima torej vsaka točka vsaj eno iracionalno koordinato.

b) Denimo, da takšna krožnica obstaja. Izberimo si poljubni točki (x_1,y_1) in (x_2,y_2) na njej, tako da je $y_1 < y_2$. Števili y_1 in y_2 sta racionalni, toda med njima najdemo iracionalno število b takole: $y_2 - y_1$ je pozitivno število in zato obstaja takšno naravno število n, da je $n(y_2 - y_1) > \sqrt{2}$. Torej velja $ny_1 < ny_1 + \sqrt{2} < ny_2$ in zato je $y_1 \leq y_1 + \sqrt{2}/n < y_2$, kjer je $b = y_1 + \sqrt{2}/n$ iracionalno število. Pripadajoča točka (a,b) na krožnici nima obeh koordinat racionalnih. Torej iskana krožnica ne obstaja.



c) Zopet recimo, da takšna krožnica obstaja. Z enakimi oznakami kot prej naj bosta izbrani točki takšni, da sta števili y_1 in y_2 iracionalni. Pokažimo, da med njima najdemo racionalno število. Zopet je $n(y_2 - y_1) > 1$ za dovolj velik n. Ker sta števili ny_1 in ny_2 oddaljeni drugo od drugega za več kot 1, obstaja med njima celo število m. $ny_1 < m < ny_2$, torej $y_1 < b = m/n < y_2$. In spet takšne krožnice ni.

E. Beloglavec in M. Lakner

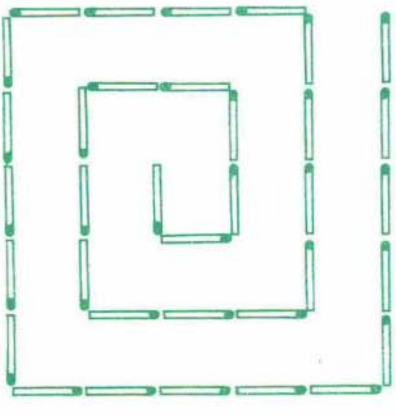
KRATKOČASNE VŽIGALICE

22. Ta naloga je bolj obširna. Koliko kvadratov lahko sestavimo iz 24 vžigalic, tako da porabimo vse?

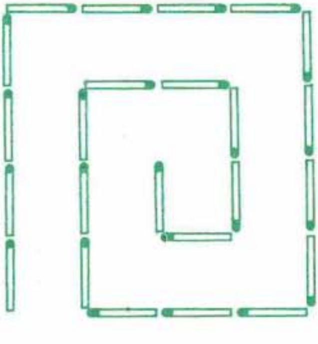
    Najprej ugotovimo, da lahko iz 24 vžigalic sestavimo kvadrat s stranico 6 vžigalic. Kvadratov s stranicami 4 ali 5 vžigalic ne moremo sestaviti, saj je treba uporabiti vse vžigalice. Pač pa sta tu še dva kvadrata s stranico iz 3 in trije s stranico iz 2 vžigalic. Tu pa se začne resnejši del naloge.

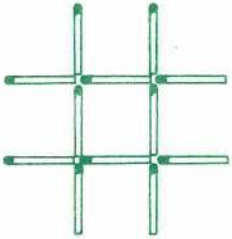
    a) Sestavi 2 kvadrata s stranico 3 in en kvadrat s stranico 2!
    b) Sestavi 2 kvadrata s stranico 3 in en kvadrat s stranico 1!
    c) Sestavi 3 kvadrate s stranico 2 in 4 kvadrate s stranico 1!
    d) Sestavi 6 kvadratov s stranico 1! Nato pa še 7, 8 in 9 kvadratov s stranico 1!
    e) Sestavi 4 kvadrate, sestavi 5 kvadratov!
    f) Sestavi 20, 42, 110 kvadratov!

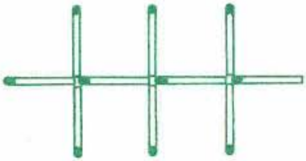
23. Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 3 kvadrate!



24. Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 4 kvadrate!







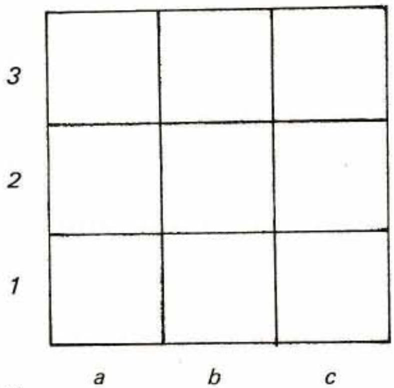
25. Prestavi 3 vžigalice, da dobiš 3 enake kvadrate!

26. Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 2 kvadrata!

V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

PREMISLI IN REŠI

KRIŽCI IN KROGCI



Pred vami je "pomanjšana" verzija znane igre, ki jo najbrž često igrate pod klopjo med poukom. Dva igralca, križec X in krogec O izmenoma rišeta svoje znake v kvadrat velikosti 3 x 3. Zmaga tisti, ki naredi niz treh svojih znakov, vodoravno, navpično, ali po diagonali. Kakšen bo rezultat, če oba igralca igrata pravilno? Opišite njuno strategijo!

Odgovore nam pošljite do 15. oktobra 1984.

Peter Petek

NOVE KNJIGE

STUPICA Janez, ŠAH SKOZI STOLETJA, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1982, 520 + LVI str. Cena 1384.- din

Kot že naslov pove, opisuje delo zgodovino šaha. Od začetkov v Indiji, ko se je igra imenovala še čaturanga, preko Perzije in arabskega šatrandža. V Evropo je prišel šah po več poteh; prinesli so ga Mavri v Španijo, Rusi pa so ga dobili brez arabskih posrednikov iz Indije oziroma Perzije. V času renesanse so italijanski igralci vpeljali moderna pravila igre.

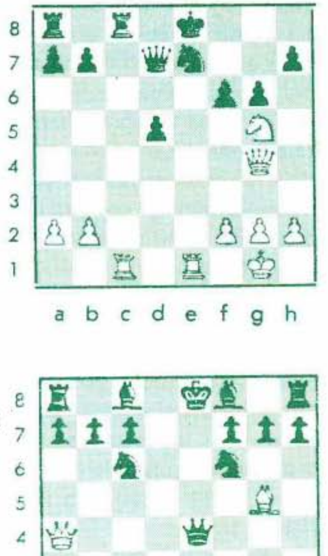
Precejšen del knjige je posvečen vodilnim šahistom raznih dob, nazadnje seveda tudi svetovnim prvakom. Zanimivo je, da je bilo med vrhunskimi šahisti dosti matematikov, začenši z Al-hvarizmijem, ki je dal ime algebri in algoritmu. Ustvarjalec nesmrtnih partij A. Anderssen je bil matematik po poklicu. Svetovni prvak Lasker je bil avtor nekaj učbenikov s področja algebre. M. Euwe, ki je bil tudi svetovni prvak, je bil ravno tako matematik.

Oglejmo si še kombinacijo prvega šahovskega svetovnega prvaka Steinitza iz njegove partije z Bardelebenom. V poziciji na diagramu je Steinitz igral

Tel x e7 +

Kako je potem zmagal, ugotovite sami.

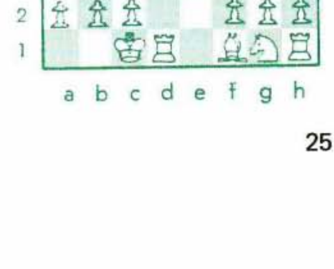
Peter Petek



PARMA Bruno, KUTIN Boris, ŠAH ZA VSAKOGAR, Mladinska knjiga, Ljubljana 1982, 292 str., 510.- din

Knjiga je zamišljena kot učbenik v 60 lekcijah. Zelo primerna bo za delo v šahovskih krožkih. Oglejmo si dva primera iz knjige.

Najprej *vezavo* na diagramu 1. Beli odigra Td1 – d8+. Poteza izkorišča dve vezavi, najprej skakača na c6, potem pa še onega na f6.



Na diagramu 2 pa poglejmo primer *obrambe* v na videz povsem izgubljenem položaju. Beli je odigral Dd4 x f6 in črni se je vdal. Zakaj? Toda imel je na razpolago skrito rešitev in zmago.

Peter Petek

HODGECOE John, VSE O FOTOGRAFIJI, Ljubljana 1981, Državna založba Slovenije, 255 str., 29 cm. Cena 1100.- din.

V desetletju, ko je fotografska tehnika doživela velik tehnični razvoj, je pri nas izšlo več knjig o fotografiji s podobnim naslovom in vsebino. Mednje sodi tudi knjiga *Vse o fotografiji*, ki jo je izdala Državna založba Slovenije. Vsebina knjige je naslednja. V poglavju *Zgodovina fotografije* izvemo vse o prvih aparatih, prvih negativih, o pionirjih fotografije in o prehodu iz časa, ko je bila ta zabava oziroma tehnika dostopna le izbrancem, od črnobele tehnike do današnjih dni, ko si domala vsakkdo lahko privošči fotografiranje v barvah. V poglavju *Kako deluje fotografski aparat*, so predstavljeni vsi deli fotoaparata v tekstu in zelo lepih slikah, narisanih v preseku in izredno lepi plastični perspektivi. V nadaljevanju avtor razloži glavne prvine fotografiranja od obrisa predmetov, razumevanja barv in kompozicije do perspektive. V najobširnejšem poglavju pa na primerih razlaga, kako v posameznih prilikah lahko naredimo dobro sliko. Za posamezne predmete, okolje, dnevni in letni čas, mirujoča in gibajoča se telesa, rastline, živali in ljudi z njihovim dobrim in slabim razpoloženjem pove in pokaže na slikah najrazličnejše učinke. Dandanes nimamo samo navadnih, širokokotnih in daljinskih objektivov. Z dodatki lahko dosežemo učinke skrite kamere, večkratnega posnetka, fotografijo ribjega očesa in še marsikaj. S posebnim dodatkom lahko razpršimo svetlobo na sliki v obliki večkrake zvezde. To pa se nam lahko posreči tudi z navadnim objektivom, ko se svetloba lomi na šesterokotni zaslonki (glej sliki desno: Sl. 1. Nad Blejskim jezerom, opoldan, čas 1/1000 s, zaslonka 22, Sl. 2. Jezero na Pohorju, zjutraj, čas 1/500 s, zaslonka 16).

Knjiga je bogato opremljena s fotografijami : črno-belimi in barvnimi. Moderna tehnika in moderne slike nam omogočajo, da se iz knjige marsičesa naučimo, in če smo spretni, tudi uporabimo. (Glej fotografije na IV. str. ovitka)

Ciril Velkovrh

NAŠE NEBO 1985

Astronomsko-geofizikalni observatorij v sestavi oddelka za fiziko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani in Seizmološki zavod SRS že vrsto let pripravljata podatke za brošuro NAŠE NEBO, v kateri izhajajo astronomske efemeride, popisi izstreljenih umetnih satelitov ter seznam močnejših potresov v Sloveniji in Jugoslaviji. Brošura je zanimiva predvsem za šolske astronomske krožke in druge ljubitelje astronomije. Kakor vsako leto, bo tudi letos izšla do konca koledarskega leta. Učitelje na osnovnih in srednjih šolah prosimo, da jo priporočijo učencem in dijakom, ki se zanimajo za astronomijo. Želimo pa tudi, da jo naročite za šolsko knjižnico. Cena brošure je 150.-din, člani društva in naročniki Preseka pa jo lahko dobijo z 20% popustom za 120.-din. Da bomo laže določili naklado, vas prosimo, da nam pošljete naročilnico za posameznike ali pa za skupinska naročila, vsaj do 1. oktobra 1984.

Ciril Velkovrh

. . . . odreži . . . .

NAROČILNICA

Podpisani (priimek in ime - tiskano) . . . .

ali naslov šole . . . .

kraj, ulica, hišna številka . . . .

poštna številka, pošta . . . .

Prosim, da mi pošljete takoj po izidu brošuro NAŠE NEBO

za leto 1985 .... izvodov

vsako leto .... izvodov

Datum-

Podpis naročnika

....

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
12. letnik, šolsko leto 1984/85, številka 1, strani 1 - 64

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. št. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1984/85 je za posamezna naročila 250.- din, za skupinska naročila pa 200.- din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije.
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana.

. . . . odreži . . . .

ČLANI AKTIVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV

šola ....

točen naslov ....

