presek 5/6
XI 1983–84

ZLATKO
ŠPORER

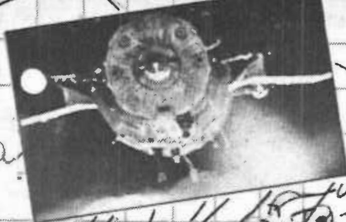
OH, TA MATEMATIKA

Ilustriral in komentiral
NEDELJKO DRAGIĆ

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

Domača naloga



Dane so množice

1.) $A=\{x : x\in N \text{ i } x\geq 3\}$

$B=\{x : x\in N_0 \text{ i } x\leq 8\}$

$C=\{x : x\in N \text{ i } 3<x<10\}$

a Napiši

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$C=\{4,5,6,7,8,9\}$

b) $A\cap B\cap C=\emptyset$

c) $A\cup B\cup C=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

2.) Dane so množice

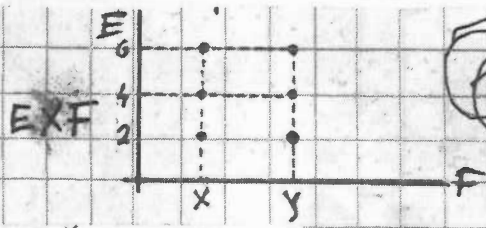
$E=\{2,4,6\}$

$F=\{x,y\}$

a) Napiši Kartezični produkt $E\times F$

$E\times F=\{(2,x)(4,x)(6,x)(2,x)\ 4,4)(6,4)\}$

b.) Podaj množico $E\times F$ s tabelo



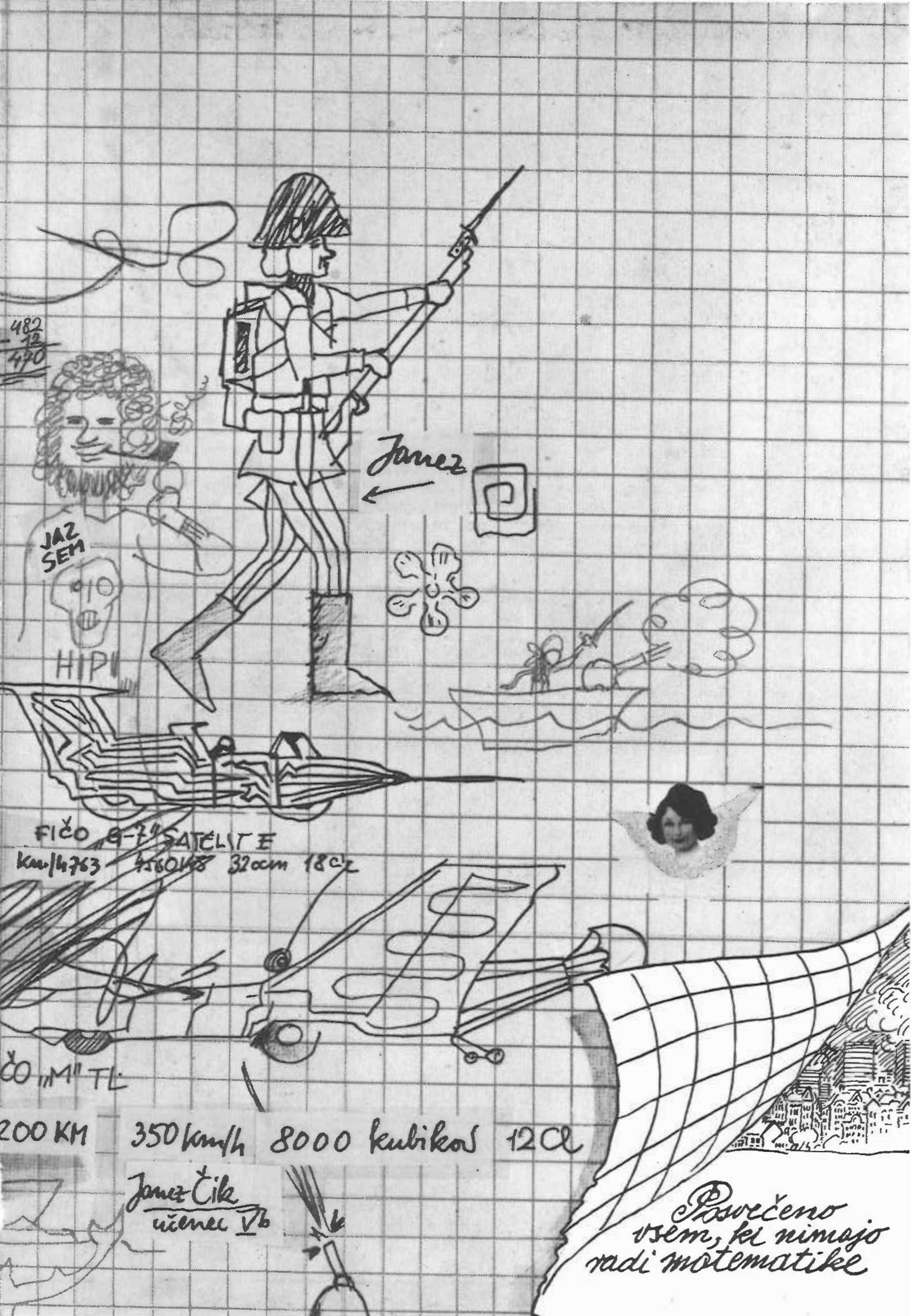
3.) Reši enačbe

a) $x-1<7$

$x=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

b) $26>y+16$

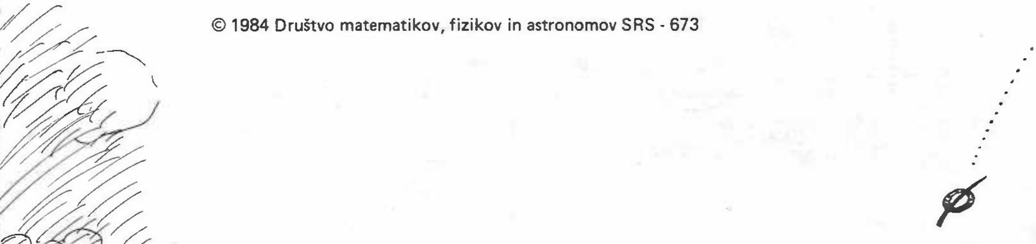
$y=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$


482
12
470
Janez
JAZ SEM
HIPI
FIČO „G-7" SATELITE
ČO „M" TL
200 KM
350 km/h
8000 kubikov
12 Cl
Janez Čik
učenec Vb
Posvečeno vsem, ki nimajo radi matematike

PRESEK - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
11. letnik, šolsko leto 1983/84, številka 5/6, strani 193 – 420.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. št. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1983/84 je za posamezna naročila 150.- din, za skupinska naročila pa 120.- din.

List sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana.



ZLATKO
ŠPORER

OH, TA MATEMATIKA

Ilustriral in komentiral
NEDELJKO DRAGIĆ

Naslov originala:
Zlatko Šporer
Uh, ta matematika, 3. izdaja
Školska knjiga, Zagreb 1981

Prevedel Janko Moder

VSEBINA

KAKŠNA KNJIGA PA JE TO

Tako se boste najbrž vprašali, ko boste prebrali naslov. In potem:

"OD KOD SPLOH TA NASLOV? IN POSVETILO?"

"Naslova te knjige si nisem izmislil jaz. Zagotavljam vam, da ne. Slišal sem ga od vas. In ne enkrat, kje pa, ne vem kolikokrat (tako da mi že kar brni po ušesih), in to me je podžgalo, da sem napisal knjigo - pa ravno s tem naslovom (mogoče mi še celo neha brneti po ušesih)."

"Kaj se to pravi, od nas?"

"Pa še lepo, in ravno od vas - ki nimate radi matematike. In koliko vas je takih, strela! Mladih in starih, otrok in staršev, učencev in dijakov in... Sicer pa, kaj bi vam našteval, ko pa sami bolje kakor jaz veste, kdo vse ne mara matematike, čeprav se dá kaj lahko tudi ugotoviti, koliko vas je."

"Kako, lahko?"

"Čisto preprosto. Preštejeę na prste tiste, ki jo imajo radi, to število odštejeę od števila prebivalcev in dobiš one druge. Kaj ni tako? Čist račun."

"Drži, drži, natančno tako. Pa kaj potem? Nimamo radi matematike - in pika. Menda ne mislite, da bo kaj drugače, če preberemo to knjigo? Še malo ne. (In sploh - veste - bomo dvakrat dobro premislili, preden se lotimo branja.)"

"Ne, na to res nisem niti pomislil. Saj nisem tako naiven. In če bi kdo vedel za recept, kaj je treba napraviti, da vzljubiš matematiko, bi mu matematiki gotovo postavili spomenik in ga predlagali za Nobelovo nagrado.[1] Ta človek bi čez noč postal slaven in bogat. Oprostite, kaj sem rekel Nobelovo? Ne, ne Nobelovo, ne

---

[1] Od leta 1901 jo podelijo vsako leto na dan Nobelove smrti (10. decembra) za izredne zasluge na področju fizike, kemije, medicine in književnosti. Iz istega sklada podeljujejo tudi Nobelovo nagrado za mir. Denarna nagrada znaša nad 60 000 ameriških dolarjev.

zamerite. Fieldsovo nagrado. Za zasluge v matematiki namreč sploh ne podeljujejo Nobelove nagrade. (Najbrž tudi Nobel ni imel rad matematike, pa ni dovolil, da bi iz njegove zapuščine podeljevali nagrado matematikom.)"

"Kakšna pa je Fieldsova nagrada? Še nikoli nismo slišali o nji."

"Fields je bil ameriški milijonar - majčkeno čudaški. Ko je zvedel, da matematikom ne podeljujejo Nobelove nagrade, je sklenil (kdo bi vedel, zakaj, najbrž zato, ker je bil čudak) ustanoviti sklad, iz katerega naj bi vsako četrto leto nagrajevali matematike, posebno zaslužne za razvoj matematike. Poleg denarne nagrade dobijo tudi medaljo, ki ima njemu na čast ime - Fieldsova. Matematiki jo imajo zelo v čislih in dobiti to medaljo jim je v veliko čast in znamenje priznanja. No, to je pa tudi vse, kar vem o tem."

"Dobro, pa zakaj je knjiga posvečena ravno nam, ko že tako in tako nimamo radi matematike? Mogoče kar tako, za špas? Pa res ni lepo briti norce iz tuje nesreče."

"Ne, saj ne. To s posvetilom sem mislil več kot resno. Knjiga je v resnici napisana zaradi vas in posvečena vam. Zelo dobro namreč vem, da matematike sicer ne marate, učiti se je morate pa kljub temu."

"No, to je žal res."

"Segate mi v besedo. Ni namreč ne osnovne ne srednje, ne večerne ne dopisne šole, še manj pa fakultete, na kateri ne bi učili matematike in kjer bi ne bila potrebna. Matematiko imamo lahko, če že hočete, za nujno zlo, ki se mu danes v življenju, še posebej pa v šoli sploh ne moreš izmakniti. Vsako zlo, ki se mu že ne moremo izogniti, pa je dobro vsaj spoznati. To je splošno načelo, ki ga je povsod pametno uporabljati. Še v vojni. Bojujemo se z nasprotnikom, sovražimo ga, pa ga vendar poskušamo kar najbolje spoznati. Ali v športu. Kaj napravi trener pred odločilno nogometno tekmo? Svoje igralce poskuša kajpak kar najbolje seznaniti s taktiko in lastnostmi nasprotnika. In vemo, zakaj. Vidite, tudi jaz bi želel samo malo poklepetati o matematiki, da jo malo spoznamo - to je vse. Nič več."

"Pa bomo imeli vsaj kaj koristi od branja te knjige? Ne bomo samo zabijali čas? Uh, koliko nalog moramo napisati za šolo."

"Če sem iskren, ne vem. Ne morem vam biti porok. Ampak naj že bo, kakor hoče, berite knjigo - kadar nimate drugega dela. Prepričan sem, da se boste pri tem vsaj malo zabavali, mogoče pa tudi česa naučili. Kaj se ve?"

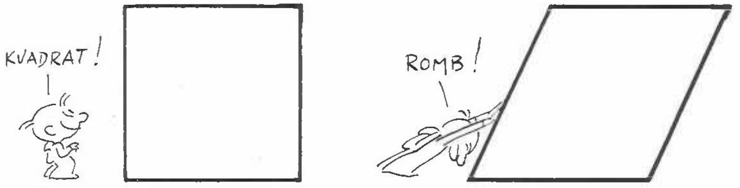
"Zabavali? Kako pa se je mogoče z matematiko zabavati?"

Do konca knjige so strani označene na razne načine

"Pa ste mi res nezaupljivi. Saj sem vam vendar rekel. Matematike se ne bomo učili, le klepetali bomo o nji. In pri tem so tudi kratkočasne reči. In sploh vam ne mislim pripovedovati o matematiki tako, kakor po navadi profesorji:

- znanstveno,
- strogo,
- z vsemi mogočimi dokazi,
- v matematičnem jeziku.

Pogovarjali se bomo v navadnem vsakdanjem jeziku, brez matematične strogosti, brez dokazovanja. In če se spotoma domislim kakšne prijetne zgodbe, vam jo povem. Poskušali bomo pogledati matematiko tudi od njene zabavne strani. Ne bomo je jemali preveč resno. Skoraj zmeraj je mogoče najti kakšen vzrok, da se človek tudi nasmeje. In mi bomo iskali ravno to. Kdor pa jemlje vse preveč resno in tragično, naj se kar razburja. V življenju in v matematiki. Takoj vam povem 'definicijo', ki je bila meni zelo všeč, slišal pa sem jo že zdavnaj v šoli. Učitelj vpraša učenca:



'Povej mi, kaj je romb.' Učenec premišljuje, premišljuje, se poti in na vsem lepem se mu posveti, pa kakor izstreli:

'Romb je nagnjen kvadrat.' Od takrat je minilo že precej let, veliko 'pravih' definicij in teoremov sem pozabil, to 'definicijo' sem si pa zapomnil. Priznam, da imam še danes ravno tako rad dobro šalo kakor pravilno definicijo. Samo nekaj vas prosim:

Za noben denar ne kažite te knjige matematikom. Še tega jim ne povejte, da ste jo brali. Bolje za vas in zame. In ne sprašujte me zdaj, zakaj. Če boste knjigo prebrali, vam bo jasno, zakaj vas to prosim."

"Dobro, če je tako, jim knjige ne bomo kazali, kljub temu pa nas zanima, o čem govorite v nji."

"Oh, o vsaki reči malo. O starih grških matematikih in vprašanjih, ki so jih reševali, o naravnih številih in njihovih lastnostih in zakonih, o čudnih rečeh v svetu neskončnosti, o tem, kako računajo računalniki, o matematičnih aksiomih, o množicah in zvijačah ob njih, o nenavadnih izrazih, ki jih matematiki danes radi uporabljajo, o raznih vejah matematike in o tem - kako se niti matematiki ne strinjajo o vsem. Povem vam, o vseh mogočih rečeh."

"Pa so v tej knjigi tudi naloge?"

"Seveda so, ampak brez skrbi. Ni vam jih treba reševati. Povrh tega pa niso navadne naloge kakor v šolskih knjigah, temveč največkrat vprašanja v zvezi s snovjo, o kateri se pogovarjamo. Vstavljene so pa bolj zaradi lepšega."

"Dobro, ampak če bo kdo od nas le poskusil rešiti katero od nalog, kako bo vedel, ali jo je prav rešil?"

"Nič lažjega. Vsako vprašanje ima svojo številko in na koncu knjige so odgovori. Priporočam vam pa (kakor je priporočeno v vseh knjigah), da poskušate rešiti nalogo brez gledanja v rešitev." (Saj jim ni treba vedeti, da imam tudi jaz sam grdo navado, da najprej pogledam rešitev in se šele potem odločim, ali bom nalogo reševal ali ne. Važno je, da sem jim priporočil, naj ne gledajo rešitev - in moja vest je mirna.)

"Zanima nas, kaj naj s seznamom imen in izrazov na zadnjih straneh. Odkrili smo ga, ko smo listali po knjigi."

"To je zelo praktično. Ljudje so si izmislili kazala, da se laže znajdejo v knjigah. Po abecedi so razvrščena vsa pomembnejša imena, pojmi, zakoni, pravila in podobno, kar jih je v knjigi, zraven vsakega pa stran, na kateri v tej knjigi govorimo o njih. Če vas torej kaj zanima na primer o Evklidu, poglejte zadaj in pod črko *E* poiščite ime Evklid. Številke zraven imena povedo stran, na kateri je v knjigi omenjen Evklid. Tako vam ni treba prebrati vsega poglavja, da najdete tisto, kar vas zanima. Poznam nekaj pametnih ljudi, ki skoraj nikoli ne preberejo cele knjige, temveč samo tisto, kar jih zanima. Poglavitno je, da se znajdeš."

"Aha, dobro. To ni slaba misel, mogoče jo bomo takoj izkoristili. Pa vendar. Zakaj je knjiga tako debela? Bilo bi bolje, če bi bila malo tanjša. Bi se laže odločili za branje."

"Uh, to ste mi pikolovci. Ne knjige ne ljudi nikar ne sodite po debelosti, temveč po 'vsebini'. Kaj v življenju še niste srečali simpatičnih debeluščkov in pustih, tečnih suhcev? Tako je tudi s knjigami. Že res, priznam, ni hujšega od debele in dolgočasne knjige. Kvečjemu kakšen - puščoben dedec. Ampak če se vam knjiga zdi predebela, pa bi jo radi brali, jo odprite na sredi ali pa še bolj naprej in - jo berite." (Koliko knjig sem jaz tako prebral.)

"Pa bomo razumeli brez tistega spredaj?" (Že vidim, da jim je ideja všeč.)

"Boste, zakaj pa ne. Saj to ni roman. Pa tudi vadnica ne. Samo ne začnite sredi stavka. Če boste tako brali, boste še zmeraj lahko - če vam bo druga polovica knjige všeč - pozneje prebrali tudi prvo polovico. In zdaj na dan z besedo: Imate še kakšno vprašanje v zvezi s knjigo? Vas mogoče še kaj zanima?"

"Za zdaj ne. Pa vendar, preden se gremo igrat (res se ni tako lahko odločiti za branje take velikanke), samo še kratko vprašanje:

KAJ JE PRAVZAPRAV MATEMATIKA?

"Priznam, s tem vprašanjem ste me malo zmedli. Nisem ga pričakoval, pa vam bom kljub temu poskusil odgovoriti, čeprav ne vem, ali boste z odgovorom tudi zadovoljni. Ne poznam tako dobro matematike, da bi mogel na to vprašanje sam odgovoriti. Zato bom uporabil izreke nekaj velikih matematikov - o matematiki. Takih izrekov je vse polno, jaz pa sem odbral samo take, ki so mi posebno všeč. Mogoče vas bo kakšen izrek tudi presenetil, vendar jih nikar ne jemljite preveč dobesedno. Kljub temu bodite prepričani, da so ljudje, ki so jih izrekali, dobro vedeli, kaj govorijo."

MATEMATIKO LAHKO OPREDELIMO KOT PREDMET, PRI KATEREM NIKOLI NE VEMO, KAJ JE TISTO, O ČEMER GOVORIMO, IN ALI JE TISTO, KAR POVEMO, RESNIČNO.

B. Russell

MATEMATIKA JE SAMO IGRA, KI JO IGRAMO PO DOLOČENIH PREPROSTIH PRAVILIH Z OZNAKAMI, KI SO BREZ POMENA.

D. Hilbert

MATEMATIKA JE VEDA O NESKONČNEM.

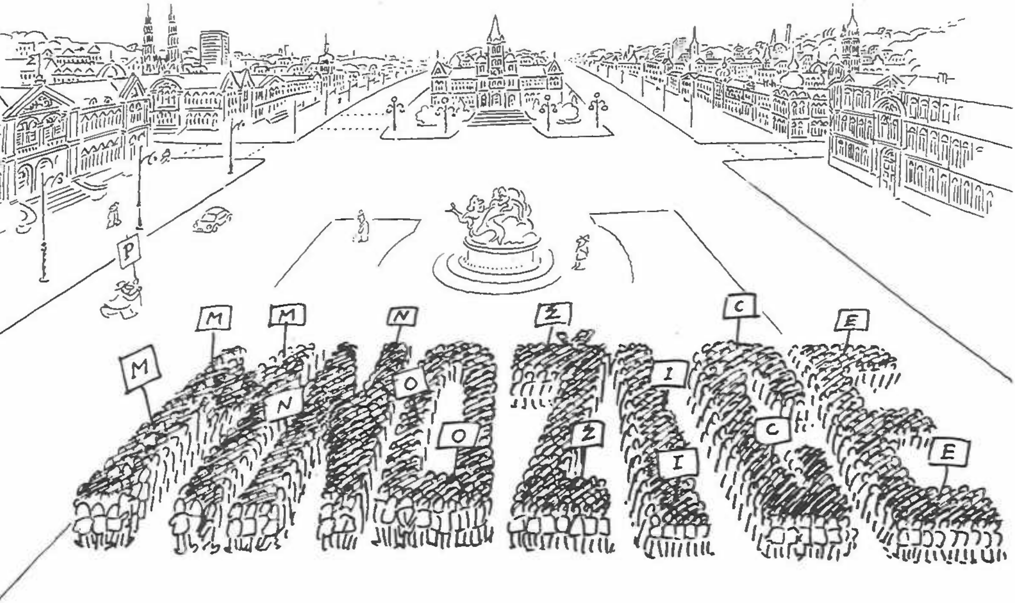
H. Weyl

MATEMATIKA JE PREDMET, V KATEREM JE NAJVEČ CVEKOV.

Neznani učenec

MNOŽICE

Podajanje množic
Znak pripadnosti elementa množici
Ponazarjanje množic z risbo
Enakost množic - vir nesporazumov
Množica, vsebovana v drugi množici
Kako gradimo nove množice z že znanimi
Preslikava množic
Par
Premi produkt množic
Množice in števila
Povezava med operacijami z množicami in operacijami s števili
Urejene in dobro urejene množice



Vsakdo ve, kaj mu pomeni množica.

E.Barel

MNOŽICE ↘

"Kakšna je sploh današnja matematika?

Učijo se samo o nekakšnih množicah. Kamor se obrneš, samo množica in množica. Kdo si jih je vendar izmislil?

Samo mučijo uboge otroke. Tudi mi smo svoj čas hodili v šolo in jo končali, pa se nismo učili o nikakršnih množicah, in nam mogoče kaj manjka? Otrok pa me je danes vprašal, kako naj napravi mumijo (pa res mumijo? da ne nemara unijo? kaj pa vem) iz množic? No, lepo vas prosim..."

"No, veste kaj, ta je pa dobra. Kaj ste se sploh skopali name! Pri tem nisem jaz nič kriv. Dam vam častno besedo, da si nisem jaz izmislil teorije množic in je tudi ne vpeljal v šole. Res pa je, matematikom verjamem, ko pravijo, da si današnje matematike sploh ni mogoče misliti brez množic, čeprav tudi sami mislijo, da gredo s tem danes že kar malo predaleč in da silijo množice povsod, kamor je treba in kamor ni treba..."

"Tudi nam se tako zdi. V redu. Mogoče so res potrebne, ampak ne verjamemo, da niti dveh števil ne bi bilo več mogoče sešteti brez množic. Tudi mi vemo, da je 2 + 3 = 5, čeprav nismo jemali množic..."

"Saj tudi niso vpeljane v matematiko zaradi seštevanja. Matematikom so množice potrebne zaradi drugih stvari in vpeljali so jih v matematiko že..."

"Ja, vemo, že pred petimi, šestimi leti..."

"Ne pred petimi, šestimi, temveč pred sto leti."

"Kako pred sto leti? Ni mogoče, da bi bile množice tako stare!"

"Pa so, pa so. Matematiki pravijo, da se je teorija množic rodila 7. decembra 1873, se pravi, da ima že več ko sto let."

"In kdo si jo je izmislil?"

"Neki nemški matematik in filozof. Če se ne motim, se je pisal Cantor."[2]

"Se pravi, da je že zdavnaj mrtev?"

"Seveda. Rojen je bil 1845 in umrl, ko je bilo konec prve svetovne vojne, se pravi 1918."

"Zakaj pa je vpeljal množice v matematiko? Za kaj so mu bile potrebne?"

"Veste kaj, menda zato, ker je rad veliko filozofiral, in sicer o neskončnem (namesto da bi se ukvarjal z bolj pametnimi rečmi), kakšen čuden patron. Samo pomislite, kaj ga je zanimalo: Katerih števil je več, naravnih ali realnih? (Pa je to sploh važno, slišite?) V nekem pismu prijatelju, če se ne motim, je bil Dedekind,[3] je zapisal, da je z množicami dokazal, da je realnih števil več kakor naravnih (samo pomislite, o čem si ti čudaki dopisujejo - namesto da bi vprašali: Kako kaj živite,

---

[2] Georg Cantor (1845 - 1918), profesor matematike in filozofije v Halleju. Utemeljitelj moderne teorije množic.

[3] Richard Dedekind (1831 - 1916), nemški matematik.

kako se počuti žena, kaj delajo otroci?). Datum, zapisan v tem pismu, imajo matematiki za rojstni dan teorije množic (nazadnje ga bodo začeli še proslavljati). Tako se je začelo z množicami."

"Se pravi, če Cantor ne bi bil napisal tega pisma..."

"Ne, ne. Vem, kaj mislite, pa ni res. Potem bi ga bil napisal kdo drug, mogoče nekaj let pozneje."

"Dobro, pa zakaj se zdijo matematikom množice tako pomembne? Kaj res danes ni mogoče brez njih?"

"Oh, navedli vam bodo sto razlogov, zakaj so jim množice potrebne. Tako poleg drugega pravijo, da je zaradi množic matematični jezik bolj preprost, čist in jasen, da se zdaj lahko natančneje izražajo, da z množicami dobivajo celoten pogled na vse mogoče strukture, da so množice med temelji sodobne matematike, da so tako splošne in pripravne, da jih je mogoče povsod uporabiti, da omogočajo opazovanje in preučevanje raznih neskončnosti, da..."

"Pa to v resnici drži? Kaj je res mogoče množice povsod uporabljati?"

"Dejal bi, da menda res skoraj povsod. Temeljni matematični objekti so namreč števila in točke, matematiki pa jih danes preučujejo tako, da opazujejo razne množice števil, množice točk (se pravi v glavnem neskončne množice) in še celo množico vektorjev, funkcij... vse mogoče množice; preučujejo njihove lastnosti, strukture... vse mogoče, vam rečem."

"Kaj je pravzaprav množica? Jo je mogoče razložiti s kakšnim še bolj preprostim pojmom?"

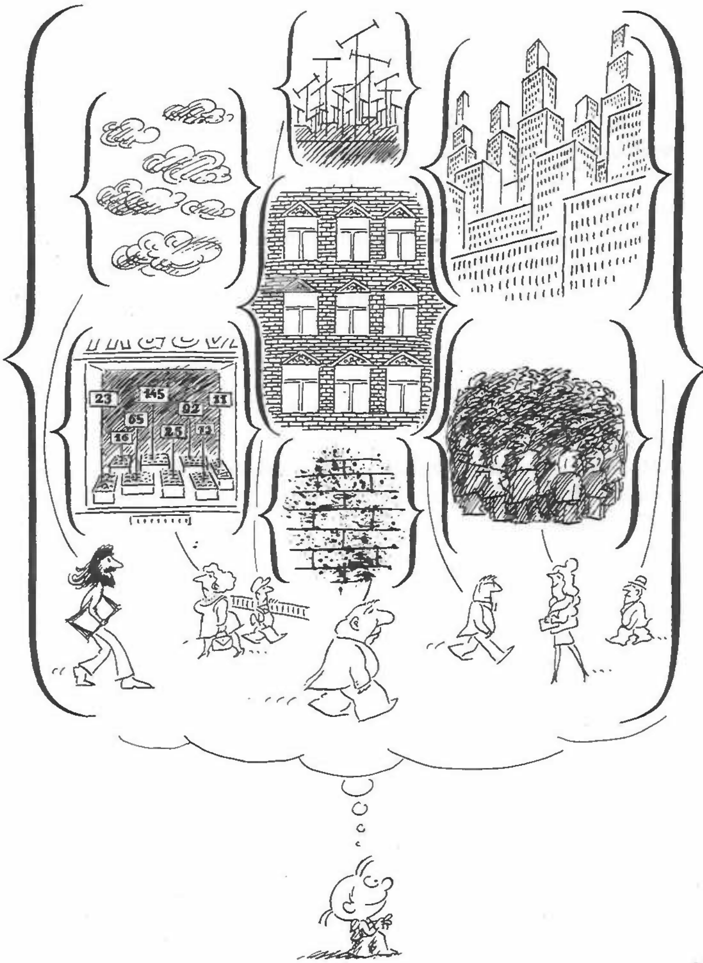
"Ne. Množica je tako preprost pojem, vzet iz vsakdanjega življenja in prenesen v matematiko, da ga ni treba spravljati na kaj bolj preprostega. Sicer pa dostikrat tudi sami rečemo:

- množica mest,
- množica držav,
- množica števil,
- množica učencev,
- množica avtomobilov,
- množica...

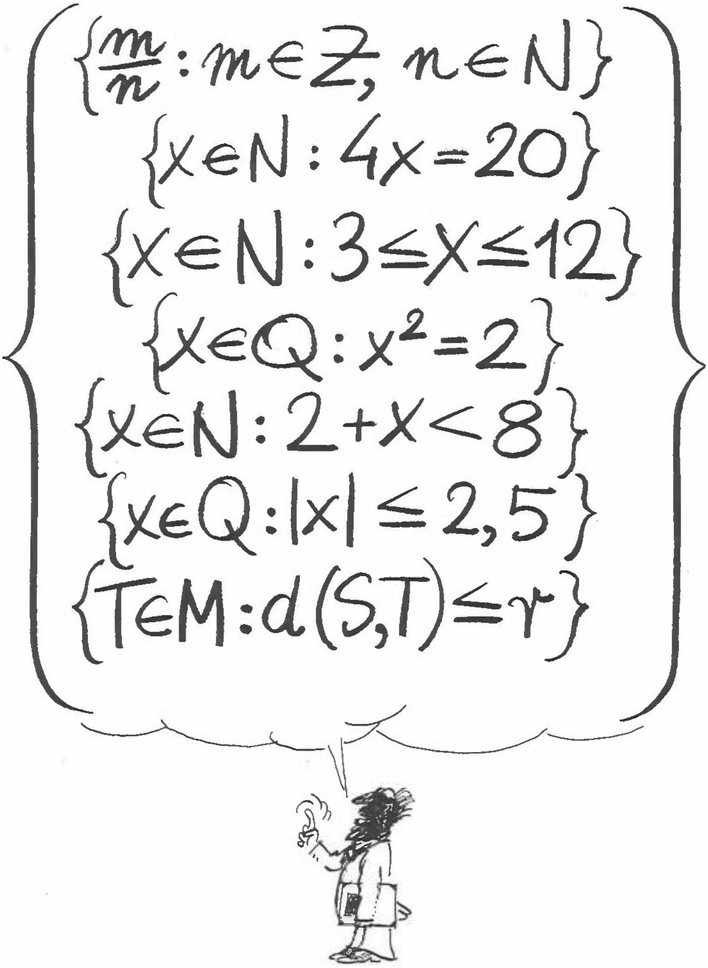
Sam Cantor je rekel, da mu *množica pomeni združitev nekih med seboj različnih predmetov gledanja ali mišljenja v celoto*, malo prej pa ste videli, kaj je neki drug matematik (Barel) rekel o množicah."

"Se pravi, da je množica lahko sestavljena kakor si že bodi. Vzamemo nekaj predmetov in samo rečemo - to je množica."

"Lahko, zakaj pa ne. Ampak matematiki se ukvarjajo samo z množicami, ki imajo natančno določene lastnosti, z množicami, sestavljenimi iz elementov s kakšno *skupno* lastnostjo, skratka - z matematičnimi množicami."



V tem pričkanju
o podajanju
množic ima kojpak
prfoks prav.
Kaj $\sqrt{jaz}$ morem za to, če
rad rišem


$\left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$
$\{x \in N : 4x = 20\}$
$\{x \in N : 3 \leq x \leq 12\}$
$\{x \in Q : x^2 = 2\}$
$\{x \in N : 2 + x < 8\}$
$\{x \in Q : |x| \leq 2{,}5\}$
$\{T \in M : d(S,T) \leq r\}$

"Ni nam ravno čisto jasno, kaj to pomeni."

"Čakajte, razložil vam bom z zgledom. Lahko na primer rečemo, da korenček, avtomobil, žirafa in Mars ali pa jabolko, svinčnik, žoga in roža sestavljajo množico štirih elementov, vendar ti nimajo veliko skupnega, zato se matematikom take množice ne zdijo zanimive in jih ne preučujejo, pa čeprav včasih ravno *take* množice navajajo za zgled množice. Skupna ali značilna lastnost mora biti zmeraj taka, da lahko na njeni podlagi zanesljivo ugotovimo, ali ima kakšen predmet to lastnost ali ne, to je, ali pripada množici ali ne. Pravimo tudi, da mora biti množica dobro - ali pravilno - podana."

"Že razumemo. Množica mest je na primer dobro podana množica."

"Hm, hm, zgled najbrž ne bo najboljši."

"Zakaj ne, saj je vendar vsaj jasno, če rečemo: množica mest."

"Ne, ni, in sicer iz več vzrokov. Najprej bi se morali dogovoriti, kaj nam pomeni 'mesto'. So to naseljeni kraji z več ko določenim številom prebivalcev ali kaj drugega (kakšna je razlika med mestom in mestecem?). Najprej, ali mislimo na mesta ene države, celine ali vsega sveta, potem..."

"Kako pa naj postavim množico, da bo dobro podana?"

"Malo natančneje. Na primer takole:

- množica glavnih mest republik in pokrajin SFRJ,
- množica mest SR Slovenije z nad 100 000 prebivalci,
- množica mest po svetu z nad 3 000 000 prebivalci ali pa:
- množica držav, ki mejijo na SFRJ,
- množica držav v Združenih državah Amerike,
- množica naravnih števil,
- množica vseh števil, deljivih s pet,
- množica učencev osnovne šole dr. Vita Kraigherja v Ljubljani,
- množica učencev tretjih razredov (kakšne šole),
- množica dni v tednu,
- ...
- množica odličnjakov v (tvojem) razredu."

"Ha, ha, ha, pri nas ni nobenega odličnjaka."

"Nič ne de. Potem bomo o taki množici rekli, da sicer je, a je - prazna."

"Kako vendar, prazna?"

"Pa še lepo; samo vidim, da vam bom moral to podrobneje razložiti. Če vas to zanima, boste malo potrpeli, ker se moramo najprej seznaniti še z nekaj temeljnimi pojmi o množicah."

Podajanje množic

Množice lahko podajamo na več načinov. Po vrsti jih bomo vse spoznali. Vsak ima svoje prednosti, pa tudi pomanjkljivosti. Mogoče je še najbolj preprosto, da vse elemente popišemo in jih (kakor ovce v ogradi) zapremo v zaviti oklepaj, za vsakim elementom - razen za zadnjim - pa zapišemo vejico. Takole:

Važno... zapomni si...

{ Peter, Janez, Marko, Milan }

$\{2, 4, 6\}$, $\{9\}$, $\{a, b, c, d, e\}$ $\{m, n, r\}$ $\{1, 2\}$

Prednost takega pisanja je v tem, da ni dvoma, ali kateri od elementov pripada množici ali ne, ker je vse, kar pripada, tudi zapisano. Upam pa, da ste opazili tudi že veliko pomanjkljivost takega načina pisanja, ker je zelo nepraktičen pri množicah z velikim številom elementov, npr. pri množicah vseh učencev vaše šole ali pri množicah vseh igralcev prve nogometne lige. Mislite si, da bi morali izpisati vse te množice. Presneto bi se 'nakratkočasili'. Povrh tega imamo množice z milijoni elementov in še z neskončno veliko elementi (npr. vsa naravna števila), tako da takih množic pri najboljši volji sploh ne bi mogli tako napisati.

Ko govorimo o množicah, je tudi koristno imeti pred očmi, da je teorija množic nastala ravno ob preučevanju lastnosti 'velikih množic', se pravi množic z velikim številom elementov (seveda tudi z neskončno veliko elementi). Zato bi lahko z vso pravico rekli: Če bi ne bilo velikih množic (in težav v zvezi z njimi), bi sploh ne bilo teorije množic. Zato so si matematiki izmislili (o, to so pametni ljudje, vam rečem) krajši način zapisovanja množic. Z njim lahko kakor bi mignil zapišejo množice ne glede na število elementov. Razglabljali so nekako takole:

'Kaj bi se mučili z zapisovanjem vsakega elementa posebej. Zapišimo rajši samo značilno lastnost, ki jo mora imeti vsak element množice, pa - konec. Vsi predmeti, ki imajo to značilno lastnost, morajo biti tudi elementi množice, če je pa nimajo, se pravi, da tudi niso elementi množice.'

Ne vem, kateri matematik si je to prvi izmislil, ampak prav gotovo ni rad veliko pisal, pa tudi drugi matematiki so to brž sprejeli. Kar priznajmo, misel ni slaba. Poglejmo zdaj, kako je to v praksi. Zapišimo npr. množico, ki jo sestavljajo košarkarski klubi prve zvezne lige v sezoni 1983/84.

{ Cibona, Šibenka, Crvena zvezda, Zadar, Bosna, Borac, IMT, Partizan, Budućnost, Jugoplastika, Rabotnički, Olimpija }

Matematik, ta lenušček, to zapiše takole:

{ x, z lastnostjo, da je x košarkarski klub prve lige }

in pri tem reče: množico sestavljajo vsi x z navedeno lastnostjo. In mu je pravzaprav čisto vseeno, kaj je ta x. Važno je, da ustreza zahtevani lastnosti in - na vse drugo se požvižga. Ta x mu enkrat pomeni košarkarski klub, drugič levi čevelj učencev v razredu. Ne, nič se ne šalim! Množico vseh levih čevljev učencev vašega razreda zapiše takole:

{ x, z lastnostjo, da je x levi čevelj učenca V.a razreda }

Spet drugič mu bo x pomenil planet sončnega sistema, tretjič celo število, četrtič glavno mesto države... no, vidite, kar si že bodi. Pa tudi to še ni vse.

Tudi ta način zapisovanja množic se jim je zazdel predolg. Hitro so spregledali, da se jim vselej ponavlja izraz 'z lastnostjo, da je', in tako so se spomnili, da namesto tega lahko zapišejo samo kakšno znamenje in ga berejo 'z lastnostjo, da je'. Drugi matematiki so to takoj navdušeno sprejeli in vpeljali znak |. Nekaterim se je zdelo, da je še bolj preprosto pisati kar dve piki (:). Zato sta danes v matematičnih knjigah dva znaka z istim pomenom:

|	(beri)	z lastnostjo, da je
:	"	"

Zato matematiki našo množico košarkarskih klubov danes pišejo takole:

$\{x \mid x$ je košarkarski klub prve lige$\}$ ali
$\{x : x$ je košarkarski klub prve lige$\}$

ali recimo: množico vseh sodih števil, manjših od sto, bi napisali takole:

$\{ x \mid x$ je sodo število in manjše od 100 $\}$

Ampak če se ista množica ponovi nekajkrat, nikar ne mislite, da jo bo matematik vselej izpisal. Ne, tega ne boste dočakali. Ko jo prvič zapiše, zapiše pred njo še veliko črko iz abecede, na primer:

$S = \{x \mid x$ je sodo število in manjše od 100$\}$

Že drugič pa bo napisal samo: ... množica S - in nič več (in če te zanima, pojdi lepo gledat prej, kaj pomeni S). Ja, ja, tako gre to pri matematikih. Neradi veliko pišejo (pa tudi neradi veliko govorijo, kar je res, je res); in zato moramo mi - hočeš, nočeš - ugibati njihovo stenografijo. Zmeraj si prizadevajo z malo simboli dati veliko informacij.

Če še tako preprosto stvar prevedejo v jezik svojih simbolov, oznak in kratic, se nam zdi strašno zamotana in redno se jim posreči, da nas s tem zastrašijo. Ko se presenečeni sprašujemo: 'Kaj neki pomeni to?', se samo smehljajo. Pa nič ne de. Če jih veseli, naj se kar gredo svoje okrajšave in simbole, kolikor se jim ljubi. Mi bomo, njim na kljub, o vsakem teh simbolov spregovorili na dolgo in široko, pa čeprav bodo pri tem - oni jezni. Ko smo že pri zapisovanju množic, dobro premislite, kaj boste odgovorili, če vas kdo (misleč, da ne veste) vpraša: 'Kakšna je razlika med zapisoma na primer:

m in $\{m\}$?'

Naj vas tako vprašanje ne zbega. Odgovorite, da je m običajna oznaka za element kakšne množice, $\{m\}$ pa množica z enim elementom (m). Mimogrede mu povejte, da se množica brez vsakršnega elementa zapiše kot prečrtana ničla: $\emptyset$. In na vprašanje:

'Kaj pomeni $\{\{a\}\}$?'

Odgovorite zviška: 'To je vendar simbol za množico, katere edini element je enoelementna *množica* $\{a\}$. Pri tem se naredite, kakor da je več ko normalno, da so tudi *množice* lahko *elementi* množic. Popolnoma jasno je, da je na primer

$$\{\{a,\ b\},\ \{c,\ d\},\ \{m,\ n\}\}$$

množica, katere elementi so tri dvoelementne množice. Potem pa vi zvitorepcu, ki vas je hotel zmesti, postavite takole vprašanje:

'Ali obstaja množica vseh množic?'

Če vam bo na to odgovoril pozitivno ali negativno, izrazite svoje najglobIje 'spoštovanje' spričo njegovega (ne)poznavanja teorije množic. Odkrito namreč dvomim, da bo sploh dojel bistvo vprašanja, pa tudi njegovo daljnosežnost, saj si tudi matematiki še niso na jasnem glede odgovora nanj. Pozneje bomo videli, da je postavljanje takih vprašanj zamajalo tudi celo klasično teorijo množic.

Znak pripadnosti elementa množici

Imamo množico S s tremi elementi: a, b, c, torej

$$S = \{a,\ b,\ c\}$$

Se pravi:

a je element množice S
b je element množice S
c je element množice S

Prepričan sem, da že slutite, da noben matematik tega ne bo pisal z besedami kakor mi. Še enkrat vam rečem, da strašno neradi pišejo. Kakor hitro vidijo, da je treba kakšne stvari ponavljati v istem redu, že vpeljejo zanje kakšno znamenje (ne vem, kje vse jih najdejo?) in namesto besed postavijo svoj simbol. Tako so za besede:

'je element množice' ali 'je element tega in tega' ali 'pripada množici' vpeljali simbol $\in$, se pravi, da po svoje to zapišejo:

$$a \in S$$
$$b \in S$$
$$c \in S$$

Če pa kakšna stvar ni element množice, uporabijo isti simbol, samo da ga prečrtajo: $\notin$. Če npr. število 1 ni element množice S, zapišejo

$$1 \notin S$$

Ponazarjanje množic z risbo

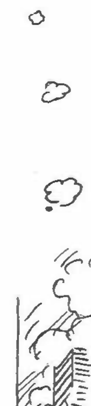
"Je mogoče množice ponazoriti tudi z risbo?"

"Ker sem slutil, da mi boste postavili tako vprašanje, sem isto vprašanje postavil nekemu matematiku, misleč, da ga bom z njim navdušil in mu obenem pokazal, kako sem se že temeljito seznanil z množicami.

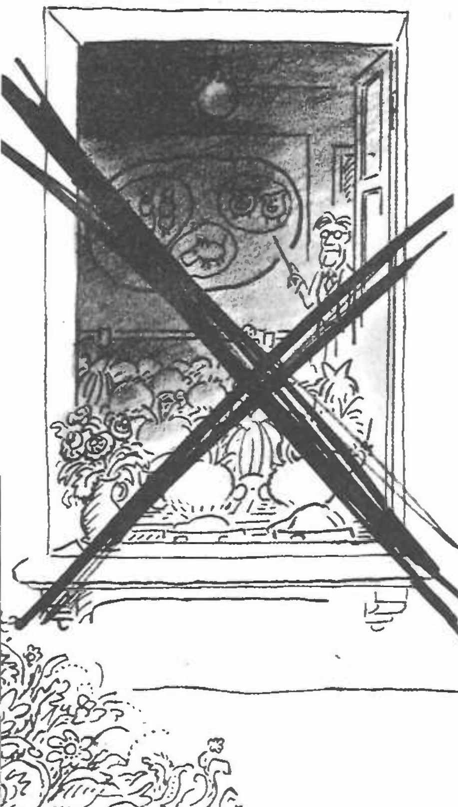
Pa veste, kaj mi je odgovoril?

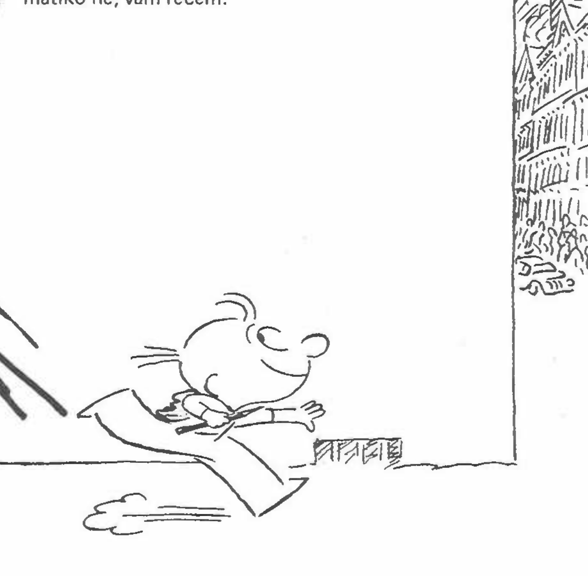
Morali bi bili videti, ne samo slišati. Najprej se je kislo namrdnil, kakor da je zagriznil v lesniko. Potem me je sočutno pogledal, se popraskal za ušesom in rekel:

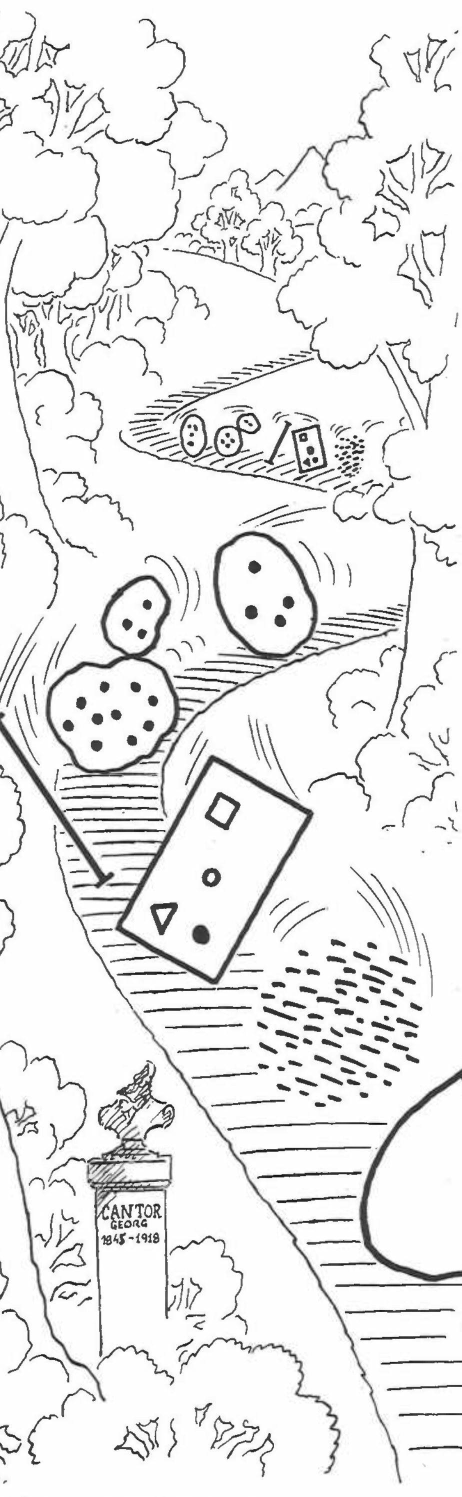
'Ja, ja, slišal sem, da to na debelo uporabljajo v otroških vrtcih in podobnih zavodih. Mogoče je za tam to celo dobro, ker ni slabo, da otroci tudi malo rišejo. Vem samo, da v resnejših matematičnih knjigah ne uporabljajo risanja množic, razen tu pa tam v tako imenovani naivni teoriji množic, drugače pa res ne.



Naivna ali klasična teorija množic je izraz za teorijo množic, ki jo poučujejo v šolah. To je pravzaprav teorija, ki ne sloni na aksiomih. V praksi pa se ponekod srečujemo tudi z neko smešno (to res ni strokovni izraz) teorijo množic, ki nima nobene zveze ne z 'naivno' ne z aksiomatizirano teorijo množic, pa tudi z - matematiko ne, vam rečem.'





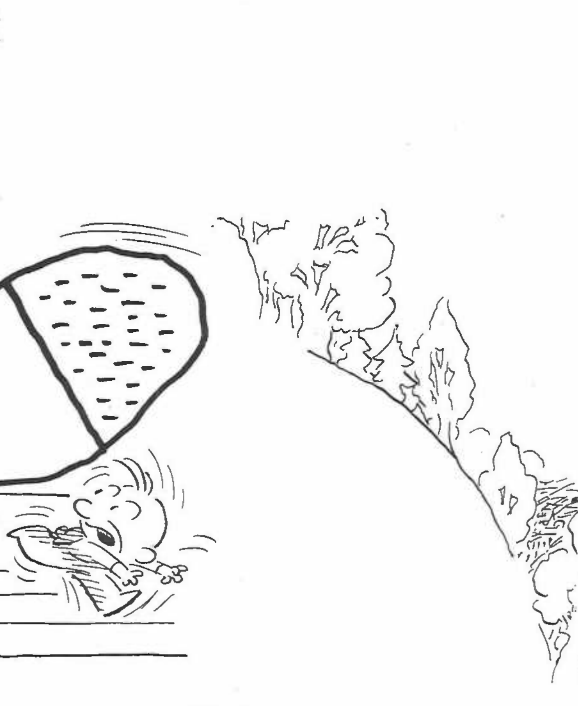


'Zanimivo. In kakšna je ta šaljiva teorija množic?'

'Na primer takale: Narišejo tri krave, dva pujska in enega psa in vse to obkrožijo z nekakšno črto - in to naj bi bila množica domačih živali. In če ne obkrožimo, sploh ni množica. Potem še s tanjšo črto obkrožijo posebej krave, posebej pujska in posebej psa in rečejo, da so to podmnožice. Po takem pouku vsak osel takoj misli, kako izvrstno pozna množice.

Vidite, to je mogoče največja pomanjkljivost pri risanju množic, obenem pa tudi poglavitna značilnost neresne teorije množic.'

Po taki razlagi me je minila želja, da bi temu matematiku povedal, kako sem si tudi jaz množice natančno tako zamišljal in sem bil prepričan, da sem se jih hitro naučil samo zaradi svoje naravne nadarjenosti za matematiko (ki je zaradi skromnosti ne poudarjam rad).



Tudi sami ste se prepričali, da bi bil nadaljnji pogovor s tem matematikom brez smisla. Nazadnje bi me utegnil še spraševati, kaj mislim o nekakšnih aksiomih v množicah. Kaj pa naj z njimi, če pa se dá s slikami vse tako lepo pojasniti. In še posebej, če jih narišem v raznih barvah, elemente pa lepo obkrožim s črtami, pičicami, trikotniki... čudovito! Njemu se to dozdeva smešno. In mi namesto tega brblja o nekakšnih aksiomih. Beži, beži!

Ampak vi ne veste, kako me je pogledal, ko je rekel:

'... vsak osel takoj misli, kako izvrstno pozna množice...'

Tak nesramnež, da mu ni para. Po pogovoru s tem domišljavcem sem želel zvedeti tudi sodbo kakšnega izkušenega in dobrega pedagoga, ki pozna matematiko. Zato sem odšel k svojemu staremu, že zdavnaj upokojenemu profesorju matematike in ga vprašal:

'Slišite, profesor, zakaj pa matematiki množic nič kaj radi ne ponazarjajo z risbami?'

Med mehkim pokašljevanjem mi je zelo ljubeznivo razložil:

'Zato, ker pri risanju nastane polno vprašanj, tako da moramo biti zelo previdni, ko rišemo množice. Če na primer želimo ponazoriti množico s sklenjeno črto, ni popolnoma jasno, ali spada črta k množici ali ne. Elemente pogosto označujemo z enakimi pikami ali enakimi krožci, pa vemo, da v množici ni enakih elementov. Nekaterih množic, na primer množice vseh točk na ravnini, ni primerno nakazovati z omejeno črto. Sicer pa vemo, da že pri risanju premice narišemo samo majhen del in pravimo, da smo narisali premico; to je treba imeti zmeraj pred očmi. Posebej moramo biti previdni, če želimo v kakšni množici narisati drugo množico - ki ji pravimo podmnožica - ker jo moremo vzeti tudi kot *element* in ne kot množico; če imamo na primer dve taki podmnožici, bodo eni rekli, da sta to elementa, drugi, da sta množici. Nerodno je torej, ker imajo oboji prav, vsak s *svojega* vidika, se pravi, če imajo v mislih tisto, na kar so mislili, ko so risali ali gledali. Nekateri želijo narisati tudi *prazno* množico v kakšni množici tako, da obkrožijo del čistega papirja in pravijo...'

(Navedel mi je še nekaj vzrokov, pa sem jih pozabil, priznam, in mi je bilo že tega, kar sem si zapomnil, zadosti.)

'Vidiš, zato se matematiki izmikajo risanju množic, kolikor se le morejo.'

'Se pravi, da množic ne smemo risati?'

'Oh, ne, nisem tako rekel. Včasih jih je prav prijetno risati. Iz izkušnje vem, da otroci to radi delajo, samo moramo jim vselej poudariti, da so to sličice, ki nam

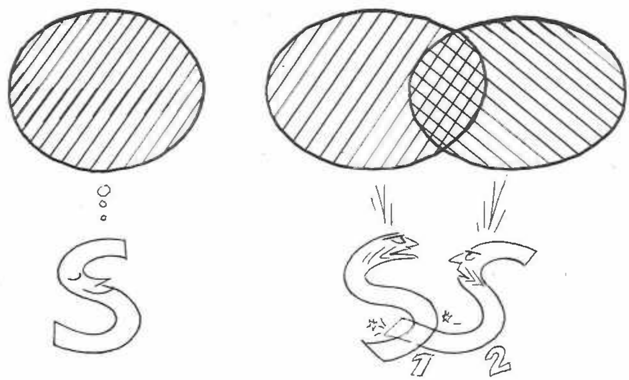
samo *pomagajo* laže razumeti množice in - nič več. Prav gotovo pa jih je treba uporabljati zelo previdno in zmerno, ker nam utegnejo dati tudi napačne pojme o množicah. Sicer pa, če želite, kar podajajte množice tudi z risbami, samo risb ne jemljite preveč resno.'

'Na kakšne načine pa je še mogoče slikovito predočiti množice, profesor?'

'Na različne. Za to ni posebnih pravil, saj to tako in tako ni matematika. Na primer tako, kakor je podano na sliki na strani 26.

Sicer poznamo tudi matematično pravilen način skiciranja množic, vendar je pripraven samo za neskončne množice ali za množice z neskončno veliko elementi s pogojem, da so ti elementi točke.'

'In kakšen je ta način podajanja množic?'



'Takle, vidiš. Skicirajmo npr. množico S kot del ravnine in jo omejimo s sklenjeno črto. Če imamo vse točke v notranjosti sklenjene krivulje za elemente množice (in jih je neskončno veliko), potem je množica S pravilno skicirana. Takim shematskim risbam pravimo Vennovi diagrami.[4] Take risbe v resnici dostikrat lahko olajšajo premišljevanje in sklepanje in tako 'abstraktne' množice spravljamo v zvezo s konkretnimi množicami. Poleg tega se nam ob takem podajanju množic z risbami ne oglašajo dvomi in dileme, ki včasih nastajajo pri risanju množic z nekaj elementi. Če hočemo z risbo podati množici S_1 in S_2, ki imata tudi skupne elemente, lahko to naredimo. Imejmo pri tem pred očmi, da je tudi skupni del teh'

---

[4] John Venn (1834 - 1923), angleški logik.

množic na splošno ravno tako množica z neskončno veliko elementi; na risbi je podan kot križasto črtkan.

Vidiš, mogoče je malo nenavadno, vendar drži, da je z risbo mogoče pravilno predočiti množice z neskončno veliko elementi samo takrat, kadar so ti točke ravnine. Takemu načinu predočevanja množic matematiki ne bodo nič ugovarjali. Če torej želiš množice predočiti z risbo, naredi tako, če pa imaš množico samo z nekaj elementi, je boljše, da vse popišeš, kakor da jih rišeš.'

'Kakšna škoda. Jaz sem pa mislil, da imam ravno zaradi slik in majhnih množic množice - v malem prstu.'

'Rad verjamem, da si tako mislil. Marsikdo tako misli. Ampak veš kaj, te stvari je treba imeti v glavi, ljubček, ne v prstu.'

Še zmeraj mi ni in ni hotelo v glavo, da se mi predstave o množicah počasi podirajo kakor hiša iz kart, v podzavesti pa mi je še zmeraj zvenelo tudi tisto... vsak osel takoj misli, kako pozna množice... (pa ne, da je s tem mislil mene?). Napravil sem še zadnji poskus. Da vsaj nekaj rešim.

'V redu, profesor, ampak zakaj ne bi vendarle narisal množice, ki ima tri ali štiri elemente, če jo je mogoče narisati tako, da je vse zelo nazorno, jasno in razumljivo...'

'Res je, kar praviš, ampak če misliš uporabljati predvsem množice z nekaj elementi, potem je boljše, da jih sploh ne uporabljaš. Zaman zapravljaš čas, ki ga lahko koristneje uporabiš za druge reči.'

'Zakaj bi s tem - zapravljal čas? Te množice so vendar res pripravne. Malo elementov, ni treba veliko risati in vse je jasno.'

'Eh, že vidim, da se nisi kaj prida naučil o množicah. Množice z nekaj elementi namreč pomenijo za matematika toliko kot nič. Z njimi ne moreš narediti nič resnega. Če uporabljaš teorijo množic za preučevanje množic z nekaj členi, je isto, kakor če bi s topovi streljal na vrabce. Še enkrat ti kličem v spomin, da je treba teorijo množic uporabljati tam, kjer nam največ koristi, kjer je nujno potrebna, se pravi pri preučevanju velikih množic z veliko elementi.

Od modrovanja o množicah z nekaj elementi pa je po mojem več škode kakor koristi, ker nam uporaba prinaša tu več (nepotrebnih) težav, kakor so vredni rezultati, ki nam jih dá. Prva za matematika zanimivejša množica, ki se jo učimo že v osnovni šoli, je *množica naravnih števil.* In vemo, da jih je neskončno veliko. Kar poskusi jo narisati, če moreš.'

Precej dolgo sem se še pogovarjal s profesorjem o množicah. On je bil zadovoljen, ker je nekaj ur govoril o priljubljeni snovi, jaz pa malo razočaran, ker sem

1
2
3
4
5 odlično

2 · 3 · 4 + 5

dojel, kako pravzaprav malo vem o množicah. Pred tem pogovorom sem si namreč zamišljal, da so pri množicah najpomembnejše risbe, in se veselil, kako hitro sem jih doumel zaradi slik. Ampak v resnici so le nekaj postranskega, samo nekakšen okras teorije. In jaz sem mislil, da so one 'poglavitno'. In ko bi vi vedeli, koliko lepih sličic (in za povrh še v barvah) sem pripravil za vas, da bi vam ob njih razlagal množice. Zdaj pa jih bom moral vsaj pol zavreči. Škoda. Pa so tako lepe!"

Enakost množic - vir nesporazumov

"Zakaj 'vir nesporazumov'?" me boste takoj vprašali.

"Zato, ker po navadi pozabimo na pomembno lastnost množic, da namreč v množici *ni enakih elementov*, se pravi, da se vsi elementi množice ločijo med seboj."

"Torej je prepovedano pisati enake elemente v isti množici?"

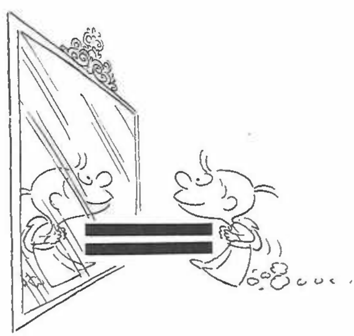
"Oh, ne, ni prepovedano. Lahko jih vzamete enakih, kolikor hočete, samo vsi so - kakor en sam. To bi bilo nekako tako, kakor če bi kdo *samo zase* kupil na primer pet vstopnic za nogometno tekmo. Reditelj ga bo pri vhodu spustil noter in mu pretrgal - če želi - vseh pet vstopnic, vendar je to praktično isto, kakor če bi bil imel eno samo vstopnico, ker mu ta zadostuje za vstop, preostale štiri pa so popolnoma nepotrebne. V prazno jih je kupil, kakor bi tudi vi brez potrebe pisali po več enakih elementov. Vidite, za to gre. Predpostavljamo namreč, da so vsi elementi dane množice med seboj različni, z drugimi besedami, množica (po definiciji) ne more obsegati istega elementa v več primerkih."

"Dobro, ampak še zmeraj nam ni jasno, zakaj bi mogel biti v tem vzrok za nesporazume."

"Čakajte, boste takoj videli. Samo najprej vam moram povedati, kdaj sta dve množici enaki. Torej: dve množici sta enaki, če imata iste elemente."

"No, to je vsaj preprosta definicija."

"Se strinjam. V resnici preprosta in razumljiva, pa jo kljub temu poglejmo v uporabi.

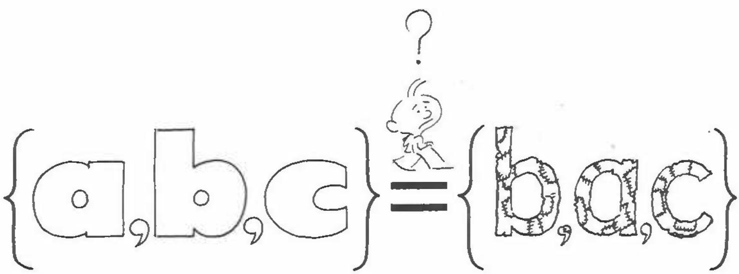


$2 \cdot 3 \cdot 4 + 6$

Vzemimo množici $\{a, b, c\}$ in $\{a, b, c\}$. Tu je jasno, da sta enaki, zato moremo zapisati

$$\{a,\ b,\ c\} = \{a,\ b,\ c\}$$

Ampak ali sta enaki tudi množici $\{a,\ b,\ c\}$ in $\{b,\ a,\ c\}$?



"Tudi enaki. Imata iste elemente."

"Tako je. V definiciji ni niti besede o vrstnem redu elementov; bistveno je le, da imata množici iste elemente. Zato je

$$\{a,\ b,\ c\} = \{b,\ a,\ c\}$$

{ Peter, Marko, Janez, Jože } = { Jože, Marko, Peter, Janez }

$$\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 15\} = \{9,\ 5,\ 7,\ 3,\ 15,\ 11\}$$

Tu torej ni problemov. Navedeni množici sta enaki. Ampak zdaj pazite: Sta enaki množici $\{3, 4, 3, 5\}$ in $\{3, 4, 5\}$?"

"Nista enaki, saj ima prva množica štiri elemente, druga pa samo tri. Ne more vendar biti 4 = 3."

"Tega tudi nihče ne trdi, ampak ali ste že pozabili, kar sem malo prej rekel? V množici namreč ni enakih elementov, se pravi, tudi če so zapisani, jih vzamemo kot en element. V naši prvi množici pa se (brez potrebe) ponavlja število tri dvakrat, to pa je en element. Zato je

$$\{3,\ 4,\ \cancel{3},\ 5\} = \{3,\ 4,\ 5\}.$$ "

"Uh, pa je res tako. Čeprav je malo čudno. Se pravi, da je tudi

$$\{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\} = \{2\}?$$ "

"Ja, ravno tako. Uganili ste. Ravno tako bo veljalo tudi

$\{2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 5,\ 2,\ 6,\ 2,\ 7\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, ravno tako pa tudi

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} = \{1\}$$

(Zamislite si, da se vse enojke v vašem razredu spremenijo v množico enojk in se potem ta množica spremeni v eno samo enojko. Če bi bile za oceno množice, bi bilo to mogoče!)

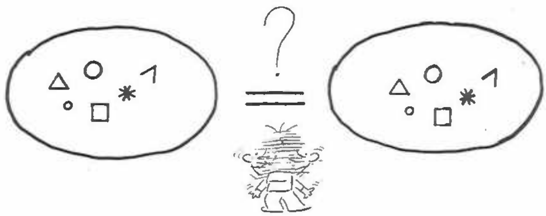
$$\{F, U, U, J, M, N, O, Ž, I, C, E, E\} = \{F, U, J, M, N, O, Ž, I, C, E\}$$

Vidite, kako lahko nastane zmešnjava, če pozabimo na definicijo o enakosti množic. Ampak če smo količkaj pozorni, sploh ne more biti težav.

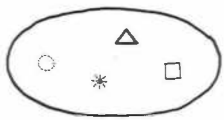
In če poskušamo risati množice, ki so enake, moramo biti še posebej previdni, ker ves čas nastajajo nekakšne težave (in 'težave'), še posebej pri tistih, ki zelo slabo poznajo teorijo množic, mislijo pa, da so v tem veliki strokovnjaki.

Takrat nastane pravo zvitorepljenje. Verjemite mi, da sem pogosto prebiral 'znanstvene' razprave o tem:

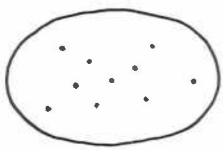
- ali je trikotniček v eni množici enak trikotničku v drugi?
- ali je krogec v eni množici enak krogcu v drugi?
- ali je ...



Tudi to je eden od vzrokov, zakaj matematiki neradi rišejo množice. In imajo res prav. Vam bi pa priporočil, če jih že skicirate, si vselej prizadevajte vsak element v množici označiti različno, da se ne boste sami zmotili, saj vemo: v množici ni enakih elementov.



Šele če smo to doumeli in si zapomnili, smemo, če moramo, risati elemente kot pičice, ker zdaj *vemo*, da so vsi elementi različni, ravno tako pa tudi *vemo*, da je to pomožna risbica-in nič več. O 'zgledih' množic in o njihovi realizaciji v predmetih, s katerimi se srečujemo v življenju, rajši niti ne govorimo. Pri tem mislim na jabolka, hruške, krožnike, stole in tako naprej in na modrovanje o tem, ali so



enaki ali ne in ali sestavljajo množico ali ne. Meni je neki tak strokovnjak, ki se ni mogel sprijazniti z zahtevo, da je treba vse enake elemente množice pojmovati kot en element, 'razlagal' takole:

'V kinu so vsi sedeži enaki. Se pravi, da je tam po teoriji množic en sam sedež.'

(Jasno, ni razumel, da z matematičnega vidika, pa tudi stvarno na vsem svetu ni dveh *enakih* sedežev.) Pa zdaj tudi sami povejte: ali ni enakost množic pogosto - vir nesporazumov?"

Množica, vsebovana v drugi množici

"Kakšna množica je pa že spet to?
Kaj se sploh pravi - vsebovana v drugi množici?"

"To je nekaj podobnega kakor recimo - podnajemnica množice.
Psst, samo da kakšen matematik ne zasliši te 'definicije'."

"Ha, ha, ha. Se pravi, da imajo tudi množice stanovanjske težave. No, to nam je res ljubo. No, naj se seznanimo s to podnajemnico. (Pa plačuje najemnino?)"

"Dobro, dobro, takoj. Imenujte mi samo katero si že bodi množico, ki bi ji radi spoznali podmnožico."

"Kaj ima vsaka množica svojo podmnožico?"

"Ima, zakaj pa ne. Kolikor večja je množica (to je, kolikor več elementov ima), toliko več ima tudi podmnožic."

"Pa je sploh kakšna množica, ki zanesljivo nima podmnožice?"

"Ne, take množice ni. Na katero množico ste pa mislili?"

"Malo prej ste sami rekli, da je množica odličnjakov v našem razredu prazna množica.[5] Menda ni mogoče, da bi imela tudi taka množica svojo podmnožico."

"Pač, tudi ta jo ima."

"Kako je neki mogoče, če revica sama nima nič, če je prazna?"

"Priznam, da je to malo nenavadno, vendar matematiki pravijo:

'Prazna množica je podmnožica vsake množice.' Ker je prazna množica kot množica enakopravna vsem drugim množicam, ima tudi ta svojo podmnožico - samo sebe. Boljše nekaj kakor nič! Tako je to. No, ste torej izbrali kakšno množico, da vidimo, katere so njene podmnožice?"

---

[5] O prazni množici glej obširneje na strani 40.

Znamenje za podmnožico

$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica
$\subset$ podmnožica

"No, recimo, naj bo množica dni v tednu."

"V redu. Preglejmo torej to množico.

T = {nedelja, ponedeljek, torek, sreda, četrtek, petek, sobota}

Vzemimo zdaj samo delavnike. Ti sestavljajo množico

D = {ponedeljek, torek, sreda, četrtek, petek}"

"Eh, saj ni res. Mi imamo šolo tudi ob sobotah. Tudi to je delavnik."

"No, dobro, naj bo. To je v našem primeru tako ali tako vseeno. Pa vzemimo, če že hočete, tudi to vašo množico.

D' = {ponedeljek, torek, sreda, četrtek, petek, sobota}

Zdaj pa dobro poglejte, v kakšnem razmerju sta množici D in D' glede na svoje elemente nasproti množici T."

"To je lahko. Na prvi pogled vidiš, da so vsi elementi množic D in D' tudi v množici T."

"Res je. Vse množice s tako lastnostjo se imenujejo podmnožice množice T. Če je torej *vsak* element kakšne množice D obenem tudi element množice T, pravimo, da je D podmnožica množice T.

Matematiki imajo za podmnožico (seveda) tudi posebno znamenje

$$\subseteq$$

V našem primeru je torej

$$D \subseteq T \qquad \text{kakor tudi}$$
$$D' \subseteq T$$

Iz definicije podmnožice izhaja, da je tudi

$D \subseteq D'$."

"Kaj more biti množica tudi sama sebi podmnožica?"

"More. Definicija podmnožice tega ne prepoveduje, kar pa ni prepovedano, je - vsaj v matematiki - dovoljeno. Se pravi, da je tudi

$$T \subseteq T$$
$$D \subseteq D$$
$$D' \subseteq D', \text{ po definiciji podmnožic}$$
$$\text{pa bo tudi } \emptyset \subseteq \emptyset$$

Pa vendar: da bi se take podmnožice (ki morejo vsebovati tudi same sebe) razlikovale od pravih podmnožic..."

"Katere pa so prave podmnožice?"

"Če je v množici vsaj en element, ki ne pripada tudi podmnožici, pravimo, da je taka podmnožica - prava podmnožica. V našem primeru sta D in D' pravi podmnožici T, ker je v množici T en element več (nedelja) kakor v množici D' in še

celo dva elementa (sobota, nedelja) več kakor v množici D. Po navadi označujemo pravo podmnožico z

$$\subset$$

zato lahko pišemo tudi takole:

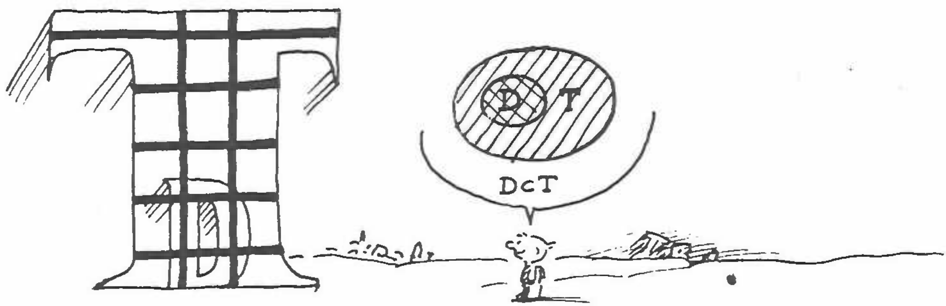
$$D \subset T$$
$$D' \subset T$$
$$D \subset D'$$

Če želimo zapisati vse podmnožice katere si že bodi množice, moramo dobro paziti, da pri tem ne pozabimo na prazno množico."

"Dobro, si bomo zapomnili. Ampak samo še eno vprašanje:

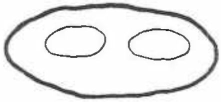
Kako podmnožico nakažemo z risbo?"

"Čudim se, da niste tega že prej vprašali. Saj tako vem, da vas pri množicah še najbolj zanima - risanje. In če že vprašate, podmnožico bi lahko takole narisali:



Dobro poglejte še risbo na naslednji strani. Iz same slike ni popolnoma razvidno (in na to me je opozoril profesor, ko je govoril o risanju množic), ali gre za dve podmnožici ali pa slika kaže množico z dvema elementoma - ki sta seveda lahko tudi množici. Nekateri poskušajo tako narisati še celo dve - prazni množici. Vsak pri tem trdi, da risba kaže tisto, kar *on misli* ali kar je mislil, ko je risal. Vi pa ne morete dokazati, da to ne drži, ker si *vi* s to risbo mislite kaj drugega."

"In koliko podmnožic more največ imeti množica?"



"Odvisno je od števila elementov množice. Več ko je elementov, več je tudi podmnožic. Če pa želite zapisati *vse* podmnožice kakšne množice, je najboljše, da jih zapisujete po vrsti. Najprej - prazno množico, ker je ta podmnožica vsake množice, potem vse enoelementne podmnožice in potem vse dvoelementne, troelementne ... in tako naprej, na koncu pa vso množico, o kateri ravno tako vemo, da je podmnožica sama sebi. Če ima na primer množica tri elemente, $S = \{a, b, c\}$, potem so njene podmnožice:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \text{ in } \{a, b, c\}$$

Skupno jih je torej osem."

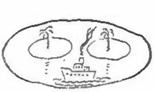
"Res kar precej. Več, kakor smo mislili."

Dve jajci na oko

"In zdaj poglejmo,

kako gradimo nove množice z že znanimi ."

"Kako, kaj je tudi to mogoče?"



"Zakaj pa ne. Pri tem ravnamo podobno kakor pri številih. In kaj delamo pri številih?"

"Števila pač lahko seštevamo, množimo, odštevamo... in vselej, kadar pri dveh številih uporabimo katero od teh operacij, dobimo - novo število."

"Bi se to reklo, da moremo sešteti dve množici in dobiti novo množico?"

"Ja, nekaj takega. Samo izrazi in postopki so malo drugačni, čeprav podobni kakor pri številih. Postopkom pravimo operacije z množicami."

"In katere so?"

"Pri množicah jim pravimo: presek, unija, razlika, produkt, ..."

"Imamo zanje tudi posebna znamenja?"

"Seveda. Zapovrstjo se bomo seznanili z njimi."

PRESEK MNOŽIC

To so moje kreacije...

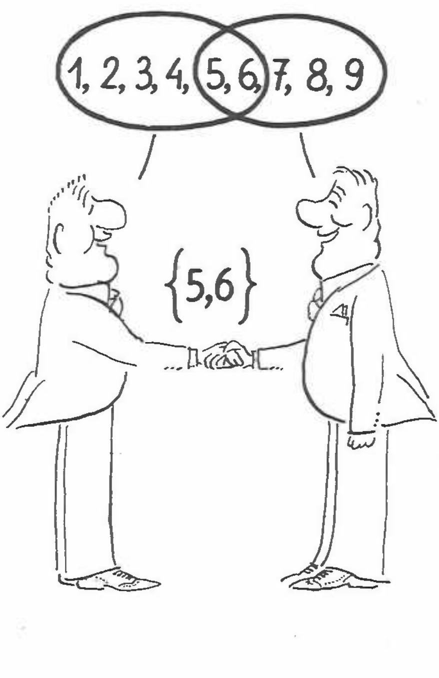
"Ste že slišali o besedi presek?"

"Seveda smo, vendar v geometriji. Tam govorimo o preseku ali sečišču dveh premic, pri množicah bo pa to gotovo kaj drugega."

"Ne, ni. Pomen preseka je isti tudi pri množicah."
"In kaj je sploh presek dveh premic?"
"To je točka, v kateri se premici sekata."
"Tako je. Pa mi povejte, kateri premici pripada ta točka?"
"Kako kateri? Obema vendar, saj to je njuna skupna točka."
"Tako je. Isto je pri množicah. Sicer pa tudi premici pojmujemo kot množici točk, njun presek je množica, ki jo sestavljajo skupne točke. V našem primeru je to ena sama točka, zato je tu presek - množica z enim elementom. Poglejmo zdaj množici:

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \qquad B = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

Kaj mislite, kaj bo njun presek? Kaj jima je skupnega?"
"Skupna sta jima elementa 5 in 6."
"Presek teh množic je torej množica ..."
"... množica $\{5, 6\}$."
"No, vidite. Spet sem vas naučil nečesa, kar že veste. Se pravi, da je presek množic A in B *množica*, sestoječa iz vseh tistih in samo tistih (to sem moral napisati, da se matematiki ne razjezijo, ker pravijo, da je natanko tako treba reči) elementov, ki pripadajo množici A in množici B.



Naj torej ponovim ...
Presek množic **A** in **B** je množica, ki sestoji iz vseh tistih in samo tistih elementov, ki pripadajo množici **A** in množici **B**

podčrtal profesor

Na risbi je to množica {**5, 6**} ...
Je dobro, tovariš profesor?
Adijo, grem naprej ...

Če namreč rečemo: '... vseh tistih in samo tistih...', to ne pomeni nič drugega, kakor da vzamemo *samo* te elemente in nobenih drugih."

"In kakšno je znamenje za presek množic?"

"Dobro, da ste me spomnili. Nanj sem skoraj pozabil. Znamenje je podobno obrnjeni veliki črki U (vidite, zmanjkuje jim znamenj, pa morajo še črke preobračati - kako so le prišli na to misel), vidite, takole:

Zdaj vam bom še pokazal, kako se vse to tudi zapiše z matematično stenografijo:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ in } x \in B\}$$

Morate priznati, da je to precej dekorativno. Pa vendar, prevedimo to dekoracijo, oprostite, definicijo, v jezik navadnih smrtnikov.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ in } x \in B\}$$

presek množic *A* in *B*

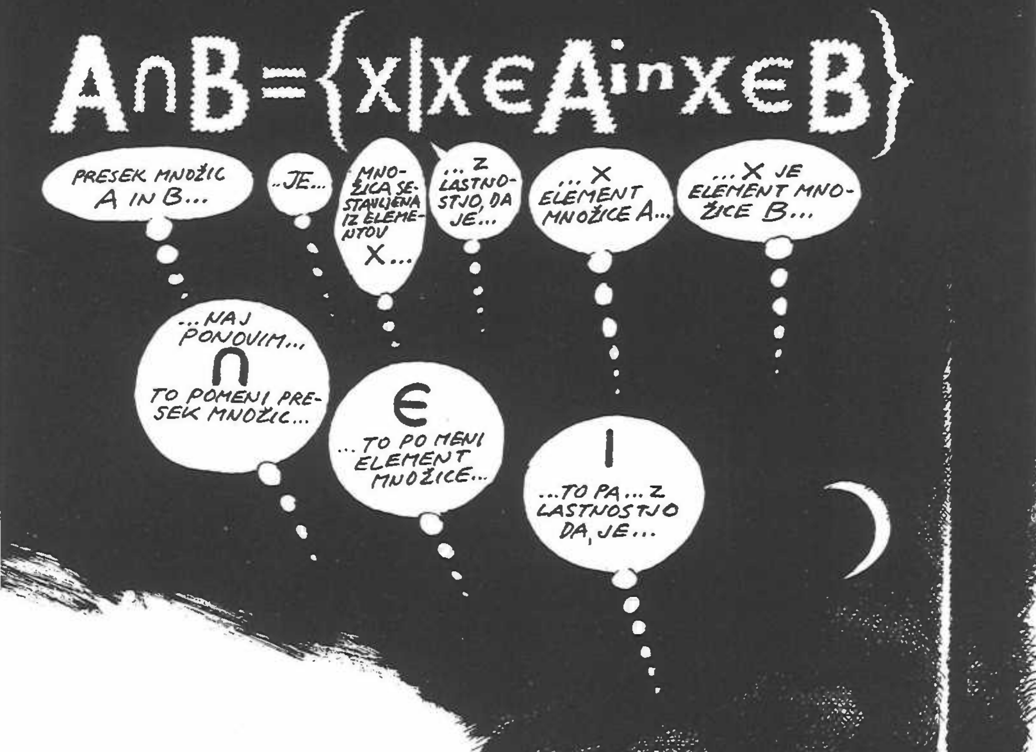
je

množica, sestavljena iz elementov *x*

z lastnostjo, da je

x je element množice *A*

x je element množice *B*



Če vas kakšen matematik po naključju vpraša: Kaj je presek množic? - mu ni treba nič odgovoriti, samo ta izraz mu napišite. Zagotavljam vam, da bo zadovoljen z odgovorom. Čeprav se nam zdi malo nenavadno, mogoče niti ni popolnoma nelogično. Matematiki namreč trdijo, da je njihov 'jezik' natančnejši od našega pogovornega, in če veliko govorimo, pogosto samo zameglimo stvar (če se domislim nekega svojega znanca, sem pri priči za to, da se strinjam - z njimi). Pa vendar bomo mi napravili oboje (tako smo vsaj

brez skrbi, da se bomo vsem zamerili). Še to si zapomnite, da je pri preseku množic vseeno, po kakšnem vrstnem redu jemljemo množice, se pravi

$$A \cap B = B \cap A."$$

"Se more zgoditi, da presek dveh množic nima nobenega elementa?"

"More, zakaj pa ne. Naj je recimo

$$M = \{2,\ 4,\ 6\} \qquad N = \{1,\ 3,\ 5\}$$

Ker ti množici nimata nobenega skupnega elementa, je njun presek prazen in pišemo

$$M \cap N = \emptyset."$$

NIČ NI, PA VENDAR OBSTAJA PRAZNA MNOŽICA

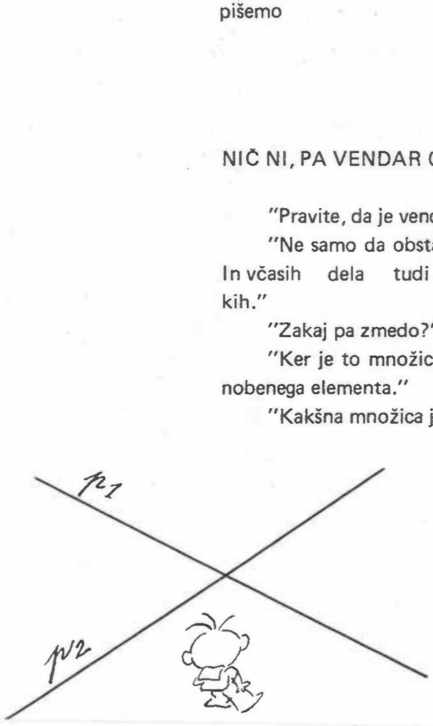
"Pravite, da je vendar nenavadno, da obstaja taka množica?"

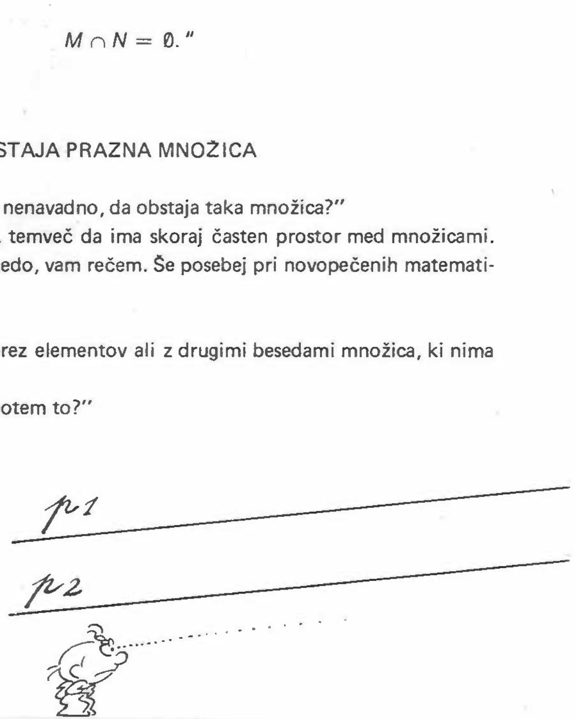
"Ne samo da obstaja, temveč da ima skoraj časten prostor med množicami. In včasih dela tudi zmedo, vam rečem. Še posebej pri novopečenih matematikih."

"Zakaj pa zmedo?"

"Ker je to množica brez elementov ali z drugimi besedami množica, ki nima nobenega elementa."

"Kakšna množica je potem to?"





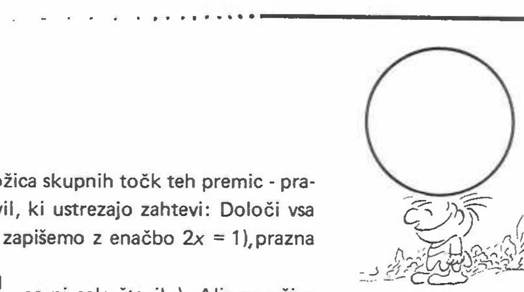
"Kakor vsaka druga, samo da je brez elementov in - pika."

"Pa imamo kakšno korist od nje?"

"Imamo, imamo, kaj da ne! Matematiki jo precej uporabljajo in ker se bomo tudi mi z njimi pogosto srečevali, vam bom najprej povedal, zakaj jo uvajamo, potem pa z nekaj zgledi pokazal tudi uporabo prazne množice. Eden od razlogov za uvedbo pojma prazna množica je zahteva, da mora biti presek dveh množic (zmeraj) množica. Če bi ne bilo prazne množice, bi presek dveh množic brez skupnih elementov ne bil množica. Opazujmo na primer dve premici v ravnini kot množici točk. Vzajemno si moreta biti samo v dveh bistveno različnih odnosih:

- lahko se sekata,
- lahko se ne sekata.

Matematik pravi o prvem primeru, da ima množica skupnih točk teh dveh premic en element, se pravi, da je njun presek enoelementna množica.



O drugem primeru pa bo rekel, da je množica skupnih točk teh premic - prazna množica. Ravno tako je tudi množica števil, ki ustrezajo zahtevi: Določi vsa cela števila, ki pomnožena z dve dajo eno (to zapišemo z enačbo $2x = 1$), prazna množica (ker je rešitev enačbe $\frac{1}{2}$, število $\frac{1}{2}$ pa ni celo število). Ali: množica skupnih točk premice in krožnice - na sliki - je prazna množica.

Takih zgledov bi v matematiki lahko navedli zelo veliko, če pa jih hočemo izraziti v jeziku množic, moramo vpeljati pojem - prazna množica. Imamo sicer še druge vzroke, vendar o njih - pozneje. Za zdaj si zapomnite samo, da množicama brez vsakršnega skupnega elementa pravimo disjunktni množici. Lahko je

OH! POZABIL SEM,
KAKO PRAVIMO MNOŽICAMA
BREZ VSAKRŠNEGA
SKUPNEGA ELEMENTA...

ONÉ..!
ONÉ..! AHA..!
AHA...!

~~Di Di~~

~~Dis~~...

~~DIJUK~~...

~~DISKO~~...

~~DISJUN~~ SEM
SE ŽE SPOMNIL...

DISJUNKTNI

MNOŽICI...

najti tudi zglede iz vsakdanjega življenja, kjer si pomagamo s pojmom prazna množica, vendar z matematičnega vidika niso zanimivi. Na primer:

- množica učencev drugega razreda, mlajših od pet let,
- množica ljudi na Zemlji, starejših od dvesto let,
- množica mest v Jugoslaviji z nad dvema milijonoma prebivalcev itd."

"Zakaj imamo posebno znamenje za prazno množico?"

"Ravno zato, da je ne bi pomešali s kakšno drugo, jo tudi označujejo drugače kakor druge množice, in sicer

$$\emptyset \text{ ali } \vartheta$$

kakor smo že prej videli."

"In to je vse, kar je treba vedeti o prazni množici?"

"Vse, za zdaj seveda. Ampak še nekaj si moramo dobro zapomniti. Prazno množico lahko opišemo na razne načine, vendar moramo vedeti, da je *kot množica* zmeraj ista, ena sama prazna množica. To bi lahko pojmovali tudi takole: ker so vse prazne množice med seboj enake, obstaja ena sama prazna množica."

"To nam vendarle še ni popolnoma jasno."

"Rad verjamem, ampak spomnite se, kaj smo rekli o enakosti množic, pa vam bo jasno. Prazna množica ima še nekaj zanimivih lastnosti. Če izhajamo iz nje, namreč lahko sestavimo po mili volji veliko različnih novih množic."

"Kako je to mogoče, če je le ena sama prazna množica, pa tudi, kako je iz 'praznine' mogoče kaj sestaviti?"

"Pa je, pa je, vam bom takoj pokazal, kako gre to (nekateri iz praznih besed spletejo cele teorije in 'znanstvene' razprave, zakaj potlej ne bi tudi matematiki iz prazne množice sestavili matematičnega objekta).

Začnimo s prazno množico: $\emptyset$.

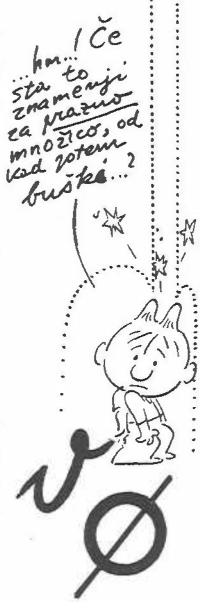
Napravimo zdaj množico, katere edini element je prazna množica: $\{\emptyset\}$.

Nadaljnjo množico napravimo iz tehle dveh množic: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Tako smo dobili dvoelementno množico, sestoječo iz prazne množice in množice, katere edini element je prazna množica. Imamo torej že tri množice, četrto pa napravimo iz teh treh:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Če tako nadaljujemo postopek, pri katerem ima vsaka nadaljnja množica (v zaporedju) vse prejšnje množice, moremo priti do neskončnega zaporedja med seboj *različnih* množic. Tako nastane eno od najpomembnejših zaporedij v teoriji množic. In vse to je nastalo - iz prazne množice. Zdaj vidite, kako pomembna je ta množica."



"Priznamo, da tega nismo pričakovali iz nečesa, kar - nima ničesar. Ampak zdaj vemo vse o preseku množic in o prazni množici."

"Dobro, če veste vse, pa mi povejte, kaj je presek neprazne množice s prazno."

"Presek neprazne množice s prazno je, too je ... ampak kako je sploh mogoče - presek s prazno množico?"

"Pa še lepo, prazna množica je množica kakor vsaka druga, presek dveh množic pa je, kakor smo videli, množica, sestavljena iz elementov, ki pripadajo *prvi in drugi množici*, se pravi, da je presek množice s prazno množico..."

"Prazna množica."

"Uganili ste. In kako to napišemo?"

"Takole:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \text{ .''}$$

"Glejte, glejte, ni slabo. Kako ste hitro dojeli. (Rajši ne povem, kako dolgo je trajalo, preden se je to meni posvetilo.)

In kaj je $A \cap A$, se pravi presek množice s samo seboj?" (Tega gotovo ne bodo vedeli.)

"To je množica A."

"Zakaj?"

"Ker mora presek obsegati elemente ene in druge množice in če sta obe enaki, mora tudi presek biti ena od njiju."

"Bi mogli to dokazati s kakšnim zgledom?"

"To je pa res lahko. Naj je recimo množica $A = \{1, 2, 3\}$. Se pravi, da je $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ ali

$$A \cap A = A.\text{ "}$$

(Samo poglej si jih! Še malo, pa bodo tile učili mene. Jaz sem pa mislil, da sploh ne bodo uganili.)

"Dobro. To ste lepo napisali, ni kaj. Če boste tako nadaljevali, boste kmalu rajši pisali formule kakor - govorili. Upam, da ste si torej zapomnili: presek množic je *množica*."

"Jasno, kaj pa bi mogel biti drugega?"

"Nič, nič, samo tako sem rekel, da ne bi pozabili, pa sem vesel, da vam je stvar že tako prešla 'v meso in kri'. Preglejmo samo še en zgled. Poglejte sliko. Na nji imamo premico p in ravnino π. Kaj je presek teh množic? Mimogrede naj omenim, da vzamemo, da sta p in π množici točk ali simbola za ti množici, zato ju ne pišemo v zavitih oklepajih."

"Uh, kakšno težko vprašanje! Ko je vendar jasno, da je njun presek točka S."

"In kako naj to napišemo?"

"Preprosto. Recimo, takole:

$$p \cap \pi = S.\text{ "}$$

"Ja, ja. Sem si kar mislil. Narobe povedano, narobe napisano."

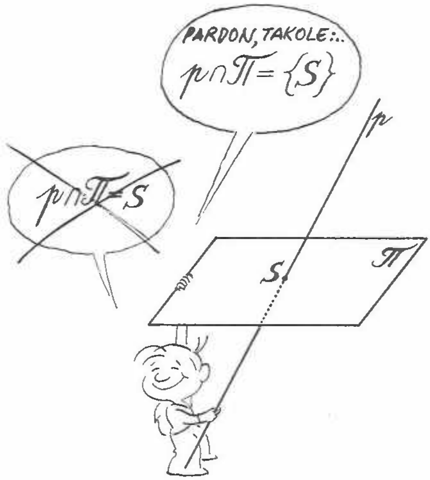
"Kako narobe? Kaj je narobe?"

"Saj sem vam povedal, oboje. Presek dveh množic je *množica*. Kaj pa je točka S?"

"Element teh množic."

"Se pravi, da je po vašem *presek* dveh množic *element*, ne pa množica."

"Žee, žee, ampaak..."



"Tu ni nobenega 'ampak'. Napačno rečeno in napačno napisano."

"Moral bi bil torej reči: presek premice p in ravnine π je enoelementna množica $\{S\}$."

"Natančno tako. In to, kakor vemo, napišemo:

$$p \cap \pi = \{S\}. \quad "$$

"No, to si bomo dobro zapomnili."

"Se mi zdi, se mi zdi." (Kakor da bi si bil tudi jaz to zapomnil, če me ne bi bil profesor po treh takih odgovorih poslal v klop in rekel samo: "Hvala, dosti" - tak pikolovec! Ampak kaj naj to pomeni? Zadnje vprašanje jim je najbrž tako vzelo pogum, da so me še pozabili vprašati:

"Kako presek množic nakažemo z risbo?"

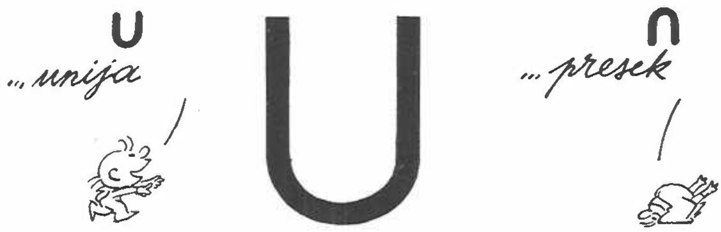
Pa nič ne de. Ko pokramljamo o uniji in razliki množic, jim na koncu pokažem vse te risbe.)

"Ampak preden se poslovimo, vam postavim še eno vprašanje, vi pa dobro premislite in mi odgovorite, ko se prihodnjič srečamo."

"Z veseljem, prav. In kako se glasi vprašanje?"

1 "Ali je presek premice in ravnine vselej enoelementna množica ne glede na položaj premice nasproti ravnini?"

"Jasno kot beli dan. Odgovor že vemo, vendar se nam mudi..."



UNIJA MNOŽIC

"Poglejmo zdaj operacijo z množicami, ki ji pravimo, kakor smo že rekli, unija. Znak zanjo je podoben črki U (se pravi obrnjeni znak za presek) in je takle:

$$\cup. \quad "$$

"In kaj je unija množic?"

"Pokažem vam na zgledih, potem pa jo bomo definirali in videli, kako se zapiše v matematičnem jeziku. Vzemimo dve poljubni množici, na primer

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \qquad B = \{5,\ 6,\ 7\}$$

Njuna unija je

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}.\ "$$

"Kako preprosto! Kakor bi množici seštevali."

"Imate prav. Namesto izraza 'unija' res včasih uporabljamo tudi besedo 'seštevek', ampak mi bomo rajši rekli unija, ker se boste prepričali, da to ni čisto navadno seštevanje elementov. Poglejmo še nekaj primerov. Če sta dani množici

$$C = \{m,\ n,\ p,\ q\} \qquad D = \{r,\ s,\ p,\ q,\ t\}$$

kaj bo njuna unija?"