N A R O Č A M O

.... izvodov lista za mlade matematike, fizike in astronome

P R E S E K - XII. letnik, za šolsko leto 1984/85 po ceni 200.-din (naročnina za posameznike pa je 250.-din). Naročnino bomo nakazali skupaj ali v .... obrokih najkasneje do . . . . 1984.

Podpis

Datum ....

ASTRONOMIJA

PREPROSTA ASTRONOMSKA VAJA

V šolskem letu 1982/83 smo na osnovni šoli Prežihovega Voranca v Ljubljani začeli z astronomskim krožkom. Lotili smo se opazovanja Sonca. Ocenili smo njegov zorni kot in odtod izračunali še premer Sonca.

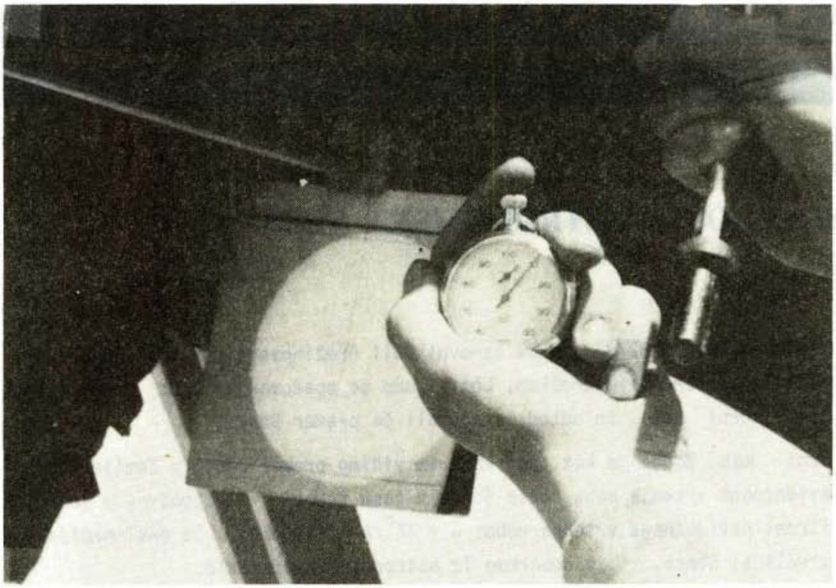
Zorni kot Sonca je kot, pod katerim vidimo premer Sonca z Zemlje. Zaradi navideznega vrtenja neba opiše Sonce v času t kot $\alpha = \omega . t . \cos \delta$, ω je kotna hitrost navideznega vrtenja neba: $\omega = 15^{\circ}/h = 15'/\mathrm{min}$, δ je deklinacija (središča) Sonca, ki jo odberemo iz astronomskih efemerid.

Zorni kot Sonca smo ugotovili tako, da smo izmerili čas (t), v katerem je slika Sonca na zaslonu prečkala svoj premer. Teleskop smo utrdili in projicirali sliko Sonca na zaslon (sl. 1). Pri meritvah smo uporabili refraktor 80 mm, ki smo ga kupili pri DZS.

Na zaslonu smo načrtali dve pravokotnici, x in y. Ko se je slika Sonca dotaknila premice y na eni strani, smo pritisnili na štoparico, in ko se je je dotaknila na drugi strani, smo jo ustavili. Naredili smo 25 meritev. Opazovali so učenci osmega razreda: Tadej Zajšek, Matej Dittrich, Primož Potočnik, Benjamin Zorko, Tomaž Mächtig.

Dne 24.2.1983 smo izmerili t = 2,24 min, deklinacija Sonca je bila $\delta = -10^{\circ}3' = -10{,}05^{\circ}$. Iz meritev sledi za zorni kot $\alpha = 15'.2{,}24\ \mathrm{min}.\cos(-10{,}05^{\circ})/\mathrm{min} = 0{,}55^{\circ}$. Iz zornega kota smo izračunali še premer Son- $2R_e$. Uporabili smo enačbo $2R_e/\alpha = 2\pi r/360^{\circ}$, kjer r pomeni astronomsko enoto ($r = 1{,}5.10^{8}$ km) njeno vrednost pa smo poiskali v tabelah. Tako smo dobili: $2R_s = 2.\pi.1{,}5.10^{8}\ \mathrm{km}.0{,}55^{\circ}/360^{\circ} = 14{,}3.10^{5}$ km.

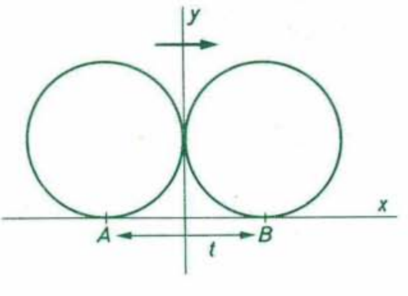
Premer Sonca smo tudi primerjali s premerom Zemlje ($2R_z$). Iz vseh 25 meritev smo ocenili povprečno vrednost $2R_s = 108.2R_z$. Prostornina Sonca je potemtakem $(108)^3 = 1{,}26.10^{6}$- krat večja od prostornine Zemlje.



Sl. 1 Učenec meri čas prehoda slike Sonca preko pravokotnice
Sl. 2 Opazovanje Sonca na zaslonu. Učenca skicirata lego sončevih peg.

TABELA MERITEV

Meritev	Datum	Čas prehoda (t)	Zorni kot Sonca (α)	Premer Sonca ($2R_S$)
1.	17.2.	2,18 min	0,53°	$13{,}9.10^5$ km
2.	22.2.	2,10	0,51	$13{,}5.10^5$
3.	24.2.	2,10	0,55	$14{,}3.10^5$
4.	24.2.	2,24	0,56	$15{,}0.10^5$
5.	25.2.	2,30	0,55	$14{,}3.10^5$
6.	26.2.	2,28	0,56	$15{,}0.10^5$
7.	7.3.	2,35	0,58	$15{,}2.10^5$
8.	8.3.	2,34	0,55	$15{,}2.10^5$
9.	9.3.	2,12	0,55	$14{,}3.10^5$
10.	10.3.	2,54	0,63	$16{,}5.10^5$
11.	11.3.	2,15	0,55	$14{,}3.10^5$
12.	12.3.	2,15	0,55	$14{,}3.10^5$
13.	12.3.	2,44	0,58	$15{,}6.10^5$
14.	18.3.	2,24	0,55	$14{,}3.10^5$
15.	18.3.	2,50	0,55	$14{,}3.10^5$
16.	21.3.	2,13	0,45	$11{,}7.10^5$
17.	28.3.	2,23	0,53	$14{,}0.10^5$
18.	12.4.	2,26	0,55	$14{,}4.10^5$
19.	21.4.	2,15	0,55	$14{,}5.10^5$
20.	21.4.	2,15	0,55	$14{,}5.10^5$
21.	21.4.	2,10	0,55	$14{,}5.10^5$
22.	24.4.	2,50	0,51	$13{,}3.10^5$
23.	4.5.	2,30	0,60	$16{,}0.10^5$
24.	6.5.	2,30	0,55	$14{,}3.10^5$
25.	6.5.	2,30	0,55	$14{,}3.10^5$



1. Učenec meri čas prehoda slike Sonca preko pravokotnice y. Zaslon je bil v senci, da bi se slika Sonca bolje videla.
2. Opazovanje Sonca na zaslonu. Učenca skicirata lego Sončevih peg.

Opisana vaja je preprosta. Pri njej smo se učili natančnosti, obenem pa smo opazovali še sončne pege in tako zasledovali dejavnost Sonca.

Boris Kham

BISTROVIDEC

Zamisel za današnjo nalogo sem si sposodil iz naloge 90 iz Dudeneyevih Canterburyjskih "orehov" in jo presadil na naša tla.

Šest prijateljev, članov Kluba mladih matematikov Laar Getny: Dušan, France, Janez, Vlado, Igor in Tomo, se je med poletnimi počitnicami dogovorilo, da se bodo vsak večer sestali "Pod lipo", vendar le tako dolgo, dokler se bodo lahko posedli okrog mize tako, da ne bo nihče dva različna večera imel ista soseda.

Seveda so takoj naredili razpored, ki je zagotavljal največje možno število sestankov.

Kolikokrat so se sestali?

Ali bi znal rešiti nalogo za druga števila prijateljev? Si pri tem znaš pomagati z računalnikom?

Vladimir Batagelj

NEKAJ DROBTINIC IZ ''THIS BOOK NEEDS NO TITEL''

HEDONISTIČNI SADIST

Prijatelj: Ne razumem te. Zakaj hočeš, da drugi ljudje čutijo bolečino?
Hedonistični sadist: Narobe si me razumel. Nočem bolečine drugih ljudi, hočem samo užitek, ki ga njihova bolečina nudi meni.

SKEPTIČNI MISTIK

John: Ali si kdaj imel kakšne mistične izkušnje?
Jim: Oh, kar naprej jih imam, a tudi v eno od njih ne verjamem.

HARMONIJA S TAOM

Nekdo je vprašal budističnega meniha: "Kako dosežete harmonijo s Taom?" On je odvrnil: "Že nisem več v harmoniji s Taom."

O ŽIVLJENJU IN SMRTI

A: Zakaj praviš, da Henry rad živi?
B: Rad ima življenje. Take vrste človek je, da bo živel do konca svojega življenja.
A: Ampak enkrat bo gotovo umrl.
B: Da, vendar ga to sploh ne moti. Pravi: "Zakaj bi moral razmišljati o smrti? Ne bom umrl, dokler sem živ!"

KOMPROMIS

Nekoč sta dva fanta našla potico. Eden od njiju je rekel: "Krasno, jaz bom pojedel to potico." Drugi je dejal: "To ni pravično. Skupaj sva jo našla in morala bi jo razdeliti - pol tebi, pol meni." Prvi je spet rekel: "Ne, jaz moram dobiti celo potico." Drugi pa: "Ne, morava si jo razdeliti: pol tebi, pol meni." Prvi je še naprej trmoglavil: "Jaz hočem celo potico." Drugi: "Ne, razdeliva si jo na pol." Takrat pa je mimo prišel neki moški in rekel: "Ne bi se smela prepirati zaradi tega - skleniti bi morala kompromis. Daj mu tri četrtine potice."

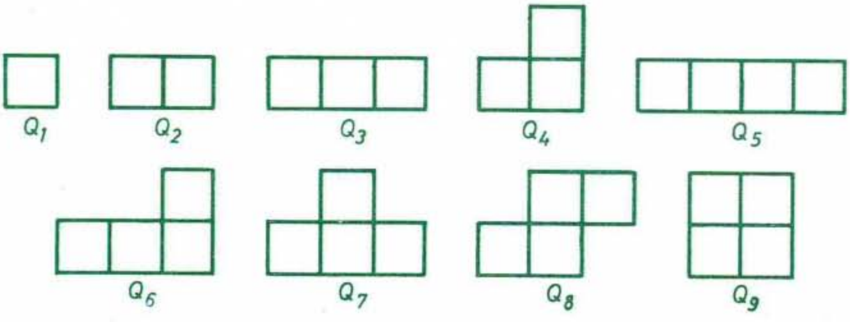
Izidor Hafner

MATEMATIČNE ŽIVALICE

V tem članku bomo spoznali najrazličnejše matematične živalice. To je družina geometrijskih likov, ki so sestavljeni iz manjših likov - trikotnikov, četverokotnikov, petkotnikov ... . Najprej bomo opisali, kako konstruiramo matematične živali. Videli bomo, da do danes ni znano, koliko različnih matematičnih živalic, sestavljenih iz določenega števila osnovnih likov, obstaja. Potem bomo definirali pojem pokritja živalice in dokazali štiri izreke o pokritjih. Ti rezultati so pomembni pri uporabi teorije matematičnih živalic v teoretični kemiji. Na koncu si bomo ogledali primer uporabe - pokazali bomo, da so v tesni zvezi s t.im. ogljikovodiki z benzenovimi obroči.

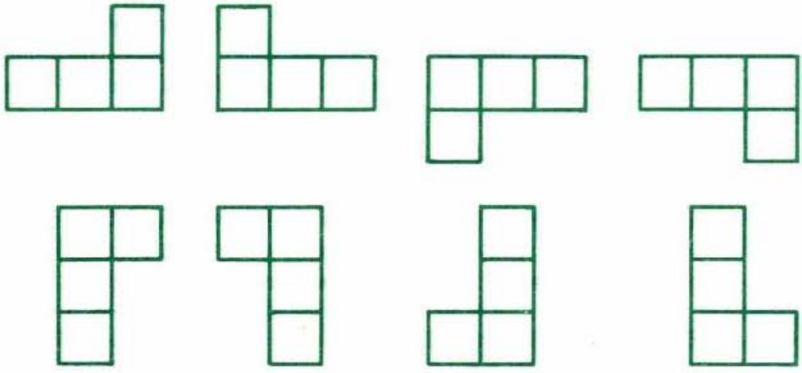
Kako so nastale matematične živalice

Izrežimo iz papirja nekaj enakih kvadratov. Potem te kvadrate lepimo drugega ob drugega, tako da imajo skupne stranice. Dva kvadrata lahko zlepimo le na en način (Q_2 na sliki 1), tri kvadrate pa že na dva načina (Q_3 in Q_4). Štiri kvadrate lahko sestavimo na pet različnih načinov (Q_5 do Q_9).