"Unija teh množic je množica $\{m, n, p, q, r, s, p, q, t\}$ ali

$$C \cup D = \{m,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s,\ p,\ q,\ t\}.\ "$$

"Zakaj ste dvakrat pisali elementa p in q? Ko smo govorili o enakosti množic, smo videli, da to ni potrebno."

"Ja, res je. Ampak kaj, pozabili smo. Unijo množic C in D bomo torej napisali takole:

$$C \cup D = \{m,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t\}$$

Je zdaj dobro napisano?"

Hopla! Čez nekaj minut se začne tekma Olimpija-Hajduk..!

"Dobro. In zdaj tudi lahko definiramo unijo. Kaj je torej unija množic?"

"Unija množic je množica, sestavljena iz elementov obeh množic."

"Drži. Samo da matematiki to vendarle povedo malo natančneje: unija množic A in B je množica, v kateri so vsi elementi, ki pripadajo vsaj eni od množic A in B."

"Tako smo tudi mi mislili."

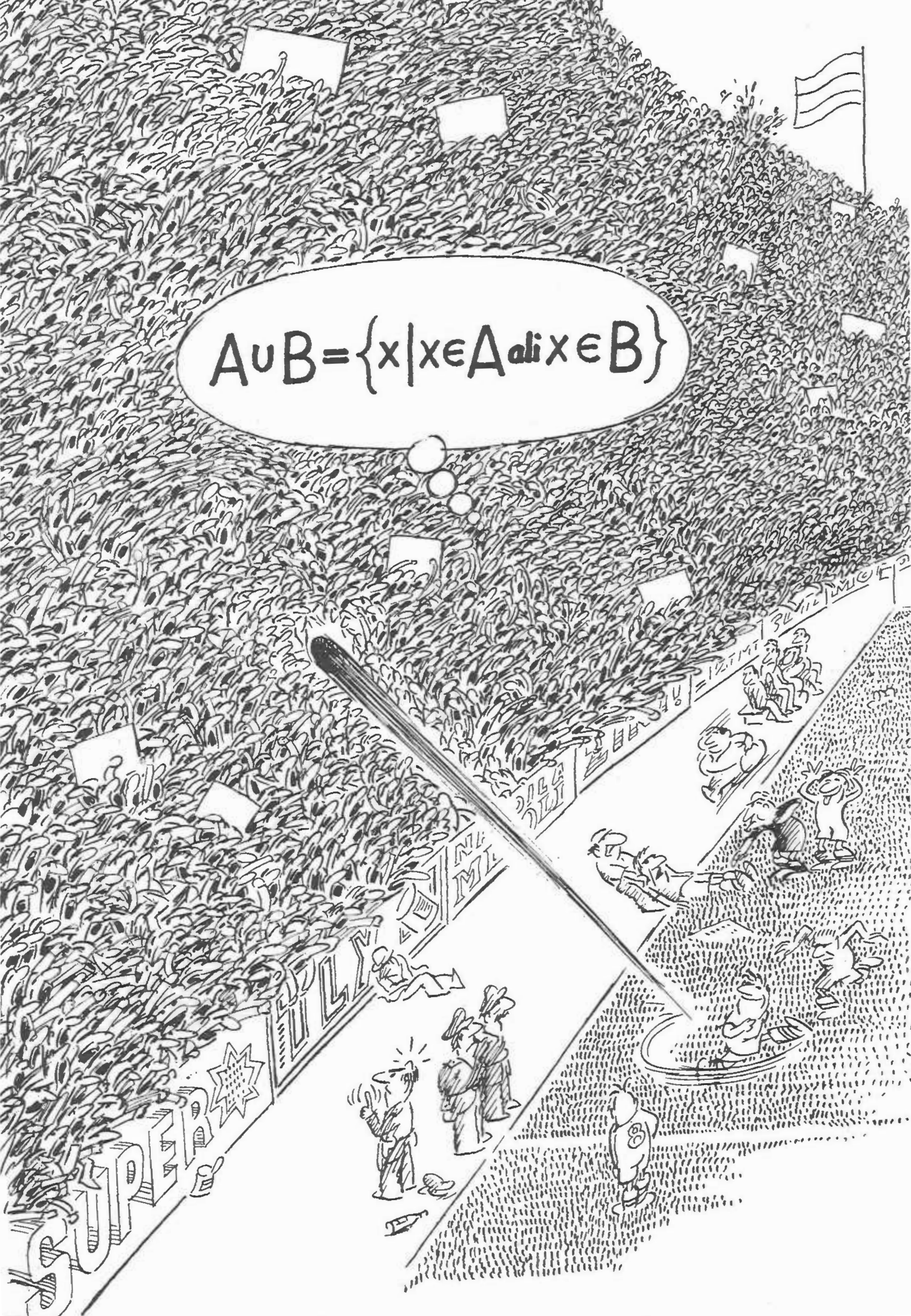
"Že verjamem, samo rekli niste tako. In zdaj vam definicijo tudi zapišem tako, kakor jo matematiki:

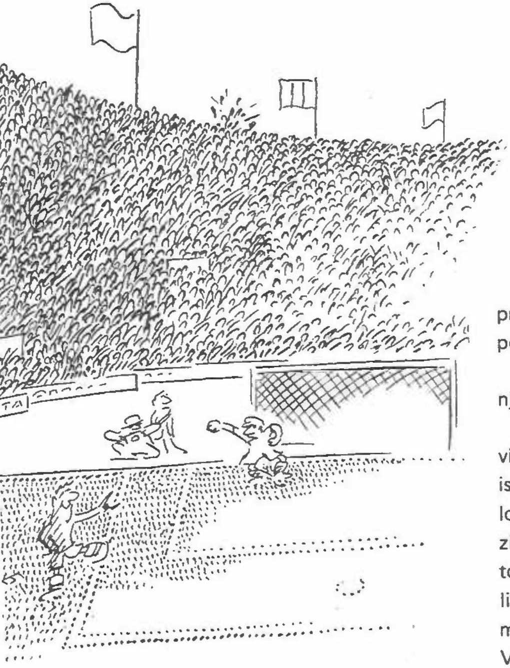
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ali } x \in B\}$$

Znate prebrati?"

"Znamo. To se prebere takole:

Unija množic A in B je množica, sestavljena iz elementov x z lastnostjo, da je x element množice A ali element množice B."


$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ali } x \in B\}$
SUPER



"Izvrstno, čestitam. Če želite napraviti unijo množic, se ravnajte samo po tej definiciji, pa ne bo narobe."

"In v čem je razlika med seštevanjem in unijo?"

"Seštevanje je operacija med števili, unija pa med množicami, in to ni isto. Poglejmo na primer samo število, ki ga dobimo, če seštejemo dve pozitivni celi števili, in število elementov unije dveh množic, pa boste videli, kaj vse more nastati pri uniji dveh množic glede na število elementov. Vemo, da je pri seštevanju števil njihov seštevek zmeraj večji od vsakega seštevanca in enak njihovi vsoti.

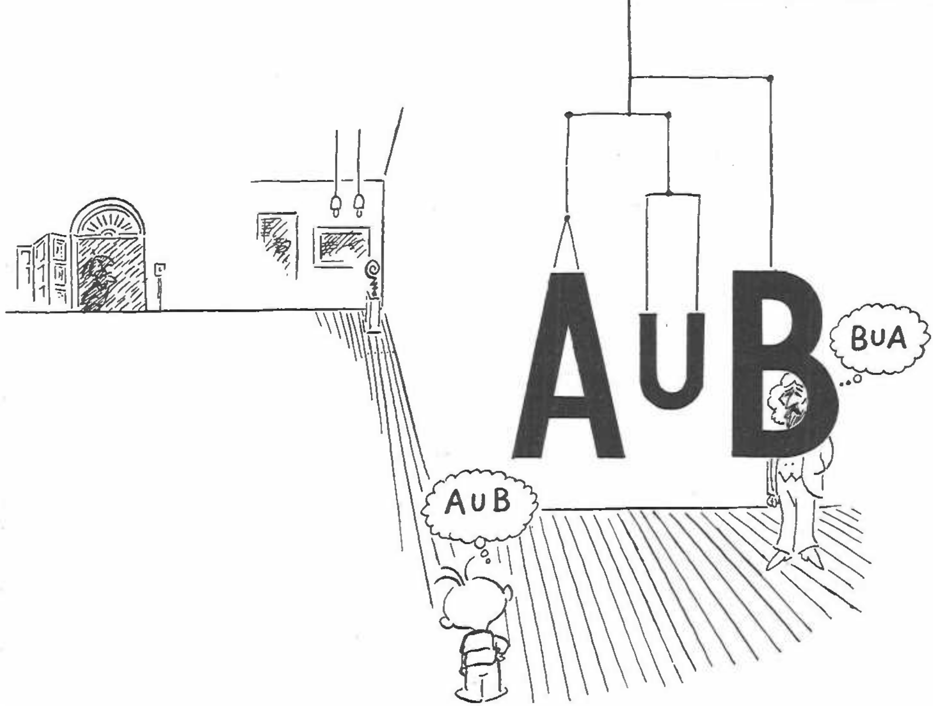
Na primer: $3 + 4 = 7$; 7 je več od 3 in od 4."

"To je menda tudi pri uniji množic?"

"Mogoče je že, samo ne nujno. V prejšnjem prvem primeru smo imeli množico A s štirimi elementi in množico B s tremi elementi..."

"In smo dobili njuno unijo s sedmimi elementi."

"Dobro, dobro, ampak poglejte množici C in D iz drugega zgleda. Množica C ima štiri elemente, množica D pet elementov. Koliko elementov ima njuna unija?"



"Čudno, ima samo sedem elementov."

"No, vidite. Samo kadar množici nimata skupnih elementov, se pravi, kadar sta disjunktni, je število elementov unije enako seštevku elementov posameznih množic. Drugače ni enako, temveč manjše."

"Drži."

"In poglejte, kolikšna je unija množice s samo seboj. Na primer: če je $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$A \cup A = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}. "$$

"Potemtakem je

$$A \cup A = A. "$$

"Tako je. Napravimo še unijo katere si že bodi množice z njeno podmnožico. Naj je na primer

$$M = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad N = \{b, c, d\}$$

Kaj je unija teh množic?"

"Unija teh množic je

$$M \cup N = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Saj to je množica M."

"Res je. Vselej, kadar je $N \subseteq M$, je

$$M \cup N = M \text{ ."}$$

"Ta unija ima v resnici zanimive lastnosti. Je za unijo množic vseeno, po kakšni vrsti jemljemo množice?"

"Seveda. Za vsaki dve množici A in B je

$$A \cup B = B \cup A$$

in pravimo, da za unijo množic velja zakon zamenjave (komutativnosti)."

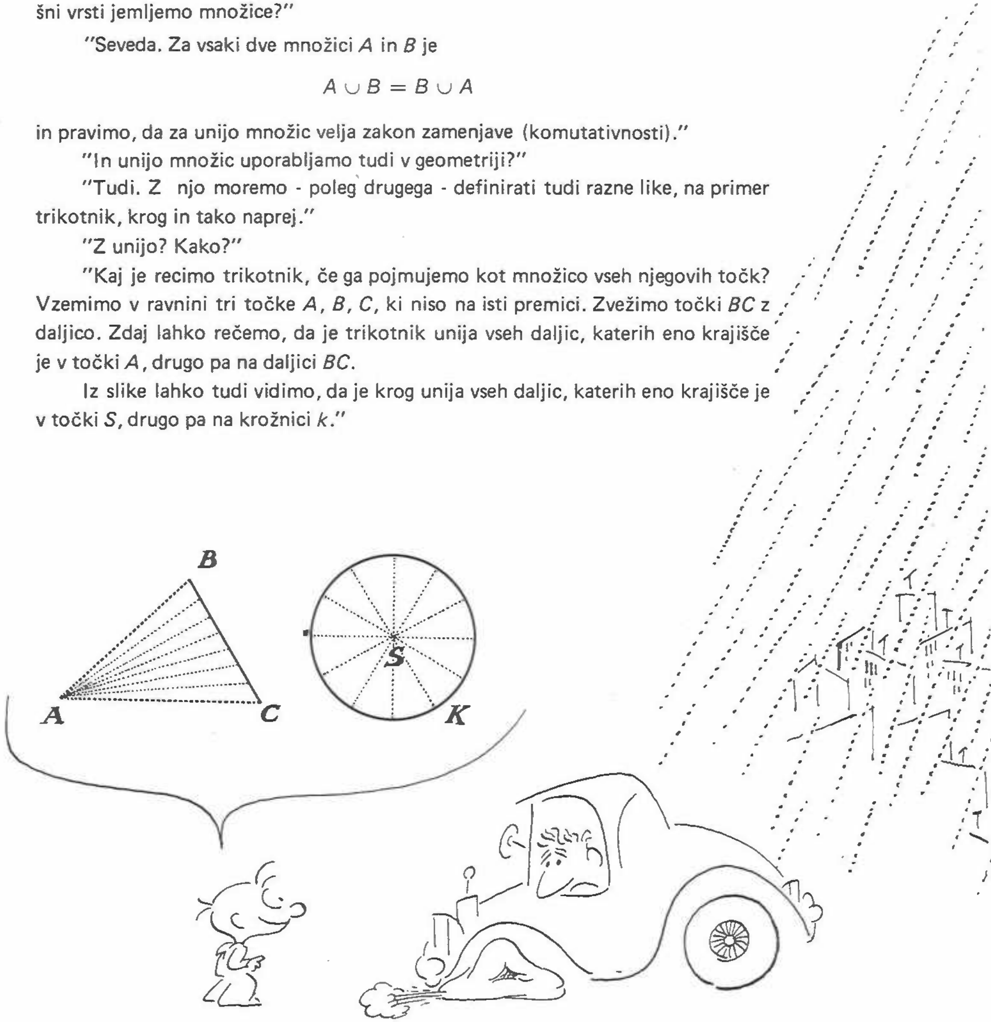
"In unijo množic uporabljamo tudi v geometriji?"

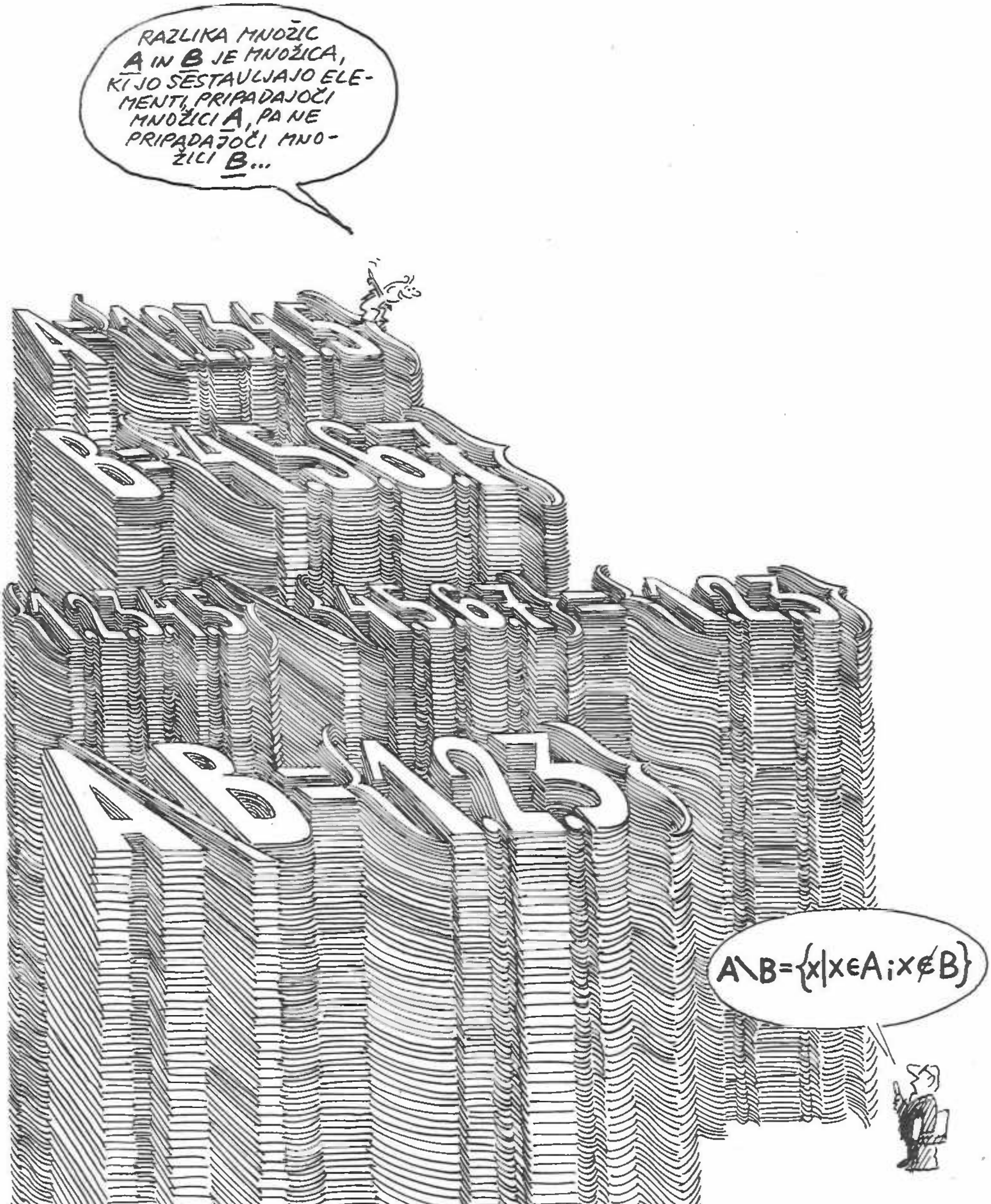
"Tudi. Z njo moremo - poleg drugega - definirati tudi razne like, na primer trikotnik, krog in tako naprej."

"Z unijo? Kako?"

"Kaj je recimo trikotnik, če ga pojmujemo kot množico vseh njegovih točk? Vzemimo v ravnini tri točke A, B, C, ki niso na isti premici. Zvežimo točki BC z daljico. Zdaj lahko rečemo, da je trikotnik unija vseh daljic, katerih eno krajišče je v točki A, drugo pa na daljici BC.

Iz slike lahko tudi vidimo, da je krog unija vseh daljic, katerih eno krajišče je v točki S, drugo pa na krožnici k."




RAZLIKA MNOŽIC A IN B JE MNOŽICA, KI JO SESTAVLJAJO ELEMENTI, PRIPADAJOČI MNOŽICI A, PA NE PRIPADAJOČI MNOŽICI B...
A\B={x|x∈A;x∉B}

RAZLIKA MNOŽIC

"Ker že poznamo presek in unijo množic, bomo igraje lahko določili njuno razliko ali diferenco."

"Nas veseli, če bo res tako."

"Boste takoj videli. Napisal bom samo razliko dveh množic, pa boste na prvi pogled, o tem sem prepričan, uganili, kako sem jo dobil. Najprej poglejmo znamenje za razliko. Podobno je znaku 'manj' (minus), ki ga uporabljamo pri številih (—), samo črta je malo daljša in postavljena poševno. Takole:

Pazite, da je ne boste po naključju napisali takole /."

"Dobro, si bomo zapomnili."

"In zdaj vzemimo dve poljubni množici. Naj bosta to

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{in} \quad B = \{4, 5, 6, 7\}$$

Njuna razlika je

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\} \qquad \text{ali}$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$$

Vam je jasno, kako je nastala nova množica?"

"Kajpada. Dobili smo jo tako, da smo odvzeli elemente, ki pripadajo prvi množici, pa jih ni v drugi."

"Tako je. Vedel sem, da boste takoj uganili."

"Mogoče tudi matematiki tako postavljajo definicijo razlike množic?"

"Poglej jih no, poglej, kako so postali previdni. Pravi mali matematiki, ni kaj. In takole bi najbrž rekel matematik: Razlika množic A in B je množica, sestavljena iz elementov, ki pripadajo množici A in ne pripadajo množici B."

"Ne verjamem, da bi matematik postavil tako definicijo."

"Kaj? Ne verjamete? Kako pa potem?" (Menda nisem narobe povedal definicije? Ne, točna je. Ne vem, na kaj mislijo.)

"Sploh ne. Matematik bi jo samo zapisal."

(Hu, kako so me! Pa je res tako. Zato jih bom pa jaz zdaj nekaj vprašal; bomo videli, če se mi bodo še naprej muzali.)

"In kako bi matematik zapisal to definicijo?"

"Dobro. Razliko množic bi zapisal takole:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ in } x \notin B\}."$$


Znamenje za razliko množic...

"In kako veste? Da niste od kod prepisali?"

"Ne. Samo še enkrat smo pogledali, kako zapišemo unijo, prebrali definicijo razlike in zapisali."

(Ni slaba kombinacija. Izkoristiš, kar že znaš, povežeš z novim, pa si se zlahkoma naučil.)

"In zdaj mi preberite, kar ste napisali."

"To preberemo takole:

Razlika množic A in B je množica, sestavljena iz elementov x z lastnostjo, da je x element množice A in ni element množice B."

"Imenitno. Priznam, ugodno ste me presenetili s svojim znanjem." (Kako hitro so doumeli. Kakor da se jim možgani bolje razvijajo kakor moji generaciji. Gotovo je to posledica kakšnih vitaminov. Moram vprašati zdravnika, ko pojdem k njemu, da mi spet predpiše mast za revmo.)

"In zdaj, ko veste, kaj je razlika množic, mi povejte, bolje rečeno, izračunajte - za naši dve množici - razliko $B \setminus A$."

"Dobro. Ampak najprej bom napisal množici:

$$B = \{4, 5, 6, 7\} \qquad A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{in zato je}$$
$$\{4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\} \qquad \text{ali}$$
$$B \setminus A = \{6, 7\}. \text{ "}$$

"Drži. In kaj lahko sklepamo iz tega?"

"Lahko sklepamo, da je

$$A \setminus B \neq B \setminus A. \text{ "}$$

"Se pravi, da pri razliki ne smemo zamenjavati vrstnega reda množic."

"Res je. Za razliko množic torej ne velja zakon komutativnosti. Samo še eno vprašanje. Ampak dobro premislite, preden odgovorite.

2 Kdaj je število elementov razlike množic $A \setminus B$ enako razliki števil elementov množice A in B?"

"U, kaže, da je to precej težko vprašanje. Rešili ga bomo - ampak za domačo nalogo. Zdaj smo že malo utrujeni."

"Dobro. Rad verjamem. Pa kljub temu ne pozabite na nalogo."

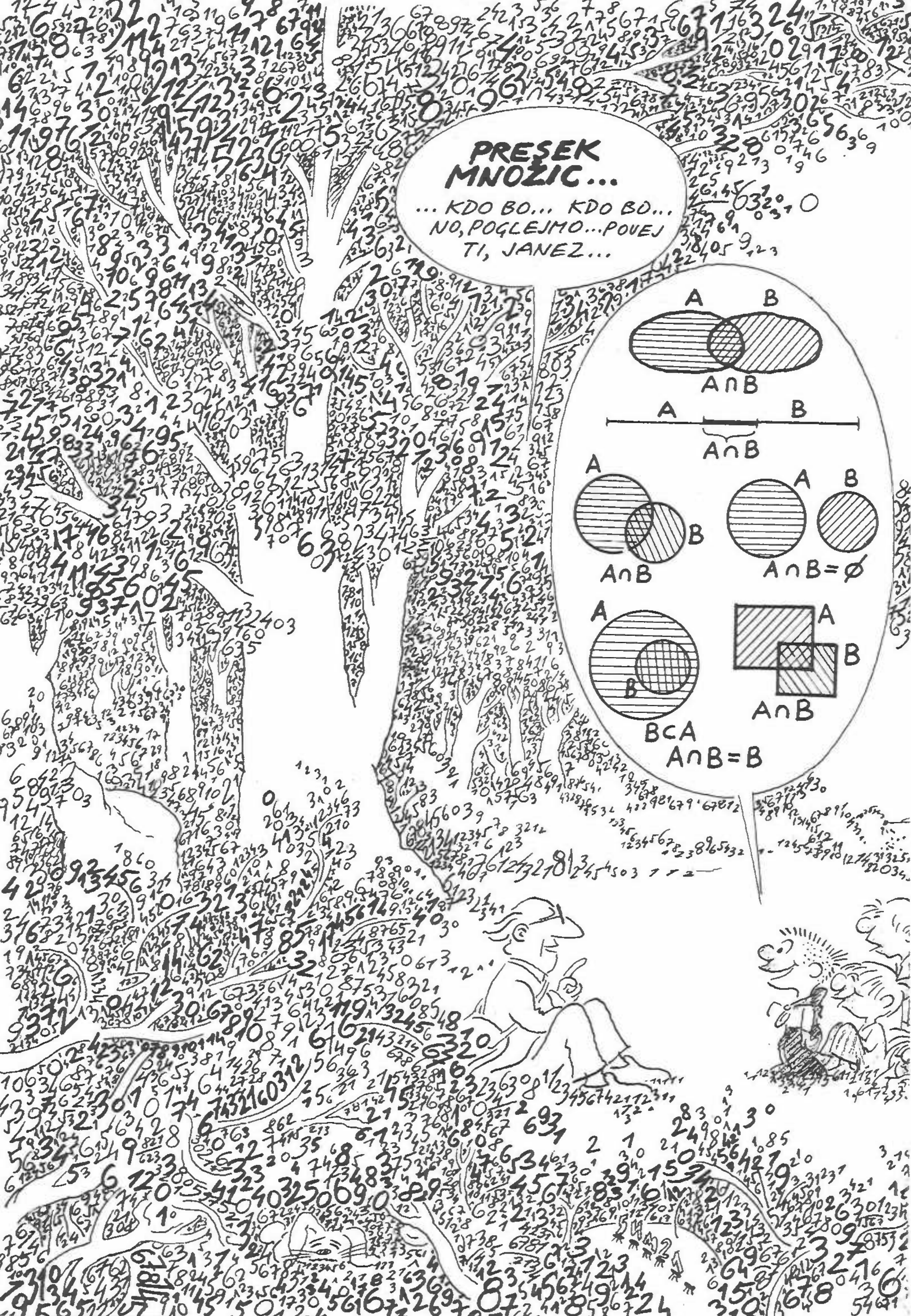
"Ne bomo, častna beseda."

"Huraaa, zdaj bomo sestavili množici igralcev, bomo videli, katera je boljša. Ampak kje je žoga? Se menda ni spremenila v prazno množico? Ahaaa, je že tukaj. Gremo..."

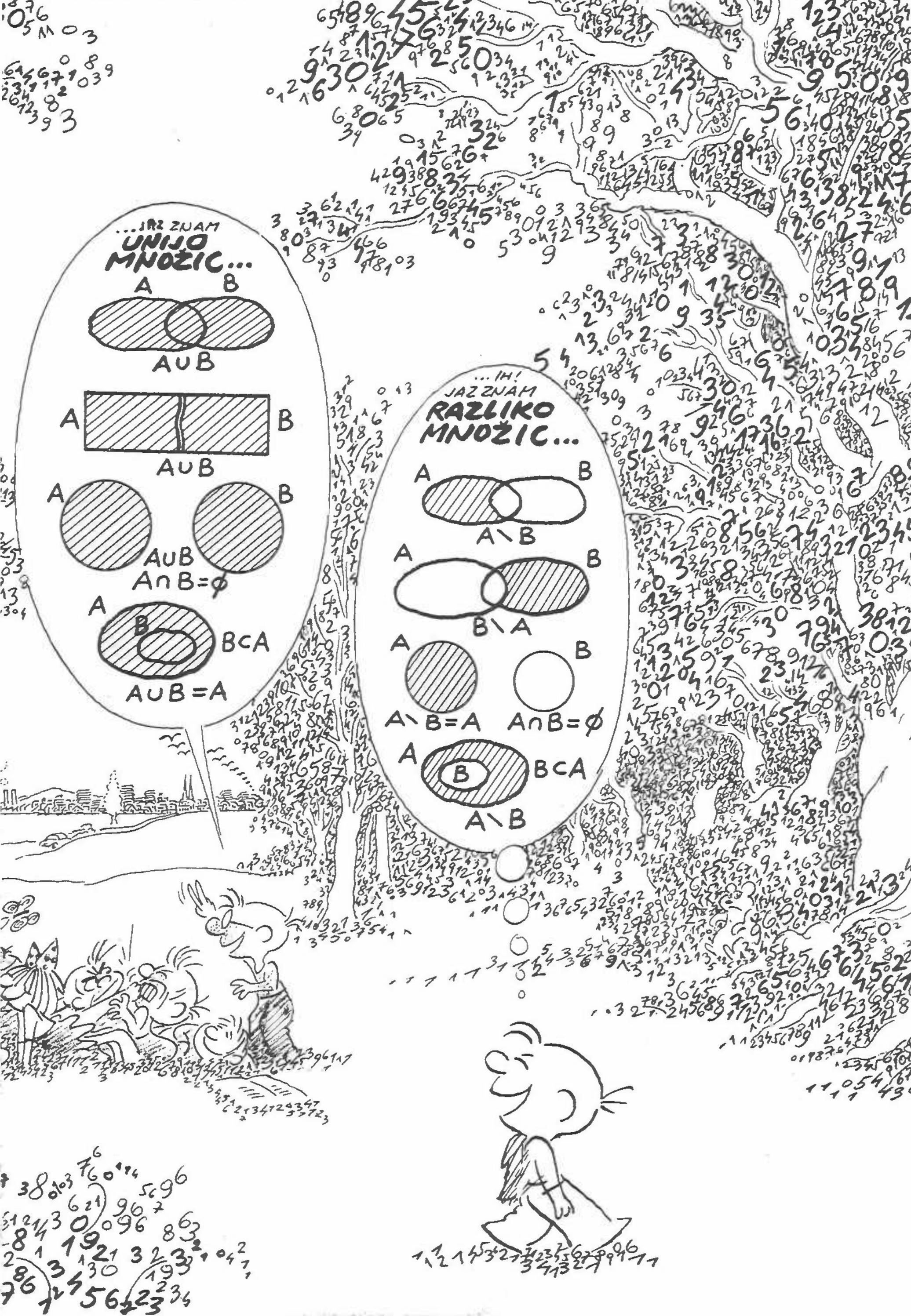
In zdaj še nekaj načinov, kako podajamo z risbo presek, unijo in razliko množic.

Hitro obrni stran $\longrightarrow$

(25 + 25) + 4'



PRESEK MNOŽIC ...
... KDO BO... KDO BO... NO, POGLEJMO... POVEJ TI, JANEZ ...
A
B
A∩B
A
B
A∩B
A
B
A∩B
A
B
A∩B=∅
A
B
B⊂A
A∩B=B
A
B
A∩B


...JAZ ZNAM
UNIJO
MNOŽIC...
A B
A∪B
A B
A∪B
A B
A∪B
A∩B=∅
A B B⊂A
A∪B=A
...IH!
JAZ ZNAM
RAZLIKO
MNOŽIC...
A B
A∖B
A B
B∖A
A B
A∖B=A A∩B=∅
A B B⊂A
A∖B

Preslikava množic

"Ha, ha, ha, kaj se tudi množice rade slikajo?
Pa so vsaj fotogenične?"

"No, že spet začenjate z neresnostmi, jaz pa sem vam ravnokar hotel razložiti enega od najpomembnejših pojmov vse matematike, pojem, ki je temeljni kamen sodobne matematike, pojem, na katerem..."

(Pa kaj mi je moralo ravno zdaj priti na misel, kako sem bil pred nekaj leti na slovesnosti, ko so polagali temeljni kamen za stavbo, ki je niso nikoli sezidali; zmeraj me veličastne primerjave speljejo čisto kam drugam, nazadnje bom še izgubil rdečo nit in se mi bo zgodilo kakor tistemu profesorju... ampak kje sem že ostal?

Aha, že vem, sem se vendarle spomnil.)

"... sloni sodobna matematika. Priredba je torej matematični pojem, kakor številni drugi prenesen v matematiko iz vsakdanjega življenja..."

"Od kod pa na lepem 'priredba', če ste začeli govoriti o preslikavi?"

(Kaj sem res rekel preslikava in ne priredba? Na, zdaj še sam ne vem več zanesljivo, s čim sem začel. Pa tudi tile matematiki! Prav treba jim je bilo vpeljati toliko izrazov. Pa se še bahajo s svojo natančnostjo. In kaj naj zdaj? Čakajte... saj ta izraza pomenita pravzaprav isto. Še sreča, nekako se bom vendarle izmazal.)

"... in matematiki za ta pojem uporabljajo oba izraza-'preslikava' in 'priredba', zato bomo tudi mi uporabljali oba, čeprav bomo pogosteje govorili o 'preslikavi'."

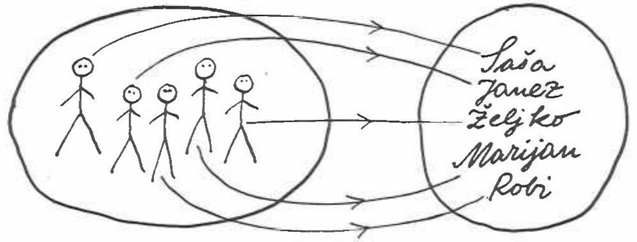
(Še dobro sem jo izvozil, kakor bi bil lahko joj prejoj.)

"Kaj je torej preslikava množic?"

Preslikavanje = priredba

"Pojem vam razložim na nekaj zgledih, ker tu niti ni tako pomembno, da se naučimo definicijo, temveč da dojamemo bistvo procesa. Zamislimo si množico dečkov. Poglejte, še narišem vam jo, in sicer tako, kakor po navadi rišejo otroci (nazadnje bom zaslovel še kot pedagog, nikjer pa ni rečeno, naj bi kdo zvedel, da sploh ne znam bolje risati). In zdaj zapišimo še njihova imena. Imamo torej dve množici: množico dečkov in množico njihovih imen. Naravno je, da vsakemu dečku priredimo njegovo ime. Temu ravnanju pravimo prirejanje množic, ker elementom ene množice priredimo elemente druge množice. Poglejmo zdaj na primer tole knjigo. Strani knjige pojmujmo kot elemente ene množice, števila 1, 2, 3, 4, ... 226 pa kot elemente druge množice. Vsaki strani je prirejeno eno število. Tudi tu smo elemente ene množice priredili elementom druge. Ali: množica učencev

(40 + 10) + 7' ⟶ če to izračunaš, je stran 58



vaše šole in množica razredov. Vsak učenec pripada kakšnemu razredu, pa imamo spet priredbo množic. Prepričan sem, da bi zdaj tudi sami znali navesti še veliko zgledov priredbe ali preslikave množic v množico,

- na primer množica držav - množica njihovih glavnih mest,
- množica šol - množica direktorjev šol,
- množica stavb - množica njihovih stanovalcev in tako naprej.

Povejte mi zdaj, kaj je v vseh teh zgledih skupnega?"

"Povsod imamo po dve množici."

"Res je. Imamo dve množici, imenujmo ju za zdaj vhodna ali začetna množica in izhodna ali končna množica, poleg njiju pa mora biti znan tudi *postopek*, po katerem iz ene množice prehajamo v drugo, se pravi način, kako elementom ene množice priredimo elemente druge množice. Vam je to jasno?"

"Jasno." (Saj vendar nismo bebčki, da tega ne bi razumeli.)

"No, dobro, če vam je jasno, ponovite, kaj je treba vedeti o preslikavi množic..."

(Poglej ga no, lepo te prosim, nazadnje res misli, da tako težko dojemamo - gotovo sodi po sebi.)

"Pri preslikavi množic moramo zmeraj imeti dve množici, vhodno ali začetno in izhodno ali končno, in postopek, po katerem elementom ene množice priredimo elemente druge množice."

"Izvrstno. Lahko torej nadaljujemo."

"Kaj nadaljujemo? Kaj to še ni vse o preslikavi množic?"

"Res je to najpomembnejše, pa vendar ne vse. Pri preslikavi namreč lahko nastanejo različni primeri, zato vam jih bom nekaj pojasnil (mogoče bi bil moral raj-ši reči: poskušal pojasniti - ampak zdaj je, kar je) z zgledi o delitvi bonbonov."

"O delitvi bonbonov? In kje so bonboni?"

(Poglej jih no, kako se delajo neumne. Saj nisem dedek Mraz. Moral bi bil vzeti za zgled delitev slabih ocen, potem se gotovo ne bi gnali zanje.)

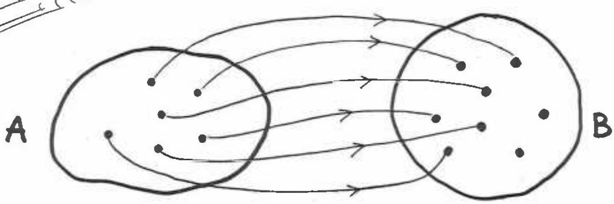
"Saj nisem rekel, da bom bonbone delil, temveč samo želim pojasniti nekaj preslikav množic, in zglede si izmišljamo, zato vas prosim, da mi nikar ves čas ne segajte v besedo s svojimi domisleki. No, vzemimo prvi zgled:

Imamo šest bonbonov in osem otrok. To sta naši množici - vhodna, rečemo ji tudi domena, in izhodna ali kodomena. Bonbone delimo tako, da noben otrok ne dobi več kakor en bonbon, se pravi vsak otrok največ en bonbon. Kaj se bo zgodilo, ko razdelimo bonbone?"

"Dva otroka bosta ostala brez bonbonov."

"Tako je. In kako bi to narisali?"

"Takole, poglejte."



"Zelo dobro. Zaznamujmo še množico bonbonov z A in množico otrok z B. Če dobro pogledamo risbo, bomo videli, da iz nje lahko sklepamo:

1. Vsaka puščica prihaja iz ene točke množice A in se končuje v eni točki množice B. V našem primeru se to pravi, da bonbone delimo po pravilu: en bonbon - en otrok, dokler niso vsi bonboni razdeljeni.

2. Iz vsake točke množice A prihaja samo po ena (ali natančneje: ena in samo ena) puščica. Če bi prihajali na primer po dve, bi se reklo, da *en* bonbon delimo na dva otroka, to pa se v našem primeru ne more zgoditi.

3. V vsaki točki množice B se končuje največ ena puščica, torej noben otrok ne dobi več kakor en bonbon, lahko pa se primeri, da ne dobi *nobenega*, da je torej 'kaznovan'.

Ste razumeli?"

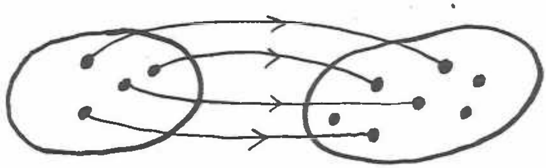
"Smo. Nič lažjega."

"Zdaj sami narišite še en primer take preslikave, pri kateri so nekateri elementi 'kaznovani'."

"To je lahko. Narišemo množici tako, da ima izhodna več elementov kakor vhodna, in samo potegnemo puščice. Takole:

(45 + 5) + 9'

Za nič
NE!
Ni dobro!



"Dobro. Pa bi mi znali povedati kakšen zgled take priredbe... na primer iz svoje šole?"

"Kaj bi ne! Poglejte, v našem razredu so med poukom trije stoli prazni. Naj je vhodna množica množica učencev, izhodna pa množica stolov. Če vsak učenec sede na svoj stol, ostanejo trije stoli brez učencev in to je taka priredba."

"Res je. Vidim, da vam je jasno. In zdaj si zapomnite samo še to, da taki priredbi pravimo *injekcija.*"

"Kaj? Kako ji pravimo?"

"Sem že povedal. Malo nenavadno, pa si vsaj laže zapomnimo. To je injekcija ali injektivna preslikava. Ampak povejmo to še malo natančneje: injekcija je tak predpis za priredbo, pri katerem različnim elementom vhodne množice priredimo različne elemente izhodne množice."

"Mi smo pa mislili, da samo v ambulanti dajejo injekcije."

"No, vidite, dajejo jih tudi matematiki - samo brez igle."

"In zdaj poglejmo drug zgled prirejanja množic. Zamislimo si, da imamo šest bonbonov in štiri otroke, bonbone pa delimo tako, da vsak otrok dobi *vsaj* po en bonbon. Kakšno bo v tem primeru deljenje bonbonov?"

"Dva otroka bosta dobila po dva bonbona, druga dva pa po enega."

"V redu. Ampak moremo porazdeliti tudi tako, da en otrok dobi tri bonbone, drugi trije pa po enega. Narišimo tudi tak zgled deljenja."

"Imamo tudi tu 'kaznovane' otroke ali 'kaznovane' točke?"

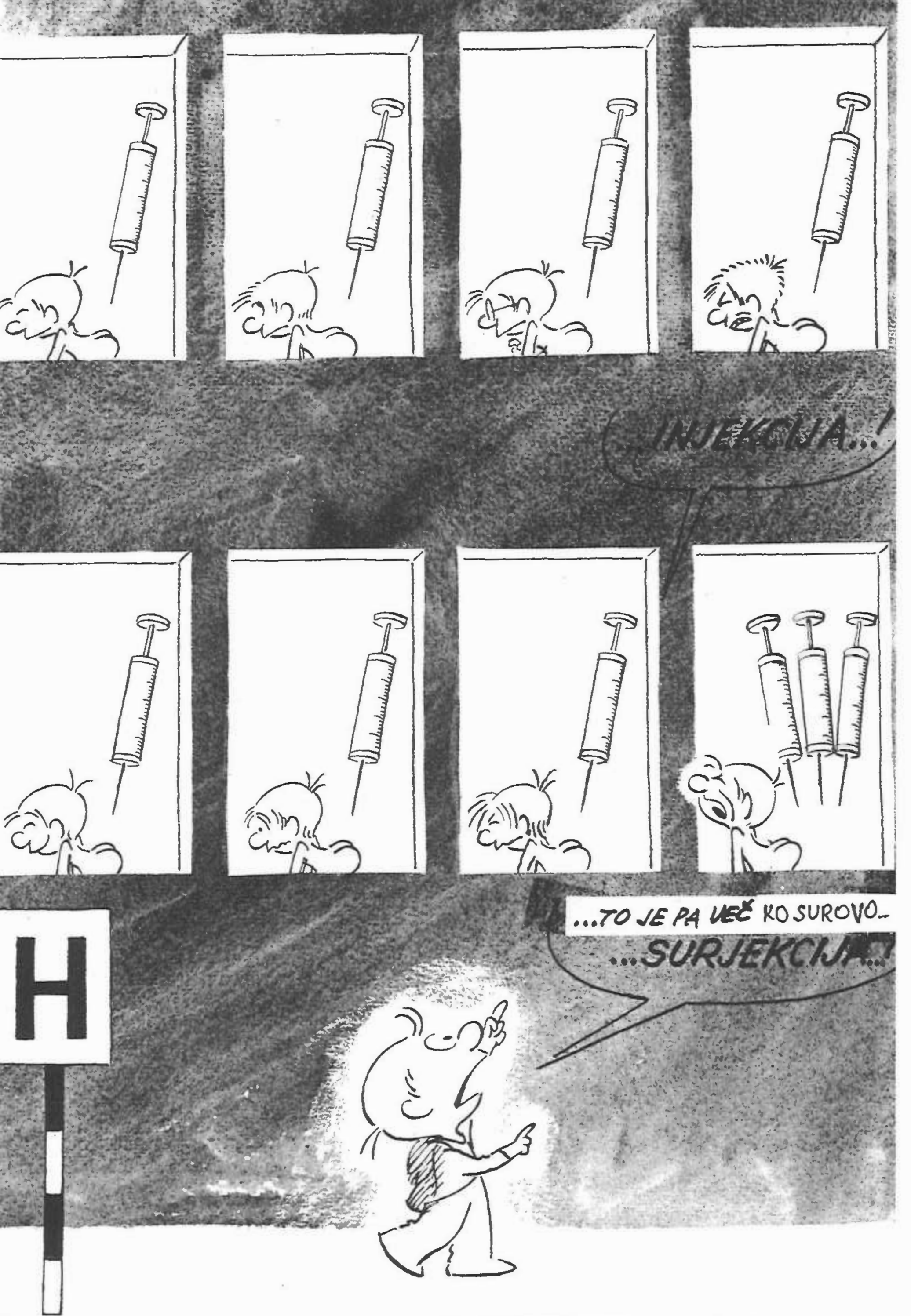
"Ne, nimamo jih, ampak nekateri so dobili po dva bonbona."

"Tako je. Poglejmo, kaj se dá sklepati o tej priredbi:

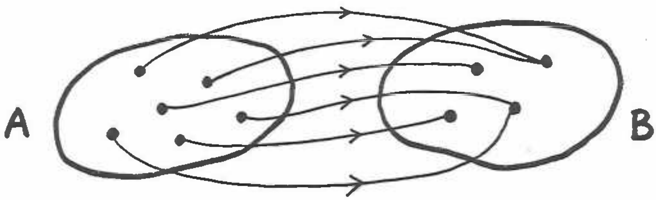
1. Vsaka puščica izhaja iz ene točke množice A in se končuje v eni točki množice B.

2. Iz *vsake* točke množice A prihaja ena in samo ena puščica.

3. V *vsaki* točki množice B se končuje *vsaj* ena puščica (lahko pa se jih kajpak tudi več).


...INJEKCIJA...!
...TO JE PA VEČ KO SUROVO...
...SURJEKCIJA...!

No, vidite, taki preslikavi množice v množico matematiki pravijo surjektivna preslikava ali surjekcija. Zanjo je značilno, da pri nji ni 'kaznovanih' elementov, se pravi elementov, v katere ne prileti vsaj ena puščica. Pri tej priredbi so torej vsi elementi izhodne množice 'pokriti', se pravi, *vsakemu* elementu izhodne množice je prirejen vsaj en element vhodne množice.



Zdaj dobro premislite in mi navedite vsaj en zgled take preslikave... na primer iz svoje šole."

"Eeee, to bi bilo, to je množica vseh učencev in množica razredov."

"Tako je. Če vsi učenci šole sestavljajo eno množico, razredi šole pa drugo, se v vsakem elementu druge množice, se pravi v vsakem razredu, znajdejo vse puščice, ki priletijo od učencev tega razreda. Kakšna je preslikava, če je domena množica vseh šolskih knjig učencev enega razreda, kodomena pa na primer množica njihovih torb?"

"Tudi to je surjektivna preslikava, ker mora priti v vsako torbo vsaj po ena knjiga."

"Res je. Vidim, da ste doumeli bistvo take preslikave. Zanima me pa še en primer, in sicer ravno iz *vašega* razreda. Naj je vhodna množica sestavljena iz vseh ocen 'odlično', in sicer iz katerega si že bodi predmeta v vašem razredu, izhodna množica pa iz učencev v razredu. Je preslikava množice ocen na množico učencev pri vas surjektivna?"

"Ni. V razredu je 32 učencev, pa samo sedem odličnih ocen in noben učenec nima po dveh odličnih."

(Zanimivo. Podobno je bilo davno nekoč tudi v mojem razredu.)

"Kakšna preslikava je torej to?"

"Oh, po mojem je to... temu pravimo injekcija."

"Drži, pa bo vsaj ob koncu šolskega leta - surjekcija?"

"Ne vemo. Mogoče."

"Vidite, tako smo prišli tudi do tretje vrste preslikave..." (Še sreča, da smo nazadnje le prišli do konca...)

"Kaj pravite?"

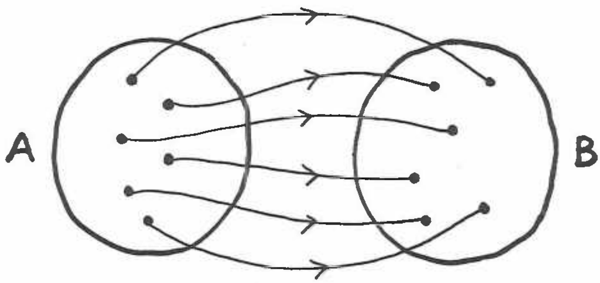
"Oh, nič. Pravim, da je vse zelo zanimivo."

"... in zamislimo si, da imamo šest bonbonov in šest otrok in bonbone delimo tako, da..."

"... vsak otrok dobi po en bonbon."

"Tako je. Narišimo tak primer preslikave množic.

Pri tem bomo lahko ugotovili, da:



1. Vsaka puščica prihaja iz ene točke množice A in se izteče v eni točki množice B.

2. Iz vsake točke množice A pride po ena in samo ena puščica.

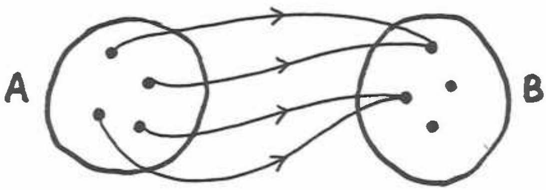
3. V vsaki točki množice B se konča ena in samo ena puščica.

Pri tej preslikavi so torej ohranjene vse lastnosti injektivne (vendar brez 'kaznovanih' elementov) in surjektivne preslikave (vendar brez 'nagrajenih' elementov, namreč noben otrok ne dobi več kakor en bonbon). Taki preslikavi, pri kateri se različnim elementom vhodne množice priredijo različni elementi izhodne množice, tako da ni neprirejenih elementov, pravimo bijektivna preslikava ali bijekcija. Natančneje jo definiramo takole: Bijekcija je tak predpis priredbe med elementi vhodne in izhodne množice, ki je hkrati surjekcija in injekcija. Povejte mi, kaj ste opazili pri teh množicah glede na njihove elemente."

"Imajo enako število elementov."

"Tako je, bijektivno preslikavo lahko vzpostavimo samo med množicama z enakim številom elementov. Pa mora biti preslikava bijektivna, če imata množici enako število elementov?"

"Mislim, da ne. Lahko bi šlo tudi... takole:



"Dobro. Lahko bi bili kajpak tudi vse štiri elemente prve množice priredili enemu samemu elementu druge množice. Če je mogoče med dvema množicama vzpostaviti bijektivno preslikavo, potem sta to množici z enakim številom elementov. (Ta stvar, ki je za končne množice očitna, je pomagala Cantorju, da jo je za neskončne množice sprejel kot definicijo.) Ne smete pozabiti na to, saj matematiki trdijo, da je zelo pomembno. S tistimi, katerim to ni jasno, se kratko in malo sploh - ne marajo pogovarjati."

"Hvala, da ste nas opozorili na to. Če je tako, si bomo zapomnili že zato, da jih ne ujezimo; če se namreč spremo z njimi, bomo gotovo mi - na slabšem."

"Navedite sami še nekaj zgledov množic, med katerimi je mogoče napraviti bijektivno preslikavo."

"To je pa res lahko. Naštejemo jih lahko, kolikor hočete. Na primer:

- množica držav v Evropi - množica glavnih mest evropskih držav,
- množica avtomobilov - množica (njihovih) registrskih številk,
- množica predmetov v izložbenem oknu - množica njihovih cen,
- množica občin v republiki - množica predsednikov občinskih izvršnih svetov,
- množica strani v kakšni knjigi - množica številk teh strani,
- množica sedežev v kinu - množica njihovih številk..."

"Dosti, dosti. Še kakšen primer s števili?"

"S števili? Dobro, na primer

- množica sodih števil - množica lihih števil. Tudi teh je enako veliko. Se vam ne zdi?"

"Seveda, seveda. Nič ne pomaga, moram vam priznati, da imate bijektivno preslikavo - v malem prstu, oprostite, v glavi, ne v prstu. Če vam je ta preslikava

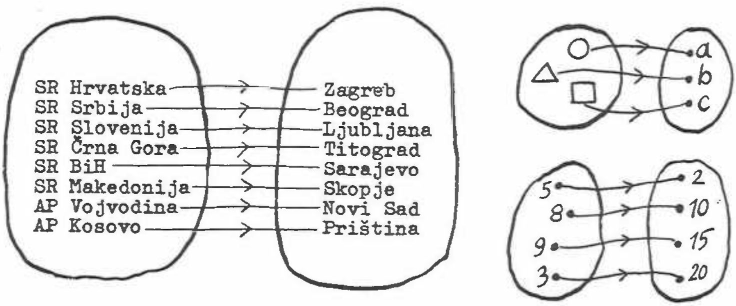
tako jasna, bomo izkoristili priložnost in se seznanili še z enim zelo pomembnim pojmom, ki je v zvezi z bijektivno preslikavo."

"In kaj je to?"

"Pojem ekvivalentnih množic. Pravimo, da sta množici ekvivalentni, če moremo med njima vzpostaviti bijektivno preslikavo."

"Se pravi, da so vse množice, ki smo jih našteli - ekvivalentne."

"Tako je... vse so med seboj ekvivalentne. Če matematiki želijo poudariti, da imata množici enako število elementov ali da imata isto polenco, takima množicama pogosto pravijo tudi *ekvipolentni* množici. Naštejmo še nekaj zgledov ekvipolentnih množic:



"Vse je tako preprosto. Lahko si bomo zapomnili."

"Preprosto je res. Vendar pazite, da vas takole vprašanje ne zmede:

Sta enaki množici tudi ekvivalentni?"

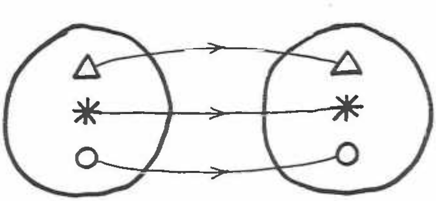
"Sta. Enaki množici imata iste elemente, se pravi, imata tudi enako veliko elementov, to je, sta ekvivalentni."

"Dobro. Ljubo mi je, da ste na vprašanje tako zanesljivo odgovorili.

In zdaj mi povejte:

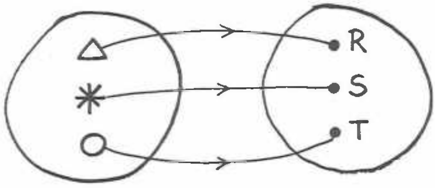
Ali so ekvivalentne množice tudi enake, z drugimi besedami: če sta množici ekvivalentni, ali morata biti tudi enaki?"

"Ekvivalentni množici sta lahko tudi enaki, ni pa nujno; enaki množici pa morata biti tudi ekvivalentni. V tem je razlika med enakimi in ekvivalentnimi množicami."



"Navedite kakšen primer za to, kar ste ravnokar rekli."

"Nič lažjega. Zadnji dve množici na strani 66 sta na primer enaki in seveda tudi ekvivalentni, tile dve pa sta ekvivalentni, vendar nista enaki."



"Že vidim, da vas kmalu ne bom imel več kaj vprašati.
Mogoče pa imate vi kakšno vprašanje?"

"Imamo za ekvivalentnost množic posebno znamenje?"

"Seveda ga imamo. Takole:

Potemtakem $A \cong B$ beremo: množici A in B sta ekvivalentni. In zdaj ponovimo vse tri primere preslikav množic, in sicer na zgledu poštarja, ki raznaša pisma po hišah."

"Poštarja, ki raznaša pisma? Ha, ha, ha, smo pa res radovedni, kako je to."

"Zamislite si torej pismonoša, ki s polno torbo pisem raznaša pisma po ulici od stanovanja do stanovanja, dokler se mu torba ne izprazni. Imamo torej dve množici: množici pisem v torbi in množico stanovalcev, ki jih pismonoša obišče.

3 Premislite in povejte: v katerem primeru bo raznašanje pisem injektivno, v katerem surjektivno in kdaj bijektivno?"

"Zanimiva naloga, ampak rešili jo bomo kot domačo nalogo."

"Dobro, samo nikar ne pozabite, kar ste obljubili. Če ste v resnici razumeli pojem preslikave, vam bo to zelo pomagalo pri učenju matematike, ker je preslikava gotovo eden od ključnih pojmov..."

"Skoraj ne moremo verjeti, ker je - tako preprosto. Ni mogoče, da tudi pravi matematiki tako pojasnjujejo ta pojem. Gotovo govorijo veliko bolj zapleteno..."

"No, sicer ne govorijo čisto tako kakor mi, zlasti ne rišejo toliko in ne navajajo takih zgledov, vendar v bistvu govorijo isto. Poglejmo, kaj bi na primer matematik rekel o preslikavi:

'Naj sta A in B množici. Preslikava množice A v množico B je urejena trojka (A,B,f), sestoječa iz množice A, ki ji pravimo vhodna množica, definicijsko **področje** ali domena, iz množice B, ki ji pravimo vrednostno področje, **izhodna** množica ali kodomena, in iz pravila f, po katerem vsakemu elementu $x \in A$ priredimo element $y \in B$ (odvisen od x). Prirejeni element y se imenuje vrednost preslikave pri elementu x in ga označujemo s $f(x)$. O elementih $x \in A$ pogosto govorimo kot o neodvisni spremenljivki ali argumentu preslikave, o elementih $y \in B$ pa govorimo kot o odvisni spremenljivki preslikave.' Tako bi vam matematik razložil preslikavo. In zdaj mi odkrito povejte: Ste razumeli?"

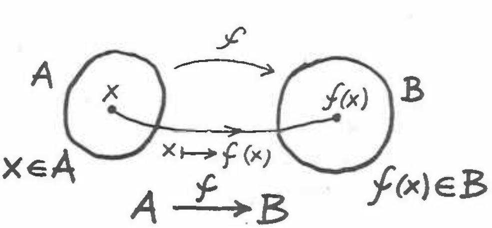
"Smo. V resnici smo vse razumeli. Če bi ne bilo prejšnjih zgledov, bi nam mogoče ne bilo vse jasno, tako pa je."

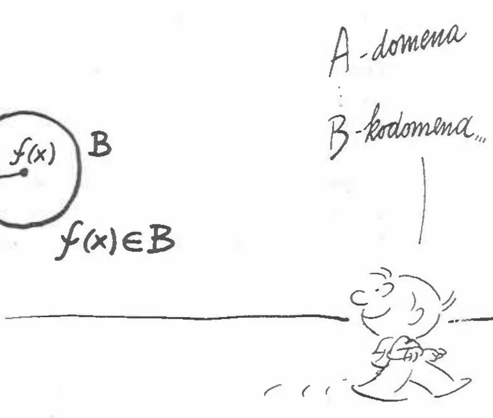
"Dobro. Če je tako, ponovite, kar ste si zapomnili."

"Bomo. Pa se bomo kljub temu zatekli k risanju, ker je tako laže..."

"Dobro, dobro. Kar lepo narišite in razložite, kar ste si zapomnili."

"Poglejte, takole. Imamo množici A in B.





Preslikava sestoji iz vhodne množice A, ki ji pravimo tudi domena, izhodne množice B, to je ko... kodomena, in postopka ali predpisa, s katerim vsakemu elementu množice A priredimo element množice B. Elementom množice A pravimo neodvisne spremenljivke, elementom množice B pa odvisne.

Smo dobro povedali?"

"Ste. Mislim, da niti pravi matematik ne bi našel večjih pripomb, če ni ravno poseben pikolovec.

Najbolj bistveno ste dobro opazili, in sicer:

- vhodna množica - domena,
- izhodna množica - kodomena,
- postopek, predpis f, po katerem se elementom vhodne množice priredijo elementi izhodne množice."

"Nismo kar tako, takoj smo zavohali, v čem je stvar."

"Vidim, vidim, to mi je ljubo. Ampak da ne pozabim. Za preslikavo zelo pogosto uporabljajo še en izraz, mogoče še bolj znan kot 'preslikava', in sicer *funkcija*. Nekateri matematiki sicer s funkcijo mislijo samo posebno vrsto preslikave, vendar se v to zdaj ne bomo spuščali. Važno je, da smo doumeli bistvo tega pojma."

"Izraz 'funkcija' nam je nekam znan. Kakor da smo ga že slišali."

"Bržkone. V matematiki in v drugih znanostih ga zelo pogosto uporabljajo, še posebej v fiziki. Pravimo na primer:

- pot (s) je funkcija časa (t) ali $s = f(t)$,
- obseg kroga (o) je funkcija polmera (r): $o = f(r)$,
- ploščina kvadrata (P) je funkcija njegove stranice (a): $P = f(a)$

in tako naprej.

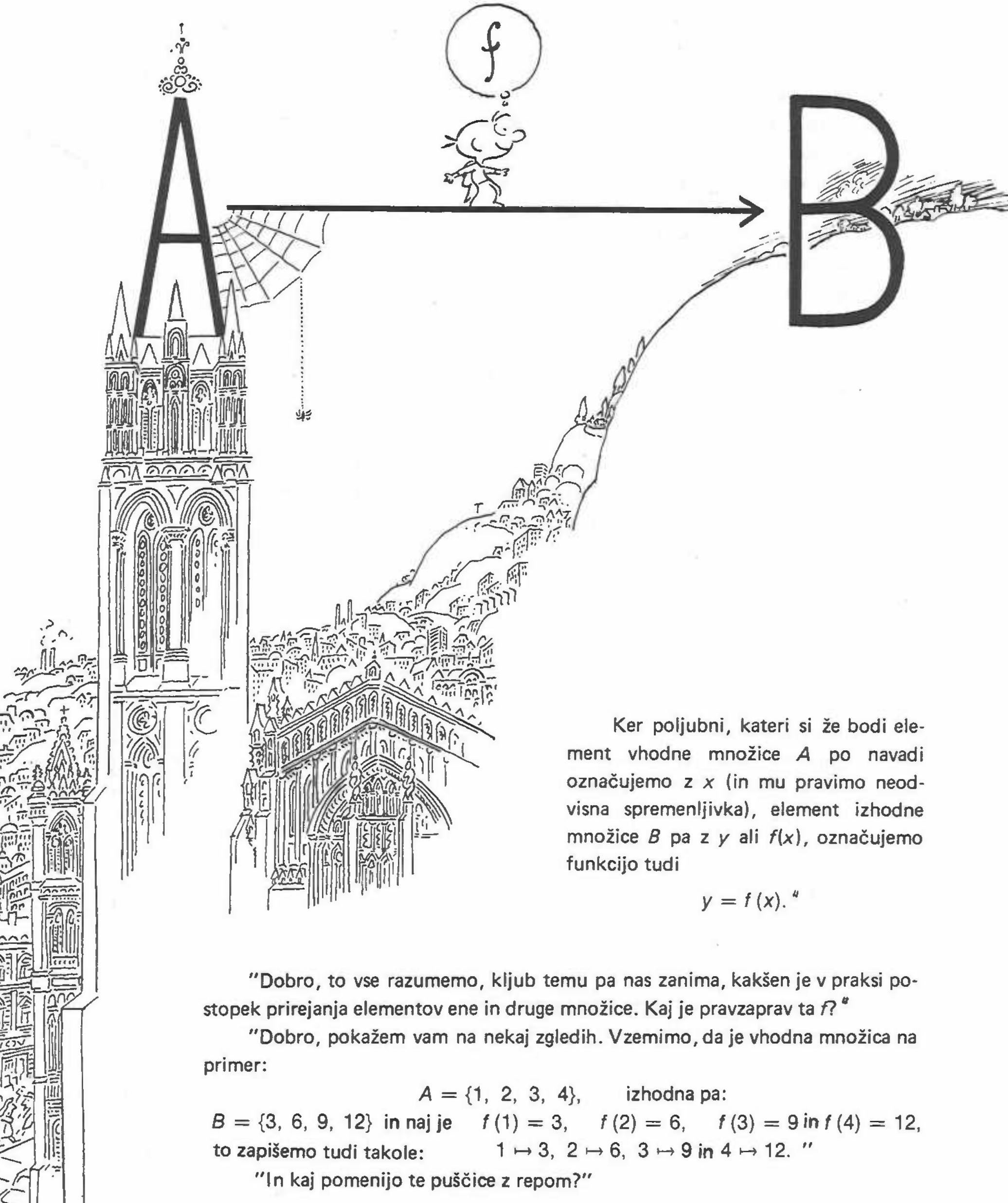
Mogoče pa ste kje srečali tudi izraze:

- linearna funkcija, kvadratna funkcija, funkcija ene spremenljivke in podobno.

V vseh teh primerih imamo seveda: vhodno množico (domeno), izhodno množico (kodomeno) in postopek f, po katerem je vsakemu elementu domene prirejen element kodomene. Simbolično se taka preslikava množice v množico po navadi zapiše:

$$A \xrightarrow{f} B$$

ali $$f : A \to B$$



Ker poljubni, kateri si že bodi element vhodne množice A po navadi označujemo z x (in mu pravimo neodvisna spremenljivka), element izhodne množice B pa z y ali $f(x)$, označujemo funkcijo tudi

$$y = f(x).\text{"}$$

"Dobro, to vse razumemo, kljub temu pa nas zanima, kakšen je v praksi postopek prirejanja elementov ene in druge množice. Kaj je pravzaprav ta f?"

"Dobro, pokažem vam na nekaj zgledih. Vzemimo, da je vhodna množica na primer:

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, izhodna pa:
$B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$ in naj je $f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(3) = 9$ in $f(4) = 12$,
to zapišemo tudi takole: $1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 6,\ 3 \mapsto 9$ in $4 \mapsto 12$. "

"In kaj pomenijo te puščice z repom?"

"S takimi puščicami nakažemo prirejanje med *elementi* množic, s puščicami brez repov pa prirejanje množic, na primer $A \to B$. Poglejte zdaj ti množici in povejte, kako smo, bolje rečeno, s katerim postopkom moremo iz elementov množice A dobiti elemente množice B. "

"Na primer z množenjem s tri."

"Tako je. V tem primeru ima postopek prirejanja pomen zahteve: 'pomnoži s tri' ali 'potroji'. Če izpustimo to zahtevo, se pravi, če jo uporabimo pri elementih množice A, dobimo elemente množice B. Matematik ta ukaz zapiše takole:

$$y = 3x$$

Za x jemlje elemente množice A (domene), vsak element pomnoži s tri in dobi elemente množice B. To lahko napišemo tudi v obliki tabele:

A		f B
$x_1 = 1$	$\times 3$	$f(1) = 3 = y_1$
$x_2 = 2$	$\times 3$	$f(2) = 6 = y_2$
$x_3 = 3$	$\times 3$	$f(3) = 9 = y_3$
$x_4 = 4$	$\times 3$	$f(4) = 12 = y_4$

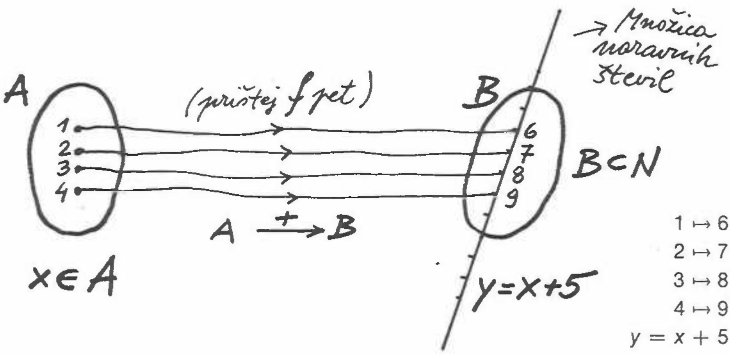
Včasih je postopek prirejanja izražen z zahtevo:

'prištej pet'; to napišemo v obliki $y = x + 5$, ali:

'pomnoži s štiri, potem pa odštej dve', torej: $y = 4x - 2$, ali: z ukazom:

'kvadriraj', torej $y = x^2$, ali s kakšno podobno zahtevo.

Kaj bomo torej dobili z zahtevo 'prištej pet', če vzamemo za vhodno množico $A = \{1, 2, 3, 4\}$ in je izhodna množica kakšna podmnožica naravnih števil?"



$1 \mapsto 6$

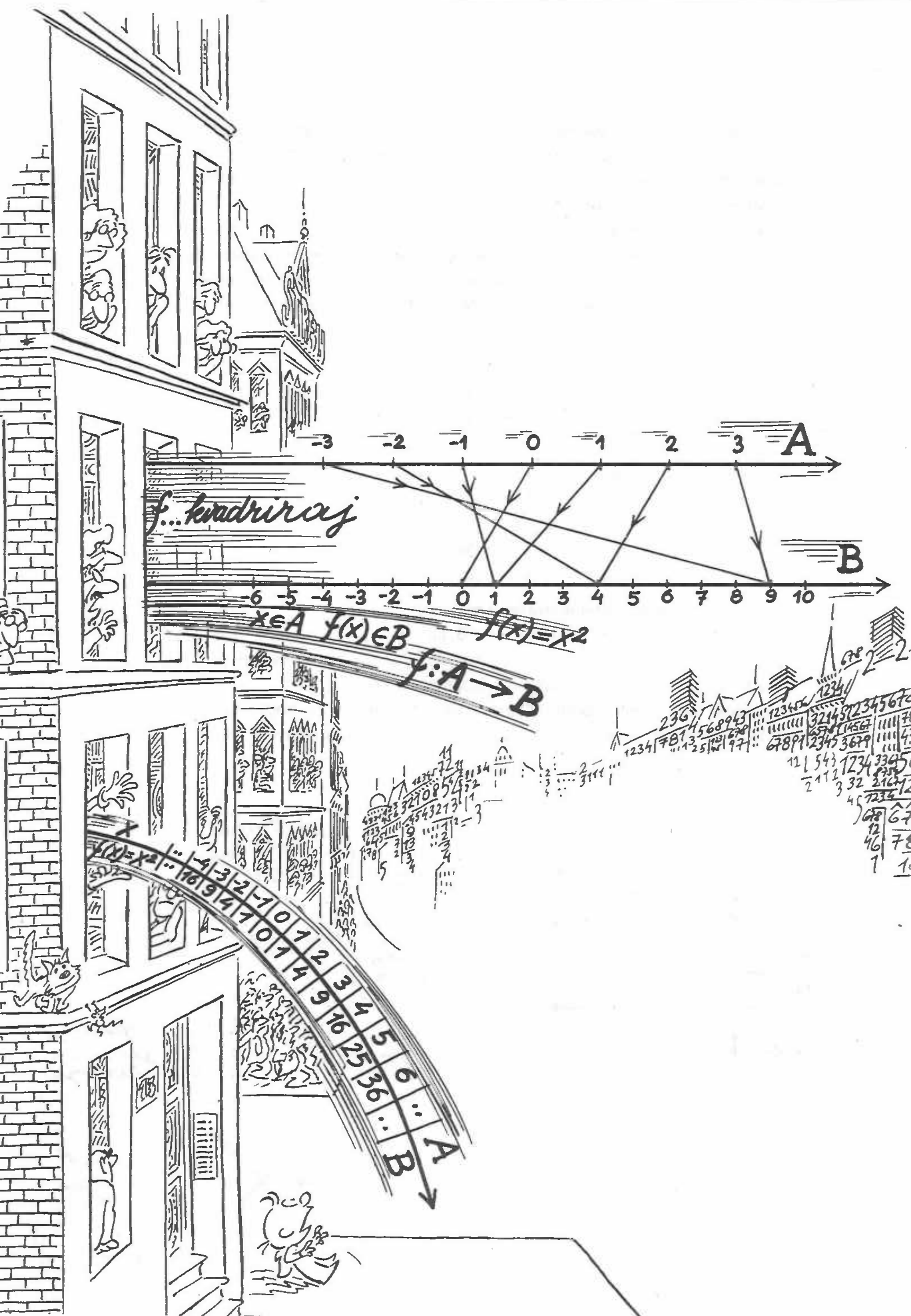
$2 \mapsto 7$

$3 \mapsto 8$

$4 \mapsto 9$

$y = x + 5$

$\cancel{\{x \in \mathbf{N} : 70 < x < 72\}}$



-3 -2 -1 0 1 2 3 A
f...kvadriraj
B
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x∈A f(x)∈B f(x)=x²
f:A→B
x
f(x)=x²
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
16 9 4 1 0 1 4 9 16 25 36
A
B

"Poglej no, poglej, kako preprosto in zanimivo. Postopek prirejanja je torej nekakšen 'ukaz', ki ga je treba izpolniti, da iz elementov vhodne množice dobimo elemente izhodne množice."

"Res, natančno tako ga lahko pojmujemo."

"Se to pravi, da so tudi računske operacije - seštevanje, množenje, kvadriranje...- pravzaprav funkcije?"

"Res je, vse to so funkcije."

"Čudno, na kaj takega bi ne bili nikoli pomislili. Pa so vhodne in izhodne množice pri teh operacijah iste?"

"Zelo zanimivo vprašanje, odgovor pa ni tako preprost. V vsakem primeru moramo namreč pregledati, kaj je vhodna in kaj izhodna množica. Pri seštevanju ali pri množenju imamo zmeraj po *dve* števili, rezultat je pa *eno* število. Tu bo torej morala imeti vhodna množica za elemente *pare* števil, izhodna množica pa bo sestavljena iz števil, vendar ne iz njihovih parov. Pri kvadriranju (ukaz: 'pomnoži število s samim seboj') pa ni tako. Vzemimo, da vhodno množico sestavljajo vsa *cela* števila. Poglejmo na stran 72, kaj smo dobili kot sliko množice, če je

$$x \in A \qquad f(x) \in B \qquad f(x) = x^2$$

$$f: A \rightarrow B$$

Mogoče bo še bolj pregledno, če vam to podamo s tabelo:

x	..	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	..	A
$f(x) = x^2$	..	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	..	B

"Je ta funkcija tudi injekcija?"

"Ni, ker so nekateri elementi iz množice B slike po dveh elementov iz A."

"Tako je, imate prav.

Zdaj vidite: ta funkcija prevaja množico celih števil..."

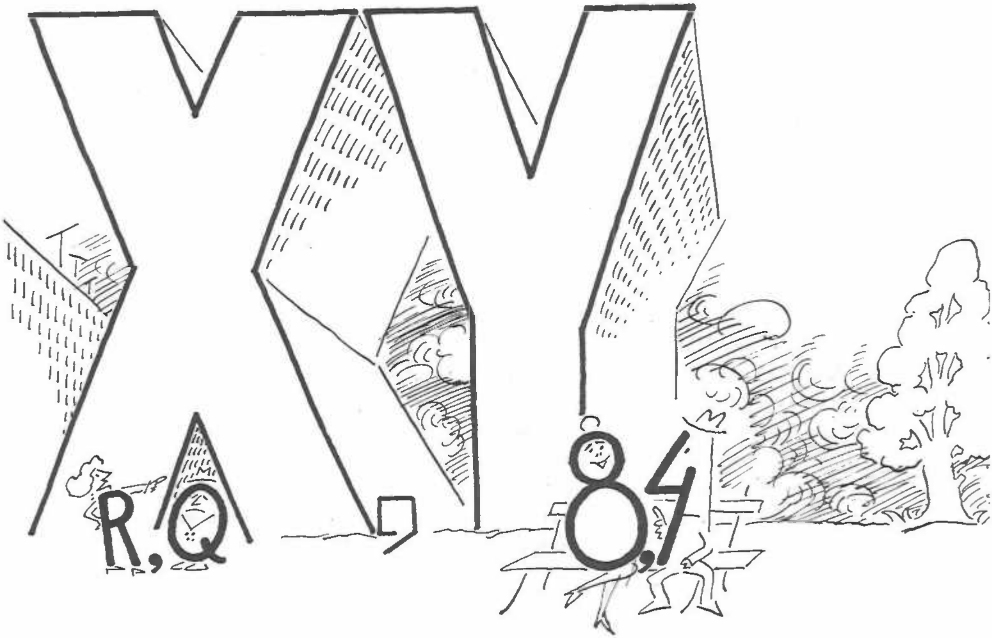
"... v množico pozitivnih števil, ki je podmnožica množice celih števil."

"Sijajno. Ali še natančneje: v podmnožico nenegativnih števil, to je, v množico pozitivnih števil obenem z ničlo. Če namreč rečemo samo 'pozitivna števila', ni vključena ničla, ker ni ne pozitivna ne negativna. V 'nenegativna števila' pa je ničla vključena. Vam je torej zdaj jasno, da moramo pri vsaki funkciji zmeraj natančno vedeti, kaj je vhodna, kaj izhodna množica in kakšen postopek uporabljamo?

Če ti trije pojmi niso jasni, rajši..."

"... pred matematiki niti omenjati funkcije."

"Tako je. Ravno to sem vam želel reči."



Par

"Poglej, poglej, kaj tudi to spada v matematiko?

Menda ni tudi par čevljev matematični pojem? Kaj šele zakonski par, ha, ha, ha."

"Vi se kar smejte, ampak par je še prav posebej pomemben pojem v matematiki, pomeni pa dvojico, množico dveh elementov, se pravi isto kakor v vsakdanjem življenju. Seveda so v matematiki obravnavani objekti, ki sestavljajo par, predvsem števila, ne pa na primer nogavice ali rokavice."

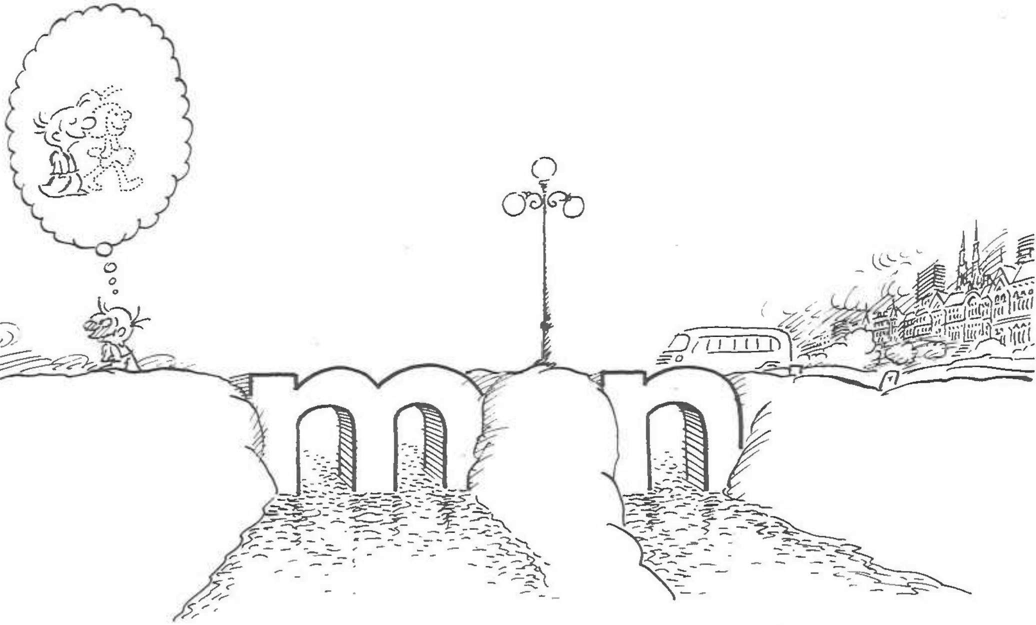
"In kaj naj s pari v matematiki?"

"Ne bodite nestrpni! Najprej se moramo malo podrobneje seznaniti s tem pojmom, pa bomo videli, kje in kako ga uporabljamo. Če torej vzamemo kateri si že bodi števili, sestavljata par števil. Pravzaprav niti ni treba, da bi bili ravno števili, lahko sta na primer besedi. Sicer pa poglejmo nekaj parov:

$$4{,}8 \qquad 7{,}5 \qquad m,\ n \qquad R,\ Q \qquad x,\ y$$

Za par je torej bistveno, da imamo dva predmeta; njun vrstni red ni pomemben. Iste pare lahko napišemo tudi takole:

$$8{,}4 \qquad 5{,}7 \qquad n,\ m \qquad Q,\ R \qquad y,\ x$$



Vendar je v matematiki pogosto zelo pomemben tudi vrstni red elementov dvojice, se pravi, kateri element pride prvi, kateri drugi. V tem primeru pravimo, da je par *urejen*. Števila najpogosteje urejamo po načelu: manjši - večji, lahko pa jih tudi drugače. Črke najpogosteje urejamo po abecedi. Urejene pare po navadi pišemo v oklepaju:

$$(2,5) \qquad (6,8) \qquad (x,\, y) \qquad (a,\, b)$$

4 Omenimo še, da je neurejen par množica dveh elementov, urejen par pa na splošno ni množica dveh elementov.

5 Kateri od parov je urejen:

a) dva robca b) dva čevlja?

Razumljivo je, da je pri urejenih parih a, b drugače od b, a, se pravi

$$(a,\ b) \neq (b,\ a), \quad \text{če je} \quad a \neq b$$

Zgled, na katerem je lepo videti uporabo urejenih parov, je koordinatni sistem, v katerem..."

"In kaj je 'koordinatni' sistem?"

"Koordinatni sistem sestoji iz dveh številskih premic, ki..."

"In kaj je 'številska premica'?"

"Kaj res ne veste ali pa se igrate na moj račun, samo da vam s takimi vprašanji hitreje mine čas?"

(Samo poglej si jih: uporabljajo isto metodo, kakor smo jo včasih mi. Učitelja kar naprej kaj sprašuješ, kakor da te zanima tisto, o čemer govori, vse to pa počneš samo zato, da mine ura in ne vpraša on tebe. In če učitelj ne odgovori, si takoj misliš: "Vidiš ga, dela se važnega, pa tudi sam ne ve." Zato jim bom na to vprašanje odgovoril, ampak na kratko.)

"Dobro, razložil vam bom, kaj je številska premica in kaj koordinatni sistem, vendar upam, da me ne boste vprašali: 'In kaj je premica?' "

(Vem, da so to razumeli kot šalo, pa niti ne slutijo, da na to vprašanje tudi jaz ne znam odgovoriti.)'

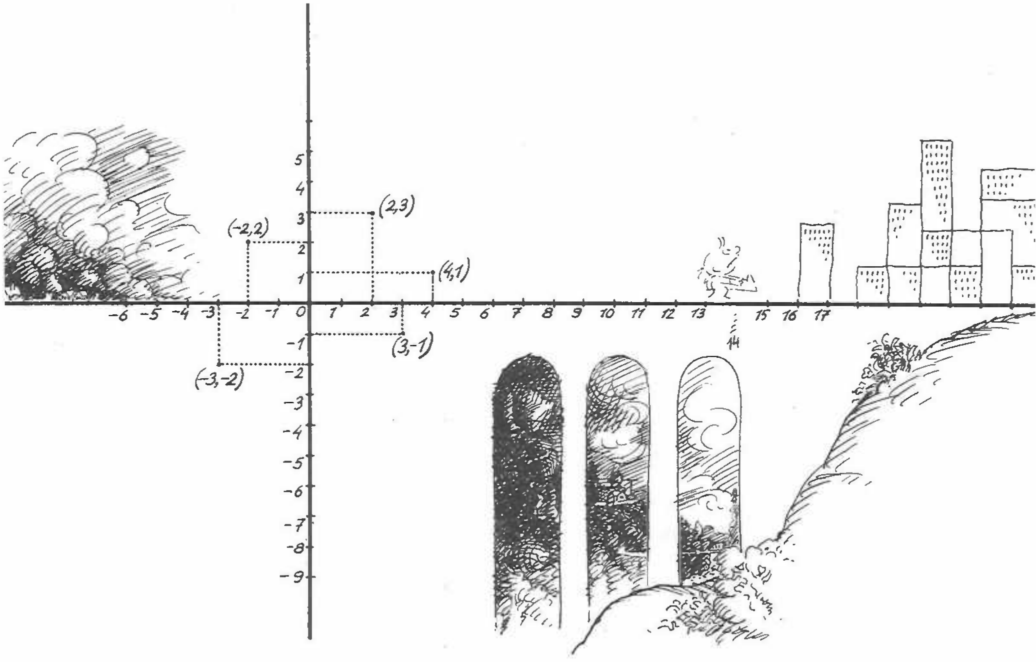
"Številska premica je premica, na kateri sta označeni dve točki:

- začetna, ki jo po navadi označujemo z *O*, in
- enotska točka (*E*).

S tema točkama je določena tudi enotska daljica *OE*. S številsko premico vzpostavljamo zvezo med točkami in števili po načelu: vsaki točki ustreza (samo) eno število in vsakemu številu je prirejena ena točka. Smer *OE* imamo za pozitivno, nji nasprotno pa za negativno. Če želimo na primer določiti točko, prirejeno številu 4 na številski premici, vzamemo enotsko daljico *OE* in jo prenesemo štirikrat v isti smeri. Točko, prirejeno številu -3, dobimo tako, da enotsko daljico prenesemo trikrat od izhodiščne točke, vendar v nasprotni smeri.

Koordinatni sistem pa sestoji iz dveh številskih premic, ki imata skupno začetno točko. Če sta taki premici med seboj pravokotni, govorimo o pravokotnem koordinatnem sistemu. Pozorno poglejte sliko in povejte, kaj se tu prireja."

"Pari števil in točke."



"Tako je. S koordinatnim sistemom vzpostavljamo povezavo med urejenimi pari števil in točkami ravnine po načelu: vsakemu urejenemu paru števil ustreza ena (in samo ena) točka ravnine in obratno..."

"... vsaki točki ravnine ustreza en in samo en urejen par števil."

"Vidite, to je izredno pomembna uporaba urejenih parov. Številska premica in koordinatni sistem sta torej nekakšen most, ki spaja števila in točke, se pravi aritmetiko in geometrijo."

"Kaj, da ima koordinatni sistem tako pomembno vlogo v matematiki?"

"Ne samo pomembno vlogo, njegovo odkritje pomeni tudi začetek novega obdobja v matematiki."

"Se pravi, da je važnejši, kakor smo prvi trenutek pomislili. In katera so na splošno najpomembnejša obdobja v zgodovini matematike?"

"Po mnenju ruskega matematika Kolmogorova,[6] enega od največjih sodobnih matematikov, je matematika od prvih začetkov do danes prehodila tele dobe:

1. Prva doba od najstarejših časov, se pravi od začetka matematike kot znanosti, do približno srede 17. stoletja, to je ravno do odkritja Descartesove[7] ko-

[6] Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903), ugleden ruski matematik.

[7] René Descartes (1596 - 1650), francoski filozof, matematik in fizik, po polatinjenem imenu (Cartesius) imenovan tudi Kartezij.

ordinatne geometrije. V tem času so se izoblikovali osnovni pojmi aritmetike in geometrije in dosegli že precej visoko stopnjo abstrakcije, posebno v delih Arhimeda, Apolonija in Evklida. Za to dobo je značilna 'statična' matematika, ker so matematiki takrat večinoma delali s stalnimi količinami in trdnimi geometrijskimi liki.

2. Druga doba sega od Descartesovih odkritij koordinat in spremenljivih količin pa do približno srede 19. stoletja. V tem času je prišla v celoti do veljave spremenljiva matematična količina in sta se razvila pojma funkcije in geometrijske transformacije.

3. Za tretjo dobo, ki se začenja v šestdesetih letih 19. stoletja in traja do tridesetih let 20. stoletja, je bistvena vloga Cantorjeve teorije množic in matematične logike. Čutiti je tudi pomen struktur in matematičnih prostorov, ki povezujejo razna področja matematike.

4. Zadnja, današnja doba traja kakšnih štirideset let in se je začela, po Kolmogorovu, z izdelavo hitrih računalnikov, ki ji dajejo tudi pečat. V tej dobi je posebno pomemben razvoj abstraktne algebre, topologije, matematične logike in sploh 'abstraktnih' področij matematike. Vendar je prav za ta čas značilno, da se čedalje bolj zmanjšuje razlika med teoretično in uporabno matematiko, saj je mogoče tudi najbolj abstraktne matematične teorije, predvsem zaradi elekronskih računalnikov, konkretno uporabiti v praktičnem reševanju raznih tehničnih in praktičnih problemov. Eno takih vprašanj je na primer izračunavanje poti umetnih vesoljskih teles. V tej dobi se posebno plodno uveljavlja prepletanje številnih matematičnih panog. Ravno zdaj se je popolnoma osamosvojila tudi zgodovina matematike kot posebna panoga. Vendar pustimo zgodovinska razmišljanja in se vrnimo k množicam. Seznanimo se še s konkretno uporabo urejenih parov pri množenju množic."

Premi produkt množic

"Že spet nekakšen čuden naslov. Kaj ni zadosti 'produkt množic'? Izraz 'premi' namreč ne obeta nič dobrega. Skoraj gotovo se za njim skriva kakšna zvijača. Joj, kako matematiki radi komplicirajo.

Lahko rečemo tudi: Neposredni, direktni ali kartezični produkt...

Vem, da približno tako premišljujete, odkar ste prebrali ta naslov.

Če vam ni všeč izraz 'premi', ga lahko zamenjamo z izrazom 'neposredni' ali 'direktni' ali 'kartezični' produkt. To je vse, kar moremo zamenjati v naslovu, ne da bi se pomen kaj spremenil."

"Če je tako, hvala lepa za tako zamenjavo. Eno in drugo nam je enako nejasno. Kaj je torej ta neposredni, direktni, premi, kartezični produkt?" (Ha, ha, ha, ta izraz nam je pa res všeč.)

"To vam bom razložil na nekaj zgledih, potem pa ga bomo natančno definirali." (Nisem sicer prepričan, da je to najboljši način. Ali ne bi kazalo začeti pri definiciji pojma in šele potem navajati zglede? Eni trdijo eno, drugi drugo, meni osebno pa se zdi, da tisti, ki razume, razume tako ali tako, kdor pa ne razume - za tistega je tako vse stran vrženo.)

"Vzemimo torej poljubni množici A in B. Zaradi preprostosti - samo zato, da nam ni treba ne vem koliko pisati - vzemimo množici z manjšim številom elementov. Naj ima na primer množica A krožec in zvezdico, množica B trikotnik, četverokotnik in črtico. Torej

$$A = \{\bigcirc, \ast\} \qquad B = \{\triangle, \square, -\}$$

Napravimo zdaj iz elementov teh množic urejene pare, tako da je prvi element para iz prve množice, drugi pa iz drugega. Takole: s krožcem na prvem mestu lahko napravimo tri pare, in sicer:

$$(\bigcirc, \triangle), \quad (\bigcirc, \square), \quad (\bigcirc, -)$$

ravno tako z zvezdico na prvem mestu:

$$(\ast, \triangle), \quad (\ast, \square), \quad (\ast, -)$$

Napravimo zdaj novo *množico*, katere *elementi* so urejeni pari:

$$\{(\bigcirc, \triangle), (\bigcirc, \square), (\bigcirc, -), (\ast, \triangle), (\ast, \square), (\ast, -)\} = A \times B$$

Tako dobljeno množico imenujemo direktni produkt množic A in B in ga označimo

$$A \times B. \text{"}$$

"In to je vse?"

"Vse."

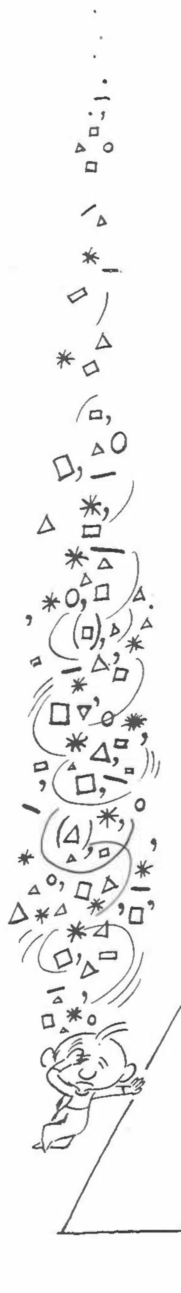
"Potem niti ni tako grozno, kakor smo mislili. Glede na tak naslov."

"Seveda ni. Napravite zdaj sami kartezični produkt množic M in N, če je: $M = \{$svinčnik, pero$\}$ $N = \{$kreda, goba$\}$."

"Saj to je igračkanje. Prosim:

$M \times N = \{$(svinčnik, kreda), (svinčnik, goba), (pero, kreda), (pero, goba)$\}$."

"In kako se bo glasil produkt $N \times M$?"



"Takole:

$N \times M = \{$(kreda, svinčnik), (kreda, pero), (goba, svinčnik), (goba, pero)$\}$."

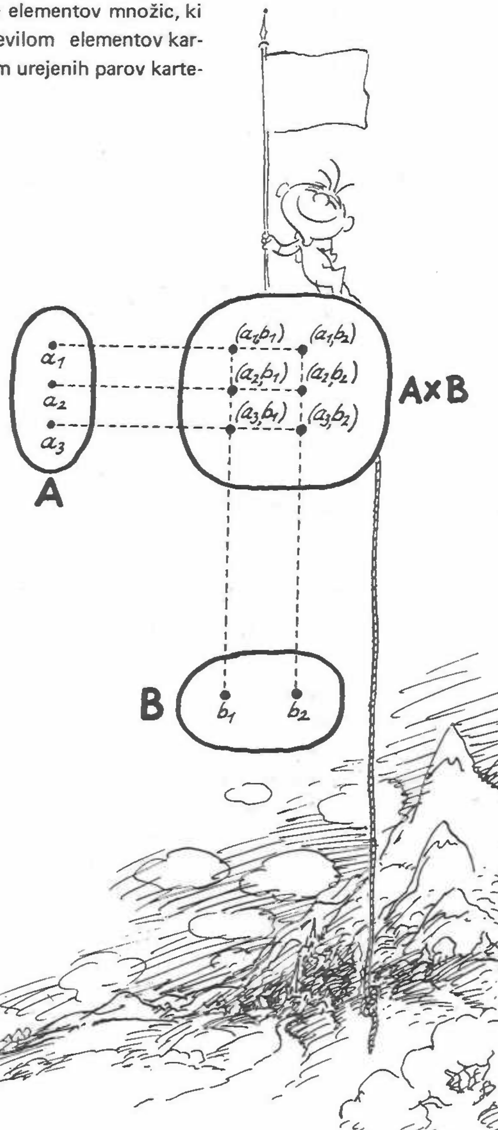
"Res je. Zapišite si zdaj nekaj vprašanj in prihodnjič mi odgovorite nanje:

6 Sta omenjeni množici $M \times N$ in $N \times M$ enaki? Pojasnite.

7 Sta množici $M \times N$ in $N \times M$ ekvipolentni? Pojasnite.

8 Določite množici $M \times M$ in $N \times N$.

9 Kakšna je zveza med številoma elementov množic, ki sestavljata kartezični produkt, in številom elementov kartezičnega produkta, se pravi številom urejenih parov kartezičnega produkta?"



"Dobro, če hočete, lahko odgovorite šele po poletnih počitnicah, samo ne prihajajte na tekmovanje iz matematike, dokler ne odgovorite nanje."

"Je tudi kartezični produkt mogoče narisati?"

"Mogoče, če ravno hočete. Presenečen sem samo, da niste tega že prej vprašali."

(Seveda, še na misel jim ne pride vprašanje, kako strogo matematično definiramo ta produkt, risanje jih pa zanima.)

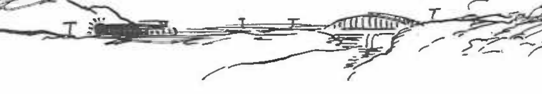
"No, če na primer vzamemo množici:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \text{in}$$
$$B = \{b_1, b_2\}$$

je njun produkt

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2) \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1) \\ (a_3, b_2)\}$$

ki ga lahko pokažemo takole:



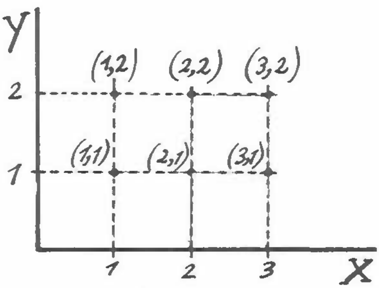
Kartezični produkt množic, katerega elementi so števila, po navadi podamo z mrežo v koordinatnem sistemu. Za množici

$$X = \{1, 2, 3\} \quad \text{in} \quad Y = \{1, 2\}$$

bo na primer

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

ali

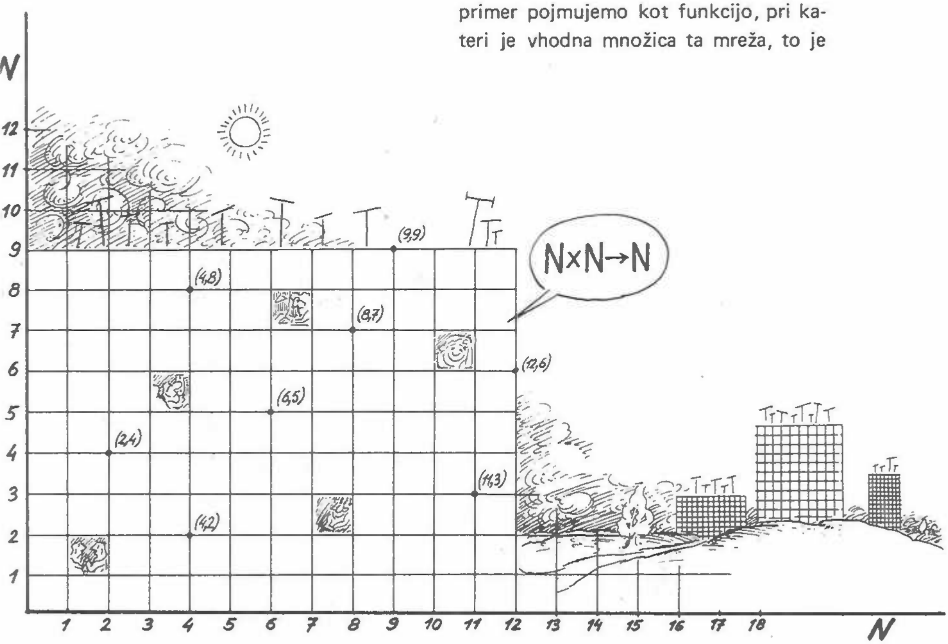


Posebno pomemben in zanimiv je produkt **N** x **N**, pri katerem je **N** znamenje za množico naravnih števil, torej

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Seveda ima neskončno veliko urejenih parov in jo (deloma) lahko pokažemo tudi s pravokotno mrežo. Zamislimo si *kateri si že bodi* par naravnih števil, pa ga bomo našli v taki mreži, če gremo le zadosti daleč.