Slika 1

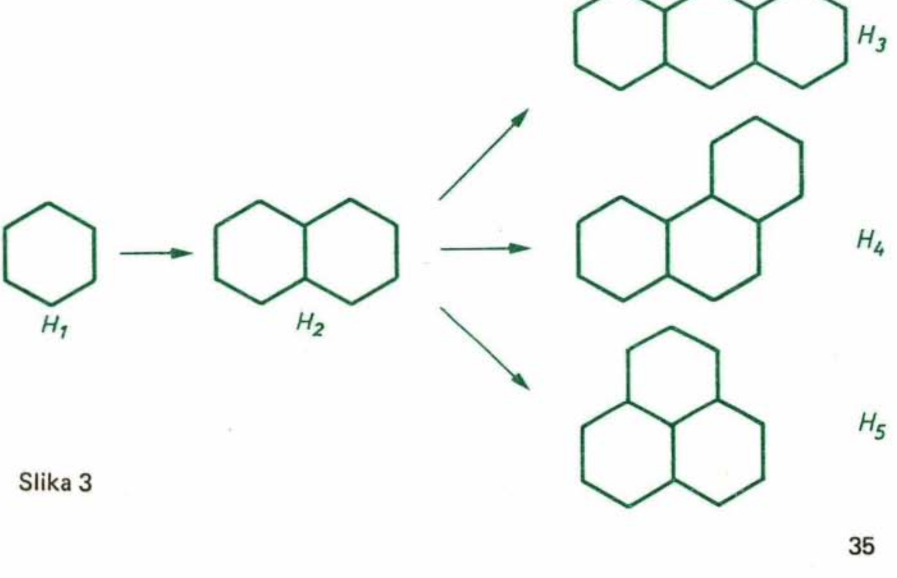
Geometrijske like, ki jih dobimo na opisani način, imenujemo kvadratne (ali četverokotniške) živalice. Seveda lahko do živalice pridemo na več načinov. Tako na primer vsi liki na sliki 2 prikazujejo isto kvadratno živalico Q_6.



Slika 2

Na enak način, le da namesto kvadratov lepimo pravilne trikotnike, petkotnike, šestkotnike itd., dobimo trikotniške, petkotniške, šestkotniške itd. živalice.

Ime *živalica* je nastalo na naslednji način. Oglejmo si eno celico. Recimo, da se ta celica lahko deli in pri tem nastane večcelični *organizem*. Če postavimo, da je naša celica ploščata in da ima obliko pravilnega mnogokotnika, na primer šestkotnika, potem jo lahko predstavimo z likom H_1 na sliki 3. Z delitvijo nastane dvocelična žival H_2, s ponovno delitvijo pa dobimo organizem H_3 ali H_4 ali pa H_5 itd. Sodobni ameriški matematik Frank Harary je take večcelične organizme imenoval *živalice.*



Slika 3

Opisani model delitve celic in rasti organizma bi lahko uporabili v biologiji. Vendar pa raziskovanje matematičnih živalic doslej biologom še ni prineslo kakšne večje koristi. Namesto tega so živalice našle svojo uporabo v različnih vejah fizike in kemije. Razen tega so tudi matematiki dobili zanimivo področje za svoje raziskave.

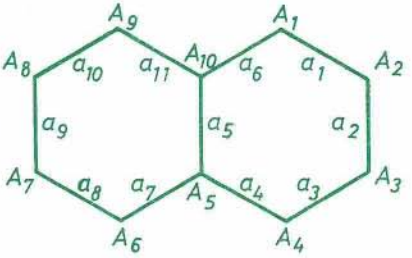
Koliko je matematičnih živalic

Ko v kombinatoriki definiramo neko družino objektov, se vprašamo, koliko takšnih objektov obstaja. Koliko živalic, sestavljenih iz n celic, obstaja? Videli smo, da obstaja ena kvadratna živalica z eno celico, ena z dvema, dve s tremi celicami, pet s štirimi, ... Vse so prikazane na sliki 1. Poizkusite narisati vse kvadratne živalice s petimi celicami - dobili jih boste natanko 12. Podobno imamo le eno šestkotniško žival z dvema celicama, tri s tremi in sedem s štirimi celicami. Prepričajte se!

Konstrukcija kvadratnih živalic s petimi ali šestimi celicami in šestkotniških živalic s štirimi in petimi celicami še zdaleč ni enostavna naloga - saj se nam kaj rado zgodi, da isto žival večkrat narišemo (glej na primer sliko 2). Če je več celic, je naloga tako težka, da je bralcem Preseka ne priporočamo. Z računalnikom so uspeli določiti število živalic z n celicami za n do približno 30. Splošne rešitve, ki bi nam omogočala določiti število živalic tudi za večja števila n, pa kljub velikemu trudu mnogih matematikov ni. Zato moramo na vprašanje, postavljeno na začetku tega razdelka, odgovoriti: NE VEMO.

Pokrivanje živalic

Na vsaki živalici lahko opazujemo njena oglišča in stranice. Tako ima na primer živalica H_2 na sliki 4 deset oglišč ($A_1, A_2, \ldots, A_{10}$) in enajst stanic ($a_1, a_2, \ldots, a_{11}$). Vsaka stranica spaja dve oglišči. Rekli bomo, da stranica ti oglišči *pokriva*. Na primer stranica a_5 živalice H_2 pokriva oglišča A_5 in A_{10}. Za dve stranici pravimo, da sta *neodvisni*, če pokrivata štiri različna oglišča. Na primer stranici a_5 in a_9 živalice H_2 sta neodvisni, medtem ko a_5 in a_{11} nista.



Slika 4

Oglejmo si neko živalico Z, ki ima p oglišč, q stranic in n celic. Po Eulerjevi poliedrski formuli velja med p, q in n naslednja zveza:

$$p + n = q + 1$$

Sedaj si lahko zastavimo naslednji problem. *Ali v živalici Z lahko izberemo paroma neodvisne stranice, tako da le-te pokrivajo vsa oglišča živalice Z?* Če je nekaj takega mogoče, bomo rekli, da je ***živalica Z pokrita*** z izbranimi neodvisnimi stranicami. Na primer živalica H_2 na sliki 4 je pokrita s stranicami a_1, a_3, a_7, a_9, a_{11}. Obstajata tudi naslednji dve pokritji: $a_1, a_3, a_5, a_8, a_{10}$ in $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$.

Štirje izreki o pokrivanjih

Dokazali bomo štiri enostavne izreke o pokrivanju živalic z neodvisnimi stranicami. Dokaz prvih dveh izrekov bo enostaven, kot je le mogoče. Tretji in četrti izrek pa bomo dokazali z metodami, ki so v kombinatoriki običajne in nam bodo služile tudi kot zgled za uporabo takih metod.

Izrek 1. Če živalico Z lahko pokrijemo, potem ima sodo mnogo oglišč.

Dokaz. Vsaka stranica pokrije natanko dve oglišči. Ker so stranice, ki pokrivajo živalico, neodvisne, je vsako oglišče pokrito le z eno stranico, zato je skupno število pokritih oglišč (to so vsa oglišča) enako dvakratnemu številu stranic v pokritju, torej sodo.

Iz gornjega dokaza neposredno sledi tudi naslednji rezultat.

Izrek 2. Za pokritje živalice, ki ima p oglišč, je potrebno $p/2$ stranic.

Izrek 3. Če se živalica da pokriti z neodvisnimi stranicami, potem se da pokriti vsaj na dva načina.

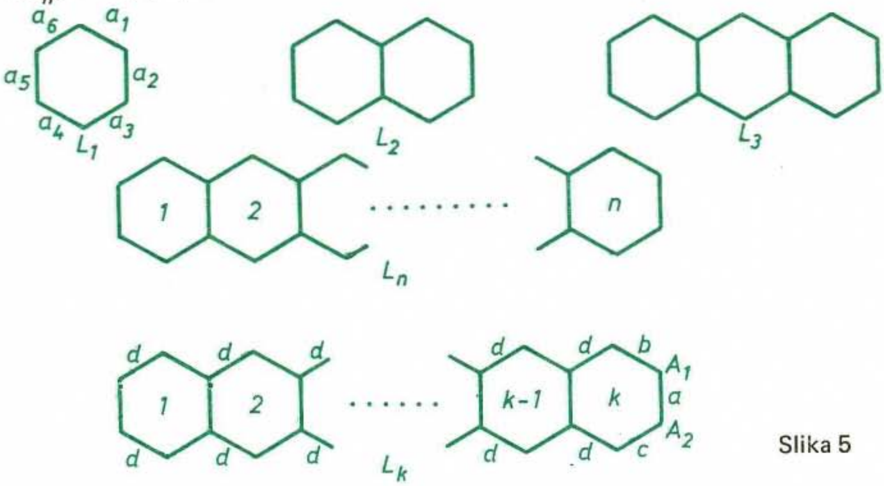
Dokaz. Zaradi enostavnosti se bomo omejili na živalice, ki jih dobimo z zlaganjem mnogokotnikov s sodim številom oglišč (kvadrati, šestkotniki itd.). Pri takih živalicah vsebuje vsako sklenjeno zaporedje stranic sodo mnogo oglišč (in seveda tudi sodo mnogo stranic). Označimo oglišča živalice Z z $A_1, A_2, ..., A_p$. Po izreku 1 je p sodo število, recimo $p = 2m$. Naj ima Z q stranic. Po izreku 2 ima dano pokritje živalice $p/2 = m$ stranic; recimo, da so to $a_1, a_2, ..., a_m$. Preostalih $q-m$ stranic pa označimo z $b_1, b_2, ..., b_{q-m}$. Vpeljimo še dve oznaki: X naj bo množica stranic $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, Y pa množica stranic $\{b_1, b_2, ..., b_{q-m}\}$.

Dokažimo najprej, da v živalici Z obstaja sklenjena krivulja (sestavljena iz zaporednih stranic), ki jo sestavljajo izmenično stranice iz X in stranice iz Y. Začnimo s poljubnim ogliščem, recimo kar A_1. V množici X obstaja stranica, ki pokriva oglišče A_1 in spaja A_1 s točko, recimo A_2. V množici Y obstaja stranica, ki spaja A_2, recimo, z A_3. Nadalje stranica iz pokritja, ki pokriva A_3, povezuje to oglišče z na primer A_4. Omeniti je treba, da oglišče A_4 ne more biti enako A_1 ali A_2, ker so stranice v X neodvisne. V množici Y spet poiščemo stranico, ki spaja A_4 z nekim drugim ogliščem, naj bo to A_r. $A_r \neq A_3$, ker je med A_3 in A_4 stranica iz X, $A_r \neq A_2$, ker bi v tem primeru zaporedje stranic od A_2, A_3 do A_4 in od tu nazaj do A_2 predstavljalo sklenjeno "krivuljo", ki bi vsebovala liho mnogo (t.j. tri) povezav. Če je $A_r = A_1$, potem smo že dobili iskano krivuljo, na kateri izmenoma ležijo stranice iz X in Y. Če pa $A_r \neq A_1$, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $A_r = A_5$. V tem primeru postopek ponovimo,. V množici X obstaja povezava, ki pokriva A_5 in vodi do oglišča A_6, na primer. Spet je A_6 različno od vseh prejšnjih oglišč, ker so stranice iz X med seboj neodvisne. Iz oglišča A_6 nadaljujemo po stranici iz Y, ki vodi, recimo, do oglišča A_s. Kot v prejšnjem primeru vidimo, da A_s ni enako A_2, A_4 ali A_5. Če je A_s enako bodisi A_1 ali pa A_3, potem smo dobili iskano sklenjeno črto ($A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$ oziroma $A_3A_4A_5A_6A_3$). V nasprotnem primeru pa je A_s različna od vseh dosedanjih točk in lahko rečemo, da je to točka A_7. Potem pa vzamemo stranico iz X, ki spaja A_7 z, recimo, A_8. Spet nadaljujemo s stranico iz Y, ki spaja A_8 z ogliščem A_t, in tako naprej.