Če imamo pred očmi ravno mrežo, v kateri so vsi mogoči pari naravnih števil, nam je jasno, da lahko množenje na primer pojmujemo kot funkcijo, pri kateri je vhodna množica ta mreža, to je



množica **N** x **N**, izhodna množica pa množica naravnih števil **N**, se pravi, da je množenje funkcija z **N** x **N** v **N**. Lahko rečemo, da je vsakemu urejenemu paru $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ prirejeno popolnoma določeno naravno število $a \cdot b$, ki mu pravimo zmnožek ali produkt števil a in b.

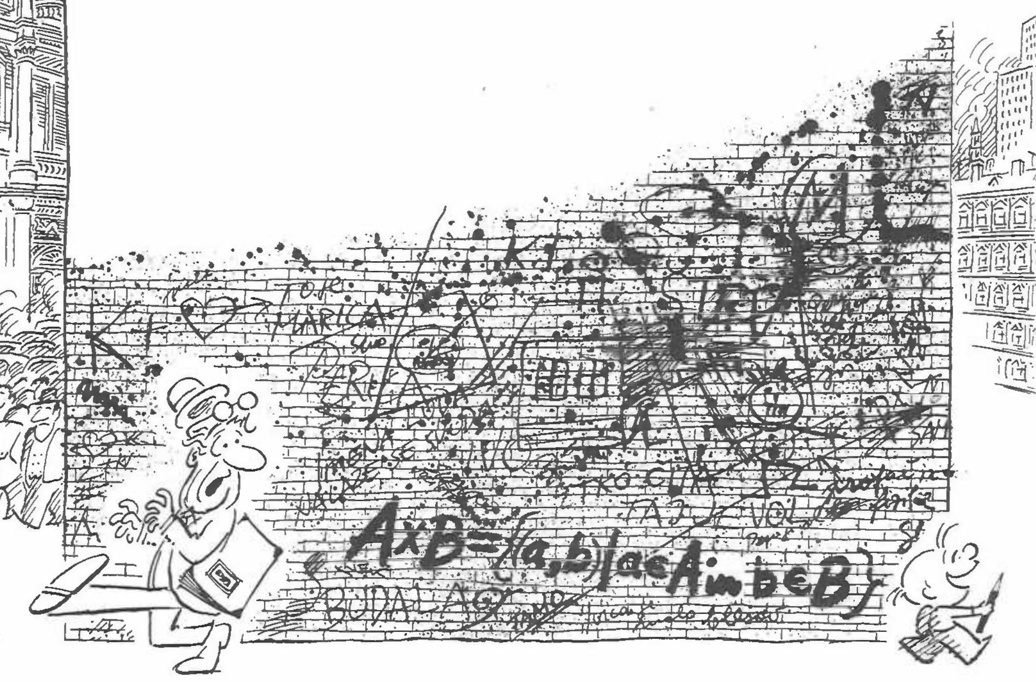
Torej je z $(a, b) \mapsto a \cdot b$ dana funkcija z **N** x **N** v **N**. Se pravi, da na primer zmnožek $8 \cdot 7$ pojmujemo kot sliko, prirejeno elementu (8, 7) množice **N** x **N**, to je pa 56 iz množice **N**.

Mislim, da je že čas, da spoznamo tudi definicijo premega produkta množic. Ta se torej glasi: Premi produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov (a, b), pri čemer je a element množice A in b element množice B. Ampak če bi vas kdaj kakšen matematik vprašal:

'Kaj je premi produkt množic?', vzemite svinčnik in papir in mu zapišite tole:

$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A \ ^{\text{in}}\ b \in B\}$$

in pri tem spregovorite (pa sami pri sebi): premi produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov (a, b) z lastnostjo, da je a element množice A in b element množice B."



Množice in števila

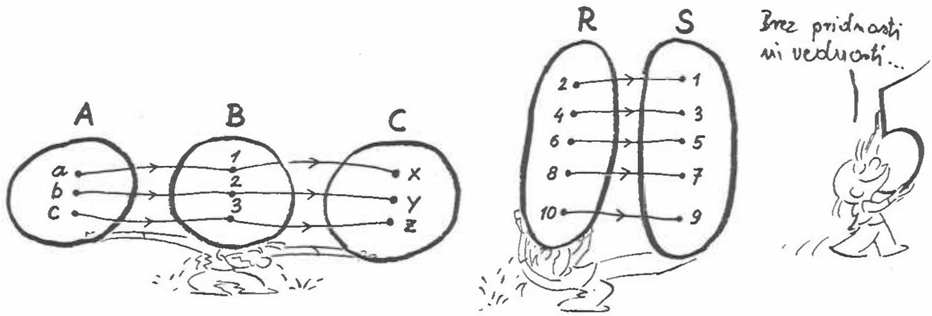
"Je kakšna zveza med množicami in števili?"

"Je, kaj bi ne bila. Se spominjate ekvipolentnih množic?"

"Kaj bi se jih ne. To so množice, pri katerih je mogoče prirejanje po eden ali, kako se že reče, bi... bi... aha, že vem, bijektivna preslikava."

"Navedite mi za zgled nekaj ekvipolentnih množic."

"Prosim, to so na primer takele množice



"Drži. Pa jih res niste pozabili. Torej, ekvipolentne množice imajo nekaj skupnega. Pravimo, da imajo isto polenco ali isto glavno ali kardinalno število."

"Kaj imamo še kakšna druga števila poleg glavnih?"

"Imamo. Ločimo namreč glavna ali kardinalna in vrstilna ali ordinalna števila. Glavno število nam odgovarja na vprašanje: Koliko je česa? Vrstilna števila odgovarjajo na vprašanje: Kateri po vrsti? Ena, pet, deset, sto pet... so glavna števila, prvi, peti, deseti, stopeti so vrstilna števila. Katera so potemtakem glavna ali kardinalna števila naših množic?"

"To sta tri in pet, jasno."

"Res je. Poglejmo samo še, kako jih označujemo. Če imamo množico S, označujemo njeno glavno število card S ali Kard S ali samo $k(S)$ ali $k\,S$. V našem primeru bo torej

$$k(A) = k(B) = k(C) = 3$$

in

$$k(R) = k(S) = 5$$

tole se lahko izračuna takole

1010011

$$1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$
$$64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 83$$

vidite, to je stran 83

Kardinalno število vsake enoelementne množice je 1.
Kardinalno število vsake dvoelementne množice je 2.
Kardinalno število vsake trielementne množice je 3.
....
Povejte mi, kolikšno je kardinalno število - prazne množice."
"To je nič."
"In kako naj to zapišemo?"
"Takole:

$$k\,\emptyset = 0.$$ "

"Drži. Vidite, kako nam je tudi tukaj prazna množica koristna, ker smo z njo dobili ničlo. Vam je zdaj jasen pomen izreka: Naravna števila so kardinalna števila končnih množic."

"Je. To pomeni, da vsaki končni množici pripada določeno naravno število."

"Tako je , uganili ste."

"Nismo 'uganili', temveč vemo, za kaj gre."

"Oprostite. Ne smete mi zameriti."

POVEZAVE MED OPERACIJAMI Z MNOŽICAMI IN OPERACIJAMI S ŠTEVILI

"Če smo doumeli zvezo med množicami in naravnimi števili, nam tudi ne bo težko doumeti povezave med operacijami z množicami in operacijami s števili, to je, povezave med unijo in seštevanjem, razliko množic in odštevanjem števil, premim produktom množic in množenjem števil."

"Tudi nam se je zdelo, da mora biti kakšna povezava med temi operacijami, samo nam še ni popolnoma jasno, kakšna..."

"To je zelo preprosto. Sicer pa boste takoj tudi sami videli. Začnimo z unijo množic in s seštevanjem števil. Če imamo dve kateri si že bodi končni množici A in B, se lahko pokaže, da je v splošnem primeru

$$k\,(A \cup B) + k\,(A \cap B) = k\,(A) + k\,(B) \tag{1}$$

ali z besedami: Vsota kardinalnega števila unije množic A in B in kardinalnega števila preseka množic A in B je enaka vsoti kardinalnih števil množic A in B."

"To pa le ni tako preprosto. In kako je v konkretnem primeru?"

"Poglejte: vzemimo, da imamo množici

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \qquad \text{in}$$
$$B = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

Zdaj določite sami unijo in presek teh množic, pa tudi kardinalna števila množic A in B ter unije in preseka. Bo šlo?"

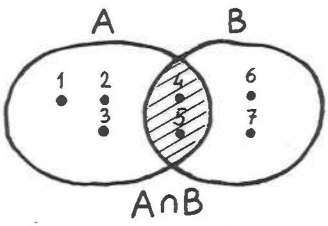
"Kaj bi ne šlo! Kar po vrsti:

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$
$$A \cap B = \{4,\ 5\}$$

kardinalna števila so pa

$$k\,(A) = 5, \quad k\,(B) = 4$$
$$k\,(A \cup B) = 7 \quad \text{in} \quad k\,(A \cap B) = 2$$


Če je treba, lahko ti množici tudi narišemo."



"Zdaj pa se samo še prepričajte, ali velja za dani množici povezava (1)."
"In kako naj to naredimo?"
"Tako da v enakost (1) vpišete dobljena kardinalna števila."
"Dobro, poskusimo:

$$k(A \cup B) + k(A \cap B) = k(A) + k(B)$$

ali

$$7 + 2 = 5 + 4$$

To bo gotovo držalo, saj smo dobili, da je 9 = 9."

"Če bi namesto danih množic vzeli kateri si že bodi drugi končni množici A in B, jima določili unijo in presek in njihova kardinalna števila, bi videli, da je navedena enakost zmeraj resnična. To je torej povezava med unijo in seštevanjem.

Posebno pomembno in zanimivo pa je, kadar množici A in B nimata skupnih elementov, če je njun presek prazen. Če je namreč $A \cap B = \emptyset$, potem je, kakor vemo, kardinalno število preseka množic nič, to je iz

$$A \cap B = \emptyset \qquad \text{sledi} \qquad k(A \cap B) = k\,\emptyset = 0$$

tako da enakost (1) dobi obliko

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) \tag{2}$$

Po tem lahko sklepamo: Če sta A in B množici brez skupnih elementov, je kardinalno število unije množic A in B enako vsoti kardinalnih števil množic A in B. Se pravi, da je enakost (2) poseben primer enakosti (1). Poskušajte sami navesti kakšen zgled za primer, kadar sta množici brez skupnih elementov."

"Dobro. Vzemimo, da sta množici: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ in $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Njuna unija je $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, kardinalna števila pa $k(A) = 4$, $k(B) = 5$ in $k(A \cup B) = 9$. Zdaj moramo samo še ugotoviti, ali je $k(A \cup B) =$

$= k(A) + k(B)$. Če vstavimo $k(A \cup B) = 9$, $k(A) = 4$ in $k(B) = 5$, dobimo $9 = 4 + 5$, to pa drži. Se pravi, da je enakost

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B)$$

prava."

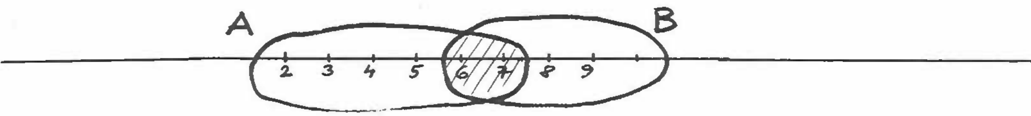
"Prav gotovo, čeprav bi ne smeli sklepati po tem primeru. Preglejmo zdaj povezavo med razliko množic in odštevanjem števil. Če imamo kateri si že bodi končni množici A in B, moremo pokazati, da na splošno velja enakost

$$k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B) \tag{3}$$

ali: kardinalno število razlike množic A in B je enako razliki kardinalnega števila množice A in kardinalnega števila preseka množic A in B. Navedemo takoj tudi zgled: Naj sta dani množici

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{in} \quad B = \{6, 7, 8, 9\}$$

Pokažimo množici tudi z risbo številske premice, takole:



Določimo razliko in presek teh množic:

$$A \setminus B = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$A \cap B = \{6, 7\}$$

Kolikšna so kardinalna števila teh množic?"

"To takoj lahko vidimo:

$$k(A) = 6, \quad k(B) = 4, \quad k(A \setminus B) = 4 \quad \text{in} \quad k(A \cap B) = 2$$

"In kaj bomo zdaj napravili?"

"Preverili, ali velja za ti množici enakost (3)."

Preverjam...

"Tako je. Preverite torej!"

"Napisali bomo najprej enakost, potem pa ustrezna števila. Takole:

$k(A \setminus B) = k(A) - k(A$

$4 = 6 - 2$.

$$k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B) \quad \text{ali}$$
$$4 = 6 - 2$$

Res je, drži."

Res drži...

"Menda niste mislili, da sem vas osleparil. Vendar tudi tukaj poglejmo poseben primer, zelo pomemben za razumevanje odnosov med razliko množic in odštevanjem števil. Vzemimo, da je množica B podmnožica množice A, da je torej $B \subseteq A$. Kolikšen je v tem primeru presek množic A in B, se pravi $A \cap B$?"

"Takoj (samo da se spomnimo, kaj je pravzaprav presek množic; presek je... presek je množica, sestavljena iz elementov ene in druge množice, in če je množica B zajeta v množici A, se pravi, da so vsi elementi B obenem tudi elementi A, torej...), če je $B \subseteq A$, je $A \cap B = B$."

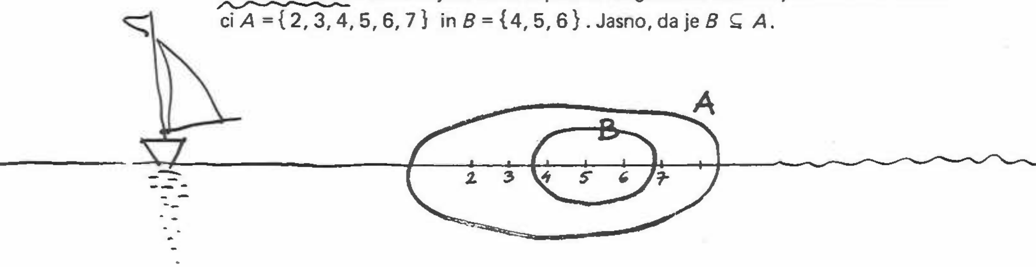
"Tako je. Trajalo je pravzaprav precej časa, preden ste se spomnili, vendar vidim, da veste, kaj je presek množic. Če je torej $A \cap B = B$, je tudi $k(A \cap B) = k(B)$. Kako se bo v tem primeru glasila enakost

$$k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B)\text{? "}$$

"Ta enakost se bo glasila

$$k(A \setminus B) = k(A) - k(B).\text{ "}$$

"To si dobro zapomnite. Če sta A in B taki končni množici, da je $B \subseteq A$, potem je kardinalno število razlike množic A in B enako razliki kardinalnih števil množic A in B. Ilustrirajmo tudi ta primer z zgledom. Recimo, da sta dani množici $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ in $B = \{4, 5, 6\}$. Jasno, da je $B \subseteq A$.



Kolikšna je razlika množic A in B?"

"Razlika je $A \setminus B = \{2, 3, 7\}$."

" In zdaj se lahko prepričamo, ali velja za ti množici enakost $k(A \setminus B) = k(A) - k(B)$. Določite najprej kardinalna števila."

"Dobro: $k(A \setminus B) = 3$, $k(A) = 6$, $k(B) = 3$. Če v $k(A \setminus B) = k(A) - k(B)$ vstavimo ta števila, dobimo $3 = 6 - 3$, to pa je res.

Iz teh zgledov lahko sklepamo, da so operacije unije in razlike med množicami splošnejše, širše od računskih operacij seštevanja in odštevanja števil. Lahko bi rekli, da se samo v posebnih primerih, ko so izpolnjeni kakšni posebni pogoji ($A \cap B = \emptyset$), unija skrči na seštevanje, razlika pa na odštevanje ($B \subseteq A$). Ravno ta splošnost in širina množic jim dajeta tudi tolikšno pomembnost v sodobni matematiki. Sicer so tudi elementi množic lahko števila, pa tudi številni drugi predmeti (točke, premice, vektorji, funkcije, ...). To je zelo lepo povedal velik matematik N. N. Luzin[8] z besedami:

'Elementi množic so lahko vsi mogoči predmeti: besede, atomi, števila, funkcije, točke, koti in tako naprej. Zato je od samega začetka jasna izredna širina teorije množic in njena uporaba na številnih področjih znanja (v matematiki, mehaniki, fiziki, ...).' "

"Dobro, doumeli smo, v kakšni zvezi sta unija in seštevanje kakor tudi razlika in odštevanje. Kaj pa je s premim produktom množic in množenjem števil? V kakšnem razmerju sta ta dva?"

"Ravno sem vam hotel to pokazati. Poglejmo najprej nekaj zgledov. Vzemimo množici:

$$X = \{1,\ 2,\ 3\} \quad \text{in} \quad Y = \{1,\ 2\}$$

Napravimo njun premi produkt

$$X \times Y = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)\}$$

In zdaj poglejmo, kaj je s kardinalnimi števili. Očitno je

$$k\,(X) = 3, \quad k\,(Y) = 2 \quad \text{in} \quad k\,(X \times Y) = 6$$

Tu bo

$$k\,(X) \cdot k\,(Y) = k\,(X \times Y)$$

ker je

$$3 \cdot 2 = 6$$

Ali za množici:

$$A = \{a,\ b,\ c\} \quad \text{in} \quad B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

$$A \times B = \{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (a,\ 3),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (b,\ 3),\ (c,\ 1),\ (c,\ 2),\ (c,\ 3)\}$$

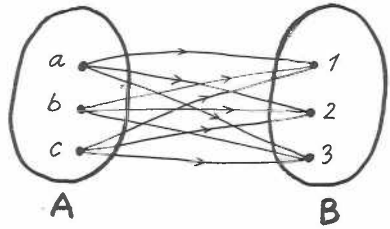
Kardinalna števila so: $k(A) = 3$, $k(B) = 3$, $k(A \times B) = 9$. Torej je tudi tukaj

$$k\,(A) \cdot k\,(B) = k\,(A \times B)$$

ali

$$3 \cdot 3 = 9$$

Pokažimo ta zmnožek še z risbo:



[8]) Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883—1950), ruski matematik.

Ponavljam

| . z lastnostjo, da je...

$\in$ pripadnost množici...

$\notin$ ni element množice...

$\subseteq$ podmnožica

$\cap$ ...presek množic...

$\emptyset$ ...prazna množica..

$\cup$ ...unija...

\ ...razlika...

$\cong$ ekvivalentnost...

Takoj vidimo, da je število puščic enako kardinalnemu številu premega produkta, zato že s preštevanjem puščic lahko ugotovimo število, ki pripada temu produktu množic. Kar smo ugotovili za naša dva zgleda, velja za kateri si že bodi množici, tako da na splošno lahko vzamemo kot pravilo: Če sta $k(A)$ in $k(B)$ kardinalni števili množic A in B, zmnožek teh števil definiramo kot kardinalno število premega produkta $A \times B$, to je

$$k(A \times B) = k(A) \cdot k(B). \text{ "}$$

"Uh, to množenje je pa zelo zapleteno."

"Priznam, da ni tako preprosto, vendar je v načelu popolnoma pravilno."

"Se pravi, da bi morali, če bi želeli tako pomnožiti na primer 39 s 67, napraviti premi produkt množic, od katerih ima ena 39 elementov, druga pa 67, potem pa najti število urejenih dvojic tega produkta, se pravi njegovo kardinalno število?"

"Kajpada, natanko tako. Lahko pa bi seveda tudi narisali množici z 39 in 67 elementi, potegnili puščice, ki pridružujejo vse elemente ene množice elementom druge, in - jih prešteli."

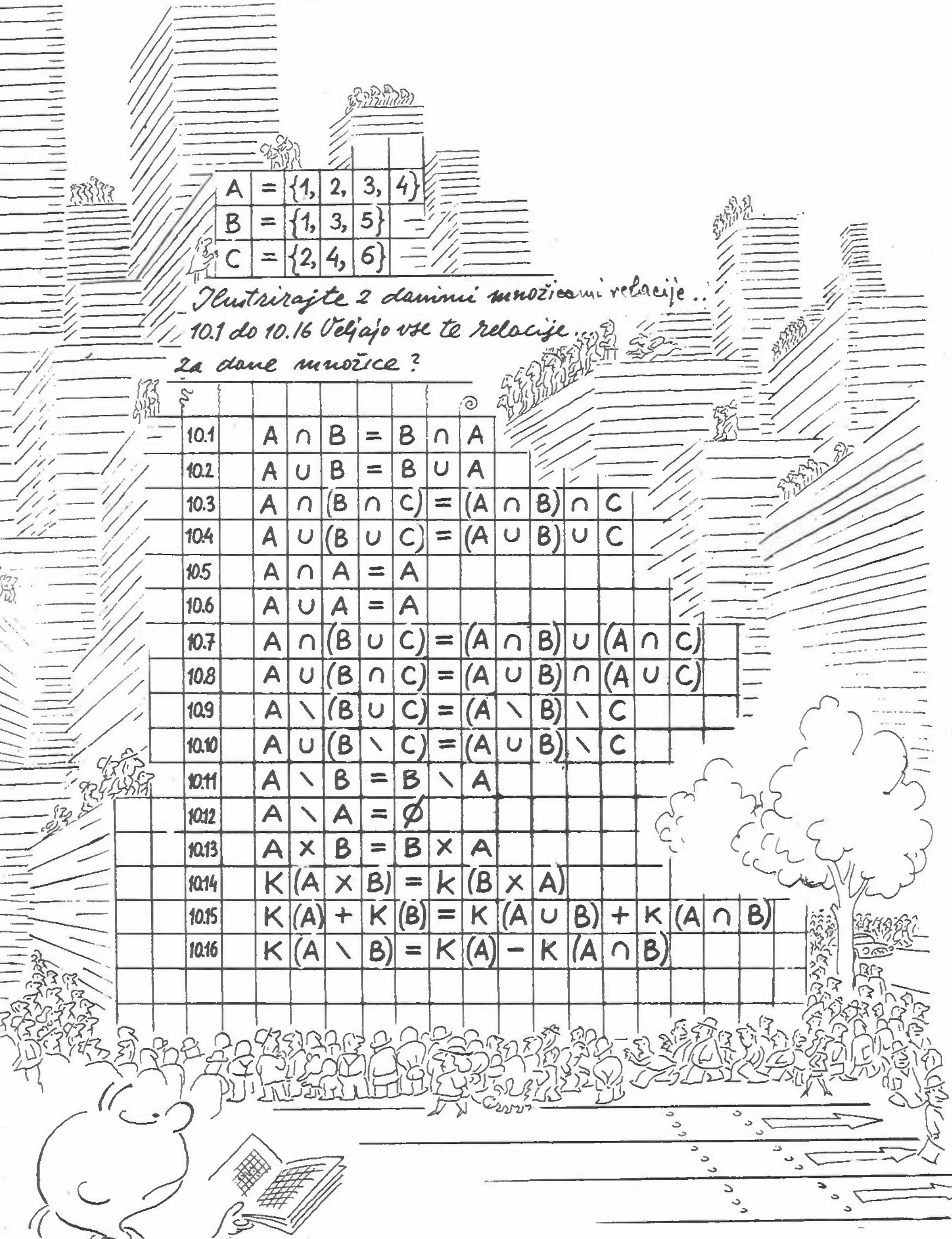
"Hvala lepa za tako določanje zmnožka, rajši ostanemo pri navadnem množenju števil."

"Saj vam sploh nisem rekel, da tako množite števila. Samo pokazal sem vam, kako bi pravzaprav lahko množili s premim produktom množic. Važno je, da to poznate kot načelo, premi produkt množic pa nam sploh ne služi za to, da bi z njim množili števila. Ima pomembnejše naloge v teoriji množic."

"Če je tako, potem je v redu. Smo se že ustrašili, da bomo odslej morali števila množiti s preštevanjem urejenih dvojic premega produkta množic."

"Če nimate drugega dela, tudi to ni slabo - za vajo. Če se želite zdaj tudi sami prepričati, kaj ste pozabili o operacijah množic, lahko naredite takole:

10 Naj so dane množice:



$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

Ilustrirajte z danimi množicami relacije 10.1 do 10.16. Veljajo vse te relacije za dane množice?

10.1 $A \cap B = B \cap A$

10.2 $A \cup B = B \cup A$

10.3 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

10.4 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

10.5 $A \cap A = A$

10.6 $A \cup A = A$

10.7 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

10.8 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

10.9 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

10.10 $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

10.11 $A \setminus B = B \setminus A$

10.12 $A \setminus A = \emptyset$

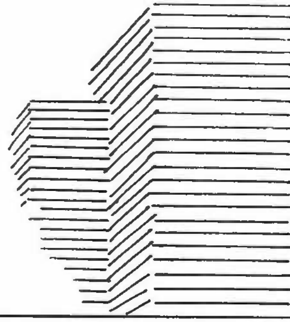
10.13 $A \times B = B \times A$

10.14 $K(A \times B) = k(B \times A)$

10.15 $K(A) + K(B) = K(A \cup B) + K(A \cap B)$

10.16 $K(A \setminus B) = K(A) - K(A \cap B)$

11 Če so a, b, c naravna števila, ugotovite, ali za katera koli števila veljajo enakosti 11.1 do 11.12. (Vzemite na primer $a = 2, b = 3, c = 4$ in tako naprej.)



11·1 $a \cdot b = b \cdot a$

11·2 $a + b = b + a$

11·3 $a(bc) = (ab)c$

11·4 $a + (b + c) = (a + b) + c$

11·5 $a \cdot a = a$

11·6 $a + a = a$

11·7 $a(b + c) = (ab) + (ac)$

11·8 $a + (bc) = (a + b)(a + c)$

11·9 $a - (b + c) = (a - b) - c$

11·10 $a + (b - c) = (a + b) - c$

11·11 $a - b = b - a$

11·12 $a - a = 0$

Primerjajte zveze 10.1 do 10,13. (ki veljajo med množicami) z ustreznimi enakostmi 11.1. do 11.12. med števili in pojasnite, kako iz prvih dobimo druge."

UREJENE IN DOBRO UREJENE MNOŽICE

"Še dobro, da smo vsaj nekaj zvedeli o povezavi med množicami in števili, pa tudi o operacijah z množicami in števili. Zdaj nam je vendarle malo jasnejša vloga množic. Ni pa nam jasno, kaj pomeni naslov. Kaj se tudi množice urejajo? In imamo tudi urejene in neurejene. Ha, ha, ha..."

"Ni čisto tako, vendar o nekaterih množicah rečemo, da so urejene, o drugih, da so dobro urejene. Pravimo, da je množica urejena, če ima določeno in znano razvrstitev elementov, se pravi, da o katerih koli dveh elementih množice vemo, kateri pride pred katerega. Taka je na primer množica črk iz abecede

$$\{a, b, c, č, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, š, t, u, v, z, ž\}$$

Če vzamemo katerí koli črki abecede, na primer e in k, vemo, da črka e pride pred k. To je torej lastnost urejene množice. Tudi množica mesecev v letu je urejena, ravno tako pa tudi množica naravnih števil $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$. Vendar matematiki ločijo urejeno množico od dobro urejene."

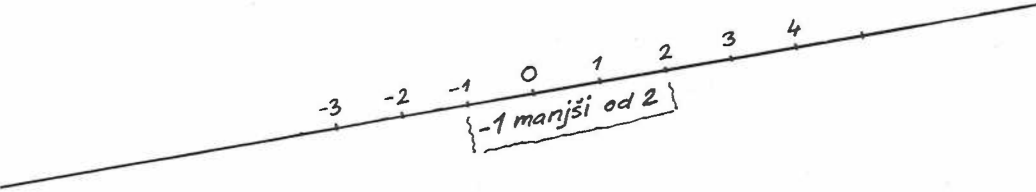
"In kakšna je dobro urejena množica?"

"Pravzaprav sta že množici, ki sem vam ju navedel, zgleda dobro urejenih množic, ampak da boste videli razliko med urejeno in dobro urejeno množico, preglejte na primer tole množico, to je, množico celih števil

$$\{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

ki jo lahko pokažemo tudi na številski premici.

Je ta množica urejena?"



"Je, urejena."

"Zakaj?"

"Zato, ker za vsaki števili lahko določimo, katero od njiju je manjše, katero večje."

"Tako je. Zmeraj je od dveh števil na tej premici večje na desni. Množica je torej urejena. Vendar se v nečem bistveno loči na primer od množice naravnih števil. Ste opazili, v čem je razlika?"

"Razlika? Paa, ne vemo, kateri je njen prvi element."

"To ste dobro opazili. Ravno v tem je važna razlika teh množic. Zato pravimo, da je taka množica urejena, ni pa tudi dobro urejena. Množica je namreč dobro urejena, če ima *vsaka* njena podmnožica, ki ni prazna, svoj prvi ali začetni element. Vam je zdaj jasna razlika med urejeno in dobro urejeno množico?"

"Je, jasna je, samo ni nam jasno, čemu služijo te množice. Za kaj so potrebne dobro urejene množice?"

"V matematiki so potrebne iz več vzrokov, eden od njih je, da z njimi razlagamo vrstilna števila (prvi, drugi, tretji, ...), poleg tega pa..."

"Pa je še veliko snovi o množicah? Kaj nismo že pri koncu?"

"Kaj? Kako mislite, 'pri koncu'? Pa saj smo se seznanili šele z nekaj najosnovnejšimi pojmi in simboli, ki jih uporabljamo pri množicah."

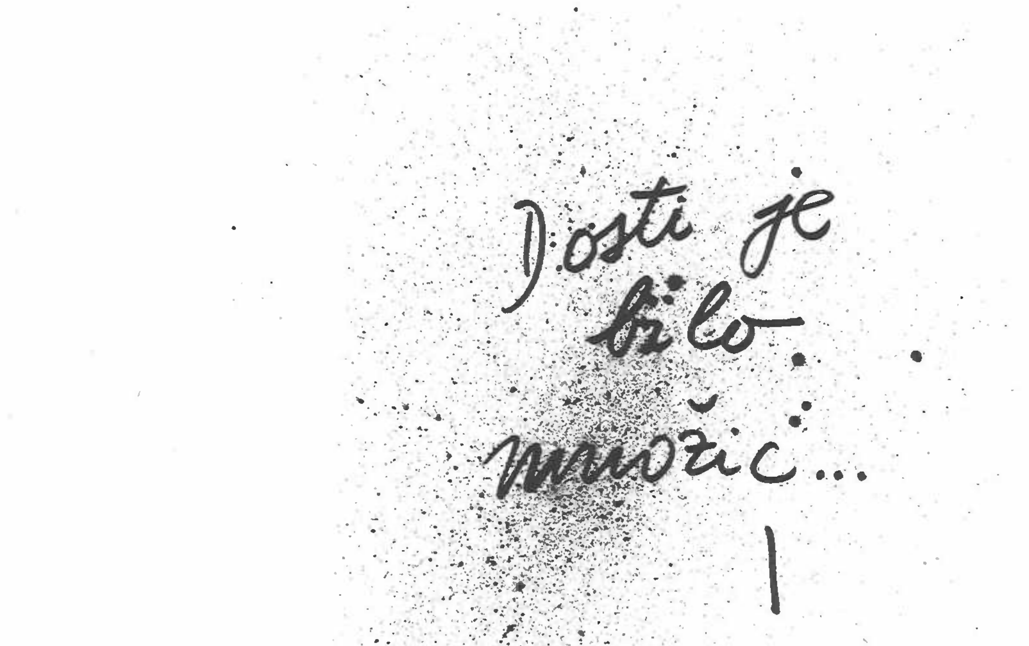
"Uh, mi smo pa mislili, da je to vse. In kaj bi morali še vedeti o množicah?"

"Kaže, da se nismo razumeli. Z množicami še nismo resneje nič delali, pa tudi seznanili se še nismo dobro z njimi."

"In kaj je potem vse to, kar smo do zdaj delali? Kaj to ni zadosti za seznanjanje z množicami?"

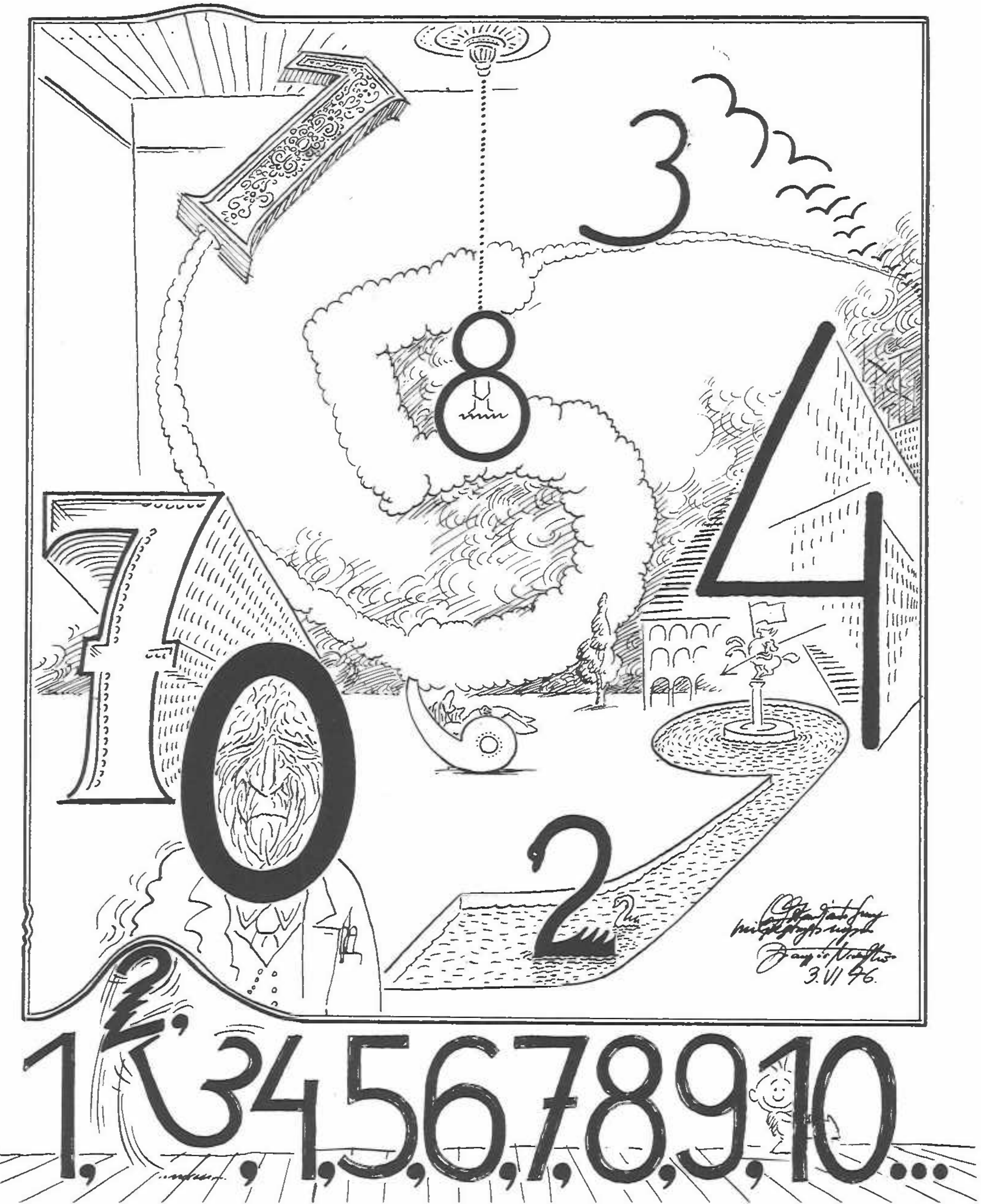
$33 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 1$

"Saj sem vam že rekel. Seznanili smo se samo z nekaj temeljnimi pojmi in simboli, potrebnimi za branje katere si že bodi matematične vadnice in ..." (... sicer pa, mogoče imajo prav. Vidim, da jim je že malo dolgčas, zakaj bi jih torej še naprej moril s kompozicijo funkcij, z inverznimi funkcijami, z Boolovimi operacijami z množicami, z relacijo ekvivalence, s pojmom polgrupe, grupe, ... če pa se bodo tako ali tako vse to - tisti, ki se morajo - učili tudi v šoli, če pa se jim ni treba, bodo lepo živeli tudi brez tega. Zato bom rajši spremenil snov. Na srečo je v matematiki polno zanimivih stvari tudi poleg množic.)



NARAVNA ŠTEVILA

Praštevila in sestavljena števila
Koliko je naravnih števil
V svetu neskončnega
Množica naravnih števil
Aksiomi - pravila igre
Kako se matematiki "igrajo"
Računske operacije z naravnimi števili
Pogovor o ničli
Nekaj malega o drugih številih
Je mogoče 10 + 10 = 100


1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...

1

"Oh, vsaj ta dobro poznamo. Tu ni nič novega in zanimivega," vas slišim, kako govorite, majčkeno razočarani zaradi naslova. Priznam, da jih pozna vsakdo, še tisti, ki se nikoli ni učil matematike, kljub temu pa nikar prezgodaj ne izrekajmo sodbe o njih. Boste videli, da mogoče niti niso tako nezanimiva, kakor ste mislili, čeprav so zelo zelo stara. Naravna števila so pravi metuzalemi med števili. Poznali in preučevali so jih tudi že stari grški filozofi pred več ko dva tisoč leti in teorija množic je na primer s svojimi sto leti pravi dojenček v primerjavi z njimi. Vendar nikar ne podcenjujmo naravnih števil samo zato, ker so tako stara in na videz zelo preprosta. Verjemite mi, da jih niti matematiki niso do kraja spoznali, pa čeprav jih preučujejo že dvajset stoletij. Naravna števila nas po svoji preprostosti in starosti spominjajo na egiptovske piramide, o katerih tudi še zmeraj ne vemo, kaj vse skrivajo v svojem osrčju, pa čeprav so v njih že marsikaj odkrili in spoznali. Seznanimo se najprej s tistimi lastnostmi naravnih števil, ki so jih poznali že stari Grki. Najbrž je najstarejša razdelitev naravnih števil na *sode* in *lihe*. Soda števila so

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

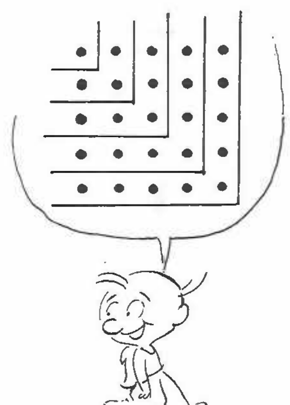
zapisujemo pa jih simbolično $\{2n : n \in \mathbf{N}\}$, pri čemer nam n pomeni katero si že bodi naravno število, $\mathbf{N}$ pa je simbol za množico vseh naravnih števil. Liha števila so

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

se pravi števila oblike $\{2n \pm 1 : n \in \mathbf{N}\}$ (se pravi: če kateremu si že bodi sodemu številu dodamo ali odvzamemo eno, dobimo liho število). Kolikšen pomen so Grki prisojali tej razdelitvi naravnih števil, nam najbolje kaže to, da je veliki grški filozof in matematik PLATON (427 do 347 pred našim štetjem) matematiko še celo definiral kot... *vedo o lastnostih sodih in lihih števil*. Pri sodih in pri lihih številih so že zdavnaj opazili razne zanimive lastnosti: Vsota prvih zapovrstnih lihih števil je zmeraj kvadrat naravnega števila (ali kvadratno število), to je

$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
.... ali na splošno

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



33 · 3 – 0 · 3 – 1

Nadaljnja lastnost je vezana na poštevanko. Zapišimo jo. Kvadratna števila bodo seveda na diagonali. Če okoli dveh kvadratnih števil, ki na diagonali sledita drugo za drugim, narišemo kvadrat, ki zajema štiri števila, in seštejemo števila v njem, dobimo znova kvadratno število.

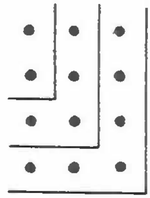
1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

$1 + 2 + 2 + 4 = 9 = 3^2$ ali $1^2 + 2 \cdot 2 + 2^2 = 9$

$4 + 6 + 6 + 9 = 25 = 5^2$ ali $2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 25$

....

Vas to ne spominja na izraz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$? Vsota zapovrstnih prvih sodih števil je zmnožek dveh zapovrstnih naravnih števil, lahko pa ga predočimo s točkami, ki določajo pravokotnik. Zato temu zmnožku pravimo 'pravokotno število'.



$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$

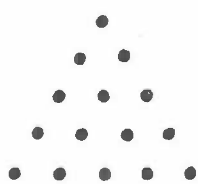
$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$

$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$

.... ali na splošno

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1)$

Vsoti vseh naravnih števil od 1 do n so Grki rekli trikotno število, ker je mogoče njihove prištevance predočiti s pikami, ki določajo enakostranični trikotnik.



1

$1 + 2 = 3 = \frac{1}{2} \cdot 2\,(2 + 1)$

$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{1}{2} \cdot 3\,(3 + 1)$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{1}{2} \cdot 4\,(4 + 1)$

.... ali na splošno

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n\,(n + 1)$

Ugotovljeno je tudi, da je med kvadratnimi in trikotnimi števili preprosta povezava. Če namreč seštejemo kakšno trikotno in nadaljnje večje trikotno število, dobimo vselej kvadratno število.

13 Poskusite si to sami razložiti z ustrezno sliko. Če pa ne znate ali ne verjamete ali ste preleni, da bi poskusili, poglejte rešitev na koncu knjige.

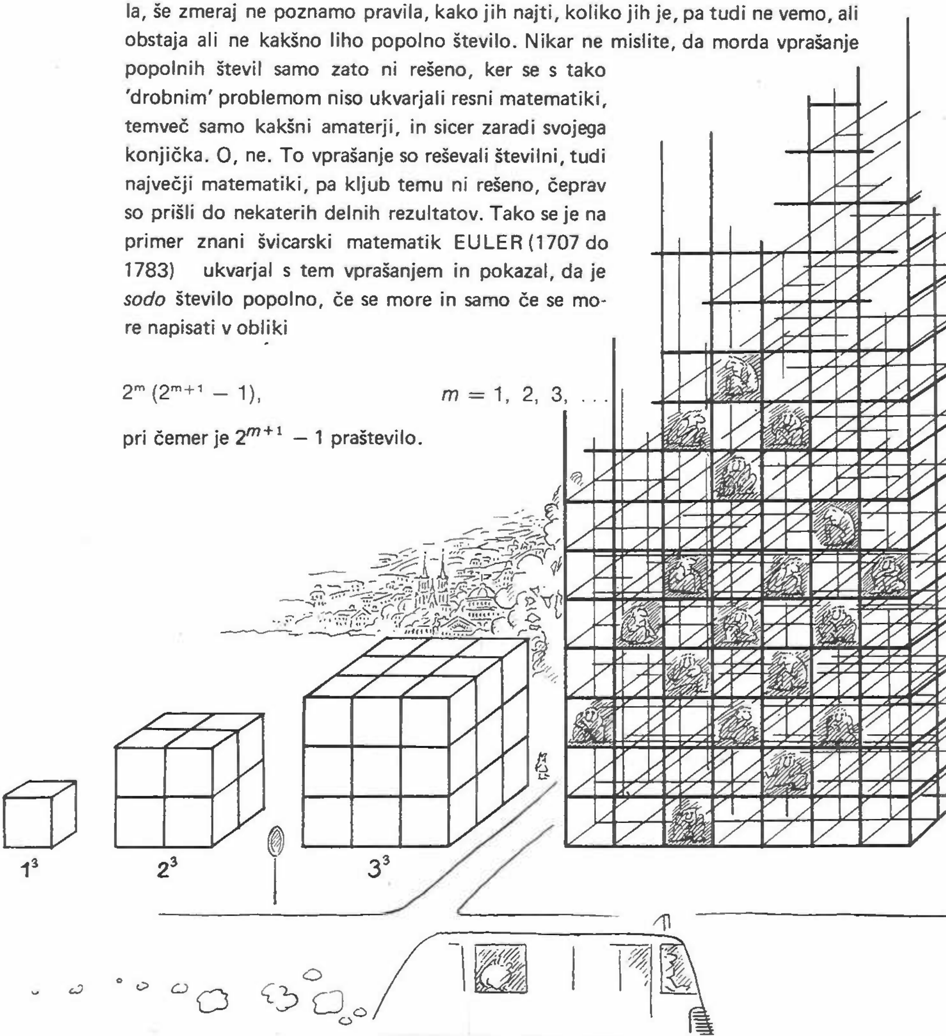
Kako se oblikujejo 'kubna števila', je mogoče sklepati po sliki. *Popolna števila* so Grki rekli številom, ki so enaka vsoti svojih deliteljev. Taki šta na primer števili 6 in 28, ker je 6 = 1 + 2 + 3, 6 je deljivo z 1, 2, 3 in s samim seboj, 28 = 1 + + 2 + 4 + 7 + 14, 28 je deljivo z 1, 2, 4, 7 in 14. Ravno v zvezi s popolnimi števili so nam Grki zapustili 'majhna' problemčka, ki ju matematiki še zdaj ne znajo rešiti, pa sta tako preprosta, da ju lahko vsak razume:

1. Najti pravilo (formulo) za odkrivanje popolnih števil.
2. Dokazati ali spodbiti domnevo, da nobeno *liho* število ni popolno.

Poglejte, čeprav je preteklo že nad 2 300 let, odkar so odkrili popolna števila, še zmeraj ne poznamo pravila, kako jih najti, koliko jih je, pa tudi ne vemo, ali obstaja ali ne kakšno liho popolno število. Nikar ne mislite, da morda vprašanje popolnih števil samo zato ni rešeno, ker se s tako 'drobnim' problemom niso ukvarjali resni matematiki, temveč samo kakšni amaterji, in sicer zaradi svojega konjička. O, ne. To vprašanje so reševali številni, tudi največji matematiki, pa kljub temu ni rešeno, čeprav so prišli do nekaterih delnih rezultatov. Tako se je na primer znani švicarski matematik EULER (1707 do 1783) ukvarjal s tem vprašanjem in pokazal, da je *sodo* število popolno, če se more in samo če se more napisati v obliki

$$2^m(2^{m+1}-1), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

pri čemer je $2^{m+1} - 1$ praštevilo.



Vidite, kakšna lepa priložnost, da pridete v zgodovino matematike in da se eno od pravil poimenuje po vas. Ne ozirajte se kaj prida na to, da bi vas zaradi tega preklinjali prihodnji rodovi tistih, ki nimajo radi matematike, temveč junaško začnite reševati vprašanje.

14 Če se ne odločite za to, pa najdite na podlagi navedenega obrazca vsaj eno popolno naravno število (seveda poleg 6 in 28).

Praštevila in sestavljena števila

Posebno pomembna je razdelitev naravnih števil na *praštevila* ali *primitivna* števila (pa seveda ne v pomenu prostaška, zarobljena) in *sestavljena števila. Praštevila* so naravna števila, deljiva samo z ena in s samim seboj. To so na primer števila 2, 3, 5, 7, ... More biti pravokotno ali kvadratno število praštevilo? Zakaj ne? *Sestavljena števila* so naravna števila, različna od 1, ki ne spadajo med praštevila.[9]

15 So pravokotna in kvadratna števila sestavljena? Zakaj?

Poigrajmo se najprej s praštevili. Tudi tukaj se, kakor pri popolnih številih, vsiljujejo vprašanja:

1. Kako je mogoče določiti (ugotoviti) zapovrstjo praštevila?
2. Koliko je praštevil?
3. Kako se glasi obrazec (formula), s katerim je mogoče določiti praštevila?

Že grški zemljepisec in matematik ERATOSTEN (drugo stoletje pred našim štetjem) - znan je tudi po tem, da je prvi izračunal obseg Zemlje - je odgovoril na prvo vprašanje. Našel je postopek, po katerem je mogoče najti praštevila. Ker je treba naravna števila 'presejati' tako, da na 'situ' (rešetu) ostanejo samo praštevila, so ta postopek njemu na čast imenovali *Eratostenovo rešeto* (sito).

Poglejmo, kako je to naredil. Zapisal je najprej naravna števila od 2 naprej.

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, . . .

potem je v tem nizu prečrtal vsa števila, deljiva z 2, to je, večkratnike števila 2. Preostala so števila

3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, 25, ~~27~~, 29, . . .

Potem je prečrtal tudi vse večkratnike števila 3 in ostalo je zaporedje

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ~~25~~, . . .

Prečrtal je večkratnike števila 5 in ostala so števila

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, . . .

[9] Števila 1 nimamo ne za praštevilo, ne za sestavljeno število.

ali če tega ne veš, potem število 1 pomeni zelo konkretno "enka"

Nadaljnji postopek je razviden iz dosedanjega. Vsakokrat prečrtamo večkratnike prvega števila v zaporedju, vsa prva števila v tako dobljenih zaporedjih pa dajo zaporedje praštevil

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

Na vprašanje 'Koliko je praštevil?' je odgovoril eden od največjih matematikov antike, EVKLID [10] (od okoli 330 do okoli 275 pred našim štetjem), z izredno duhovitim in predirnim sklepanjem. Razmišljal je takole: 'pomnožimo vsa znana praštevila med seboj in temu zmnožku dodajmo 1. Če je tako dobljeno število praštevilo, je večje od vseh dotlej najdenih. Če pa ni praštevilo, ima za faktorje praštevila in ta so različna od do zdaj najdenih praštevil, ker zmeraj ostane ostanek 1 (ki smo ga prišteli), če se novo število deli s katerim si že bodi od že znanih praštevil. Zato morajo biti prafaktorji tega števila drugačni kakor do zdaj najdeni. Se pravi, da je praštevil več, kakor smo jih do zdaj našli.' Tako je dokazal, da imamo lahko ne vem koliko praštevil, vendar jih moremo še zmeraj kaj najti. Ker je to ravnanje mogoče *neprenehoma* ponavljati, sklepamo, da je praštevil nešteto.

Ob Eratostenovih in Evklidovih sklepanjih se kažejo tudi najpomembnejše lastnosti starih grških matematikov. Niso radi veliko računali (vem, da vam je ta lastnost všeč), niso prisojali veliko pomena praktičnim merjenjem, kakor je merjenje zemljišč in podobno (ravno to so pa stari Egipčani izredno cenili), temveč so radi postavili problem in ga reševali - s premišljevanjem. Po tej metodi so dosegli izredno veliko, tako v matematiki kakor tudi v filozofiji. Vendar vas opozarjam, da je ta metoda zelo zelo uspešna samo, če je tisti, ki jo uporablja - genij. Drugače je v večini primerov to navadno zapravljanje časa, zato se nikar preveč ne navdušujte za to metodo in je nikar prepogosto ne uporabljajte pri vsakdanjih nalogah.

Da boste še bolje doumeli način, kako so stari grški matematiki radi reševali probleme, vam bom povedal, kako je Tales iz Mileta, [11] eden od njih, spravil v osuplost učene egiptovske duhovnike med svojim bivanjem v Egiptu. Egipčani so svojega gosta pripeljali pred veliko piramido v puščavi, ker so hoteli preveriti njegovo znanje in iznajdljivost, in ga vprašali, kako bi izmeril njeno višino. To je bilo zanje veliko matematično vprašanje. Rešitev so pravzaprav vedeli, vendar so jo skrivali kot največjo skrivnost. Bili so prepričani, da tujec ne bo mogel rešiti tega problema. Grk pa se ni nič zmedel, temveč je po krajšem premišljevanju rekel:

[10] Ustanovitelj in osrednja osebnost matematične šole v Aleksandriji.

[11] Tales iz Mileta (druga polovica sedmega stoletja pred našim štetjem), grški filozof, astronom, fizik in matematik. Eden od "sedmih modrijanov" starega veka. Imajo ga za najstarejšega evropskega filozofa.

'Dajte mi palico.' Presenečeni duhovniki so mu dali palico, ker so bili prepričani, da se bo povzpel na piramido in s palico izmeril njeno višino. Talesu pa kajpak še na misel ni prišlo nič takega. Zasadil je palico v pesek in rekel:

ija

'Ko bo dolžina sence te palice enaka njeni višini, izmerite dolžino sence piramide, pa boste dobili njeno višino.'

Egiptovski modrijani so ostrmeli spričo tako preproste in duhovite rešitve zanje tako težke naloge. Morali so priznati, da jih je Grk prekosil v znanju matematike. Kaj niso bili ti stari matematiki v resnici iznajdljivi?

Ampak vrnimo se k *sestavljenim* številom in poglejmo, katera njihova lastnost je najpomembnejša. Lahko dokažemo, da je mogoče vsako sestavljeno število podati kot zmnožek praštevil, vendar vem, da nimate radi dokazovanj (temveč rajši verjamete na besedo), zato vam bom samo pokazal, kako to gre. In kažem vam samo zato, da se boste prepričali, kako to že znate. Samo tega mogoče niste vedeli, da postopek velja za *vsako* sestavljeno število. Vzemimo zato katero si že bodi sestavljeno število. Da pri odbiranju števila po naključju ne 'trčite' ravno ob praštevilo, vzemimo katero si že bodi sodo število (seveda razen števila 2), pa smo lahko brez skrbi, da je število sestavljeno. Vzemimo torej za zgled število 2 100. Preglejmo, katera praštevila so vse zajeta v tem številu. Začeli bomo seveda z najmanjšim praštevilom, s številom 2. Število delimo s številom 2 tako dolgo, dokler gre, potem pa z nadaljnjim praštevilom, in tako naprej. Začnimo torej:

CIPER

2 100 : 2 = 1 050	Tudi to število je mogoče deliti z 2.
1 050 : 2 = 525	Najmanjše praštevilo, vsebovano v številu 525, je 3. V številu 175 je najmanjše praštevilo 5.
525 : 3 = 175	Tudi v 35 je zajeto praštevilo 5, delimo spet z njim.
175 : 5 = 35	Prišli smo do konca. 7 je praštevilo in naprej ne moremo več deliti.
35 : 5 = 7	

Potemtakem so v številu 2 100 zajeta tale praštevila: 2 (dvakrat), 3, 5 (dvakrat) in 7, zato ga lahko zapišemo kot zmnožek teh števil:

$$2\ 100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Ves ta postopek pišemo po navadi krajše takole:

2 100	2
1 050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

Tako lahko vsako sestavljeno število razstavimo na njegova praštevila in ga napišemo kot njihov zmnožek. Če ne verjamete, lahko sami izberete nekaj sestavljenih števil in poskušate.

SUPER VAŽNO

1. Štef mi je dolžan 6 frnikol
2. KRAP mi je dolžan 2. podvojenki - kroglestvo žiboli...
3.- MATICU posodil „Lažeš Melita"

8. IX. 1976

Danes ob šestih drsanje v Tivoliju... zmenjen s SAMOM... in DEJANOM

Kaj ni vse to zelo preprosto in lahko? In da je zadeva še lepša, ste se prepričali, da postopek že poznate. Ampak čeprav ste vse do zdaj razumeli in dane naloge - ne da bi hodili gledat v rešitve - rešili, si nikar takoj ne domišljajte, da ste postali že veliki matematiki, ki imajo vedo o številih 'v malem prstu'. Rajši pomislite, da so vse to, pa tudi veliko veliko več vedeli ljudje že pred dva tisoč leti.

Ampak pustimo za zdaj to. Tudi jaz sem se razgovoril kakor kakšen prfoks in skoraj pozabil na tretje vprašanje o praštevilih, se pravi: 'Kako se glasi obrazec, s katerim je mogoče določiti praštevila?' Odgovor je zelo preprost. Obrazca matematiki še do danes niso našli. (Kaj sploh delajo ti matematiki? se sprašujete.) Pa če bi vi vedeli, koliko so se že ubadali s tem! Kratko in malo mi ne bi verjeli, če bi vam povedal, kaj vse so skozi dolga stoletja poskušali, da bi ga našli. In da je smola večja: že nekajkrat so mislili, da so ga našli, pa se je vselej pokazalo, da so se kje 'zaklali'. To se je primerilo celo velikemu francoskemu matematiku Fermatu (1601 - 1665), ki je utemeljil tudi novo matematično vejo - teorijo števil. Mislil je, da je našel iskani obrazec v obliki

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Po tej formuli pride po vrsti

za $n = 1$ $\quad F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 4 + 1 = 5$

za $n = 2$ $\quad F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$

za $n = 3$ $\quad F_3 = 2^{(2^3)} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$ itd.

Števila $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ se njemu na čast imenujejo Fermatova števila, čeprav je že sam Fermat priznal, da se mu ni posrečilo tudi *dokazati*, da je F_n praštevilo za vsak n. Pozneje so ugotovili, da ta formula ne da praštevil za n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38 in 73. Poleg tega nastane težava, ko je že n troštevilčno število, saj obrazca praktično ni mogoče preveriti, ker nastanejo števila, ki imajo na milijone številk, tako da jih ni mogoče izpisati.

Čeprav Fermat ni našel obrazca, ki bi dal vsa praštevila, je vendar s svojim raziskovanjem odkril nekaj zanimivih lastnosti posameznih skupin praštevil. Tako je dokazal, da je na primer vsako praštevilo, ki ga je mogoče zapisati kot

$$4n + 1$$

enako vsoti dveh kvadratnih števil. Praštevila po formuli $4n + 1$ dobimo za $n = 1$, 3, 4, 7, ..., o čemer se lahko prepričamo.

Če je $n = 1$, dobimo $4 \cdot 1 + 1 = 5 = 1^2 + 2^2$
če je $n = 3$, dobimo $4 \cdot 3 + 1 = 13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$
če je $n = 4$, dobimo $4 \cdot 4 + 1 = 17 = 1 + 16 = 1^2 + 4^2$
če je $n = 7$, dobimo $4 \cdot 7 + 1 = 29 = 4 + 25 = 2^2 + 5^2$ itd.

Na videz preprosto, pa še zmeraj nerešeno vprašanje v zvezi s praštevili je tudi tole: Ali je neskončno veliko praštevil, ki jih je mogoče zapisati kot

$$n^2 + 1.$$

Tu za za $n = 1$ dobimo število $1^2 + 1 = 2$,
za $n = 2$ dobimo število $2^2 + 1 = 5$,
za $n = 4$ dobimo število $4^2 + 1 = 17$
. . . .

Vemo torej, da je praštevil neskončno veliko, vendar ne vemo, ali jih je neskončno veliko z zapisom $n^2 + 1$. In tu je še en znan Fermatov problem, ki se pravzaprav ne nanaša na praštevila, vendar je v zvezi s števili, s katerimi smo se do zdaj seznanili, zato je prav, da ga omenimo.

To je znameniti tako imenovani *veliki Fermatov problem*. Izvira iz srede 17. stoletja in še zdaj ni rešen, čeprav se je dvesto let veliko matematikov ubijalo z njim. Preden se seznanimo z vprašanjem, naj vas samo spomnim na nekaj pojmov, ki so vam gotovo znani. Vsi na primer dobro poznate Pitagorov izrek,[12] ki pravi, da je vsota kvadratov nad katetama pravokotnega trikotnika enaka kvadratu nad hipotenuzo. Ali pa se mogoče spominjate Nušićeve oblike tega izreka:

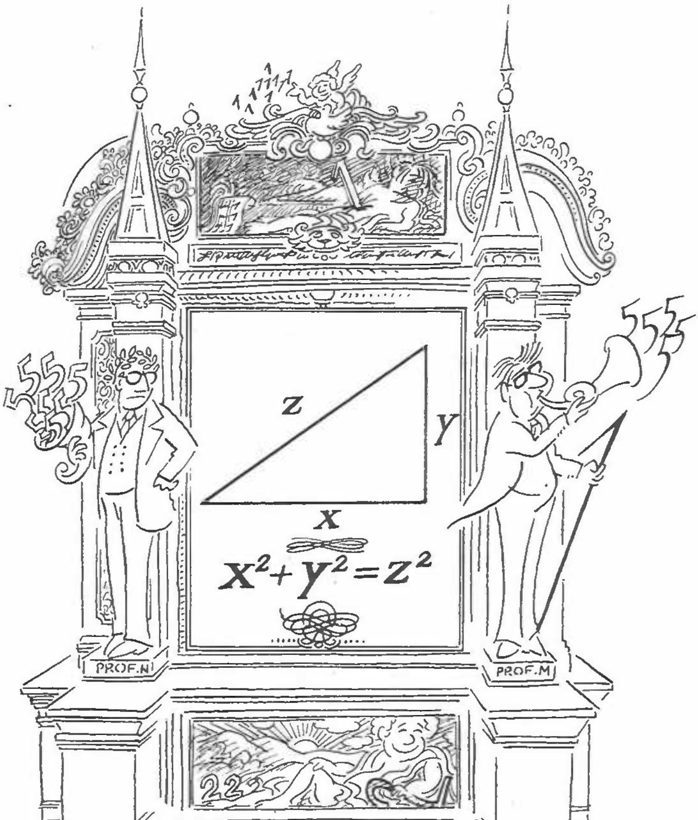
'Kvadrat hipotenuze, tako se pili vsak za boljši red,
enak je vsoti kvadratov obeh katet.'

Če torej kateti zaznamujemo z x in y, hipotenuzo pa z z, lahko izrek zapišemo v obliki enačbe:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

---

[12] Izrek (teorem) v matematiki pravimo vsaki pomembnejši izjavi (sodbi), ki jo dokazujemo v okviru kakšne teorije.


z
y
x
$x^2+y^2=z^2$
PROF. N
PROF. M

Ni težko najti celih ali naravnih števil, ki ustrezajo tej enačbi. Takim številom pravimo Pitagorove trojke. Poznamo celo preprosto formulo, s katero moremo določiti Pitagorove trojke x, y, z. Če namreč vzamemo kateri si že bodi naravni števili m in n tako, da je $m > n$, lahko takole izračunamo števili x, y in z:

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

Iskane trojke števil lahko vpišemo v tabelo:

m	n	x	y	z	$x^2 + y^2 = z^2$
2	1	3	4	5	$3^2 + 4^2 = 5^2$
3	1	8	6	10	$8^2 + 6^2 = 10^2$
3	2	5	12	13	$5^2 + 12^2 = 13^2$
4	1	15	8	17	$15^2 + 8^2 = 17^2$
4	2	12	16	20	$12^2 + 16^2 = 20^2$
4	3	7	24	25	$7^2 + 24^2 = 25^2$
5	1	24	10	26	$24^2 + 10^2 = 26^2$
5	2	.	.	..	...
.	.	.	.	..	...

Da je takih številskih trojk veliko, je bilo znano že starim grškim matematikom, zato prav gotovo tudi Fermatu. Njega pa je zanimalo nekaj drugega, in sicer: ali velja ta enačba tudi za višje potence kot dve, se pravi, ali velja enačba

$$x^n + y^n = z^n$$

če so x, y in z cela števila, n pa število, večje od 2. Tako se na primer za $n = 3$ vprašanje glasi:

'Ali moremo najti tri taka, od nič različna cela števila, da je vsota kubov dveh števil enaka kubu tretjega števila?' ali krajše:

'Ali obstajajo tri cela števila x, y, z, različna od nič, ki ustrezajo enačbi

$$x^3 + y^3 = z^3?'$$

Za $n = 4$ bi morali najti tri od nič različna števila x, y, z tako, da je

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad \text{in tako naprej.}$$

To je torej veliki Fermatov problem (obstaja tudi tako imenovani mali Fermatov problem, vendar se mi kot veliki matematiki ne mislimo ubadati z majhnimi problemi). Treba je samo najti tri ustrezna števila. In nič več. S tem problemom in s Fermatovim imenom je povezana tudi anekdota, zaradi katere se matematiki še danes jezijo. Vemo, da je imel Fermat (na nesrečo) navado, da je med branjem knjig delal zapiske na robove. Tako je na rob neke knjige napisal:

'Prepričan sem, da sem našel izreden dokaz, da ni mogoče rešiti tega vprašanja, vendar ga ni mogoče izpisati na rob te knjige.'

Prepričan sem,
da sem našel
izreden dokaz, da
ni mogoče rešiti
tega problema,
vendar dokaza ne
spravim na rob
knjige...

To ni moje,
pa je dobro...

Samo pomislite, kaj vse bi dali matematiki, da bi bil rob knjige širši. Koliko bi bilo s tem v minulih dveh stoletjih prihranjenih brezuspešnih naporov, saj si še danes niso na jasnem, ali je problem sploh rešljiv in ali se sploh splača poskušati. Kljub temu ne morejo kar tako iti mimo vprašanja in se narediti, kakor da ga ni, ker bi to ne bilo v skladu z njihovim pojmovanjem in bi ne bilo pošteno. Ampak kadar gre za matematiko, so matematiki - to je treba priznati - pošteni, pa naj jih to stane ne vem koliko časa in dela. Kako težak je ta Fermatov problem, lahko sklepamo tudi po odgovoru enega od največjih matematikov 20. stoletja - Davida Hilberta[13] - ki je na vprašanje 'Zakaj ga ni poskušal rešiti?' odgovoril: 'Preden bi začel, bi moral vložiti v to tri leta intenzivnega preučevanja, jaz pa nimam toliko časa, da bi ga porabljal za verjetno zgrešeno početje.'

Ne glede na to, da vprašanje tudi danes še ni rešeno kljub neštetim poskusom znanih in neznanih matematikov, je bilo zelo koristno za razvoj matematike. Ko so ga namreč matematiki poskušali rešiti, jim je to dalo spodbudo za ustvaritev *teorije števil*, s katero so rešili številne druge probleme in s katero je narejen velik korak naprej v spoznavanju števil. Tako se je tudi v matematiki, pa ne enkrat, uresničil ljudski izrek: 'Lovili lisico, pa ujeli volka.'

Kratki pregled nekaterih lastnosti naravnih števil naj končamo z navedkom iz predgovora knjige *Uvod v teorijo števil* angleškega matematika Dicksona, v katerem je rečeno:

'Skozi dvajset stoletij so bila števila priljubljen predmet raziskovanja ne samo vodilnih matematikov, temveč tudi tisočev ljubiteljev. Nova raziskovanja v ničemer ne zaostajajo za starejšimi. Odkritja v prihodnosti bodo zelo prekosila odkritja v preteklosti.'

Ni nam torej treba biti v skrbeh, da je v številih (in celo v naravnih) že vse odkrito in da ni več dela za tiste, ki imajo radi matematiko. Mi pa, ki je niti nimamo posebno radi, se bomo zadovoljili s tem, da se bomo seznanili še z nekaj lastnostmi naravnih števil, in sicer s takimi, ki so jih - večinoma - odkrili v zadnjih sto letih in ki jih (no, vendar!) stari Grki še niso poznali. Iz tega bo razvidno, da najzanimivejše stvari šele pridejo."

[13] David Hilbert (1862 - 1943), nemški matematik.

Koliko je naravnih števil

"Tudi s tem vprašanjem so se ukvarjali matematiki že v starem veku. Jasno jim je bilo, da je naravnih števil zelo zelo veliko, vendar jih je zanimalo, koliko. Tako je veliki grški (že spet ti Grki!) matematik, fizik in izumitelj Arhimed[14] že v tretjem stoletju pred našim štetjem napisal razpravo z naslovom *Peščena ura*, v kateri je dokazal, da je tudi število zrnc peska na morskem bregu mogoče izraziti z naravnim številom, samo če vpeljemo sistematično označevanje čedalje večjih naravnih števil. Filozof Platon je izrekel (seveda filozofsko) trditev, da naravnim številom ni konca, vendar smo videli, da je veliki geometer starega veka, Evklid, dokazal, da je še celo *praštevil* neskončno veliko.

Tako pridemo po naravnih številih

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .

tudi do *zelo pomembnega* pojma vse matematike, do pojma *neskončnega*, natančneje neskončno velikega.

To je pojem, ki ga gotovo kaže podrobneje pregledati že zaradi njegovega pomena v matematiki, pa tudi zato, ker nas uvaja v nov, nenavaden svet, ki si ga ne moremo *nazorno*, slikovito predočiti, s pravilnim logičnim sklepanjem pa se lahko vsaj deloma seznanimo z njim. Ravno ob tem pojmu bomo spoznali, da se ne smemo *ves čas* naslanjati samo na 'zdravo pamet' (na katero smo sicer tako ponosni in se nihče ne pritožuje, da je nima zadosti) in na nazorne predočitve (verjamem samo tisto, kar vidim), ker nas eno in drugo lahko včasih spelje na napačno pot in nas bolj ovira kakor nam koristi."

V svetu neskončnega

"Kaj se pravzaprav pravi, če rečemo, da je naravnih števil neskončno veliko? Preden dobimo odgovor na to vprašanje, poglejmo najprej, kako sploh nastajajo naravna števila po naravnem vrstnem redu - se pravi drugo za drugim, v zaporedju. V začetku imamo seveda število

1	(ena), če dodamo eno, dobimo
1 + 1 = 2	(dve), če znova dodamo eno, dobimo
2 + 1 = 3	(tri), če znova dodamo eno, dobimo
3 + 1 = 4	(štiri), če znova dodamo eno, dobimo
4 + 1 = 5	(pet), če znova dodamo eno, dobimo
5 + 1 = 6	(šest), če znova dodamo eno, dobimo

. . . . in tako naprej

[14] Arhimed (od okoli 287 do okoli 212 pred našim štetjem), največji matematik in fizik starega veka.

S tako preprostim dodajanjem ene nastajajo čedalje večja naravna števila. Preskočimo zdaj na primer prvih tisoč števil in poglejmo, kakšno je nadaljnje naravno število. Ravnali bomo ravno tako kakor prej, se pravi dodali bomo eno, torej je nadaljnje število

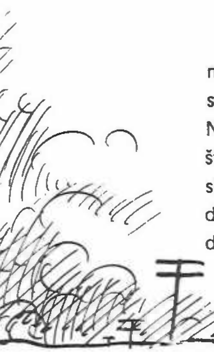
$$1\,000 + 1 = 1\,001$$

Zato pravimo, da ima *vsako* naravno število svojega *naslednika*, to je število, ki sledi neposredno za njim. Če je torej dano *katero si že bodi* naravno število

n, je njegov naslednik
$n + 1$, njegov naslednik pa
$(n + 1) + 1$ in tako naprej

Če smo le zadosti vztrajni, lahko po tem postopku - z dodajanjem ene - dobimo *vsako* naravno število, naj bo še tako veliko. Ker se tu ponavlja ves čas isti postopek dodajanja ene, in sicer v *istih* okoliščinah, ni razloga, da bi se kdaj ustavil. Nadaljuje se ves čas v istem smislu, tako da poteka od enega do drugega naravnega števila, zato postopek sam nima konca. Tako neizčrpnemu zaporedju pravimo neskončno in pravimo, da je naravnih števil neskončno veliko. To ne pomeni nič drugega, kakor da za *vsakim* naravnim številom pride nadaljnje naravno število ali da jih je več kakor n, pa naj je naravno število n ne vem kako veliko.

Če smo vse to razumeli, bomo zlahkoma odgovorili na tile vprašanji:



16 1. Ali obstaja *največje* naravno število?

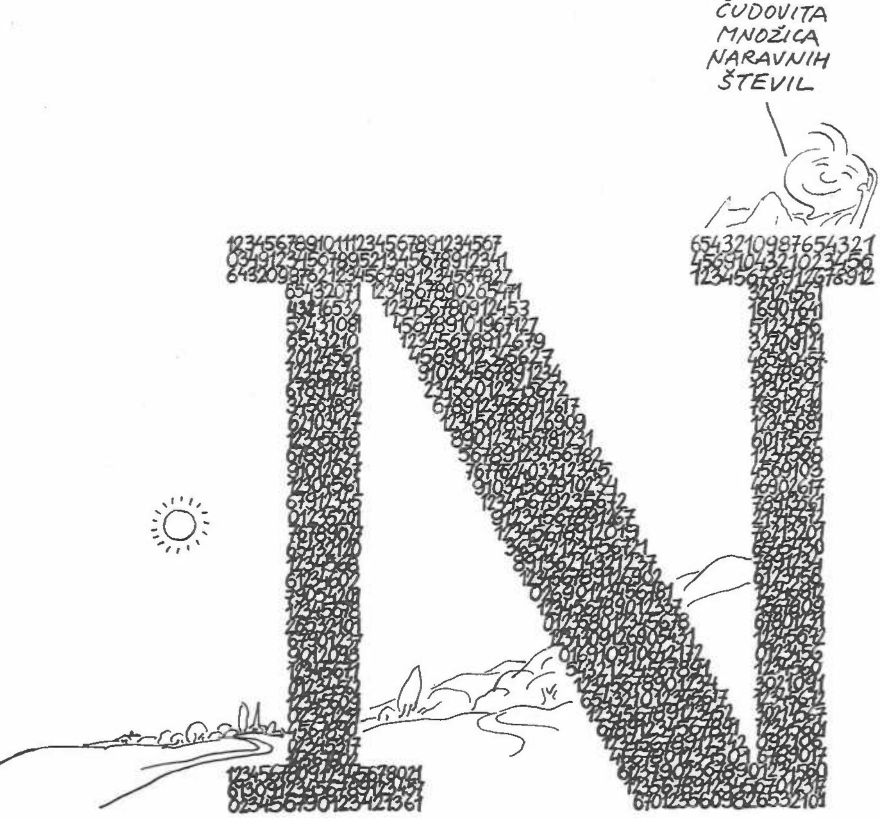
17 2. Ali ima *vsako* naravno število svojega predhodnika?

Prepričan sem, da boste priznali, da je vse to dostopno in lahko razumljivo. Pa vendar je eno od največjih odkritij človeškega razuma. Niti v matematiki torej ni vse tako zapleteno in zamotano, kakor se nam včasih zdi. Kajne?

Pojem neskončnega je zato pomemben, ker je izhodišče, odskočišče za popolnoma nova matematična razglabljanja. S čedalje bolj jasno izoblikovanostjo tega pojma se je začela nekako s 17. stoletjem izdelava podlage za moderno matematično analizo.

'Dobro, medtem smo se seznanili z naravnimi števili, ampak kaj je z množicami? Imajo te kaj zveze s temi števili?' me sprašujete.

Seveda jo imajo, kaj bi je ne imele. Saj bomo šele zdaj spoznali tudi njihovo pravo vrednost. Poglejmo."



Množica naravnih števil

"Če vsa naravna števila uvrstimo pod en pojem, ki pove, da pripadajo eni celoti, govorimo o množici naravnih števil in jo po navadi zaznamujemo z **N**.

V nasprotju z množicami, s katerimi smo se prej seznanili (množica učencev v razredu, množica glavnih mest, množica števil od 1 do 10 in tako naprej) in ki so bile vse *končne*, je množica naravnih števil *neskončna*. Med končnimi in neskončnimi množicami pa je taka razlika kakor med 'zrncem peska in Triglavom', zato moramo biti previdni, da vsega tistega, kar iz vsakdanjega življenja vemo o končnih množicah, mehanično ne uporabljamo tudi glede neskončnih. Med temi množicami je namreč velik prepad in če nismo zadosti pazljivi, lahko pademo v brezno in ker je to brez dna, ni več vrvi, s katero bi se mogli zvleči iz njega. Pa se nikar spet preveč ne ustrašite prepada, ki loči končne in neskončne množice, ker ni - nepremostljiv.

Naj vas takoj še malo potolažim. Ne bo se nam treba ravno vsega učiti od kraja, saj se temeljne operacije, na primer unija, presek, razlika in druge, uporabljajo enako pri končnih in pri neskončnih množicah. Med naravnimi števili smo že opazili nekatera od njih, ki imajo določene skupne lastnosti: soda, liha, kvadratna, pravokotna in druga. V jeziku množic so to same podmnožice množice naravnih števil. In sicer ne katere si že bodi podmnožice, temveč prave podmnožice (in kaj je prava podmnožica?).

To samo toliko, da smo se malo spomnili množic in se znova privadili nanje.

In zdaj poglejmo, kakšna čuda se skrivajo v neskončnih množicah in po čem se tako ločijo od končnih. To vam pokažemo na množici naravnih števil

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$$

Če iz te množice izberemo vsa *soda* števila, bo nastala nova množica, ki je, kakor vemo, prava podmnožica naravnih števil

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\}$$

Zdaj dobro poglejte množici in odgovorite na vprašanje: Ali je množica sodih števil *del* množice naravnih števil?

'Seveda je, vsaj to je takoj videti,' odgovarjate.

Strinjam se z vami. Množica sodih števil je del množice naravnih števil, saj so v množici naravnih števil tudi vsa soda števila, pa še druga (namreč liha). Dobro, o tem se strinjam z vami. Ampak zdaj preidimo na novo vprašanje: Katerih števil je več, naravnih ali sodih?

'Naravnih števil je več, jasno, saj obsegajo soda in liha števila,' odgovorite brez dolgega premišljevanja.

Hm, hm, odgovor je prav gotovo razumen in sloni na vsakdanji izkušnji. Soda števila so *del* naravnih števil in del je manjši od celote, se pravi, da mora biti sodih števil manj od naravnih. Čeprav je tako sklepanje videti zelo naravno in razsodno, poleg tega pa je v skladu tudi s tistim, kar nam je sicer znanega iz vsakdanjega življenja, ga vendar za vsak primer (vrag nikoli ne spi) preverimo.

'In kako ga bomo preverili?' vas zanima.

Zelo preprosto, ravno tako, kakor je nepismen pastir ugotovil, ali ima vse ovce v ogradu, in sicer s prirejanjem, ne da bi jih kaj štel: ena zareza na rovašu - ena ovca in ker je ena zareza na palici ostala, ko so se že vse ovce vrnile v tamar, se pravi, da je ovc manj kakor zarez.

Včeraj mi je profesor rekel, da nimam vseh ovčic v hlevu...

Jemljemo, da je tak postopek veljaven za vse množice, naj so že končne ali neskončne. Obstoj bijektivne preslikave vzamemo kot definicijo enakosti kardinalnih števil za neskončne množice. Ker želimo ugotoviti razmerje med naravnimi in sodimi števili, vsakemu naravnemu številu priredimo po eno sodo število. Če kaj števil ostane neprirejenih, pomeni, da jih je več. Začnimo torej:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & 18, & 20, & 22, & 24, & 26, & 28, & 30, & 32, & \ldots \end{array}$$

poglej risbo na drugi strani...

'In kaj je zdaj prišlo iz tega?' me malo presenečeni ogledujete.

Res je, res. *Vsakemu* naravnemu številu lahko priredimo po eno sodo število. Se pravi...

Tako je, natančno to ste mislili. Malo čudno, pa vendar resnično. Sodih števil je *ravno toliko* kakor naravnih.

'To že, ampak soda števila so del naravnih števil.'

Drži, soda števila so *del* naravnih.

'Potemtakem...'

Kar mirne duše nadaljujte. Potemtakem upravičeno sklepate, da je (v tem primeru) *del enak celoti*. Ampak to je šele prvo presenečenje v svetu neskončnega.

'Pa se to ne upira naši zdravi pameti?' sprašujete.

'Kaj nič več ne velja?'

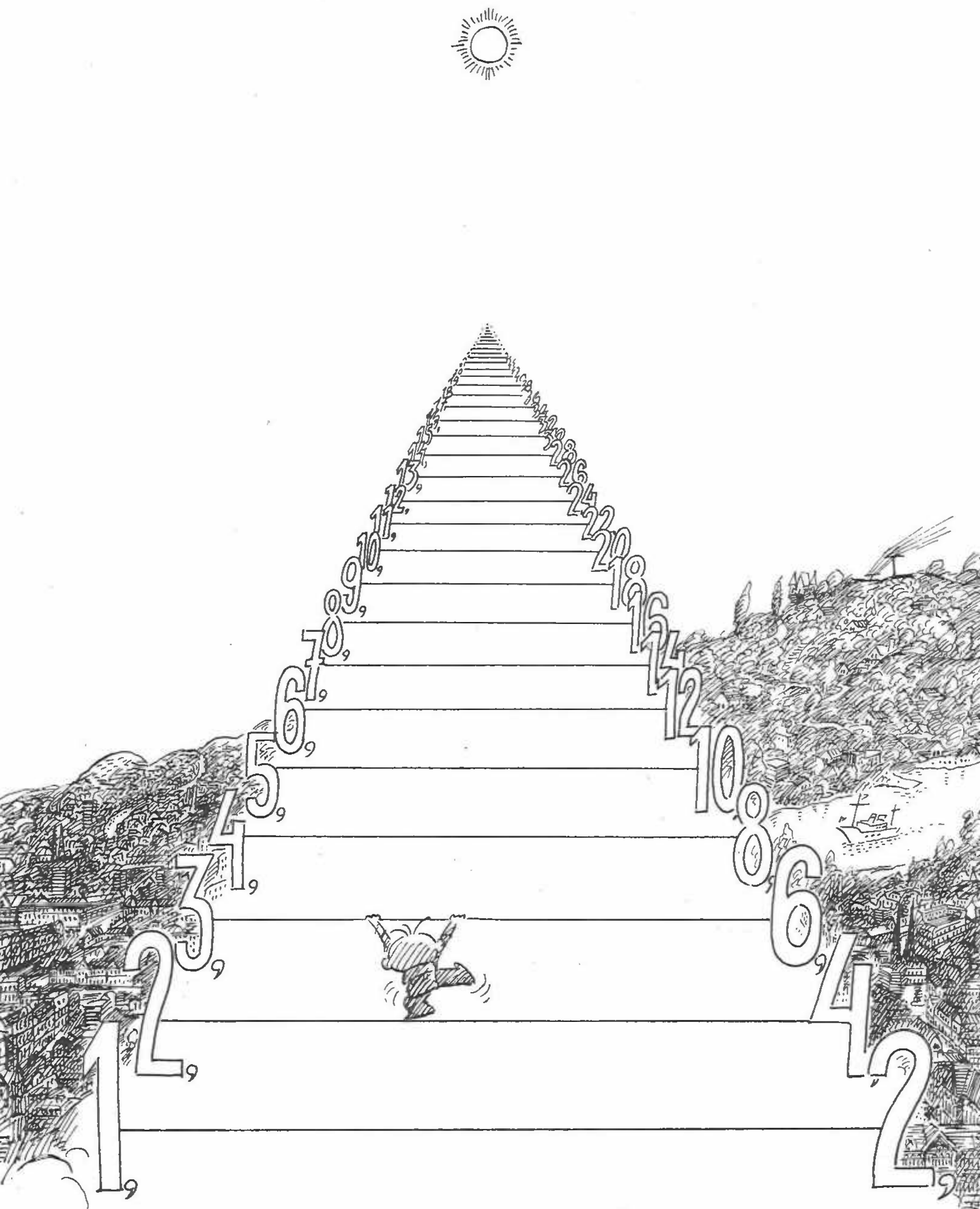
Hja... kakor se vzame. V svetu končnega je še kar za silo, ampak ko preidemo v svet neskončnega - jo rajši pustimo na meji.

'Pa zakaj?'

Oh, vi bi pa res radi vse vedeli. Zato, vidite, da nam - ni treba plačevati carine in da se otresemo nepotrebne prtljage. Ampak ko se vrnete v svet končnega, ne pozabite na meji pobrati svojih kovčkov z 'zdravo pametjo', drugače boste zašli v še večje škripce.

'Kakšne škripce pa že spet?'

No, na primer takele: Vzemimo, da ste prijatelju dolžni tisoč dinarjev. Ker ste se v svetu neskončnega naučili, da je del lahko enak celoti, vzamete iz denarnice deset dinarjev, vrnete dolg in rečete: 'Deset dinarjev je del od tisoč dinarjev. Ker pa je del enak celoti, sem povrnil ves dolg, ko sem vrnil deset dinarjev.' Sklepanje je v bistvu pravilno, samo spregledali ste prepad, ki deli končno od neskončnega, in uporabili razmerje, ki velja na eni strani meje, pa (žal) ne velja tudi na drugi. Da to v resnici ne velja v svetu končnega, vas bo hitro prepričal tudi tisti, pri katerem ste si sposodili denar. Vidite, zato znova poberite svoje kovčke in bodite previdni, ko stopite čez mejo.



'Ampak mogoče zveza *del = celota* velja samo za naravna in soda števila, mogoče so soda števila izjema in vemo, da izjema potrjuje pravilo,' boste nekateri poskušali braniti svojo zdravo pamet.

Ne, še misliti ni. To sploh ni izjema, temveč pravilo. Sicer pa poglejmo še kakšen drug zgled. Vzemimo, recimo, vse mnogokratnike števila pet, torej 5, 10, 15, 20, 25, ... in primerjajmo to množico z množico naravnih števil

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
5,	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,	45,	50,	55,	60,	65,	...

Spet isto. Ti dve množici imata isto število elementov, pa čeprav je v drugi množici samo vsak peti element prve množice. Da si pomirimo vest, poskusimo še enkrat. Zdaj vzemimo množico, ki jo sestavljajo vsi mnogokratniki števila sto, se pravi množica, ki jo dobimo, če od množice naravnih števil vzamemo samo vsak stoti element, in jo primerjajmo z množico naravnih števil. Mogoče bo vsaj ta množica imela manj elementov kakor množica naravnih števil. Poglejmo:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
100,	200,	300,	400,	500,	600,	700,	800,	900,	1000,	1100,	1200,	...

Vse zastonj. Ne splača se nič več niti poskušati. Isto bi dobili tudi, če bi primerjali množico naravnih števil z množico vseh mnogokratnikov milijona. Tudi teh bi bilo ravno toliko kakor vseh naravnih števil.

Za zdaj bi lahko rekli: Vse neskončne množice imajo enako veliko elementov in pri njih je del lahko enak celoti in - naj jih koklja brcne! Kaj pa moreš pri tem. Nihče nam ne sme očitati, da nismo poskusili vsega, samo da bi rešili svojo 'zdravo pamet'. Dobro, če je torej že tako, dajmo, rajši se malo pokratkočasimo na račun te nenavadne lastnosti neskončnega. Zamislimo si zato

HOTEL Z NESKONČNO VELIKO SOBAMI

Tega hotela sicer ne moremo narisati, pa nič ne de. Zamislimo si ga. Še laže si je zamisliti, da so vse sobe enoposteljne in - zasedene. Zaznamovane so, kakor v vsakem hotelu, s številkami, in sicer po vrsti

Ni res, poglej stran 120

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

V veži je receptor, ki gostom določa sobe, jim daje ključe in pobira denar (oskrba ne bo prevelika - zaradi tega, kar vam želimo pokazati). Rekli smo, da so vse sobe oddane, se pravi, da je v hotelu neskončno veliko gostov, ampak kakor nalašč - pride še en ugleden gost in receptor mu ne more kar tako reči:

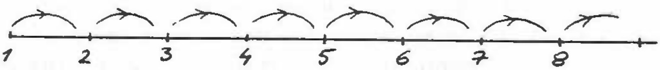
'Oprostite, mi je prav žal, vendar je vse zasedeno, poiščite si drug hotel.'

Po vsej sili ga želi sprejeti in spraviti pod streho, pa tako, da zaradi njega ne bo treba nobenemu gostu oditi iz hotela. Receptor se spričo te zadrege ne zmede, temveč mirno reče prišlemu gostu:

'Prosim vas, majčkeno počakajte, takoj vam najdemo sobo.'

Potem pa s primernim opravičilom poprosi gosta iz sobe številka 1, naj se preseli v sobo številka 2. Gosta iz sobe 2 premesti v sobo 3, gosta iz sobe 3 v sobo 4, gosta iz sobe 4 v sobo 5 in tako naprej.

Kaj je receptor dosegel s tem preseljevanjem gostov? Natančno tisto, kar je



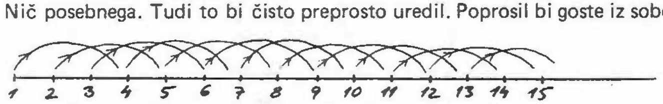
želel. Izpraznil je sobo številka 1 in vanjo nastanil novega gosta.

Upam, da me ne boste vprašali: 'In kaj je bilo z gostom iz zadnje sobe?'

Vidite, tako je receptor, ki je dobro poznal lastnosti svojega hotela, brez težav in neprijetnih razlag rešil to vprašanje.

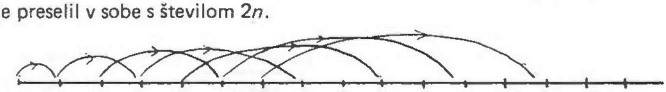
'In kaj bi se zgodilo, če bi na primer prišli *trije* novi gosti?'

Nič posebnega. Tudi to bi čisto preprosto uredil. Poprosil bi goste iz sobe 1,



2 in 3, naj se preselijo v sobe 4, 5 in 6. Gostje iz teh sob bi prešli v sobe 7, 8 in 9 in tako naprej in - prve tri sobe bi bile proste.

Prihodnji dan se je receptor vendar malo začudil. Vse sobe so bile polne, pa je prišlo še nešteto novih gostov. Kaj zdaj? Kam naj jih dene? Po prvem pretresu je popil hladen sok, malo premislil in - se spomnil rešitve. Gosta iz sobe 1 je premestil v sobo 2. Gosta iz sobe 2 v sobo 4. Gosta iz sobe 3 v sobo 6, potem gosta iz sobe 4 v sobo 8 in... zdaj že tako vidite, kaj je naredil. Goste z zapovrstnim številom n je preselil v sobe s številom $2n$.



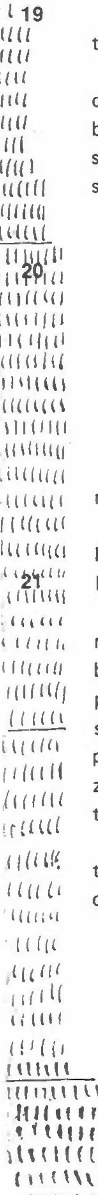
$$n \longmapsto 2n$$

Vam še ni do kraja jasno, kaj je dosegel s takim preseljevanjem? Veliko. Rešil je problem. Tako je izpraznil vse sobe z *lihimi* števili in vemo, da jih je neskončno veliko, tako da je lahko vanje nastanil vse došle goste, ne da bi moral kateri od starih gostov oditi iz hotela.

Kaj ni to praktičen hotel? Kakšna škoda, da ga ne moremo postaviti. V trenutku bi bili rešeni vsi stanovanjski problemi.

In zdaj poglejmo še, kaj se bo zgodilo, ko bodo začeli gostje iz našega hotela odhajati. Se bo hotel izpraznil? Dobro vemo, da v gostiščih nimajo radi, da so jim hiše na pol prazne. Ampak v tem nenavadnem hotelu teh težav nimajo.

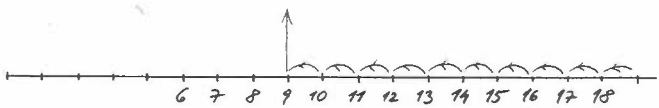
Hotel je ne glede na odhajanje gostov zmeraj - poln.



'Gosti odhajajo, hotel pa zmeraj zaseden. Ni to vendarle malo preveč?' pravite.

Priznam, precej nenavadno, ampak poglejte, kaj bo v tem primeru naredil receptor. Vzemimo, da je odšel gost iz sobe 9, tako da je ta soba ostala prazna. Da bodo spet vse sobe polne, bo gosta iz sobe 10 preselil v sobo 9, gosta iz sobe 11 v sobo 10, gosta iz sobe 12 v sobo 11, iz sobe 13 v sobo 12 in tako naprej in - vse je spet polno. Vidim, da ste doumeli postopek, zato me niti ne vprašate:

'Kaj ne ostane tako zadnja soba prazna?'



'No, dobro, pa vzemimo, da iz hotela odide neskončno veliko gostov. Potem mora hotel ostati - vsaj na pol prazen,' pravite.

Še malo ne! Receptor bo v tem primeru naredil ravno nasprotno od tistega, kar je naredil, ko je v hotel prišlo neskončno veliko gostov, in hotel bo spet poln. Kaj bo torej naredil?

Zdaj vidite, kakšne stvari se vse dogajajo v hotelu z neskončno veliko sobami, v hotelu, ki je na oni strani meje, ki deli končno od neskončnega. Za tiste, ki bi živeli okraj te meje, bi bilo vse normalno, vsakdanje, v skladu z njihovo 'zdravo pametjo' in vsakdanjo izkušnjo, nenavaden, tuj, nelogičen in mogoče še celo - smešen pa bi se jim dozdeval naš svet končnega. Pomislite, koliko bi se namučili, preden bi razumeli kakšnega svojega matematika, ki bi jim rekel, naj si poskušajo zamisliti hotel, v katerega pride na primer petdeset gostov, pa je - zaseden. Ali: hotel zapusti petdeset gostov in hotel je - prazen. Prav gotovo bi rekli:

'Kakšne neumnosti pa so to. Ti matematiki si res izmišljajo vse mogoče, potem se pa še čudijo, če naši otroci - nimajo radi matematike.' Vsekakor se mi zdi, da je to mogoče tudi edina stvar, glede katere bi se z 'njimi' takoj strinjali.

Ker smo že toliko govorili o neskončnih količinah, si oglejmo še, kako jih s simboli nakažemo in kako si zapisujemo 'število', ki pripada neskončni količini. Običajno znamenje za neskončno bržkone že poznate. Tako je kakor osmica, ki se je zleknila, da bi malo zadremala.

$$\infty$$

Kajne da ste že videli ta simbol? Ampak matematiki imajo tudi znamenje za število, ki pripada množici z neskončno veliko elementi. Kardinalno število množice, ki je ekvipolentna množici naravnih števil, zaznamujemo s pismenko, ki so si jo (proti potrdilu) sposodili iz hebrejskega alfabeta, in sicer

$$\aleph_0 \qquad \text{(beri: alef nič)}$$

'Pa zakaj ravno iz hebrejskega alfabeta?' me sprašujete.

Samo zato, ker so jim že stari geometri porabili vse črke grškega alfabeta, tako da so se morali zateči k hebrejskemu. Zastran tega jim ne mislimo nič očitati. Še zmeraj je bolje tako, kakor če bi jo bili vzeli iz kitajske abecede. Če torej z **N** zaznamujemo množico naravnih števil (in teh je, kakor vemo, neskončno veliko), bo

$$k\,(\mathbf{N}) = \aleph_0$$

(beri: kardinalno število množice naravnih števil je alef nič).

'Dobro, vse to je lepo, ampak ali je tudi kakšna praktična korist od uvedbe števila $\aleph_0$?' vas zanima.

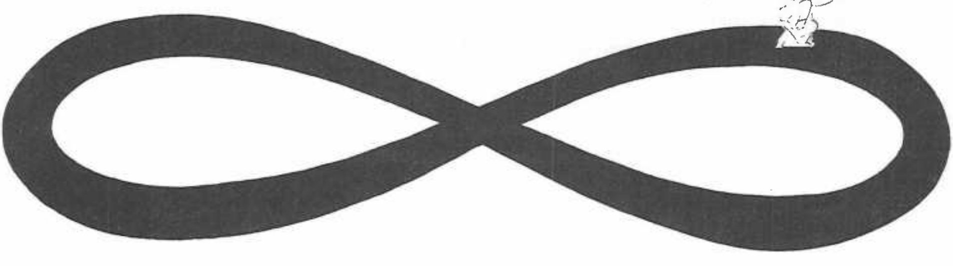
Seveda je, zakaj pa ne. Matematiki ga pogosto uporabljajo in z njim se lahko - poleg drugega - krajše in natančneje izražajo. Poglejte, vse, kar smo na primer govorili o dogajanju v hotelu z neskončno veliko sobami, lahko matematik napiše v obliki enakosti, ravno če uporabi število alef. Vzemimo prvi primer: ko je v zasedeni hotel prišel še en gost in ga je receptor nastanil, ne da bi moral kateri od prejšnjih gostov oditi iz hotela, ne pomeni nič drugega, kakor da je

neskončno in eden je enako neskončno,

to pa matematik napiše takole

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

(beri: alef nič in ena je enako alef nič).



Enakost, ki opisuje primer s tremi gosti, se glasi

$$\aleph_0 + 3 = \aleph_0$$

Če pride neskončno veliko gostov v zasedeni hotel, opišemo to z

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Odhod prvega gosta pomeni, da je

$$\aleph_0 - 1 = \aleph_0$$

odhod neskončno veliko gostov pa zaznamujemo takole:

22. $$\aleph_0 - \aleph_0 \leqq \aleph_0$$

Vidite, že teh nekaj zgledov kaže, da je uvedba števila alef smiselna že zato, ker nam skrajšuje pisanje. Matematiki so dobro vedeli, zakaj so ga vpeljali. O, to so pametni ljudje, samo...