Živalica Z ima končno mnogo oglišč, zato prej ko slej pridemo do primera, ko se nova točka (A_r, A_s, A_t, ...) ujema z eno od prejšnjih, in tedaj dobimo iskano sklenjeno črto.

Imejmo sedaj tako sklenjeno črto, ki je po vrsti sestavljena iz stranic $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ ($k \leqslant m$). Potem lahko Z pokrijemo tudi z neodvisnimi stranicami $b_1, b_2, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_m$. Zares, stranice $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pokrivajo natanko ista oglišča kot stranice $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Stranice $b_1, b_2, \ldots, b_k$ so med seboj neodvisne, jasno pa je, da so neodvisne tudi od stranic $a_{k+1}, \ldots, a_m$, saj nobena od teh stranic ne more pokrivati katerega od oglišč, ki so pokrita že z $a_1, a_2, \ldots, a_k$. S tem je izrek 3 dokazan.

O pokrivanju živali je znanih še precej drugih rezultatov. Tu bomo določili še, na koliko načinov lahko pokrijemo neko posebno družino šestkotniških živali, ki je predstavljena na sliki 5. Njene predstavnike z n celicami pa označimo z L_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$



Slika 5

Izrek 4. Živalico L_n lahko z neodvisnimi stranicami pokrijemo na $n + 1$ način.

Dokaz. Izrek bomo dokazali z uporabo matematične indukcije.

(a) $n = 1$. Lahko se prepričamo, da se da L_1 pokriti natančno na dva načina - s stranicami a_1, a_3, a_5 ali a_2, a_4, a_6 (glej sliko 5).

(b) Indukcijski korak. Predpostavimo, da izrek 4 velja za L_{n-1}, to je, da se da L_{n-1} pokriti na n načinov. Dokazali bomo, da iz te predpostavke izhaja, da lahko L_n pokrijemo na n+1 načinov. Ločili bomo dva tipa pokrivanja živalice L_n. Prvi tip je tak, da oglišči A_1 in A_2 pokrijemo s stranico a (glej sliko 5), pri drugem tipu pa teh dveh oglišč ne pokrijemo s stranico a. Hitro vidimo, da obstaja natanko eno pokritje prvega tipa, saj če oglišči A_1 in A_2 pokrijemo z a, potem moramo preostala oglišča pokriti s stranicami, ki so na sliki 5 označena z d. V drugem primeru moramo oglišče A_1 pokriti s stranico b, oglišče A_2 pa s c. Kako bomo pokrili preostala oglišča, ni določeno. Jasno pa je, da preostala oglišča lahko pokrijemo na toliko načinov, kolikor pokritij ima L_{n-1} — po indukcijski predpostavki je to n. Iz povedanega sledi, da L_n lahko pokrijemo na en način z uporabo stranice a in na n načinov, kjer ne uporabimo stranice a. Skupaj imamo torej n+1 pokritij.

Pokazali smo, da izrek 4 velja za L_1 in da iz predpostavke, da velja za L_{n-1}, ugotovimo, da velja tudi za L_n. Izrek 4 je torej dokazan s pomočjo matematične indukcije.

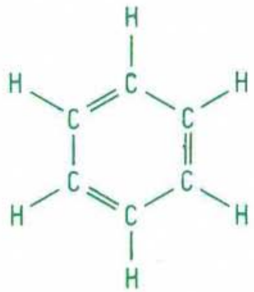
Uporaba matematičnih živalic v kemiji

Znanih je več vrst uporabe matematičnih živalic v naravnoslovnih znanostih. Na tem mestu bomo opisali primer iz kemije.

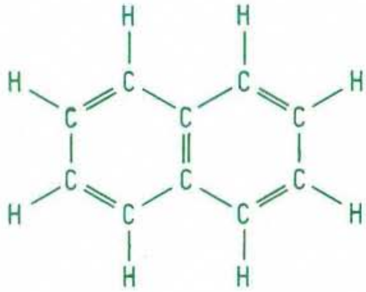
V organski kemiji so znani tako imenovani benzenoidni ogljikovodiki. To so spojine, katerih molekule so sestavljene iz benzenovih (šestkotniških) obročkov. Nekateri pomembnejši predstavniki benzenoidnih spojin so prikazani na sliki 6. Med njimi sta najbolj znana benzen (1) in naftalen (2). O benzenu smo slišali že v osnovni šoli. Naftalen se uporablja za uničevanje moljev. Spojina (3) se imenuje antracen, (4) pa fenantren. Kemijsko ime za ogljikovodik (5) je benzopiren. Ta spojina se nahaja v cigaretnem dimu in dokazano je, da je glavni povzročitelj pljučnega raka pri kadilcih.

Če sliko 6 malo bolje pogledamo, bomo opazili, da med benzenoidnimi ogljikovodiki in šestkotniškimi živalicami obstaja tesna zveza - vsaj kar se predstavitve zgradbe molekule tiče. Analogija med benzenoidnimi ogljikovodiki 1, 2, 3 in 4 ter šestkotniškimi živalicami H_1, H_2, H_3 in H_4 (glej sliko 3) je očitna.

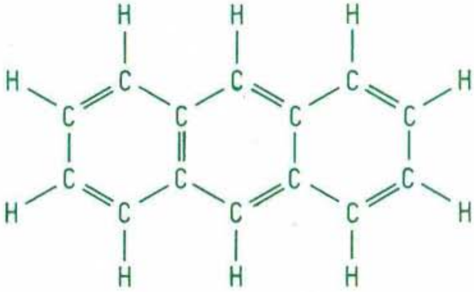
Še iz prejšnjega stoletja kemiki vedo, da lahko benzen razen s formulo I predstavimo tudi s formulo II (slika 7). Podobno ima naftalen tri različne kemijske strukturne formule (III, IV in V). Take formule se imenujejo *Kekuléove strukture* ustrezne spojine (ime gre v čast Augustu Kekuléu, ki je leta 1865 od-



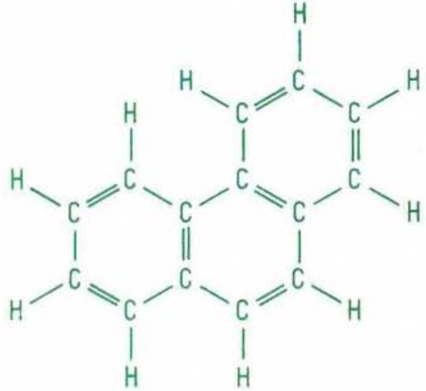
1



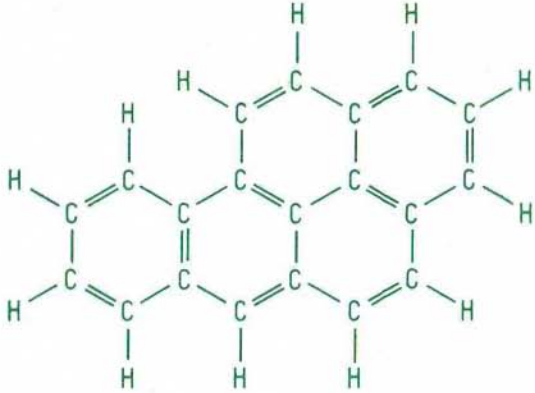
2



3

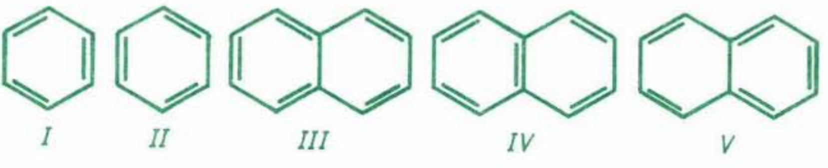


4



5

Slika 6



Slika 7

kril kemijsko strukturo benzena). Oglejmo si Kekuléove strukture s slike 7 še malo pobliže. Spomnimo se, kaj smo povedali o pokrivanju živalic. Ni težko videti, da je vsaka Kekuléova struktura pravzaprav pokrivanje ustrezne živalice z neodvisnimi povezavami. Dvojne **C = C** vezi v formulah I – V enolično ustrezajo neodvisnim stranicam, ki jih izbiramo v živalici. Na primer Kekuléove formule III, IV in V naftalena so ekvivalentne trem pokrivanjem živalice H_2 (slika 4), ki smo jih omenili v predhodnem. Prišli smo do naslednjega pomembnega sklepa:

Osnovno pravilo. Vsakemu benzenoidnemu ogljikovodiku enolično ustreza šestkotniška živalica. Vsaka Kekuléova struktura te spojine je ekvivalentna s pokrivanjem ustrezne živalice. Število Kekuléovih struktur je enako številu pokrivanj.

Izreke 1-4 lahko zdaj interpretiramo v kemijski luči.

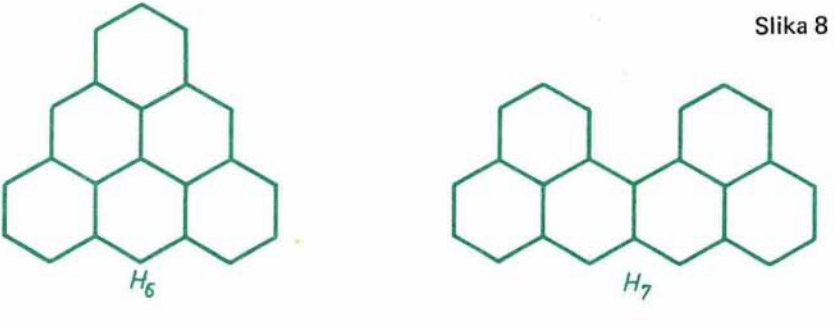
Pravilo 1. Benzenoidni ogljikovodik, ki ima Kekuleove strukture, ima sodo število ogljikovih atomov.

Pravilo 2. Vsaka Kekuléova struktura benzenoidnega ogljikovodika, ki ima p ogljikovih atomov, vsebuje $p/2$ dvojnih **C = C** vezi.

Pravilo 3. Benzenoidni ogljikovodik, ki ima Kekuléovo strukturo, ima vsaj dve taki strukturi.

Pravilo 4. Linearni poliacen z n benzenovimi obročki ima $n+1$ Kekuléovo strukturo. (Živalica, ki ustreza linearnemu poliacenu z n obročki, je L_n - glej sliko 5. Za n = 1, 2 in 3 so ustrezni poliaceni benzen, naftalen in antracen - glej sliko 6. Benzen, naftalen in antracen imajo torej dve, tri oziroma štiri Kekuléove strukture).

Slika 8



Dodajmo navedenim pravilom še naslednje pomembno kemijsko dejstvo.

Pravilo 5. Stabilni so le tisti benzenoidni ogljikovodiki, ki imajo vsaj eno Kekuléovo strukturo.

Pravilo 5 nam pojasnjuje, zakaj nikoli niso mogli sintetizirati benzenoidnih ogljikovodikov, katerim ustrezata šestkotniški živalici s slike 8. Teh dveh živalic namreč ne moremo pokriti z neodvisnimi stranicami, pa čeravno imata obe sodo mnogo oglišč. Prepričajte se, da je to res!

Ivan Gutman, Kragujevac
prevedel: *Bojan Mohar*

METODA SEMANTIČNIH TABEL ZA REŠEVANJE LOGIČNIH NALOG

V tem sestavku se bomo seznanili s preprosto metodo reševanja logičnih nalog, kakršna je na primer naslednja uganka:

Andrej, Boris in Cene vsak dan kosijo v restavraciji, naročijo pa pečenko ali šunko.

1. Če je Andrej šunko, potem je Boris pečenko.
2. Šunko naroči Andrej ali Cene, vendar pa ne oba.
3. Oba, Boris in Cene, ne jesta hkrati pečenke.

Kdo je lahko včeraj jedel šunko, danes pa pečenko?

Preden se lotimo te uganke (bralec jo lahko za vajo reši sam), bomo uvedli osnovne izjavne povezave. Definirali jih bomo tako, da bomo povedali, kako je resničnost sestavljene izjave odvisna od resničnosti njenih delov:

ime povezave	simbolični zapis	resnica	neresnica
negacija	$\neg A$	če je A neresnična	če je A resnična
konjunkcija	$A \wedge B$	če sta A in B resnični	če je vsaj ena izmed izjav A in B neresnična
disjunkcija	$A \vee B$	če je vsaj ena izmed izjav A in B resnična	če sta obe izjavi A in B neresnični
implikacija	$A \Rightarrow B$	če je A neresnična ali pa B resnična	če je A resnična in B neresnična
ekvivalenca	$A \Leftrightarrow B$	če sta A in B obe resnični ali obe neresnični	če je A resnična in B neresnična ali: če je A neresnična in B resnična

Prvi del reševanja naloge je sestavljen iz prevajanja v logično simboliko, to je iz logične stavčne analize.