'No, zdaj smo se nazadnje menda vendarle naučili vsega, kar je treba vedeti o naravnih številih in o njihovih lastnostih,' mi pravite (upam) vsaj malo zadovoljni in že pošteno utrujeni zaradi vseh teh zgledov, simbolov, izrazov...

Čakajte, žal ni čisto tako, ampak *za začetek* naj bi bilo dovolj.

Moral bi vam pokazati vsaj še to, da je množica naravnih števil

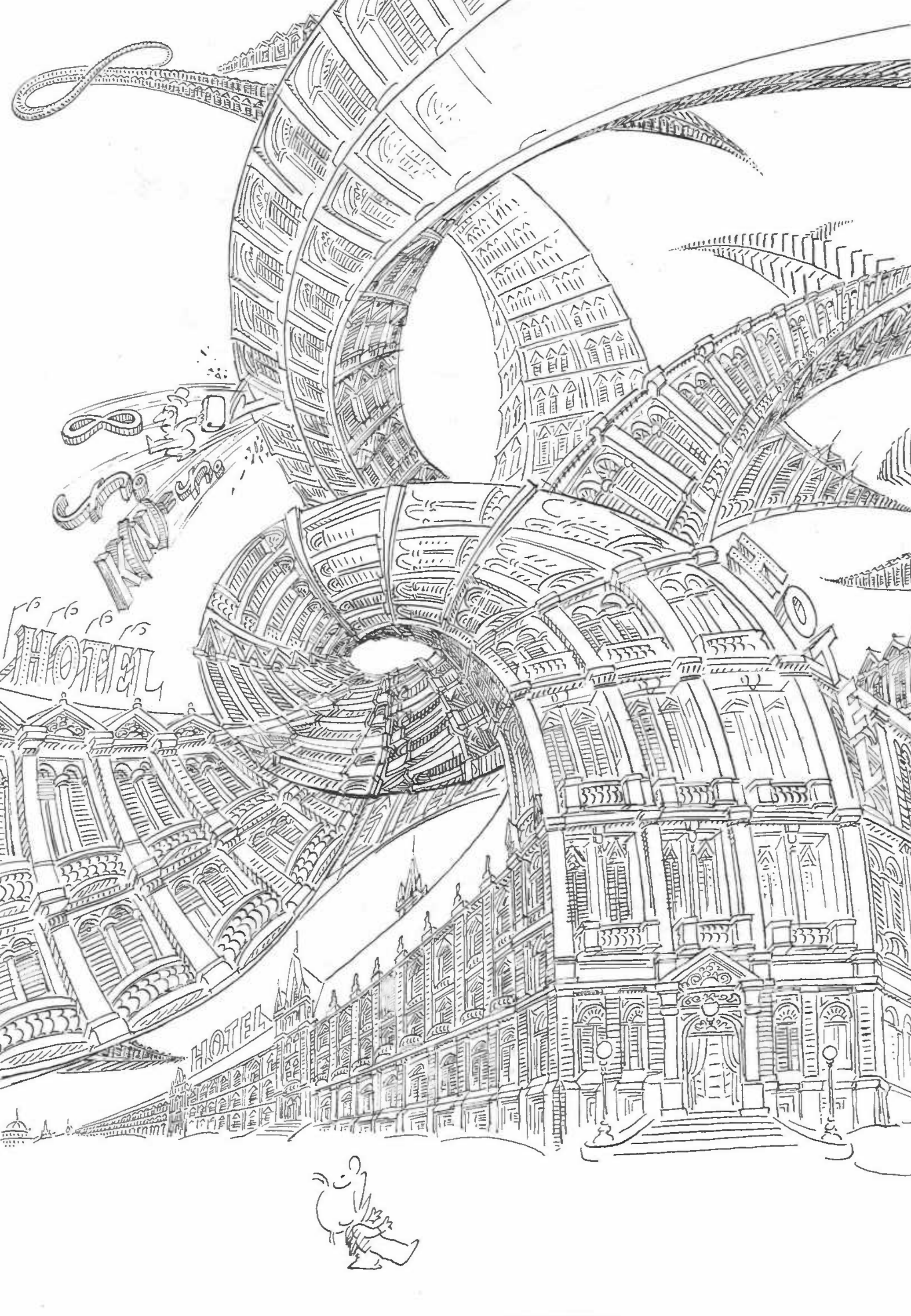
- diskretna,
- urejena oziroma dobro urejena.

....

Sicer pa pustimo nekaj tudi za matematike. Ti vam bodo takoj ne samo pokazali, temveč tudi - dokazali (ker so globoko prepričani, da bi jim brez dokaza sploh ne verjeli). Samo to bi vam rad še pojasnil, zakaj sem vas takoj v začetku prosil, da te knjige nikar ne kažite matematikom. Rajši jim sploh ne omenjajte, da ste jo brali.

'Zakaj? Je mogoče v nji kaj narobe napisano, kaj takega, s čimer se ne strinjajo? Ali ne drži to, kar tu piše?' me malo presenečeni sprašujete.

Oh, ne, ne. Sploh ne gre za to. Njim to ne bo ljubo iz drugega vzroka. Rekli bodo nekako takole:


HOTEL
HOTEL

'Tu je veliko govorjenja, pa malo matematike. Vse to je mogoče povedati veliko bolj preprosto, krajše in natančneje. Na primer namesto vseh teh zgodbic (za otroke) o neskončnih množicah, hotelih in tako naprej, je treba reči samo:

Množica je neskončna tedaj in samo tedaj, če jo je mogoče bijektivno preslikati na njen pravi del.

In to je vse. Ni treba govoriti ne več ne manj. V tej definiciji je zajeto praktično vse, o čemer smo pripovedovali na celih *desetih* straneh. Škoda papirja. In časa.

Vidite, to vam bo rekel vsak pravi matematik.

Vem, da vas zanima, ali to drži. Ali je res vse zajeto v enem samem stavku.

Je, res je. Iz te definicije so (*zanje*) jasne vse lastnosti neskončnih množic. Zgledov vam pa - če ravno hočete - navedejo še petdeset drugih, ker je lahko vse navesti - na podlagi definicije. Seveda, če jo razumemo. Oni jo gotovo razumejo in doumejo, pa še kako! Vidite, ravno zato sem vas prosil, da te knjige nikar ne kažite matematikom. Ker ni pisana zanje, temveč za vas - ki ne znate in nimate radi matematike. Mogoče je komu od vas knjiga celo všeč. In če mi rečete:

'Uh, kakšen dolgčas je vse to', vam ne bom zameril, ker vem, da to ni rečeno toliko zaradi mene kolikor zaradi matematike. Bolj bi me motilo, če bi kateri od matematikov to pogledal in zagodrnjal:

'Vse to je plehko.'

Ali še hujše:

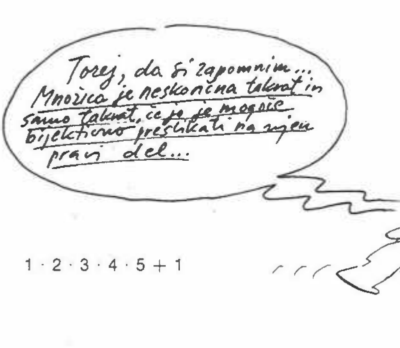
'To je šund.'

Pa vendar, nikdar zaradi tega ne bodimo hudi na matematike. Poznam jih veliko in verjemite mi, da so prav posrečeni in simpatični ljudje. Radi se pošalijo in pripovedujejo vice, strogi so pa samo, ko gre za matematiko. Radi bi vas z malo besedami (pa z veliko formulami) veliko naučili. In ravno zato jih je včasih težko razumeti. In v tem je po navadi vzrok nesporazumov. Pošteno se bodo začudili, če jim boste povedali, da vam definicija: Množica je neskončna takrat in samo takrat, če jo je mogoče bijektivno preslikati na njen pravi del - prej nič ni povedala (dokler niste njenega pomena izkustveno doživeli pri hotelu z neštetimi sobami).

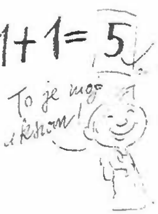
Pa je tako
- jasna,
- jedrnata,
- natančna,
- popolna.

In vi je prej res ne bi razumeli?

Nezaslišano!"



Aksiomi - pravila igre



"Že v začetku smo navedli izrek velikega matematika iz prve polovice 20. stoletja, Davida Hilberta,[14] ki ga imajo na splošno za zadnjega vsestranskega matematika, to je matematika, ki se je skoraj z isto lahkotnostjo sprehajal po vseh področjih matematike in rekel: 'Matematika je samo igra, ki jo igramo po določenih preprostih pravilih z oznakami, ki so brez pomena.'

Ta 'definicija' se vam je najbrž zazdela, ko ste jo prebrali, samo duhovita, malo šaljiva izjava o matematiki pa - nič več. Vendar ni samo besedna igra, temveč skriva v sebi tudi globoko resnico o matematiki, če jo jemljemo aksiomatsko, se pravi kot znanost, ki sloni na sistemu aksiomov. Aksiomi pa so, to je znano, očitne resnice, ki jih ne dokazujemo. Ni jih treba dokazovati, ker so sami po sebi tako jasni, razvidni, logični, da jih ni mogoče dokazati s še bolj preprostimi izreki. Tako je bilo vsaj včasih. V davnem času, ko je živel kralj, ki je imel tri sinove...

Danes ni več tako (seveda, saj tudi kraljev ni...). Aksiomi v sodobni matematiki niso ravno očitni, eni pravijo, da ni nikjer rečeno, da bi morali biti resnični, o dokazovanju pa rajši kdaj pozneje. Zato jemljimo aksiome samo kot nekakšne podmene, iz katerih izhajamo. Tisti, ki jih daje, ni dolžan nikomur polagati računov o tem, zakaj je razglasil za aksiome ravno take in ne kakšne drugačne trditve. To je njegova stvar. Zato pa bodo matematiki, če s sistemom aksiomov ni kaj 'v redu', sklicali svoje sodišče in sistem bo obsojen na smrt. Aksiomi kakšne matematične teorije oziroma strukture namreč izrekajo temeljne lastnosti te strukture. Ampak če z aksiomi ni kaj v redu, 'pade v vodo' tudi vsa struktura, na katero se nanašajo aksiomi. Tu ni šale. Vsak sistem aksiomov mora ustrezati dvema temeljnima pogojema.

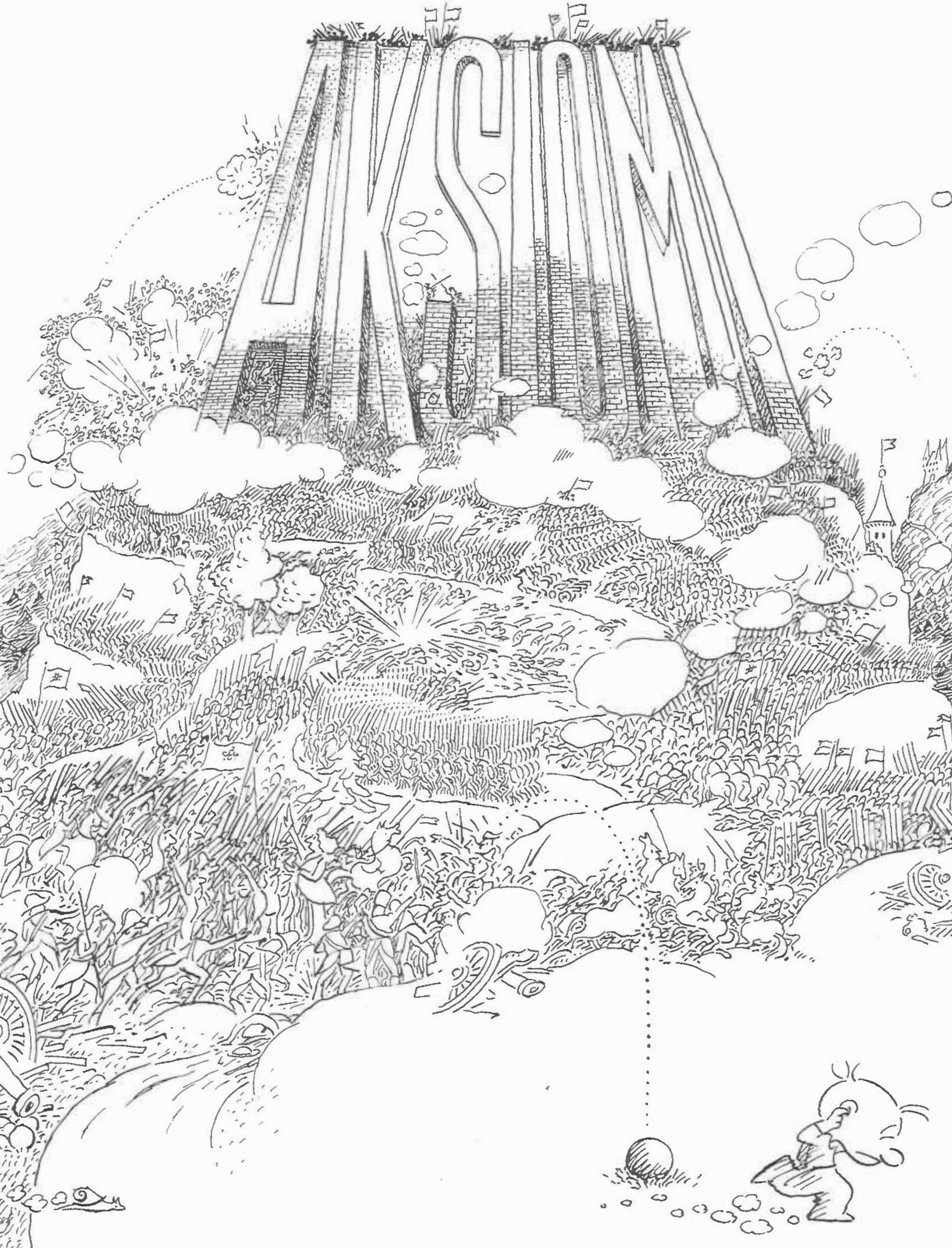
Biti mora:

- popoln,
- neprotisloven.

Sistem je popoln, če je v njem vse potrebno za izoblikovanje teorije ali strukture, na katero se nanaša. Ne sme nič manjkati. Da je sistem aksiomov neprotisloven, ne pomeni nič drugega, kakor da z *istimi* aksiomi ni mogoče priti do sklepa, da kaj (ista stvar) je in ni, se pravi, da na podlagi istih aksiomov ne moremo priti do sklepa, da je kakšna trditev resnična in hkrati - neresnična.

---

[14] David Hilbert (1862 - 1943), nemški matematik iz 19. in 20. stoletja, ki je raznim področjem matematike dal pomembne prispevke. Imajo ga za zadnjega vsestranskega matematika. Ukvarjal se je poleg drugega tudi s teorijo števil, z matematično logiko, z osnovami matematike, z diferencialnimi in integralnimi enačbami, poleg tega pa je tudi elementarno geometrijo postavil na strogo aksiomatske temelje. Njegova dela so znatno vplivala na matematiko 20. stoletja.


AKSIOMA

Če pa se to kljub vsemu zgodi, kazensko odgovarja avtor (pa ne te knjige, temveč) aksiomov. Naravo aksiomov v znanosti je prvi opazil bržkone največji um antičnih časov, ARISTOTEL,[15] ki je sodil, da morajo biti na vseh znanstvenih področjih izjave ali izreki, ki so sami po sebi očitni in jih ni treba dokazovati, temveč so podlaga in dajejo najbistvenejše na področju posamezne znanosti.

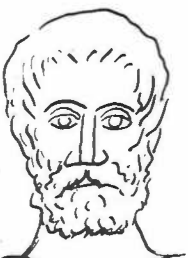
V geometriji je Evklid prvi postavil tak sistem aksiomov in definicij, s katerim je lahko izpeljal vse dotlej znane geometrijske ugotovitve. Zato upravičeno trdimo, da je šele od tedaj matematika - natančneje, geometrija - deduktivna znanost, to je znanost, ki na podlagi določenega števila izhodnih trditev izpeljuje vse nadaljnje. Da boste videli, kakšni so bili Evklidovi aksiomi, bomo navedli prvih pet aksiomov geometrije v ravnini.

Zahtevano je:

1. da je mogoče od vsake točke do katere si že bodi druge točke potegniti premico;

2. in da je mogoče vsako premico neomejeno nadaljevati;
3. in da je mogoče iz poljubnega središča s poljubnim polmerom narisati krožnico;
4. in da so vsi pravi koti enaki;
5. in da se dve premici - presekani s tretjo premico - sekata na tisti strani te premice, kjer je vsota kotov, ki ju oblikujeta premici s tretjo premico, manjša od dveh pravih kotov.

Čeprav so imeli Evklidovi aksiomi tudi pomanjkljivosti, so se ohranili praktično nespremenjeni vse do 19. stoletja. Moramo priznati, da je bil Evklid bistra glava. Ampak oglejmo si še malo teh pet aksiomov. Če jih dobro pretehtamo, vidimo - pa čeprav nismo matematiki - precejšnjo razliko med prvimi štirimi in petim. Prvi štirje so kratki, jasni in očitni, da jih lahko sprejmemo brez dvomov. Zato pa je peti nekam 'sumljiv'. Predvsem - je dolg. Težko si ga je takoj zapomniti in ponoviti. Poleg tega tudi ni tako razumljiv kakor prvi štirje. Če ga hočemo razumeti, moramo vzeti svinčnik, papir, ravnilo in - risati. Napravimo tako.

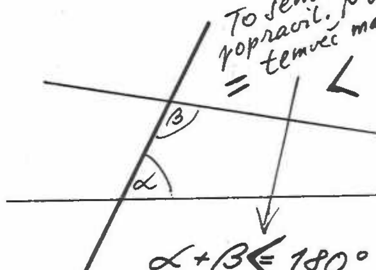


Αριστοτέλης

grški filozof, bleščeč um, izredno znanje in fantazija ...

to sem tudi jaz prebral v splošni enciklopediji

To sem popravil. Ni temveč man



$\alpha + \beta < 180°$

15 Aristotel (384 - 322 pred našim štetjem), največji starogrški filozof in učenjak. Položil je temelje številnim znanstvenim panogam.

1 · 2 · 3 · 4 · 5 + 4

Če dobro pretehtamo sliko, postane položaj majčkeno jasnejši, vendar še naprej ostane nekaj dvomov. In ne samo pri nas nestrokovnjakih. Tudi matematikom se je od prvega dne zdel nekam problematičen. Sumili so, da jim je Evklid kaj 'podtaknil', vendar mu niso mogli nič dokazati. Ampak sum je kljub temu ostal. Aksiom so zato izročili v postopek svojim najboljšim raziskovalcem. Ko bi vi vedeli, kaj vse so počeli z njim (pa tudi on z njimi, si lahko mislite). Poskušali so ga poenostaviti, skrajšati, izpeljati iz drugih aksiomov, drugače formulirati...

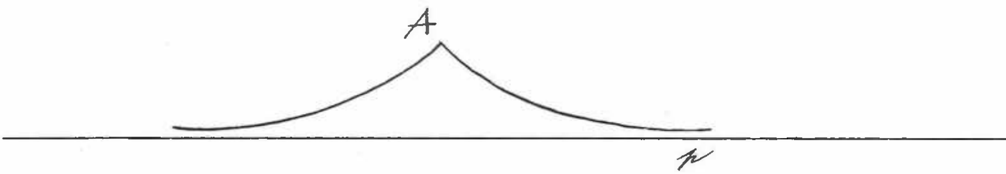
Vse do kraja, vam rečem. Matematiki so se s petim aksiomom ubijali celih devetnajst stoletij (pa recite, če niso trdovratni!). In navsezadnje ga niso ne spodbili ne dokazali. Aksiom je ostal še danes isti, kakor je bil pred dva tisoč leti. Vsa čast mu! Ampak najbolj zanimivo je, da vsi ti napori kljub vsemu niso bili v prazno. (Domnevam, da ste se že privoščljivo veselili, da so jo tudi matematiki vsaj enkrat 'nadrsali'.) Poglejte, kaj se je kljub vsemu zgodilo.

Matematiki so bili pri kraju z živci zaradi večstoletnega ubijanja s tem aksiomom, zato so se odločili za skrajno metodo, ki jo le neradi uporabljajo. Ampak kaj, tudi z njo niso imeli ne kaj dobiti ne izgubiti. In če poči, naj pač poči. Aksiom so kratko in malo - izpustili. Gladko so se napravili 'neumne'. Kakor da ga sploh ni. In takrat so šele debelo pogledali. Sami sebi niso mogli verjeti. Z nekakšnimi predrugačitvami so dobili - novo geometrijo, v kateri je bilo vse usklajeno. Pa ne samo to. Ugotovili so, da je takih geometrij več, da ni samo ena. In kakšne čudne geometrije so to!

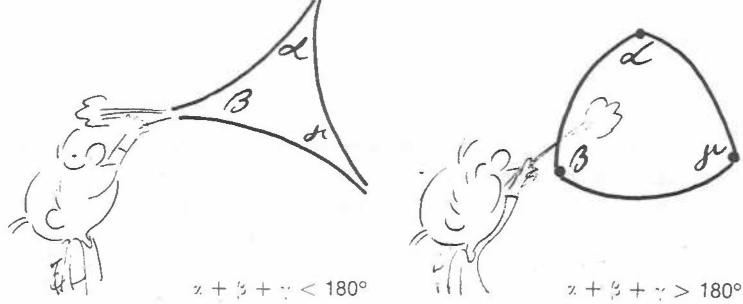
V njih:

23 - skozi dano točko lahko potegnemo dve premici, vzporedni z dano premico (kakšne smešne premice),

- skozi dano točko ne moremo potegniti nobene premice, vzporedne z dano premico,



- vsota kotov v trikotniku je lahko večja ali manjša od 180° (jaz se pa dobro spominjam, da je moj najboljši prijatelj Peter dobil cvek iz matematike, ko je učitelju rekel, da je vsota kotov v trikotniku 150°).



Tem geometrijam, v katerih peti aksiom *ne velja*, so matematiki na kljub Evklidu rekli neevklidske geometrije. Tako so se maščevali Evklidu zaradi aksioma, ki jih je mučil stoletja. Naj se ve, da tudi Evklid ni alfa in omega v geometriji. Ali kakor pravimo:

'Vsak mojster najde svojega mojstra.'

Ob tem zgledu vidimo, kako so matematiki v resnici nenavadni ljudje:

- vztrajni,
- potrpežljivi,
- iznajdljivi.

Če se polotijo kakšnega problema, ga rešujejo, če je treba, tudi tisoč let, dokler ga ne

- rešijo,
- dokažejo, da je nerešljiv, ali
- si izmislijo kaj tretjega.

Namesto da bi ga pustili pri miru ali - ga poslali k vragu. Ampak potem matematiki ne bi bili - matematiki. Bili bi isto kakor mi - navadni ljudje. Če kakšnega problema ne rešimo v eni uri, dveh, ga pustimo in se polotimo drugega dela. Ali odidemo na tekmo. Je mogoče v tem kaj slabega?"

Kako se matematiki "igrajo"

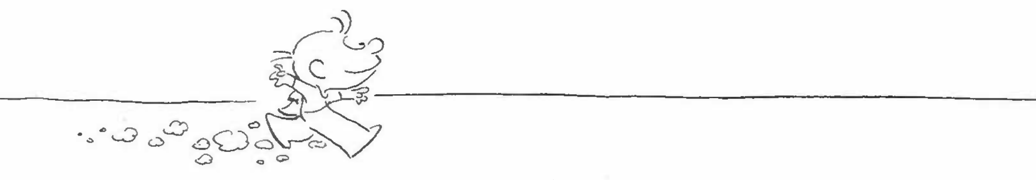
"Videli smo, da je imel še celo veliki Hilbert tudi matematiko za - igro.

In kako se matematiki 'igrajo'?

Ena njihovih priljubljenih iger je približno takale:

Postavijo sistem aksiomov. V skladu z njimi izpeljejo tudi razne teoreme, leme, korolarje, definicije...[16] Potem gledajo, kaj vse je mogoče izpeljati iz tega. Najboljši igralec je tisti, ki more izpeljati obsežnejšo, popolnejšo teorijo, ki 'pokriva' večje področje. Kolikor več sklepov ob kar najmanj aksiomih - tem bolje. To

[16] Lema je pomožni izrek, po navadi stopnja v dokazovanju kakšnega zapletenega izreka (teorema). Korolar je izrek, ki ga brez posebnih težav lahko izpeljemo iz kakšnega drugega izreka. Z definicijami uvajamo nove pojme, ki jih opisujemo z že znanimi.



je nekaj podobnega kakor pri šahu. Tudi tu so pravila igre. Vsako figuro je mogoče premikati samo po določenih pravilih in ta je treba spoštovati, drugače igra nima smisla. Pravila so kakor - aksiomi.

Čeprav vsi šahisti poznajo igralna pravila (aksiome), vemo, da niso vsi enako dobri igralci. Kakor so med šahisti veliki mojstri (spomnite se samo Aljehina, Botvinika, Talja,Spasskega, Fischerja, Karpova, Gligorića in drugih), potem velemojstri, mojstri, povprečni igralci in 'pocarji', ki izgubijo partijo v peti potezi s 'šuštarmatom', tako je tudi med matematiki. Nekateri so zelo veliki, nekateri pa taki (in teh je največ), kakor smo tudi mi (nekje med 'pocarji' in povprečnimi igralci). Ne v šahu, še posebej pa ne v matematiki ni zadosti samo nadarjenost. Treba je dobro poznati tudi teorijo. In preučevati igre velikih mojstrov. No, zdaj vam je mogoče malo jasnejši smisel Hilbertove definicije matematike. Velemojster ne bo postal vsak, ampak z nekaj prizadevnosti in poznanja teorije, je mogoče vsaj - uživati v igri.

'Prav gotovo je vse to zelo zanimivo in poučno,' boste rekli spričo pripovedi o aksiomatiki, 'pa se nam vendarle zdi, da vsaj za naravna števila ni treba nobenih aksiomov. Naj je vsaj nekaj v matematiki tudi pristopno in razumljivo.'

Mi je prav žal, vendar je bilo to, kar ste rekli, resnica - pred devetdesetimi leti.

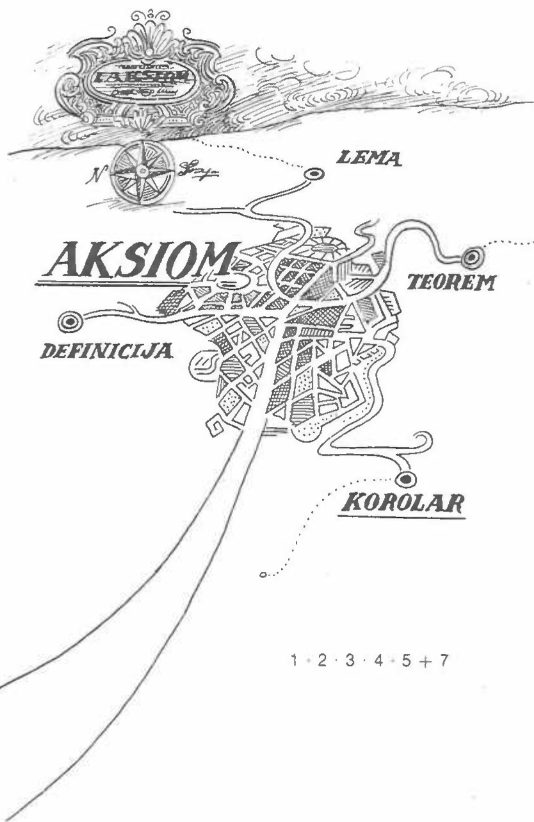
'Pa menda ne boste rekli, da obstajajo tudi za naravna števila kakšni aksiomi?'

Obstajajo, seveda obstajajo, kaj bi ne. Postavil jih je italijanski matematik PEANO [17] že leta 1891, zato jih njemu na čast imenujemo Peanovi aksiomi. Ampak nikar se nič ne plašite. Tudi ti aksiomi so precej preprosti in razumljivi. Sicer pa, tukaj so:

1. 1 je naravno število.

2. *Vsako* naravno število n ima natančno *enega* naslednika n' ($n' = n + 1$).

3. 1 ni naslednik nobenega števila.



[17] Giuseppe Peano (1858 - 1932), italijanski matematik in logik.

1 · 2 · 3 · 4 · 5 + 7

4. Če je $m' = n'$, potem je tudi $m = n$.

5. Vsaka množica, v kateri je 1 in ki ima z vsakim številom n tudi n' ($n' = n + 1$), obsega vsa naravna števila.

No, to so znameniti Peanovi aksiomi. Nič groznega. Skoraj vse že od kraja razumemo. Kljub temu jih bomo na kratko pojasnili. Pri prvem aksiomu tako rekoč nimamo kaj reči. Samo ugotavlja, da je 1 naravno število (vem, da boste takoj pripomnili: 'oh, to vemo vendar tudi brez aksioma'). Tudi drugi aksiom samo ugotavlja, da za vsakim naravnim številom neposredno sledi samo *eno* naravno število, ki mu pravimo naslednik tega števila. Po navadi ga zaznamujemo s črtico. Tako je:

1 = nezadosten, kakor cvek, ampak njegov prijetni naslednik 2 je zadosten

$1' = 2$	(beri: naslednik ene je dve)
$2' = 3$	ali
$7' = 8$	ali na splošno
$n' = n + 1$	(naslednik n je $n + 1$)

Tretji aksiom nam pravzaprav pove, da je 1 najmanjše naravno število ali da 1 nima svojega predhodnika med naravnimi števili. Četrti aksiom spet izreka trditev:

Če sta *naslednika* dveh števil enaka, potem sta tudi ti števili enaki.

Razumljivo je, da nobeno naravno število ne more imeti različnih *predhodnikov*. Posebno pomemben je peti (že spet peti) aksiom, ki mu pravimo tudi načelo popolne ali totalne indukcije. Pove nam tole:

Če je v množici 1 in če je v nji s katerim si že bodi številom n obenem njegov naslednik (to je $n + 1$), mora množica obsegati tudi vsa naravna števila. Vsaka množica torej, ki ima 1 in 'avtomatsko' obsega ob številu n še $n + 1$, je množica vseh naravnih števil. Tako smo se seznanili tudi z eno od sodobnih matematičnih aksiomatik in - ostali živi.

Slišim vas, kako pravite: 'Sijajno.'

No, hvala bogu, da vam je bilo nazadnje vendarle nekaj iz matematike všeč - in sem tudi jaz koga naučil kaj matematike (matematiki mi bodo morali za to dati še posebno priznanje).

'Pa vendar nam nekaj še ni popolnoma jasno.'

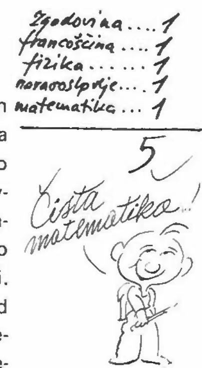
Kar mirno vprašajte, zato sem tu, da vam razložim (čutim, kako sem se že popolnoma vživel v vlogo nič manj in nič več kot - profesorja matematike).

'Še zmeraj nam ni čisto jasno, za kaj imamo te aksiome, ko vendar naravna števila poznamo tudi - brez njih.'

(Uh, lepa reč, tega mi pa res ni bilo treba. Ravno uživam, kako sem vse lepo pojasnil, in zdaj tako vprašanje. Pa mi je čisto prav, če sem želel igrati profesorja. No, nekako se moram izvleči.)

Hjaa, one, hmm, kako naj vam reečem (moram uporabljati takole mečkanje, da pridobim nekaj časa in si medtem kaj izmislim), opravičilo za aksiome prav gotovo obstaja, ne glede na to, da poznamo naravna števila in njihove lastnosti. Sami veste, da obstajajo vse mogoče množice - končne in neskončne. Če torej o kakšni množici ugotovimo (na srečo sem se vendar domislil nekakšnega opravičila, za naprej bom moral pa dobro paziti, kaj govorim, da mi ne bodo znova postavili takole neprijetnih vprašanj), da ustreza Peanovim aksiomom, se lahko pokaže (vem, da mi bodo verjeli na besedo in ne bodo zahtevali, naj to *jaz* razkažem in dokažem), da ima *lastnosti* množice naravnih števil. In to bi bilo že zadostno opravičilo za obstoj aksiomatike naravnih števil (no, domislil sem se še enega vzroka, tako da se že lahko delam tudi malo važnega). Poleg tega lahko vso *teorijo* naravnih števil izpeljemo natančno - kakor imajo pač radi matematiki - iz teh aksiomov in, kar priznajte, da je tudi to dokaz, da so aksiomi - koristni in potrebni. Torej, pravila igre so tu, kaj pa bomo napravili z njimi, je odvisno od tega - kakšni mojstri smo.

Računske operacije z naravnimi števili



Vem, dobro vem, da ne računate radi (jaz ravno tako ne), brez skrbi zastran tega. Tu ne bomo računali, temveč samo malo pokramljali o računanju. Sicer pa tudi matematiki čedalje manj računajo. Ti kvečjemu izdelujejo programe, dajejo navodila, določajo, *kaj* je treba izračunati, račun sam pa opravi - stroj. Zagotavljam vam, da je skoraj vsak natakar spretnejši v praktičnem računanju kakor matematik. S tem niti malo ne mislim zmanjševati pomena računanja. Še malo ne. To nam je prav gotovo potrebno v vsakdanjem življenju. In *moramo* znati računati. Želim pa vas kljub temu opozoriti na popolnoma napačno, čeprav (posebno med starši) zelo razširjeno mnenje, da je otrok, ki na primer hitro sešteva, že zaradi tega tudi dober matematik. To sta dve različni stvari, med katerima skoraj ni nobene zveze. No, toliko o tem. Samo da se ve.

No, in zdaj poglejmo, katere računske operacije z naravnimi števili imamo. Saj jih že poznate. Jasno, to so:

- seštevanje,
- množenje,
- odštevanje,
- deljenje.

'Zakaj pa po tem vrstnem redu? Je to po naključju?' sprašujete.

Ne, ni po naključju. Med njimi je bistvena razlika. Prvi dve operaciji sta premi ali direktni, drugi dve obratni ali inverzni.

'Dobro, in v čem je razlika?'

Poglejte, v temle. Če *kateri si že bodi* naravni števili seštejemo ali pomnožimo, bo rezultat *vselej* naravno število. Torej nas ti (se pravi premi) računski operaciji *ne spravljata* iz množice naravnih števil. Sicer pa tudi sami poskusite sešteti in pomnožiti kateri si že bodi naravni števili, pa boste vselej dobili naravno število.

Na primer:

$9 + 15 = 24$	$3 + 24 = 27$	
$9 \cdot 15 = 135$	$5 \cdot 6 = 30$	itd.

Pri drugih dveh računskih operacijah se to ne zgodi vselej. Rezultat odštevanja in deljenja je lahko naravno število, vendar ni nujno. Vzemimo:

$9 - 6 = 3$	(3 je naravno število), vendar že
$6 - 9 = -3$	(−3 ni naravno število) ali
$20 : 4 = 5$	(5 je naravno število), vendar
$4 : 5 = \frac{4}{5}$	($\frac{4}{5}$ ni naravno število)

Zato pravimo, da je množica naravnih števil *zaprta* za seštevanje in množenje, ni pa zaprta za odštevanje in deljenje. Če samo malo pomislimo, bomo lahko hitro odgovorili na tale vprašanja:

24 1. V katerih primerih je rezultat odštevanja naravnih števil naravno število?

25 2. Kdaj bo rezultat deljenja naravno število?

In zdaj poglejmo, kaj je pravzaprav vsota dveh števil.

Na to vprašanje lahko odgovorimo takole: Če sta a in b naravni števili, obstaja zmeraj eno in samo eno (tako radi pravijo matematiki) naravno število, ki mu pravimo njuna vsota, označujemo ga pa z $a + b$.

'Nič posebnega,' pravite.

Dobro, dobro, samo rajši nikar - ne vlecite vraga za rep (boste že še videli, kaj je vsota). Na podlagi definicije vsote poskušajte sami definirati zmnožek dveh števil. Skozi dolga stoletja so matematiki ugotovili, da za seštevanje in množenje veljajo posebna pravila. In sicer brez izjeme. In so jih razglasili za - zakone. In gorje se tistemu, ki jih prelomi (ta izrek sem vzel iz svetega pisma).

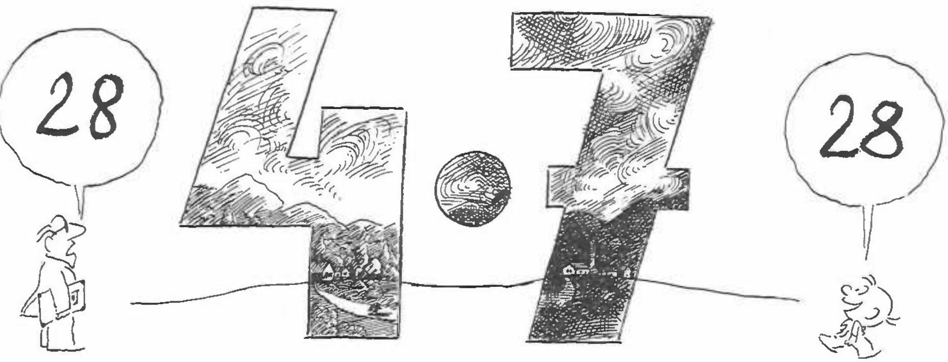
Ne verjamete?
Poskusite!
Tole so ti zakoni:
1. Zakon zamenjave ali komutativnosti (za seštevanje)

za vsak $a, b \in \mathbf{N}$ $\quad a + b = b + a$

Ta zakon nam torej pove, da vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevancev (nič drugega, kakor da je na primer 4 + 6 = 6 + 4 - lahko zamenjaš vrstni red seštevancev, pa dobiš isto vsoto). Isti zakon velja tudi za množenje. Se pravi:

za vsak $a, b \in \mathbf{N}$ $\quad a \cdot b = b \cdot a$

torej: $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$
Velja ta zakon tudi za odštevanje?



2. Zakon asociativnosti (za seštevanje)

za vsak $a, b, c \in \mathbf{N}$ $\quad (a + b) + c = a + (b + c)$

Za množenje se ta zakon glasi:

za vsak $a, b, c \in \mathbf{N}$ $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ta zakon torej trdi, da vsota ali pa zmnožek treh naravnih števil *nista odvisna* od načina združevanja seštevancev ali pa faktorjev v skupine.
Potemtakem je:

$$(5 + 8) + 3 = 5 + (8 + 3), \quad \text{tj.}$$
$$13 + 3 = 5 + 11$$
$$16 = 16$$

ali za množenje

$$(3 \cdot 5) \cdot 6 = 3 \cdot (5 \cdot 6)$$
$$15 \cdot 6 = 3 \cdot 30$$
$$90 = 90$$

Če bi našli tri naravna števila, za katera to ne velja, bi matematike pograbil obup. Izgubili bi vero v matematiko, marsikateri med njimi bi jo pustil in se začel ukvarjati - s filatelijo. Kakor vidimo, je tem zakonom skupno, da veljajo tako za seštevanje in za množenje (to lahko izkoristimo, da se nam ju ni treba dvakrat učiti, da imamo vsaj nekaj od tega).

Zdaj preglejmo nadaljnja dva zakona za *seštevanje*.

3. Naj sta a in b naravni števili. Tedaj je $a + b \neq a$. S tem zakonom je pravzaprav mogoče potrditi, da ničla ni naravno število. Saj bi samo za ničlo veljalo

$$a + 0 = a$$

ker pa ničla ne pripada množici naravnih števil, mora biti zmeraj

$$a + b \neq a$$

Za dve naravni števili bo na primer

$$2 + 3 \neq 2$$
$$5 + 1 \neq 5 \qquad \text{in tako naprej.}$$

4. Če so a, b, c naravna števila ($a, b, c \in$ N), velja:
če je $a + c = b + c$, potem je $a = b$.

Tej lastnosti seštevanja naravnih števil pravimo tudi *zakon krajšanja* ali *kancelacije*. Iz njega razberemo:

če sta vsoti dveh seštevancev enaki in če je v obeh seštevkih po en seštevanec isti, morata biti tudi druga dva seštevanca enaka.

Iz

$$x + 6 = y + 6 \qquad \text{izhaja, da je} \qquad x = y$$

=

enako...

In zdaj še dva zakona za *množenje*.

3. Za vsako naravno število a velja

$$a \cdot 1 = a$$

Ta zakon pove, kakor vidimo, kako množimo z 1. Če pomnožimo katero si že bodi naravno število z eno, se število ne spremeni, torej

$$3 \cdot 1 = 3, \qquad 7 \cdot 1 = 7, \qquad 1 \cdot 1 = 1, \qquad \text{itd.}$$

In navsezadnje še zakon distributivnosti (porazdelitve), ki mu pravimo tudi 'zakon pravičnosti'.

≠

...ni enako...!

4'. Množenje naravnih števil je distributivno nasproti seštevanju naravnih števil, to je

$$\text{za vsak } a, b, c \in \mathbf{N} \qquad a(b+c) = ab + ac$$

Poglejmo to na nekaj zgledih

$$3(5+7) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \qquad \text{in naprej}$$
$$3 \cdot 12 = 15 + 21$$
$$36 = 36$$

ali

$$4(3+8) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 8$$
$$4 \cdot 11 = 12 + 32$$
$$44 = 44$$

Tu torej vidimo, kako se je treba otresti oklepajev. Iz tega zakona izvira tudi znamenito pravilo: 'Če pred oklepajem plus stoji, oklepaja treba ni, če pa minus tam straši, nasprotno vrednost naredi.' To je pravzaprav zakon v ljudski priredbi. Matematično sicer ni popolnoma pravilen, vendar je praktičen in si ga lahko zapomniš. Kaj pa moremo, včasih se moramo tudi sami zavarovati pred matematično suhostjo.

Poglejmo, kako iz zakona distributivnosti izvira navedeno 'pravilo':

$$(+1)(a+b) = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b \qquad \text{in}$$
$$(-1)(a+b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = -a - b$$

ali npr.

$$(+1)(7+2) = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 2 = 7 + 2 = 9, \qquad \text{ali}$$
$$(-1)(7+2) = (-1) \cdot 7 + (-1) \cdot 2 = -7 - 2 = -9$$

Priznam, da sem v drugem primeru pretihotapil dve stvari, zaradi katerih bi se matematikom naježili lasje. Ampak prava reč. In zakaj bi si sploh gnal k srcu, saj te knjige tako ali tako ne bodo brali matematiki. Važno je, da ste vi doumeli, kaj sem želel povedati.

To so torej najpomembnejši zakoni za računanje z naravnimi števili. V njih je očitno samo uzakonjeno tisto, kar sicer že od nekdaj počnemo pri računanju. In tudi vsak dan jih uporabljamo, ne da bi se tega sploh zavedali (potemtakem bi človek celo rekel, da smo bolj pametni, kakor mislimo). Če ne verjamete, kar poglejte, kje jih uporabljamo.

Na primer zakona komutativnosti in asociativnosti za seštevanje. Če seštejemo nekaj števil, potem ko jih zapišemo drugo pod drugo, seštevamo po navadi *od zgoraj* navzdol

$$\begin{array}{r} 14 \\ 6 \\ 13 \\ \hline 33 \end{array} \downarrow \uparrow$$

Če preverimo račun tako, da šeštevamo *od spodaj* navzgor, uporabimo pri tem zakona komutativnosti in asociativnosti, saj vemo, da mora biti rezultat v obeh primerih isti.

$13(7+3)+3$

Večje število seštevancev pogosto seštevamo tako, da jih uredimo v manjše skupine in jih potem seštejemo. Pri tem uporabimo zakon asociativnosti (včasih pa tudi komutativnosti).

$$\left.\begin{array}{r}13\\7\end{array}\right\}20$$

$$\left.\begin{array}{r}29\\11\end{array}\right\}40$$

$$\overline{60}$$

ali $13 + 29 + 7 + 11 = (13 + 7) + (29 + 11) =$
$= 20 + 40 = 60$

Če računamo na primer zmnožek $7 \cdot 26$, uporabimo po navadi najprej zakon distributivnosti, potem pa zakon asociativnosti za seštevanje, to je računali bomo (ne da bi pri tem kaj prida premišljevali) takole:

$7 \cdot 26 = 7 \cdot (20 + 6) = 140 + 42 = 140 + (40 + 2) = (140 + 40) + 2 =$
$= 180 + 2 = 182$

Vse te zakone torej ne samo poznamo, temveč jih celo uporabljamo. Samo nečesa mogoče nismo vedeli - da so to zakoni. Sicer je pa mogoče še celo bolje, če tega ne vemo. Smo že taki po naravi, da bi jih mogoče še - namenoma kršili. Kdo bi vedel! Vse, kar je prepovedano, nas privlači. Tako smo se torej seznanili z računskimi operacijami in njihovimi zakoni. Vse je tako jasno in razumljivo, kakor da ni matematika. Tudi če to drži, se vendar nikar prezgodaj ne veselimo, da smo vse zlahkoma doumeli. Še posebej se nikar ne bahajmo pred kakšnim matematikom, da nam je - če nič drugega - čisto jasno, kaj je na primer seštevanje ali množenje. Če mu boste rekli, da vse veste o seštevanju, vas bo pozorno poslušal, pokimal in rekel:

'Zares zanimivo. Skoraj sem čisto pozabil na to. Drži, drži, natanko tako so razlagali pojem seštevanja tudi v Avstro-Ogrski ob času Marije Terezije in Franca Jožefa. Noter do malo pred prvo svetovno vojno, če me spomin ne vara.'

Osupnete. Ni vam čisto jasno, o čem govori (saj vam tudi zgodovina z vsemi temi cesarji in kralji ni čisto jasno pred očmi; v tem se je težko znajti).

'Prav vam je. Vam je bilo to potrebno?' vas vprašam.

'Da se z matematiki pogovarjamo o matematiki? Kaj ste padli z Lune? To je isto, kakor bi Arabcem razlagal, kaj je pesek, Eskimom pa pripovedoval o ledu.'

'Dobro, kako bi pa danes definirali seštevanje?' nadaljujete svoj pogovor z matematikom (in še nič ne slutite, kako boste 'nadrsali' tudi brez ledu), ker ste prepričani, da vsaj to veste, kaj je seštevanje in množenje, čeprav nič drugega ne veste iz matematike.

'To je vsaj preprosto:

Seštevanje je funkcija $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{+} \mathbf{N}$, ki je dana z $(a, b) \mapsto a + b$ $(a, b \in \mathbf{N})$,' vam reče matematik in vas gleda čez naočnike.

'Kaj, kaj, seštevanje je...?'

'Funkcija $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{+} \mathbf{N}$,' ponovi on, ker misli, da niste dobro slišali.

'In kako bi to pojasnili?' se poskusite izvleči s še enim vprašanjem, medtem ko si ne morete opomoči od osuplosti.

'Ne vem, kaj naj bi tu razlagali, ko je vse zajeto v definiciji' - in vašega pogovora z matematikom je konec.

'O zmnožku ste še celo pozabili vprašati, v strahu, da boste dobili odgovor: Produkt je funkcija $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{\cdot} \mathbf{N}$, dana z $(a, b) \mapsto a \cdot b$ $(a, b \in \mathbf{N})$.'

Tako je in zdaj ste me prišli vprašat:

'In kaj je pravzaprav rekel matematik?'

Pri vsej nepremišljenosti imate še srečo, da po naključju jaz vem. Meni je to definicijo - v znamenje hvaležnosti, ker sem mu podaril vstopnico za nogometno tekmo - razložil neki študent matematike. Po triletnem študiju prvega letnika matematike je pravzaprav presedlal med zobarje, vendar to nič ne spremeni. Mogoče mi je ravno zato utegnil razložiti definicijo.

Poslušajte, kako mi je ta matematik - zobar - razložil:

'$A \times B$ - ali $M \times N$, $X \times Y$ in podobno - je v navadi kot označitev za kartezični produkt množic,[18] ta produkt pa sestoji iz vseh urejenih dvojic teh množic. Če je na primer $A = \{a, b, c\}$ in $B = \{1, 2\}$, bo $A \times B = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$, torej množica šestih elementov, elementi pa so urejene dvojice. Ravno tako je na primer $B \times B = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2)\}$ in tako naprej.