Označimo posamezne enostavne izjave takole:

z "A" izjavo "Andrej jé (danes) šunko."
z "B" izjavo "Boris jé (danes) šunko."
s "C" izjavo "Cene jé (danes) šunko."

Potem lahko izjavo

"Andrej jé (danes) pečenko." zaznamujemo "$\neg A$", ker jé Andrej šunko ali pečenko, vendar ne obojega isti dan. Podobno velja tudi za Borisa in Ceneta. Lahko bi seveda uvedli tri dodatne črke za izjave "... jé pečenko.", vendar se bomo držali naslednjega napotka: Uporabljaj čim manj črk.

Pogoj 1 prevedemo z

$(\alpha)\ A \Rightarrow \neg B$

Ta pogoj namreč izključuje možnost, da bi Andrej jedel šunko (da je izjava A resnična) in da bi hkrati tudi Boris jedel šunko (in da je hkrati izjava B resnična).

Pogoj 2 pravi, da jé Andrej šunko natanko tedaj, kadar je Cene ne naroči, torej

$(\beta)\ A \Leftrightarrow \neg C$

Pogoj 3 pravi, da ni res, da oba (Cene in Boris) hkrati jesta pečenko. To pomeni, da je v danem dnevu vsaj eden ne naroči, torej jé vsaj eden šunko:

$(\gamma)\ B \vee C$

Seveda bi pogoj 3 lahko prevedli tudi kot

$(\gamma')\quad \neg(\neg B \wedge \neg C)$

vendar bi s tem kršili naslednji napotek:
Prevodi naj bodo čim bolj enostavni.
Mimogrede opazimo, da velja De Morganov zakon

$B \vee C \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg C)$

Sedaj smo pred naslednjo nalogo:

pri kakšnih vrednostih enostavnih izjav A, B in C so izpolnjeni (resnični) pogoji (α), (β) in (γ)?

Da bi bil izpolnjen pogoj (γ), mora biti resnična vsaj ena izmed izjav B oziroma C. Da bi bil izpolnjen pogoj (β), imamo dve možnosti: (1) da sta A in $\neg C$ obe resnični ali (2) da sta A in $\neg C$ obe neresnični in zato izjavi $\neg A$ in C resnični. Da bi bil pogoj (α) izpolnjen, sta dve možnosti: da A

ni resnična (da je $\neg A$ resnična) ali da je $\neg B$ resnična.

Zapišimo vse kombinacije resničnih izjav:

(1) $A \Rightarrow \neg B$
(2) $A \Leftrightarrow \neg C$ } dani pogoji
(3) $B \vee C$

(4) B | (5) C — pogoj (3)

(6) A, (7) $\neg C$ | (8) $\neg A$, (9) C | (10) A, (11) $\neg C$ | (12) $\neg A$, (13) C } pogoj (2)

(14) $\neg A$ | (15) $\neg B$ | (16) $\neg A$ | (17) $\neg B$ | X | (18) $\neg A$ | (19) $\neg B$ — pogoj (1)

X X X

Veja (1), (2), (3), (5), (10), (11) vsebuje protislovje, namreč zahtevo po resničnosti obeh izjav C in $\neg$ C, zato smo jo označili z X (mrtva veja) in je nismo nadaljevali.

Ko smo upoštevali še tretji pogoj, smo dobili še nadaljnje mrtve veje. Preostale pa vsebujejo naslednje možnosti:

$B, \neg A, C$	veja (1), (2), (3), (4), (8), (9), (16)
$C, \neg A$	veja (1), (2), (3), (5), (12), (13), (18)
$C, \neg A, \neg B$	veja (1), (2), (3), (5), (12), (13), (19)

Vse pa vključujejo zahtevo po resničnosti izjav

C in $\neg A$

medtem ko sta za B obe možnosti odprti.

Torej:
Cene jé (vedno) šunko.
Andrej jé (vedno) pečenko.
Boris jé lahko eno ali drugo.

Analiza pogojev, kot smo jo naredili, se imenuje semantična tabela. Iz nje lahko razberemo vse možnosti, ki izpolnjujejo dane pogoje. Namesto "semantična tabela" bi lahko rekli tudi "semantično drevo."

Drugačen vrstni red upoštevanja pogojev nam bo dal drugačno semantično tabelo:

(1) $A \Rightarrow \neg B$
(2) $A \Leftrightarrow \neg C$
(3) $B \vee C$

(4) A, (5) $\neg C$ | (6) $\neg A$, (7) C } pogoj (2)

(8) $\neg A$ | (9) $\neg B$ | (10) $\neg A$ | (11) $\neg B$ — pogoj (1)

X | (12) B | (13) C | (14) B | (15) C | (16) B | (17) C — pogoj (3)

X X X

Neprotislovne veje vselej vsebujejo $\neg A$ in C.

Algoritem semantičnih tabel ima za vhod neko množico izjav (za katere želimo, da so resnične), $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Te izjave zapišemo eno za drugo v tabelo. Nato tabelo razširimo tako, da naredimo naslednje:

A

(a) Označimo za mrtve tiste veje, ki vsebujejo protislovne zahteve, to je, v njih se pojavlja neka izjava in njena negacija.

(b) Odkljukamo tiste točke, v katerih nastopajo le enostavne izjave ali njihove negacije.

(c) Končamo, če so vse veje mrtve.

B

(a) Poiščemo vejo, ki ni označena za mrtvo in vsebuje neodkljukano točko.

(b) Izberemo izjavo v neodkljukani točki.

(c) Razširimo vse žive veje, ki vsebujejo to točko in to točko odkljukamo.

(d) Končamo, če ni nobene žive veje z neodkljukano točko.

(e) Vrnemo se na točko A.

To, da smo določeno točko odkljukali, pomeni, da smo upoštevali pogoj, ki je zapisan v tej točki; razen seveda, ko pridemo do enostavnih izjav oziroma njihovih negacij, ki jih ne moremo naprej analizirati. Takšen pogoj pa moramo upoštevati na vseh živih vejah, ki to točko vsebujejo. Ko smo upoštevali vse pogoje, se lahko zgodi, da:

– končamo v A (c), to je tako, da so vse veje označene za mrtve. Tedaj je začetna množica pogojev protislovna.

– končamo v B (d). Veje, ki niso označene za mrtve, vsebujejo seznam enostavnih izjav ali njihovih negacij. Če so te izjave resnične, so resnične tudi dane izjave $A_1, \ldots, A_n$.

Vsaka takšna veja nam da kakšno tako možnost.

Sedaj želimo pokazato, da iz množice izjav
$\{ A \Rightarrow B, B \Rightarrow (C \vee D), \neg C, A \}$

sledi izjava D. To pomeni, da je nemogoče, da so vse izjave iz te množice resnične, da pa je hkrati D neresnična, to je, $\neg D$ resnična. Semantična tabela za množico

$$\{ A \Rightarrow B, B \Rightarrow (C \vee D), \neg C, A, \neg D \}$$

se mora zaključiti s samimi mrtvimi vejami:

(1) $A \Rightarrow B$
(2) $B \Rightarrow (C \vee D)$
(3) $\neg C$
(4) A
(5) $\neg D$

(6) $\neg A$	(7) B			
X	(8) $\neg B$	(9) $C \vee D$		
	X	(10) C	(11) D	
		X	X	

Druga metoda, s katero bi rešili problem, je metoda resničnih tabel. Za prvo nalogo imamo osem kombinacij za logične vrednosti enostavnih izjav. Nato izračunamo logične vrednosti pogojev

A	B	C	$A \Rightarrow \neg B$	$A \Leftrightarrow \neg C$	$B \vee C$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Obkrožimo tiste nabore, za katere so vsi trije pogoji resnični (imajo vrednost 1). *A* je neresnična, *C* pa resnična izjava.

Tretja možnost je sklepanje:

Recimo, da jé Andrej šunko. Potem je Boris pečenko. Zahteva 3 pravi, da jé Cene šunko. Skratka – Andrej in Cene oba jesta šunko, to pa je v protislovju s pogojem 2.

Torej jé Andrej pečenko. Iz drugega pogoja sledi, da Cene jé šunko. Tretji pogoj je avtomatično izpolnjen.

Razlike med temi tremi metodami so naslednje: metodi semantičnih in resničnostnih tabel bosta vedno dali rezultat; sta torej mehanični metodi, ki ju lahko sprogramiramo na računalniku. Metoda resničnostnih tabel kratkomalo izčrpa vse možnosti za vrednosti enostavnih izjav.

Pri metodi semantičnih tabel lahko z dobrim vrstnim redom upoštevanja pogojev (ta izbira je kreativni del metode) nekatere veje hitro zaključimo in s tem izločimo marsikateri nabor logičnih vrednosti enostavnih izjav.

Metodi sta si inverzni. Pri resničnostnih tabelah izhajamo iz vrednosti enostavnih izjav in izračunavamo vrednosti danih pogojev. Pri semantičnih tabelah izhajamo iz resničnosti pogojev in iščemo vrednosti enostavnih izjav.

Pri sklepanju pa je večkrat potrebna kakšna "ideja".

NALOGE:

1. Zapiši še druge semantične tabele za našo logično nalogo in poišči tabelo, ki vsebuje najmanj izjav!

2. Pokaži, da so naslednje izjave resnične za vse vrednosti osnovnih izjav (semantična tabela za negacije takšnih izjav vsebuje le mrtve veje):

(a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
(d) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$

3. Janez, Peter in Tomaž so osumljeni prestopka. Na sodišču so dali naslednje izjave:

Janez: Peter je kriv, Tomaž ni kriv.
Peter: Če je Janez kriv, potem je kriv tudi Tomaž.
Tomaž: Jaz nisem kriv, toda vsaj eden od drugih dveh je kriv.

(a) Ali so vse tri izjave lahko hkrati resnične?
(b) Izjava enega sledi iz izjave drugega. O katerih govorimo?
(c) Če so vsi trije nedolžni, kdo je lagal?
(d) Če so vse izjave resnične, kdo je kriv, kdo ne?
(e) Kdo je kriv, če krivi lažejo, nedolžni pa govore resnico?

4. Upoštevaj naslednje logične zakone:

(a) Če velja $A \Leftrightarrow D$, potem lahko povsod A nadomestimo z D.
(b) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
(c) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Iz pogojev naše začetne naloge odpravi A in nato reši nalogo na različne načine.

Izidor Hafner

POTENCA IZ SAMIH ENIC

Ali obstaja naravno število, večje od 1, katerega r-to potenco ($r > 1$) zapišemo v dvojiškem sistemu s samimi enicami?

Drago Bajc

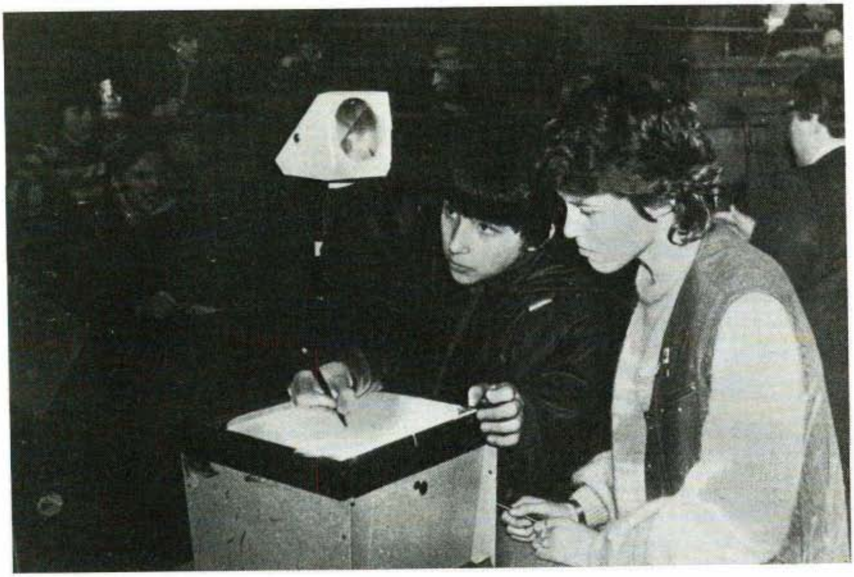
SREČANJE BRALCEV PRESEKA OB DESETI OBLETNICI

Dragi bralci, zelo smo veseli, da ste se v tolikšnem številu odzvali vabilu na SREČANJE. V soboto, 24. marca, vas je bilo kar 100 mladih, učencev sedmega in osmega razreda osnovnih šol in prvih dveh letnikov srednjih šol iz različnih krajev Slovenije. Vse, ki ste nam poslali rešitve nalog, tudi če niso bile popolne, smo povabili in upamo, da ste bili veseli in zadovoljni vsi, ki ste se srečanja udeležili. Za tiste, ki vas ni bilo, povejmo rešitve nalog: Matematika: Koza lahko popase 170,5 m^2 površine. Fizika: Masa uteži je 1 kg. Astronomija: Luna bo jutri vzšla kasneje.

Še nekaj besed o poteku srečanja. Najprej je bilo izbirno tekmovanje, kjer je bilo na primer treba vedeti, koliko tiskanih strani je bilo v Preseku v desetih letih, koliko zvezd lahko vidimo s prostim očesom, na koliko načinov lahko razvrstimo črke P, R, E, S, E, K, kolikšen je izkoristek bencinskega motorja in še kaj.

Sl. 1. Udeleženci kviza med predtekmovanjem

Potem smo se odpeljali v Zagorico na proslavo 230. obletnice rojstva Jurija Vege. Navzoče je najprej pozdravila predsednica Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije tov. prof. Martina Koman, o delu in življenju Jurija Vege pa je govoril član društva dr. Tomo Pisanski. Program so izvajali učenci osnovne šole iz Zagorice in pevski zbor tovarne Iskra-Vega. Na poti v Zagorico in nazaj smo sklenili številna poznanstva in se pogovorjali o Preseku. Dobili smo tudi Presekovo značko za spomin. Med zabavnim kvizom, ki je sledil, smo najprej urejali naslovne strani Preseka po slikah in rubrikah (matematika, fizika, astronomija). Sledile so uganke in zanke, povezovanje pojmov: količin in enot, likov in njihovih ploščin ter igre iz Preseka. Med tekmovanjem najboljših so voditelji kviza postavili vrsto vprašanj gledalcem. Kdor je pravilno odgovoril, je dobil nagrado (knjižico iz Presekove knjižnice, karikaturo slovenskega fizika ali matematika ipd.) Najboljši tekmovalni pari so za nagrado dobili knjige iz zbirke Sigma: Rešene naloge iz matematike, Prve tri minute, Kratka zgodovina fizike. Ekipa od 4. do 6. mesta pa enoletno naročnino na Presek. Najboljši so bili: 1) Edi *Rojc* iz Radovljice in Jože *Fabič* iz Vipave, 2) Dušan *Šubic* iz Žirov in Nataša *Falenti* iz Ljubljane, 3) Martin *Juvan* iz Polja in Andraž *Oblak* iz Ljubljane, 4) David *Nedeljkovič* iz Zreč in Borut *Škodlar* in Notranjih Goric, 5) Natalija *Fužir* iz Črne na Koroškem in Tone *Baumgartner* iz Radovljice in 6) Milan *Senčar* iz Ptuja in Primož *Švigelj* iz Kranja.



Sl. 2 Dvočlanska ekipa med finalnim tekmovanjem

Po zaključku in po podelitvi nagrad so bralci Preseka, ki so se prijavili za obisk v računskem centru, ta center tudi obiskali pod vodstvom T. Pisanskega. Tistim, ki jih je zanimala fizika, pa je Z. Trontelj razkazal fizikalne laboratorije. Skupina bralcev, ki jo je posebej zanimala astronomija, je že pred tekmovanjem obiskala observatorij na Golovcu. Vodil jo je A. Čadež. Po ogledih in med njimi so mladi bralci izvedeli marsikaj o delu matematikov, fizikov in astronomov, o raziskavah in življenju na univerzi ter o študiju. Tudi o Preseku in njegovih prizadevanjih za razširjanje matematike, fizike in astronomije med mladimi je tekla beseda. Mladi bralci so pohvalili SREČANJE in PRESEK. Člani uredniškega odbora sicer nismo prejeli nagrad na kvizu, dobili pa smo prijetno zavest, da s svojim delom pravilno usmerjamo mladi rod. Vsem udeležencem, ki ste nam ob SREČANJU poslali pozdrave in zahvale, želimo veliko užitkov in zadovoljstva na poti v svet matematike, fizike in astronomije in vas lepo pozdravljamo.

Jože Kotnik

Sl. 3 Na proslavi v Zagorici so nastopili tudi učenci osnovne šole Križevska vas pod vostvom učiteljice Francke Tekalec

FILATELIJA ŽE (ŠELE) TRETJIČ

Naročnike Preseka zopet vabimo k sodelovanju. Mlade matematike, fizike in astronome, ki se ukvarjajo tudi s filatelijo ali pa se bodo po izidu te številke pričeli, vabimo, da v svojih zbirkah znamk poiščejo tiste, ki so kakorkoli povezane z našimi tremi strokami. Prvo vabilo je bilo objavljeno v Preseku 1 (1973/74) št. 3, 3. stran ovitka. Drugo vabilo, kateremu je bila dodana popolna zbirka jugoslovanskih znamk s tega področja, pa smo priobčili v Preseku 6 (1978/79) št. 2, str. 125-III. Ako se boste po tem vabilu ojunačili in nam poslali serijo tematskih znamk s primernim komentarjem, jih bomo objavili, če bo le mogoče, tudi v barvah. Če nas boste kaj vprašali, vam bomo skušali posredovati odgovor kar v Preseku. Kdor nam svojih znamk ne zaupa, čeprav vam obljubljamo, da vam jih bomo vrnili, naj nam opiše, kakšne zbirke znamk ima in kaj je našel na znamkah, kar je posvečeno matematiki, fiziki ali pa astronomiji. Verjetno bodo najbolj zanimivi vesoljski poleti. Zanimivi bi bili portreti slavnih matematikov, fizikov in astronomov. Na naših znamkah je naš Nikola Tesla kar v petih serijah. Poleg njega so se naši "poštarji" spomnili le še fizikov Boškoviča in Pupina ter našega Vege, ki ga prav dobro poznate. Mohorović, ki smo ga objavili v naši zbirki, pa je meteorolog. Domnevamo, da je na tujih znamkah lahko veliko fizikalnih odkritij in pomembnih instrumentov (reaktorjev, atomskih elektrarn, inštitutov, observatorijev, nebesnih teles, itd.). Če v svojih zbirkah tega ne najdete, pobrskajte malo po katalogih filatelističnih društev in prodajaln. Lepe znamke se dobijo med spominki pred avtomobilskimi kampi na morju. To pa ni kič, kot mnoga druga darila! Dragi bralci, le pogumno na delo!

Ciril Velkovrh

PLEMLJEVA SPOMINSKA SOBA

Matematike ter učence osnovnih in srednjih šol bodo gotovo tudi letos zanimale znamenitosti Bleda. Ob tej priliki vabijo učenci blejske osnovne šole na ogled sobe, v kateri je živel in ustvarjal naš največji matematik, prof. dr. Josip Plemelj. Plemljeva spominska soba je odprta od 15. aprila do 1. septembra vsako soboto od 17. - 18. ure. V tem času dežurajo v sobi učenci osnovne šole na Bledu. Ob drugih prilikah pa se lahko dogovorite za obisk spominske sobe po telefonu št. (064) 77 861 oziroma 77 828.

Alenka Plestenjak

PROFESOR IVAN ŠTALEC JE DOBIL ŽAGARJEVO NAGRADO

V petek, 23. marca, je bila v okrogli dvorani Cankarjevega doma v Ljubljani slavnostna podelitev Žagarjevih nagrad. Nagrado je za svoje pedagoško delo dobil tudi profesor Ivan Štalec. Učenci ga gotovo poznate kot avtorja številnih učbenikov matematike. Profesorju Štalcu Presek k zasluženi nagradi iskreno čestita.

Uredništvo

STARE ŠTEVILKE PRESEKA

Ob desetletnici Preseka smo opravili več različnih inventur. Med drugim smo pregledali tudi zalogo starejših številk Preseka in ugotovili, da nekaterih številk nimamo več. Od vsake številke bi radi shranili vsaj po nekaj deset izvodov za nove odgovorne urednike in razne priložnosti, kot so obletnice, proslave in razstave. Zato prosimo vse Presekove naročnike, ki zaradi pomanjkanja prostora v stanovanjih starejših številk ne bodo hranili, da nam jih vrnejo. Še prav posebej pa bi radi dobili naslednje številke (letnik, šolsko leto, številka): 1 (1973/74) 2, 3 (1975/76) 2, 5 (1977/78) 1. Hvala lepa za morebitno pošiljko.

Ciril Velkovrh

FIZIKA

KAKO DOSEŽEMO NIZKE TEMPERATURE

V prvi lanski številki smo v članku J. Strnada (Presek XI, 1. štev., str. 34) lahko prebrali, kako so fiziki pred več kot tristo leti začeli meriti temperaturo, kako so nastali termometri in kako so vpeljali temperaturne lestvice. Ravno tako zanimivo si je ogledati, kako dosežemo zelo visoke ali zelo nizke temperature in kako jih izmerimo. V teh smereh raziskujejo fiziki tudi v današnjem času. Tokrat si na kratko oglejmo del *fizike zelo nizkih temperatur.*

Kako dosežemo nizke temperature? Zelo preprosto, boste rekli, saj imamo doma vsi hladilnike in zamrzovalne skrinje in v njih je zelo hladno. Vendar v teh hladilnikih ne dosežemo posebno nizkih temperatur: v najbolj hladnih je približno $-33^{\circ}C$ (240 K), delujejo pa na enakih osnovah kot hladilne naprave, ki dosežejo veliko nižje temperature. In katera je najnižja temperatura, ki so jo dosegli? boste takoj vprašali. Le počasi!

Fiziki so ugotovili, da narašča nered v sistemu z velikim številom delcev, npr. v plinu, ki ga sestavljajo molekule, če pri konstantnem tlaku dvigamo temperaturo. Nered lahko povežemo s termodinamično količino, ki ji pravimo *entropija**. Čim večji je nered, tem večja je entropija. Zato lahko rečemo, da je ohlajanje povezano z zmanjševanjem nereda in s tem z zmanjševanjem entropije. Entropija sistema plinskih molekul pa ni odvisna samo od temperature, ampak še od drugih termodinamičnih količin, npr. od *tlaka.* Če spremenimo tlak, se spremeni tudi entropija, kot kaže slika 1.

Kako lahko ohladimo plin, se pravi sistem plinskih molekul? Povečajmo tlak od p_1 na p_2 in poskrbimo, da ostane pri tem temperatura plina konstantna. Pravimo, da tlak *izotermno* naraste od p_1 na p_2. Entropija se pri tem zmanjša. V diagramu (slika 1) smo se premaknili iz točke A v točko B. Zdaj pa znižajmo tlak od p_2 na začetni tlak p_1, a tako, da ostane entropija konstantna. Plin mora biti pri tem koraku toplotno izoliran. Temu pravimo *adiabatno* razpenjanje plina. Sedaj se tem-

*Nekaj o entropiji in o entropijskem zakonu je v Preseku X, 1. štev., str. 24–35.

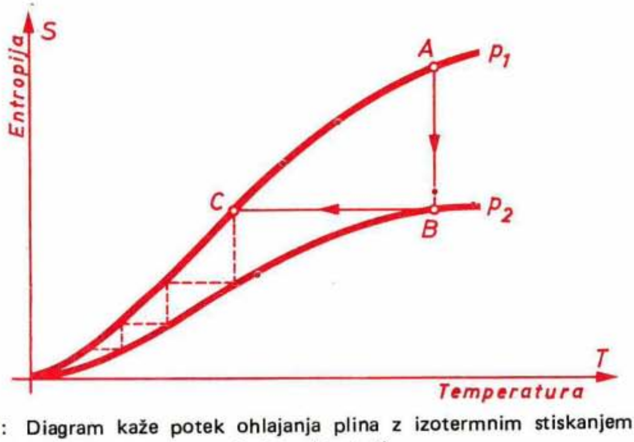
peratura plina zniža. Ali bi dosegli *absolutno ničlo,* če bi poskus na opisani način ponavljali? Ne. Ko se bližamo absolutni ničli, postaja pri zviševanju tlaka sprememba entropije vse manjša in gre proti nič. (Glej črtkano lomljeno črto na sliki 1). Zato ne moremo doseči v končnem številu korakov absolutne ničle. Za tem spoznanjem tiči *tretji zakon termodinamike.*

Absolutne ničle torej ne moremo doseči, lahko pa se ji približamo. Danes so dosegli že nižje temperature kot 10^{-6} K. Ko plin izotermno stiskamo in nato adiabatno razpenjamo ter to ponavljamo, ga toliko ohladimo, da se začne utekočinjati. V tabeli so navedena vrelišča za nekatere pline pri navadnem zračnem tlaku (1 bar). Helij je plin, ki ima najnižje vrelišče.

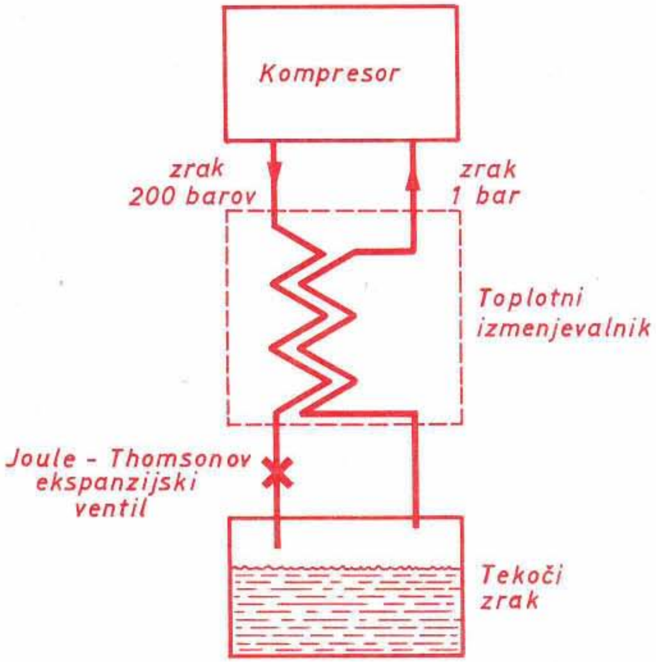
Če znižamo tlak nad tekočino, se vrelišča zniža (Presek X, 3. štev., str. 127). Tako lahko dosežemo približno 1 K, če znižamo tlak nad tekočim helijem na 0,26 milibara (26 Pa) z odčrpavanjem helijevih par.

Plin	Temperatura vrelišča
kisik (O_2)	90,2 K
dušik (N_2)	77,4 K
vodik (H_2)	20,4 K
helij (He)	4,2 K

Poglejmo, kakšna je *Lindejeva naprava za utekočinjanje plinov.* Glavni sestavni deli take naprave za utekočinjanje zraka so (slika 2): *kompresor,* ki stisne zrak na 200 barov (20 MPa). Nato gre zrak skozi splet cevi –



Slika 1: Diagram kaže potek ohlajanja plina z izotermnim stiskanjem (A → B) in adiabatnim razpenjanjem (B → C)



Slika 2: Shema Lindejevega utekočinjevalnika zraka

toplotni izmenjevalnik, kjer se že deloma ohladi. Končno se zrak razpne skozi *Joule–Thomsonov ekspanzijski ventil* na navadni zračni tlak 1 bar (100 kPa). Pri tem se toliko ohladi, da se ga del utekočini, preostali ohlajeni zrak pa se vrača v kompresor in spotoma v toplotnem izmenjevalniku ohlaja stisnjeni zrak. To pot zrak krožno ponavlja. Glej tudi Presek X, 3. štev., str. 124–135.

Tako je prvi utekočinil zrak nemški fizik Karl Linde leta 1895. Naprave za utekočinjanje vodika in helija delujejo lahko v več stopnjah, imajo pa iste glavne elemente, kot smo jih omenili pri Lindejevem utekočinjevalniku zraka. Res pa je, da so zahteve glede toplotne izolacije, vakuumskega tesnenja, zračnosti pri gibljivih delih pri utekočinjevalnikih helija strožje. Helij je prvi utekočinil holandski fizik Kamerlingh Onnes leta 1908 v Leidnu. Tedaj šele se je v fiziki lahko začelo raziskovalno delo pri nizkih temperaturah. Najuspešnejši utekočinjevalniki helija so nastali po predlogi, ki jo je naredil ruski fizik Peter Kapica 1934 v Angliji in jo je izpopolnil leta 1947 Collins v ZDA. To izvedbo utekočinjevalnika za helij imamo tudi v Ljubljani na Institutu J. Stefan (slika 3).

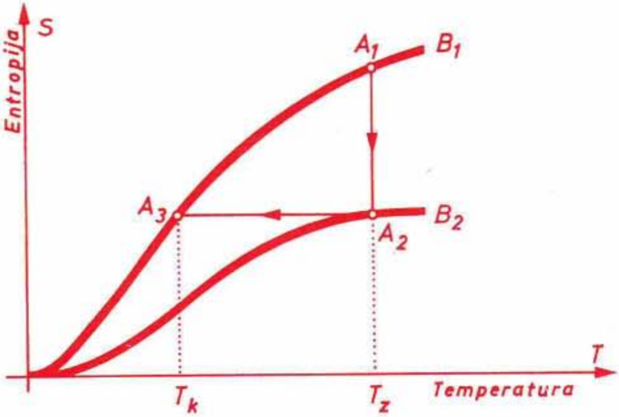
Še nižje temperature dosežemo tako, da spreminjamo namesto tlaka plina zunanje magnetno polje, v katero damo primerno paramagnetno sol. Temu pravimo *magnetno ohlajanje.* V molekuli paramagnetne soli se gibljejo elektroni. Nekatere od njih lahko opišemo kot drobne *magnetnice.*

Slika 3: Utekočinjevalnik helija na Institutu J. Stefan v Ljubljani

Tako si smemo poenostavljeno predstavljati kristal paramagnetne soli kot množico magnetnic, na katere deluje zunanje magnetno polje. In kako poteka magnetno ohlajanje? Največkrat vzamemo za hladilno snov paramagnetno sol cerov magnezijev nitrat (CMN), ki ga najprej ohladimo s tekočim helijem pod znižanim tlakom na 1 K. Nato CMN pri tej temperaturi izotermno namagnetimo. Pri tem se uredijo v CMN magnetnice v smeri zunanjega magnetnega polja. Zato se zniža entropija sistema magnetnic. Na sliki 4, ki je podobna sliki 1, smo prišli iz točke A_1 v točko A_2. Potem toplotno izoliran sistem magnetnic adiabatno razmagnetimo. Na sliki 4 smo se premaknili iz točke A_2 v A_3. Ob adiabatnem razmagnetenju se paramagnetna sol ohladi na nekaj tisočink K, odvisno od začetne gostote magnetnega polja, ki ga uporabimo, in od razmer v notranjosti kristala, ki jih opiše *notranje magnetno polje.* Končna temperatura je enaka:

$$T_k = T_z \frac{B_{int.}}{B} \qquad (1)$$

T_z pomeni začetno temperaturo, B začetno gostoto magnetnega polja, s katerim namagnetimo CMN, in B_{int} gostoto notranjega magnetnega polja v CMN.



Slika 4: Diagram kaže potek ohlajevanja paramagnetne soli z izotermnim namagnetenjem ($A_1 \rightarrow A_2$) in z adiabatnim razmagnetenjem ($A_2 \rightarrow A_3$)

S spreminjanjem zunanjega magnetnega polja lahko ohladimo tudi sistem *"jedrskih magnetnic"* pri nekaterih kovinah. Za ohlajanje so zelo primerna atomska jedra bakra. Jedro atoma bakra se v zunanjem magnetnem polju obnaša podobno kot drobna magnetnica, ki pa je še veliko bolj drobna in manj učinkovita od elektronske magnetnice, o kateri smo govorili prej. Zaradi tega je tudi notranje magnetno polje v kristalu bakra, če upoštevamo samo jedrske magnetnice, kake tisočkrat šibkejše kot notranje polje v kristalu CMN. Iz enačbe (1) vidimo, da bomo z adiabatnim razmagnetenjem sistema jedrskih magnetnic dobili še nižje temperature, kot smo jih dosegli z adiabatnim razmagnetenjem sistema elektronskih magnetnic. Prvo uspešno magnetno ohlajanje atomskih jeder bakra je naredil Nicolas Kurti s sodelavci leta 1959 v Oxfordu. Dosegli so okrog 10^{-6} K. Danes tako že dosežejo temperaturo bakrovih jeder $5 \cdot 10^{-8}$ K. Začetna temperatura mora biti okrog 10^{-3} K, jedra bakra pa namagnetijo izotermno z magnetnim poljem z gostoto 8 teslov.

Obe vrsti magnetnega ohlajanja lahko naredimo samo enkrat in ju ne moremo krožno ponavljati. Dosežene temperature trajajo zaradi dovajanja toplote iz okolice le omejen čas, ki je za veliko eksperimentov prekratek.

Za dalj časa dosežemo zelo nizke temperature z *razredčevalnim hladilnikom,* ki je bil prvič narejen pred 15 leti. V tem hladilniku je mešanica lažjega in težjega helijevega izotopa: ^3He in ^4He. (V naravnem heliju pride le na vsake 10^7 atomov ^4He en atom ^3He.) Pri temperaturi malo pod 1 K se mešanica obeh izotopov loči v dve fazi: ena je čisti tekoči ^3He, druga pa vsebuje nekaj več kot 6 % ^3He, raztopljenega v tekočem ^4He. Ker je faza, ki je bolj bogata s ^3He lažja, splava nad fazo, ki ima manj ^3He. Sistem se ohladi, zaradi prehajanja atomov ^3He preko meje obeh faz. Nekaj podobnega se dogaja pri izparevanju tekočin, ko molekule prehajajo iz tekoče faze v plinasto. V razredčevalnem hladilniku lahko vzdržujejo temperaturo nekaj tisočink K.

Na kratko smo opisali osnove važnejših metod, ki jih uporabljamo za doseganje nizkih in najnižjih temperatur. O tem, kako te temperature merimo in katere pojave opazimo pri njih, pa kdaj drugič.

Zvonko Trontelj

POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

OHLAJANJE STEKLENIČKE S ČAJEM

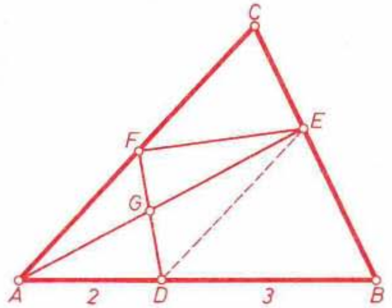
Kdor ima doma mlajšega bratca ali sestrico, ki še pije iz stekleničke, je gotovo že opazoval, kaj se dogaja pri hitrem ohlajevanju tekočine v steklenički. Stekleničko z vročim čajem ste želeli čimprej ohladiti tako, da ste jo držali pod tekočo vodo in jo pri tem še stresali, da se je tekočina mešala. Ko se je vsebina stekleničke dovolj ohladila, ste pipo zaprli in skušali dati malčku piti. Pri tem ste stekleničko nagnili in ko je tekočina prišla do cuclja, se je včasih zgodilo nekaj nepričakovanega. Tekočina je silovito brizgnila skozi cucljevo luknjico malčku v obraz. Napravite ta poskus raje sami v umivalniku brez pomoči bratca ali sestrice, da ne bo joka. Ugotovite, kdaj voda brizgne močneje, kdaj pa sploh ne, ampak le kaplja skozi luknjico. Poskusite pojav razložiti! Če doma nimate otroške stekleničke, si lahko pomagate tudi s stekleničko od sadnega soka, ki jo na vrhu zamašite, v zamašek pa napravite drobno luknjico.

Na vaše odgovore čakamo do 10. oktobra. Najboljše bomo nagradili.

Bojan Mohar

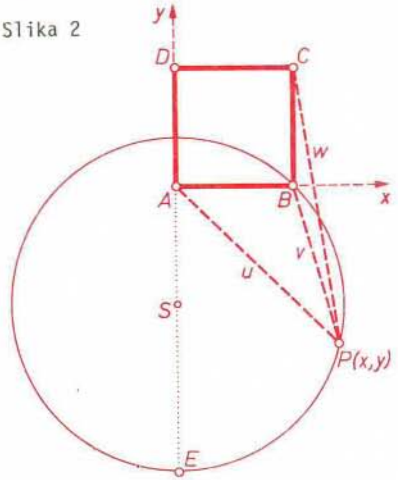
REŠITVE NALOG

TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV V TRSTU — rešitev s strani 14



Slika 1

Slika 2



28. Po podatku naloge je

$$ABE = DBEF$$

Tu pomeni znak = ploščinsko enakost. Potem, ko odvzamemo skupni četverokotnik $DBEG$, dobimo

$$ADG = GEF$$

Če dodamo trikotnik DEG, dobimo spet ploščinsko enaka trikotnika

$$DEA = DEF$$

Trikotnika s skupno osnovnico in enako ploščino morata imeti enako višino. Torej

$$DE \,||\, AC$$

če pa je tako, nam poseben izrek zagotavlja

$\overline{BE} : \overline{EC} = \overline{BD} : \overline{DA} = 3 : 2$

Trikotnika BEA in ECA imata enako višino iz A, zato sta njuni ploščini v razmerju osnovnic:

$BEA : ECA = 3 : 2$ ali $BEA = 3/5 ABC = 3/5 . 10 = 6$

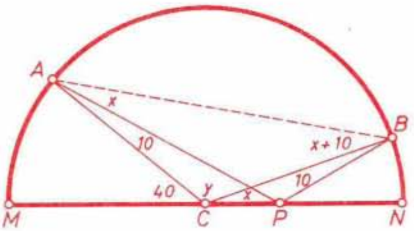
29. V tej nalogi je koristno uvesti koordinatni sistem, kot ga prikazuje slika 2. V tem koordinatnem sistemu imajo točke, ki nas zanimajo, naslednje koordinate: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ in $P(x,y)$. Razdalje u,

v in w pa so podane z $u^2 = x^2 + y^2$, $v^2 = (x-1)^2 + y^2$, $w^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$. Pogoj $u^2 + v^2 = w^2$ nam da po kratkem računu $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ oziroma

$x^2 + (y+1)^2 = 2$

Vse točke P ležijo torej na krogu s polmerom $\sqrt{2}$ in središčem $(0,-1)$. Na tem krogu je točka $E(0,-1-\sqrt{2})$ najbolj oddaljena od D. Zato je največja možna razdalja PD enaka $2 + \sqrt{2}$.

Slika 3



30. Točke A, B, C in P (slika 3) morajo ležati na istem krogu, kjer sta $\measuredangle CAP$ in $\measuredangle CBP$ obodna kota nad isto tetivo CP. Odtod pa sledi, da sta tudi obodna kota nad tetivo PB (na sliki označena z x) enaka. Z y označimo velikost kota $\measuredangle ACB$. Tedaj velja:

$$x + y = 140^\circ \qquad (1)$$

Ker je dalje trikotnik ABC enakokrak, je kot $\measuredangle ABC$ v njem enak kotu $\measuredangle CAB$: $x + 10^\circ$. Sledi

$$2.(x+10^\circ) + y = 180^\circ \qquad (2)$$

Če odštejemo enačbo (1) od enačbe (2), dobimo $x = 20^\circ$.

Drago Bajc

NEKAJ MISLI ZNAMENITIH LJUDI O MATEMATIKI

Temeljito proučevanje prirode je najplodnejši izvor matematičnih odkritij.

(J.B. Fourier)

Z napredkom in izpopolnjevanjem matematike je pogojeno blagostanje države.

(Napoleon)

Tisti, ki cenijo izključno prakso - brez teoretičnih osnov - so podobni mornarju, ki gre na ladjo brez krme in kompasa, ne da bi vedel, kam plove.

(Leonardo da Vinci)

Ni nobene matematične veje, če je še tako abstraktna, ki se enkrat ne bi mogla uporabiti na pojave stvarnega sveta.

(N.I. Lobačevski)

POTENCA IZ SAMIH ENIC – REŠITEV S STRANI 48

REŠITEV S STRANI 48

V dvojiškem sistemu predstavlja zapis $\underbrace{111.....111}_{n}$ število

$1.2^{n-1} + 1.2^{n-2} + \ldots + 1.2^2 + 1.2 + 1 = 2^n - 1$

Torej nas zanima, ali je za kak n mogoče najti takšna $x > 1$ in $r > 1$, da velja

$$2^n - 1 = x^r$$

Najprej opazimo, da x ne more biti sodo število, ker je skrajna leva cifra v zapisu sodega števila v dvojiškem sistemu enaka 0.

Da r ne more biti sodo število, se prepričamo tako: pišemo $r = 2s$ in na obeh straneh zgornje enačbe odštejemo 1. Dobljena izraza še razstavimo

$$2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 2 = x^{2s} - 1 = (x^s - 1)(x^s + 1)$$

x je lahko le liho število in sta zato oba faktorja na desni sodi števili. Njun produkt je zato deljiv s 4, leva stran enačbe pa je deljiva le z 2. Protislovje pove, da r ne more biti sodo število.

Če pa je r liho število, ga lahko zapišemo kot $2s + 1$. V pogoju $2^n - 1 = x^{2s+1}$ dodamo na obeh straneh 1 in spet razstavimo desno stran. Dobimo zvezo

$$2^n = x^{2s+1} + 1 = (x + 1)(x^{2s} - x^{2s-1} + \ldots - x + 1)$$

Na levi imamo kot faktorje same dvojke, na desni pa je le $x + 1$ sodo število. Drugi faktor na desni je namreč vsota lihega števila lihih števil in je zato liho število. Poglejmo le, da ni enako 1: prepišemo ga lahko v obliki

$$x^{2s} - x^{2s-1} + x^{2s-2} - x^{2s-3} + \ldots + x^2 - x + 1 =$$

$$= (x - 1)(x^{2s-1} + x^{2s-3} + \ldots + x) + 1$$

in se še enkrat zavemo, da x ne sme biti enak 1.

Tako smo spoznali, da je odgovor na vprašanje negativen!

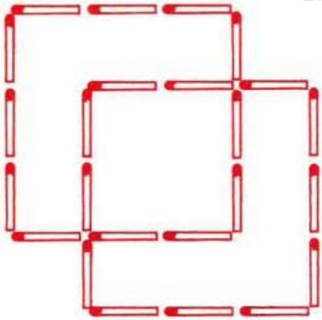
Opomba: Če bi dopustili, da je r lahko tudi enak 1, je za vsak n mogoče za x vzeti kar $2^n - 1$ (pri $n = 1$ je $x = 1$).

Drago Bajc

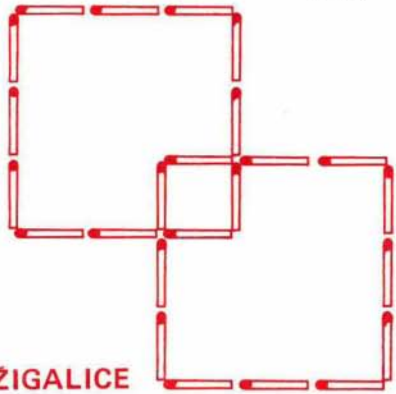
KRATKOČASNE VŽIGALICE

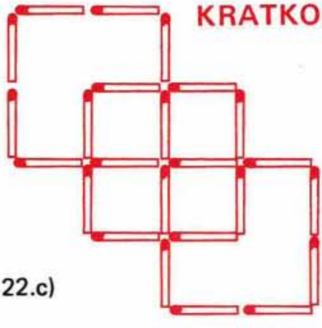
REŠITVE S STRANI 23

22.a)

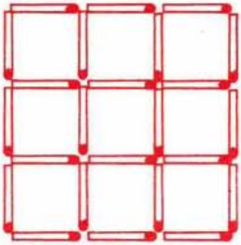


22.b)

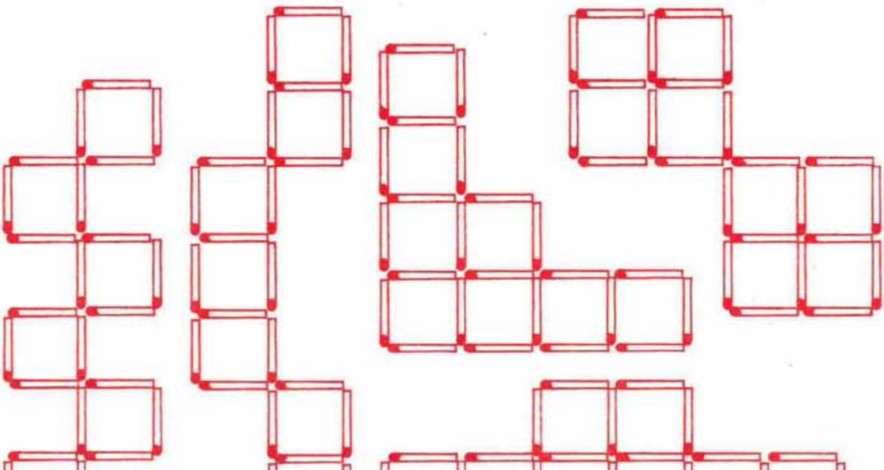




22.c)

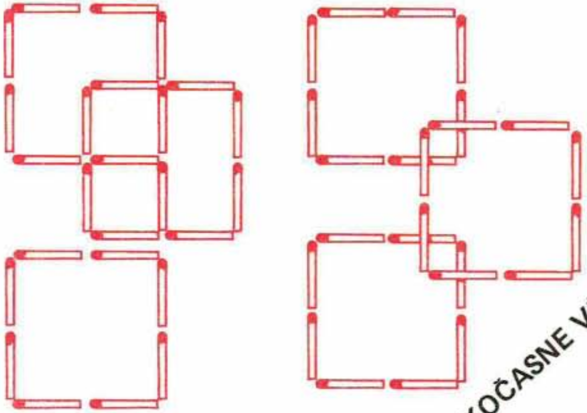


22.d)

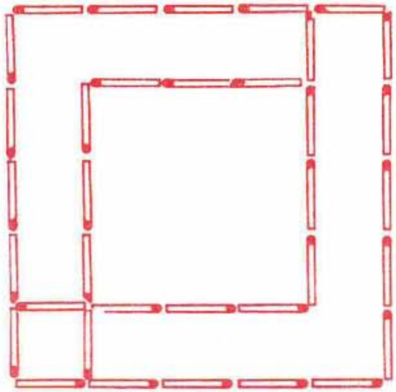


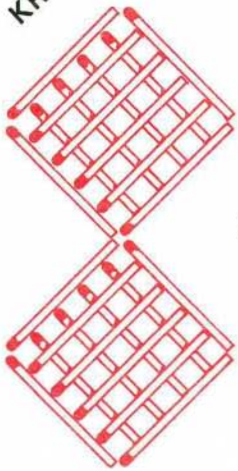
KRATKOČASNE VŽIGALICE
REŠITVE S STRANI 23

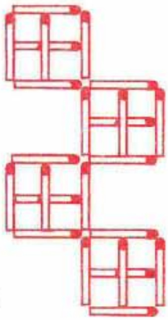
22.e)



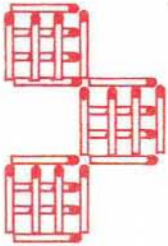
23.



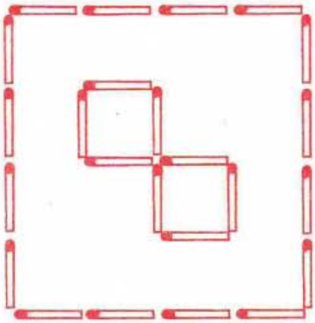




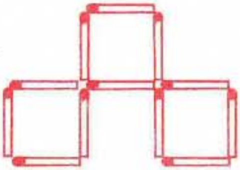
22.f)



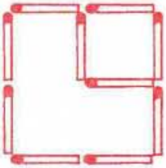
24.



25.



26.




SENEGAL
100F
POSTES 1978
ПРОГРАММА СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ СТРАН
ИНТЕРКОСМОС
ПОЧТА 6 К СССР
Marconi Spark Coil
Marconi Spark Gap
U.S. 6c
Progress in Electronics
De Forest Audions
U.S. 11c AIRMAIL
Progress in Electronics
Radio Speaker
Radio Tube
Microphone
TV Camera Tube
U.S. 15c
Progress in Electronics
МЕЖДУНАРОДНЫЕ ПОЛЕТЫ В КОСМОС
1978 К 15
ПОЧТА СССР
INTERKOSMOS
МЕЖДУНАРОДНЫЕ ПОЛЕТЫ В КОСМОС
1978 К 32
ПОЧТА СССР
INTERKOSMOS
ČESKOSLOVENSKO
80h
A. Einstein
40
1879-1955
HELVETIA
1.00
ישראל
10
INTERNATIONALE VERKEHRSAUSSTELLUNG 1965
DEUTSCHE BUNDESPOST
4c
U.S. MAN IN SPACE
PROJECT MERCURY