$\mathbf{N}$ je označitev za množico naravnih števil, torej je

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je množica vseh mogočih urejenih dvojic, katerih elementi so naravna števila. Teh je seveda neskončno veliko, zato nam $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ predstavlja (krajšano napisano) vse urejene dvojice oblike

$$\begin{array}{l}
\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \ldots \\
\phantom{\{}(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \ldots \\
\phantom{\{}(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), \ldots \\
\phantom{\{}(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), \ldots \\
\phantom{\{}(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), \ldots \\
\phantom{\{}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\phantom{\{}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}
\end{array}$$

[18] S kartezičnim produktom smo se seznanili že prej, ko smo preučevali množice (na strani 80).

Če si zdaj zamislimo kateri si že bodi naravni števili, ki ju želimo sešteti, bosta v eni od teh dvojic. Želimo na primer sešteti števili 4 in 2. Dvojica (4, 2) je v naši shemi v četrti vrsti v drugem stolpcu. (Dvojica (42, 156) bo potemtakem v dvainštirideseti vrsti in stošestinpetdesetem stolpcu.)

Znamenje + nad puščico ($\xrightarrow{+}$) pomeni, da je treba števili a in b sešteti. Če torej rečemo, da je seštevanje funkcija

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{+} \mathbf{N}, \quad \text{dana z} \quad (a,\ b) \mapsto a + b \quad (a,\ b \in \mathbf{N})$$

s tem samo izrečemo resnico, da je poljubni dvojici števil iz množice **N** x **N** prirejeno natanko eno število iz množice **N**.

Slikovito bi to podali lahko takole:

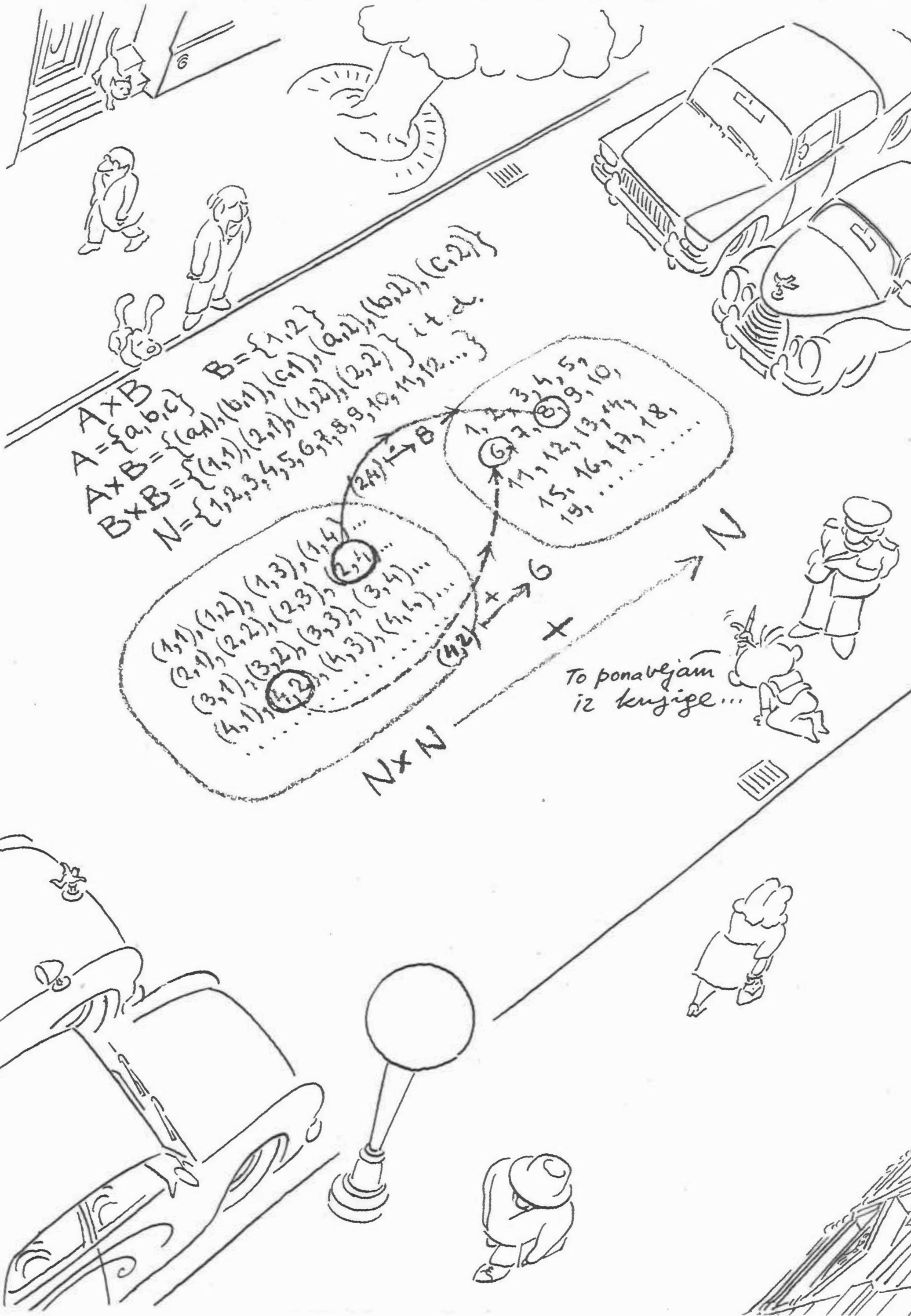
$(2,\ 4) \xrightarrow{\cdot} 8$ $\qquad$ $(4,\ 2) \xrightarrow{+} 6$

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), . . . $\qquad$ 1, 2, 3, 4, 5,
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), . . . $\qquad$ 6, 7, 8, 9, 10,
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), . . . $\qquad$ 11, 12, 13, 14,
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), . . . $\qquad$ 15, 16, 17, 18,
. . . . $\qquad$ 19, ...

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{\qquad + \qquad} \mathbf{N}$$

V našem primeru je dvojici (4, 2) prve množice pridruženo število 6 iz druge množice. To nam kaže definicija seštevanja. Pri množenju je podobno. Vsaki dvojici števil prve množice je prirejeno po eno število (element) druge množice. Iz slike je jasno, da pomeni na primer (2, 4) $\longrightarrow$ 8. Tako je meni razložil tisti nesojeni matematik. Če je kajpak on narobe razložil meni - sem tudi jaz vam.

Drugače vam moram priznati, da sem bil zelo ponosen, ko sem že po dveh urah pojasnjevanja doumel, kaj je seštevanje. Skoraj me je že navdala želja, da bi šel tudi jaz študirat matematiko (sklepal sem: temeljne računske operacije so podlaga matematike in če sem to mogel razumeti, bo šlo vse drugo igraje), pa sem se kljub temu še o pravem času premislil. Vendar sem svoje znanje matematike dobro izkoristil. Do zdaj sem že dvakrat šel stavit (za gosposko večerjo v najdražji restavraciji), in sicer z nekim zdravnikom specialistom in z znanim inženirjem arhitekture, da ne vesta - kaj je seštevanje. Oba sta z nasmeškom sprejela stavo, ker sta bila prepričana, da se bosta brezplačno gostila. Seštevanje sta poskušala razložiti kratko in malo z 'zdravo pametjo'. Inženir je poskušal tudi nekaj risati po številski premici. Brez uspeha. Ko sem jima povedal, kar sem zvedel od svojega študenta - sta brez besed plačala račun in me gledala, kakor da sem priletel z Lune. Prepričan sem, da jima še danes ni jasno, ali sta stavo v resnici izgubila ali pa sem



A×B
A={a,b,c} B={1,2}
A×B={(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)}
B×B={(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)} i t.d.
N={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12...}
N×N
N
G
To ponavljam iz knjige...

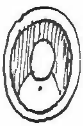
ju samo našestnajstil. Pozneje sem zvedel samo to, da sta znancem pripovedovala, kako da se pajdašim z matematiki in da sem tudi jaz že malo 'pricvrknjen'. Navadna človeška hudobija. Sem mogoče jaz kriv, če sta mislila, da vesta - kaj je seštevanje.

'Pa seštevanja naravnih števil res ni mogóče drugače definirati in pojasniti?' me sprašujete.

Zakaj ne, lahko. Tudi takole lahko rečemo:

Funkcija $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, za katero velja $f(m, 1) = s(m)$ [19] in $f(m, s(m)) = s[f(m,n)]$ za vsak $n, m \in \mathbf{N}$, se imenuje seštevanje na množici $\mathbf{N}$ in namesto $f(m,n)$ pišemo $m + n$, se pravi, po definiciji postavljamo

$$m + n = f(m, n) \quad \text{za vsak} \quad m, n \in \mathbf{N}$$



Seštevanje lahko tudi definiramo....

'Hvala, hvala, to nam čisto zadostuje. Zdaj nam je v resnici jasno, kaj je seštevanje.' (Ta je v resnici premaknjen, pa ne tako malo - si mislite pri tem.)

Ker ste se seznanili s seštevanjem, mi preostane samo še, da vas opozorim na odštevanje kot računsko operacijo...

'Kaj je treba tudi odštevanje tako zapleteno razložiti?'

Nee, ne, pa vendar... vam priporočam, da odštevanja niti ne omenite pred matematiki kot posebno računsko operacijo. Napravite se kratko in malo, kakor da še nikoli niste slišali o njem in - v njihovih očeh vam bo zrasel ugled.

'Zakaj pa to? Smešno. Pa zakaj naj zatajimo odštevanje?'

Ne želim se z vami pregovarjati o tem, samo opozarjam vas, vi pa napravite, kakor vam drago. Matematiki namreč, vsaj nekateri od njih, odštevanja sploh nimajo za posebno računsko operacijo, zato ga rajši - zamolčite.

'Pa kako je mogoče, da ne priznajo - odštevanja. Neumnost. Kaj pa je potem na primer $5 - 3$, če ni odštevanje? Da ni nemara seštevanje? Ha, ha, ha...'

Je, pa ravno to. Rekli vam bodo, da je $5 - 3$ seštevanje v množici celih števil, in vam ga razložili nekako takole:

5 in -3 sta elementa množice celih števil ($\mathbf{Z}$). V tej množici je seštevanje definirano kot funkcija $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \xrightarrow{+} \mathbf{Z}$, dano z $(a, b) \longmapsto a + b$ za $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$. Potemtakem s $5 + (-3)$ označujemo *seštevanje* dveh celih števil (nikakor pa ne odštevanja) in s to vsoto je določeno eno samo celo število, in sicer je (v našem primeru) to 2.

'Poglej, poglej, kdo bi si mislil. Se pravi, da potemtakem odštevanja ni. Dobro, in kaj je z odštevanjem ulomkov?'

[19] Tu je $s(m) = m' + 1$ za vsak $m \in \mathbf{N}$.

Nič. To je spet *seštevanje* v množici *racionalnih* števil, na primer:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3})$, $\frac{1}{2}$ in $-\frac{1}{3}$ pa sta elementa množice racionalnih števil (**Q**) in v tej množici je seštevanje definirano kot $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \xrightarrow{+} \mathbf{Q}$, dano z

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{Z}\,;\; b, d \neq 0)$$

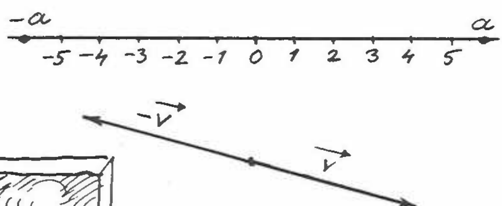
Se pravi, da je v množici celih, racionalnih in realnih števil samo seštevanje. To je videti malo nenavadno, vendar moram priznati, da je precej logično in - racionalno. Odštevanje namreč lahko, kakor smo videli, spremenimo v seštevanje.

'Kaj pa potem pomeni znamenje –, če ni znamenje za odštevanje števil?'

To znamenje ima še celo dvojen pomen. Uporabljamo ga za označevanje negativnih števil (–2, – 7/8, – 25, ...), pa tudi za označevanje nasprotnih števil. Če je na primer *a* katero si že bodi število, je *–a* nasprotno število. To lahko vzamemo še bolj splošno. Če je *a* neka količina (na primer vektor), je *–a* označitev za nasprotno količino (nasprotni vektor). Vam je zdaj jasno, zakaj pred matematiki rajši nikar ne govorite o odštevanju kot računski operaciji?

'No ja, jeee, pa vendar...'

Že razumem, ampak..."



Pogovor o ničli

"O ničli, kaj pa se moremo pogovarjati o ničli?' vem, da me bo kdo od vas vprašal, ko vas bo presenetil naslov, saj: 'Ničla, to je vendar isto kakor nič, ničla sploh ni pravo število, temveč navadna - ničla in kaj je mogoče pri tem še povedati,' pravite.

S tem se ne bi ravno strinjal, zato vas prosim, bodite potrpežljivi in svojo sodbo o ničli izrecite šele na koncu našega pogovora. Ničla le ni tako brez pomena, kakor se nam zdi na prvi pogled. Število nič ima več zanimivih lastnosti in želel bi se pogovoriti z vami ravno o tem. Poglejmo najprej, kako je ničla nastala. Poskušajmo odšteti, oprostite, sešteti dve *nasprotni* števili, na primer

$$3 + (-3) = 0, \quad 17 + (-17) = 0, \quad 105 + (-105) = 0$$

ali na splošno

$$a + (-a) = 0$$

pa bomo kot rezultat *zmeraj* dobili - nič.

Vidite, z odštevanjem smo prišli do števila nič. Vendar včasih to ni šlo tako hitro in preprosto kakor danes nam. O ne, potrebnih je bilo veliko naporov in časa, preden so vsaj vsi matematiki doumeli in priznali, da je nič enakopravno število z drugimi števili. Kaže, da so ničlo najprej poznali in z njo računali matematiki v Indiji že pred tisoč leti, evropski matematiki pa so bili dolgo v dvomih, ali naj jo priznajo kot 'pravo' število ali ne. Vemo, da je na primer eden od drugače zelo znanih in spoštovanih angleških matematikov[20] še v 17. stoletju zatrjeval, da ničla - ni število. Vprašanje ničle (pa tudi vprašanje negativnih števil) je bilo do kraja razjasnjeno šele v 18. in 19. stoletju. Vidite, tudi iz tega lahko spoznate, koliko je ničla 'mlajša' od naravnih števil.

'In h katerim številom prištevamo nič, k pozitivnim ali negativnim?'

Ne k tem ne k onim. Je ravno na meji med njimi. Na častnem prostoru, saj nič ni kar tako. Nič je - nič.

'Je nič mogoče spraviti v zvezo tudi z množicami?' vprašate.

Kaj bi ne mogli! Z njimi je v neposredni povezavi, saj izvira iz - prazne množice. Nič smo, če se še spomnite, (na strani 84) definirali kot kardinalno število prazne množice in zapisali

$$k\,\emptyset = 0$$

To je torej število, ki pove, koliko je v prazni množici elementov. Vendar moramo dobro paziti, da tega zapisa ne zamenjamo z zapisom

$$k\,\{0\}$$

saj ta predstavlja kardinalno število množice z *enim* elementom, zato je

$$k\,\{0\} = 1$$

Znano je namreč, da sta znamenji za prazno množico $\emptyset$ ali ϑ.

In zdaj poglejmo, katere so lastnosti ničle: Če prištejemo nič kateremu si že bodi številu, se to ne spremeni. Na primer:

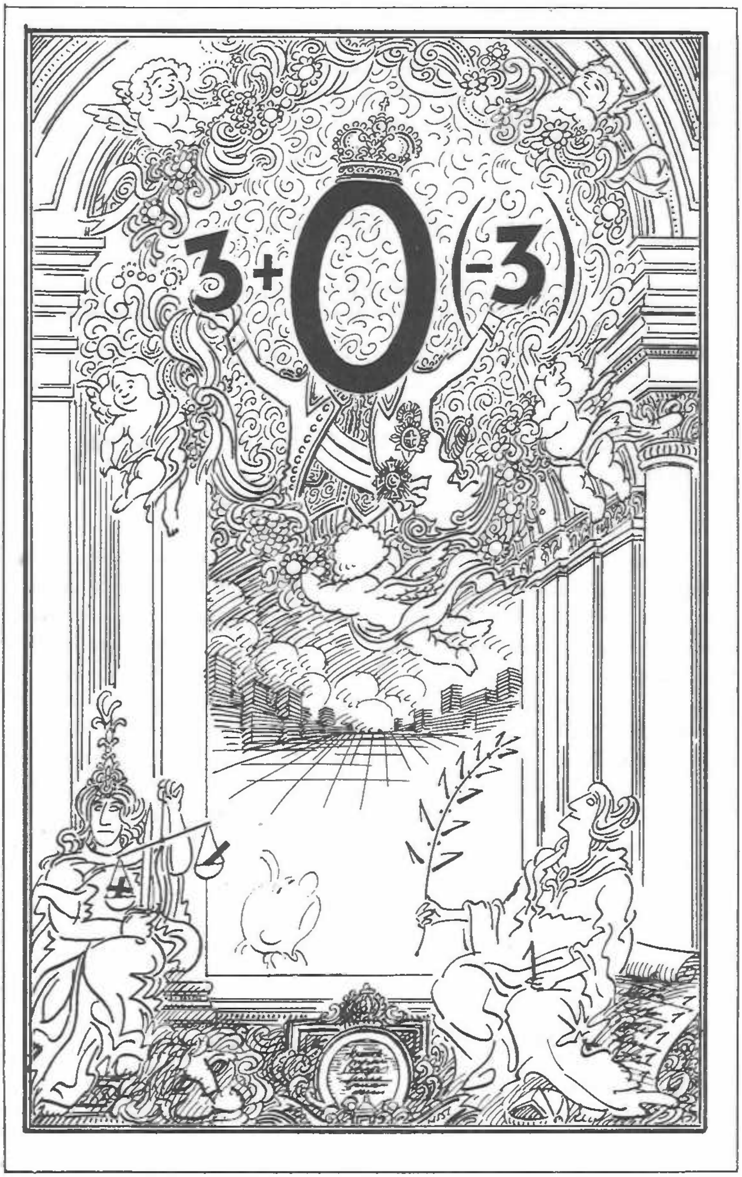
$$2 + 0 = 2, \quad 16 + 0 = 16, \quad 129 + 0 = 129, \quad \text{itd.}$$

ali na splošno za katero si že bodi število a

$$a + 0 = a$$

---

[20] John Wallis (1616 - 1703), profesor geometrije v Oxfordu, eden vodilnih matematičnih veljakov tistega časa.


3+0(-3)

Zato matematiki pravijo, da je nič *nevtralni* element za seštevanje. Spomnite se, da ima isto lastnost tudi število 1, vendar za množenje. Vem, da se vam ta lastnost niti ne zdi ne vem kaj posebnega. Prištejemo ga in - mirna Bosna. Ampak kaj je nič, se vidi šele pri *množenju*. Pomnožite *katero si že bodi* število, naj bo še tako veliko (in se zato šopiri), z nič, pa boste videli, kaj ostane od njega.

Poglejte:

$$9 \cdot 0 = 0 \qquad 76 \cdot 0 = 0 \qquad 1\,478 \cdot 0 = 0 \qquad 34\,782 \cdot 0 = 0$$

ali

$$23453467898765234678923746589234567892347 5269 \cdot 0 = 0$$

Kaj pravite zdaj o niču? Kaj ni pravi Krpan med števili? Če torej katero si že bodi število pomnožimo z nič, dobimo vselej $a \cdot 0 = 0$.

Kar poskusite, če morete, najti še kakšno drugo število s to lastnostjo.

Pa to še ni vse.

O deljenju z nič rajši sploh ne govorimo.

'Zakaj ne?'

Ker zaradi deljenja kakšnega števila z nič profesorje matematike grabi jeza. To imajo za hujši prestopek, kakor če odidete čez cesto, ko gori rdeča luč na semaforju, ali če se na primer peljete s kolesom *po levi* strani cestišča. Matematiki pravijo, da je po njihovih zakonih *prepovedano* deliti z nič, in se o tem sploh ne marajo pogovarjati. Neizprosni so, ko gre za njihove zakone. Verjemite mi, ti zakoni niso taki, kakor jih postavljajo pravniki in v katerih je zmeraj mogoče najti - luknjo. O, ne, ne! To so neprimerno strožji zakoni. Resnici na ljubo, v nasprotju z drugimi zakoni se tudi ne menjajo tako pogosto, tako da so večinoma v veljavi na sto in sto in tudi na tisoče in tisoče let in so veljavni v vseh državah na svetu - kjer koli so matematiki. Tako je z matematičnimi zakoni. Če se torej želimo ukvarjati z matematiko, jih moramo spoštovati. In sicer ne glede na to, ali živimo v Jugoslaviji, na Japonskem, v Kanadi, v Nepalu ali v Avstraliji.

Torej si zapomnimo:

Prepovedano je katero si že bodi število deliti z nič,

npr. $\cancel{46 : 0} \qquad \cancel{59 : 0} \qquad \cancel{478 : 0} \qquad \cancel{2345671 : 0}$

ali katero si že bodi število *a*:

$$\cancel{a : 0}$$

'Pa smemo vsaj nič deliti s kakšnim številom?' sprašujete.

Smete, zakaj ne. To je dovoljeno. Samo nič deliti z nič je prepovedano. Če delimo nič s kakšnim številom, dobimo vselej - nič. Na primer

$0 : 4 = 0 \qquad 0 : 16 = 0 \qquad 0 : 3578 = 0$ in tako naprej,

ali sploh za katero si že bodi število $a \neq \emptyset$, bo

$$0 : a = 0$$

Zdaj tudi sami vidite, da nič ni - kar tako. Zelo zanimivo število, zato ima tudi poseben prostor med števili. Nič je poleg tega edino število, zaradi katerega so morali matematiki sprejeti posebno pravilo (za deljenje). In to ni majhna stvar, ker matematiki nimajo radi izjem, zaradi nič pa so jo morali napraviti. Zato odslej nikar več ne govorite o ničli zviška, saj je nič pravo čudo med števili. Vidite, ravno zato sem se posebej želel pogovoriti o - ničli.

In zdaj še

Nekaj malega o drugih številih

Ker smo se v glavnih obrisih seznanili z naravnimi števili in z nekaterimi njihovimi lastnostmi, je čas, da to in ono spregovorimo še o drugih članih družine števil (samo toliko, da ne bodo užaljeni in ne bodo mislili, da jih podcenjujemo). Naj so namreč naravna števila še tako pomembna - in stara so pravzaprav ravno toliko kakor sama matematika - še malo niso dovolj niti za reševanje najpreprostejših računov iz vsakdanjega življenja. Na primer: 'nekdo ima 2 800 dinarjev, dolžan je pa 3 400 dinarjev. Koliko denarja mu je ostalo, potem ko je ves denar, kar ga ima, dal za poravnavo dolga?' Vsi vemo, da se odgovor na to vprašanje glasi: Dolžan je še 600 dinarjev (ker je 2 800 − 3 400 = −600), lahko pa bi rekli tudi takole: 'Ostalo mu je −600 dinarjev.' Že za reševanje takihle nalog nam ne zadostuje množica naravnih števil. Številsko območje moramo razširiti. S prvo razširitvijo številskega področja smo se že seznanili. To je bila uvedba ničle. Ničla obenem z naravnimi števili ustvarja novo množico, ki jo po navadi zapisujemo z $\mathbf{N}_0$ (beri: en nič) v nasprotju z množico **N** naravnih števil. Torej, to je množica

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Oprostite!
to sem prečrtal po pomoti!

BERI IN SE UČI... BESEDILO VELJA IN OSTANE

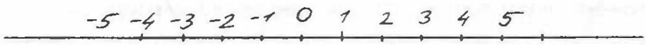
Lahko jo zapišemo tudi kot unijo množice naravnih števil in množice, ki jo sestavlja nič, to je

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$$

Če večja naravna števila odštevamo od manjših, dobivamo *negativna* števila. Na primer:

Npr. $3 - 7 = -4$ $\quad 12 - 25 = -13$ $\quad$ itd.

Naravna števila, nič in negativna cela števila sestavljajo množico *celih števil*, ki jo po navadi zaznamujemo z **Z**. Lahko jo pokažemo na številski premici



$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

ali

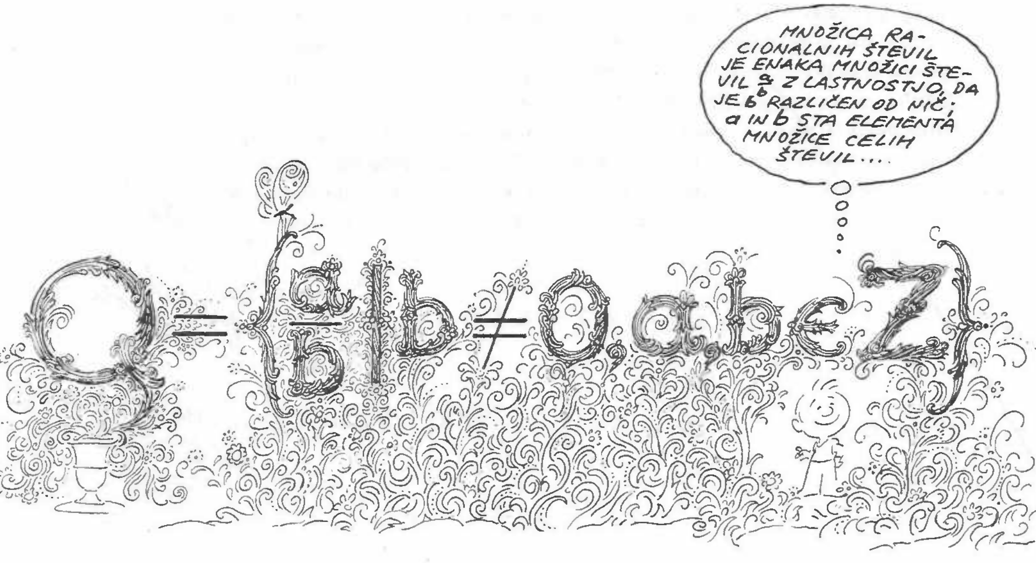
$$\mathbf{Z} = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 5,\ \ldots\}$$

to je

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

(beri: množica celih števil **Z** je enaka uniji množice naravnih števil, množice katere edini element je nič, in množice negativnih celih števil).

Nadaljnja razširitev številskega področja so ulomki oziroma racionalna števila. Moramo jih vpeljati, če hočemo deliti katero si že bodi celo število *a* s celim številom *b* ($b \neq 0$). Racionalna so števila, ki jih moremo napisati v obliki $\frac{a}{b}$, pri

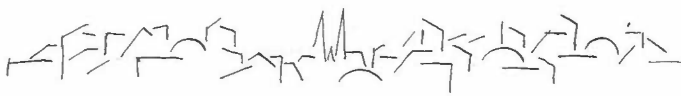


čemer sta a in b ($b \neq 0$) celi števili. Taka so na primer števila $\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{9}{10}, \frac{4}{7}$ in tako naprej. Tudi cela števila so torej racionalna (ravno tako kakor naravna števila pripadajo množici celih števil), saj vsako celo število lahko zapišemo kot ulomek, katerega imenovalec je 1, na primer

$$\frac{4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{56}{1}, \frac{237}{1}, \ldots$$

Množico racionalnih števil redno zapisujemo s črko **Q**. Po definiciji torej

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid b \neq 0,\ a,\ b \in \mathbf{Z} \right\}$$



Za racionalna števila je značilno, da jih lahko, če želimo, vse uvrstimo v eno zaporedje, tako da ni izpuščeno prav nobeno. Treba je samo po vrsti napisati vse ulomke, katerih vsota števca in imenovalca ima isto vrednost. To zaporedje se bo glasilo:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{6}{1}, \ldots$$

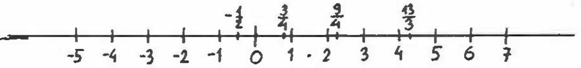
Če zdaj izpustimo števila, ki se ponavljajo (na primer $\frac{2}{2} = 1, \frac{3}{3} = 1, \frac{4}{4} = 1$ in tako naprej), če potem dodamo temu zaporedju ničlo in poleg vsakega pozitivnega števila zapišemo tudi negativno, dobimo zaporedje *vseh* racionalnih števil:

$$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \ldots$$

Zato matematiki pravijo, da je množica racionalnih števil 'števno neskončna', kakor je na primer tudi množica naravnih števil. Ta množica je povrh tega tudi *gosta*. Se pravi, da med *vsakima* dvema racionalnima številoma - pa naj sta si še tako blizu - obstaja racionalno število.

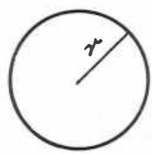
27 'Je množica naravnih števil gosta?'

Seveda se tudi racionalna števila kažejo na številski premici.



Vendar niti v množici racionalnih števil ni mogoče rešiti nekaterih preprostih nalog, ki so se pokazale v praksi. Poglejmo nekatere:

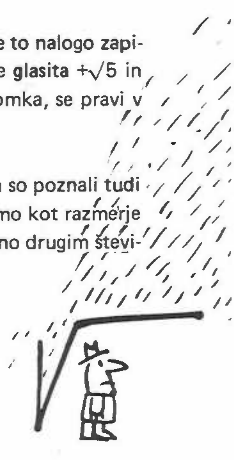
1. Poišči dolžino diagonale v kvadratu z znano stranico. (Rešitev je: $d = a\sqrt{2}$, števila $\sqrt{2}$ pa ni mogoče napisati v obliki ulomka $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0)$, se pravi, da ni racionalno število.)



2. Izračunaj obseg krožnice, če je dan polmer. (Rešitev: $O = 2r\pi$, števila π pa ravno tako ni mogoče napisati v obliki ulomka. Kakor vemo, je $\pi = 3{,}14159...$).

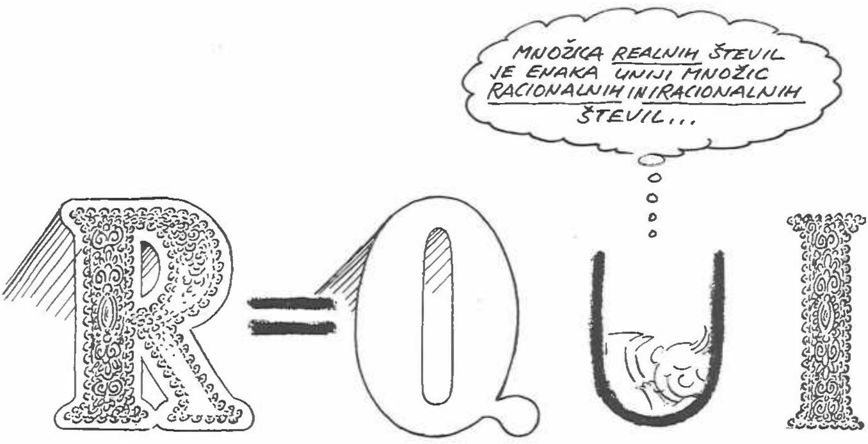
3. Poišči število, ki pomnoženo samo s seboj dá število 5. (Če to nalogo zapišemo v obliki enačbe, dobimo: Reši enačbo $x^2 = 5$. Rešitvi se glasita $+\sqrt{5}$ in $-\sqrt{5}$, števila $\sqrt{5}$ pa ravno tako ni mogoče napisati v obliki ulomka, se pravi v obliki $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0)$.)

Takih nalog bi lahko našteli še zelo veliko. Nekatere od njih so poznali tudi stari Grki. Vedeli so na primer za $\sqrt{2}$, vendar so ga pojmovali samo kot razmerje med diagonalo in stranico kvadrata, ne pa kot število, enakopravno drugim števi-



lom. Šele od 18. stoletja naprej števila, ki jih ni mogoče napisati v obliki ulomka $\frac{a}{b}$, veljajo kot števila, enakopravna drugim. Tem neracionalnim številom pravimo danes *iracionalna* (množico iracionalnih števil zapišemo z **I**). Racionalna in iracionalna števila sestavljajo množico *realnih* števil **R**. Torej

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$$



(beri: množica realnih števil je enaka uniji množic racionalnih in iracionalnih števil).

28 'Pa veste, koliko je realnih števil?'

Sprejeto je kot aksiom, da jih je ravno toliko kakor točk na premici.[21] Vsaki točki na premici ustreza *eno* realno število in narobe, vsakemu realnemu številu ustreza ena točka na številski premici.

'Se pravi, da jih je neskončno veliko, kakor tudi naravnih števil,' boste rekli in nadaljevali:

'Potemtakem je njihovo kardinalno število $\aleph_0$,' končujete ponosni, ker se lahko izražate v jeziku matematikov in ker vam je pojem neskončnega - jasen.

Hja, one, drži, tako je, imate prav. V resnici jih je neskončno veliko, pa jih je vendar več kakor naravnih števil.

---

[21] Glej besedilo na strani 198.

'Kako jih more biti več, če je že naravnih števil neskončno.'

To že, ampak kljub temu vam bo vsak matematik prisegel, da je realnih števil *več* kakor naravnih, vam rečem.

'Dobro, kaj pa je potem z našim pojmom neskončnega? Nazadnje se bo še pokazalo, da obstajajo različne neskončnosti. Ena manjša, ena večja, ha, ha, ha.'

Pa ravno to, uganili ste. 'Število' manjše je $\aleph_0$, 'število' druge,'večje' neskončnosti (ki nam pove, 'koliko' je realnih števil), pa $2^{\aleph_0}$ ali c. Pri tem je seveda $c > \aleph_0$. Matematiki že dolgo premišljujejo o tem, ali je med $\aleph_0$ in c še kakšno drugo neskončno 'število' ($\aleph_1$).

'Kaj, kaj pa govorite? Nas zafrkavate ali nas imate za bedake? Zdaj nam je še celo vse nejasno. Kako sta mogoči dve neskončnosti?' se začnete resno razburjati.

Stojte, lepo vas prosim. Zakaj vam takoj vzkipi kri? Saj tega sploh ne trdim jaz, temveč tako pravijo - matematiki. Spominjam se samo, da sem nekje prebral (ne spominjam se natančno, ali v *Anteni* ali v kakšni matematični brošuri), da je to mogoče celo dokazati. In obljubim vam, da vam bom prihodnjič lepo, natančno razložil. Verjemite mi. Ampak zdaj moram na sejo. Oprostite. Mudi se mi. Žal mi je, da ste me poslušali, hvala, res moram iti - oh, ne - hvala vam, ker ste me poslušali, žal mi je, ker moram res oditi. Na svidenje. (Mi je bilo to sploh potrebno? Kakšen vrag me je speljal v zgodbo o številih. Čisto malo je manjkalo, da nisem omenil še to, da obstaja tudi število $\aleph_2$. Kaj bi bilo šele potem? Na to ne smem niti pomisliti. Nazadnje bi bil še tepen. Jaz pa sem želel propagirati - matematiko. Prav se mi godi.)"

Je mogoče

10 + 10 = 100 ?

" 'Kakšno vprašanje pa že spet? Sicer res nismo ne vem kolikšni ljubitelji matematike in računanja, ampak taki nevedneži spet nismo. Vsak otrok ve, koliko je 10 + 10,' boste rekli, ko boste prebrali naslov. Če boste vprašali očeta, kaj on misli o tem, bo bržkone odgovoril: 'Vse je mogoče. Sam o sebi lahko povem, da sem nekaj takega že doživel, ko sem plačal račun v neki restavraciji. Ampak če te bo to vprašala učiteljica, vendarle reci, da je 10 + 10 = 20.'

Vem, da se vam zdi to nenavadno, vendar tako računajo - sodobni računalniki.

'Kaj, tudi ti ga radi malo cuknejo?'

Še misliti ni. Ne gre za to, le računajo v drugem številskem sistemu, tako imenovanem dvojiškem ali binarnem, in tole, kar je napisano v naslovu, je samo 2 + 2 = 4, vendar iz desetiškega prevedeno v dvojiški sistem.

'Kakšen sistem je vendar, če je v njem mogoče 10 + 10 = 100?' vas zanima.

V bistvu zelo preprost. Ima še celo prednosti pred našim navadnim desetiškim (dekadnim) sistemom, nenavaden pa je samo zato, ker ga nismo vajeni. Poskusil vam ga bom razložiti. Mi računamo in pišemo vsa števila v sistemu z osnovo 10, zato mu tudi pravimo desetiški. V njem vsako naravno število lahko napišemo z desetimi števkami:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Vsaka števka v sistemu ima svojo številsko in mestno vrednost. In kaj to pomeni? sprašujete.

Pokazal vam bom na zgledu. Vzemimo število 6666. To število sestoji iz štirih enakih števk - se pravi, da imajo vse isto številsko vrednost - vendar ima vsaka od njih drugo mestno vrednost. Prva od desne proti levi pomeni enice, druga desetice, tretja stotice, četrta pa tisočice. V desetiškem sistemu lahko *vsako* število zapišemo tudi z desetiškimi enotami

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7,\ \ldots$$

(vemo, da je za vsako število a, $a^0 = 1$, zato je tudi $10^0 = 1$).

Število 6666 torej lahko zapišemo tudi takole:

$$6666 = \mathbf{6} \cdot 10^3 + \mathbf{6} \cdot 10^2 + \mathbf{6} \cdot 10^1 + \mathbf{6} \cdot 10^0$$
$$(= 6 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 6 \cdot 1)$$

ali na primer

$$756 = \mathbf{7} \cdot 10^2 + \mathbf{5} \cdot 10^1 + \mathbf{6} \cdot 10^0$$
$$103 = \mathbf{1} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{3} \cdot 10^0$$
$$1000 = \mathbf{1} \cdot 10^3 + \mathbf{0} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{0} \cdot 10^0 \quad \text{itd.}$$

Jaz sem že pogledal rešitev

29 Poskušajte zdaj sami napisati s števkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in desetiškimi enotami števila:

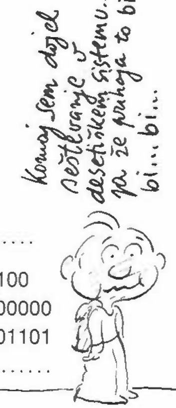
19, 234, 879, 903, 1024, 1469, 23456, 32470 in 3400892

$19 = 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$234 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
$879 = 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$903 = 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
$1024 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
$1469 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$23456 = 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$
$32470 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
$3400897 = 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

Če bi za osnovo številskega sistema vzeli število, večje od 10, bi morali vpeljati tudi nove števke, zapis števil pa bi bil krajši. Sistem z osnovo 12 bi imel tudi dvanajst števk. Če pa vzamemo za osnovo sistema število, manjše od 10, potrebujemo manj števk, zato pa je zapis daljši. Tako sta pri dvojiškem sistemu, se pravi pri sestavu z osnovo 2, zadosti samo dve števki za zapis katerega si že bodi števila. To sta tu števki 0 in 1, število 2 pa ima vlogo desetice v dvojiškem sistemu.

Poglejmo, kako ista števila zapisujemo v obeh sistemih:

Desetiški (dekadni)	*Dvojiški (binarni)*
1 $(= 2^0 = \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 1$
2 $(= 2^1 = \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0)$	$= 10$
3 $(= 2 + 1 = \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 11$
4 $(= 2^2 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0)$	$= 100$
5 $(= 4 + 1 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 101$
6 $(= 4 + 2 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0)$	$= 110$
7 $(= 4 + 2 + 1 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 111$
8 $(= 2^3 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0)$	$= 1000$
9 $(= 8 + 1 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 1001$
10 $(= 8 + 2 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0)$	$= 1010$
11 $(= 8 + 2 + 1 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 1011$
12 $(= 8 + 4 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0)$	$= 1100$
13 $(= 8 + 4 + 1 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$	$= 1101$
....	....
+32	
100 $(= 64 + 4)$	$= 1100100$
256 $(= 2^8)$ +128	$= 100000000$
429 $(= 256 + 32 + 8 + 4 + 1)$	$= 110101101$
....	....



in tako naprej (ker se meni ne da več računati), vam bi pa priporočil, da napišete še tale števila v dvojiškem sistemu:

17, 23, 45, 78, 115, 187, 324 in 640.

Prepričan sem, da ste že opazili, da je treba pri prevajanju iz desetiškega sistema v dvojiški število razstaviti na potence števila 2. Lahko si je zapomniti, da

$$2^0 = 1,\quad 2^1 = 2,\quad 2^2 = 4,\quad 2^3 = 8,\quad 2^4 = 16,\quad 2^5 = 32,\quad 2^6 = 64,\quad 2^7 = 128,\quad 2^8 = 256,\ \ldots$$

Zdaj ste se tudi sami prepričali, da je 2 + 2 = 4 v desetiškem sistemu, v dvojiškem je pa 10 + 10 = 100. Seštevanka se v dvojiškem sistemu glasi:

$$0 + 0 = 0, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 1 + 1 = 10$$

Potemtakem seštevamo takole:

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

in pri tem govorimo: nič in nič je nič (zapišemo nič), ena in ena je deset (pišemo dve, vendar v dvojiškem sistemu). Ali če na primer želimo sešteti 12 + 13, bomo to v dvojiškem sistemu zapisali takole:

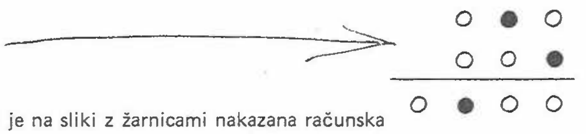
$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\ 1101 \\ \hline 11001 \end{array}$$

Seveda v tem sistemu (načinu zapisovanja) lahko opravljamo tudi druge računske operacije: odštevanje, množenje, deljenje, potenciranje... Poštevanka se na primer glasi:

$$0 \times 0 = 0 \qquad 0 \times 1 = 0 \qquad 1 \times 1 = 1$$

'Dobro, vse to je lepo, kljub temu nam pa še zmeraj ni jasno, v čem je prednost takega sistema in kakšna je korist od njega, ker je treba v njem že majhna števila pisati z veliko več znamenji kakor v desetiškem sistemu?' vprašujete.

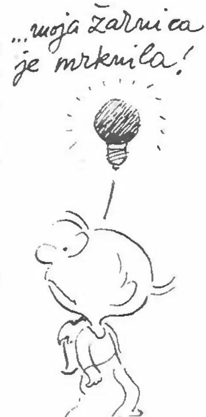
Res je. Imate prav. Ni posebno preprosto zapisati števila v dvojiškem sistemu. Zato ga tudi ne uporabljamo v vsakdanjem življenju. Uh, kako velika bi bila vaša žepnina, napisana v tem sistemu. In kaj šele očkova plača? Dvojiški sistem pa ima vendar velikansko prednost pred drugimi sistemi ravno zato, ker sta za zapis vseh števil zadosti le *dve* števki. In niti ni treba, da bi bili to ravno števki 0 in 1. Lahko sta na primer dve črtici, ena vodoravna in ena navpična (— |) ali pika in črtica (. —) ali žarnica. Če žarnica gori, pomeni 1, če ne sveti, pomeni 0. Tako bi z žarnico lahko računali. Recimo takole:



Prepričan sem, da ste uganili, da je na sliki z žarnicami nakazana računska operacija 5 + 6 = 11. In ravno to lastnost dvojiškega sistema uporabljajo pri hitrih računalnikih. Z električnimi vezji je namreč ravno tako mogoče dobiti dve znamenji:

tok vključen 1
tok izključen 0

Ker se v teh napravah ti znamenji uresničujeta več stotisočkrat v sekundi, je jasno, da je dolžina zapisa števil tu skoraj brez pomena. Zato ti stroji tako hitro računajo. Vidite torej, da je mogoče 10 + 10 = 100, samo če ne zapisujemo v desetiškem sistemu. Če torej zagledamo kakšno tako 'sumljivo' enakost, se moramo vprašati: 'V katerem številskem sistemu je zapisana?', preden rečemo, da ni resnična."



$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

$\tau \quad \top \quad \bot \quad \& \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \neg \quad \forall \quad \exists$

pozor
to je naslov poglavja
bi šlo malo močneje

NI MOGOČE V TISKARNI NIMAMO TEH ZNAMENJ

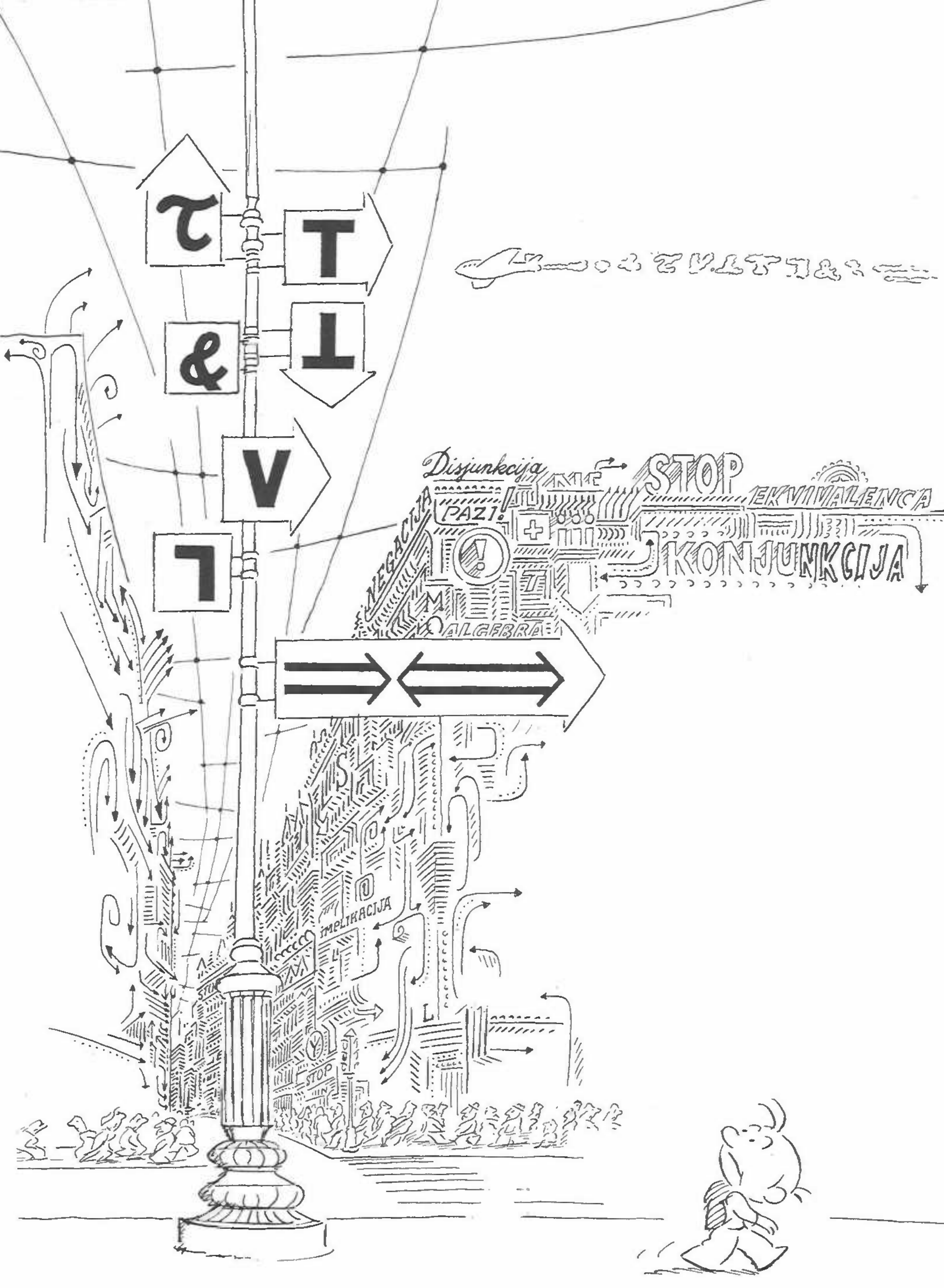
Izjava ali sodba

Operacije algebre izjav ali

kako iz izjav dobivamo nove izjave

Algebra izjav

Predikati



τ
T
&
⊥
V
¬
⇒⇔
Disjunkcija
STOP
EKVIVALENCA
NEGACIJA
PAZI!
KONJUNKCIJA
ALGEBRA
IMPLIKACIJA
STOP

"Kaj pravite o tem naslovu? Kaj ni simptomatičen - kakor bi rekla Marica Hrdalo."

"Kaj bi ne bil! Izreden je. 'Navdušeni' smo, kadar zagledamo kaj takegale, pa čeprav se nam zdi, da v naslovu nekaj manjka."

"Manjka? Že mogoče, samo ne vem, kam merite."

"Pa še lepo, manjka vprašaj."

"Imate prav. Odkrito mi povejte, kaj po vašem piše v naslovu."

"To so prav gotovo egiptovski hieroglifi."

"Niso."

"Hm, hm, mogoče so pa pismenke kitajske pisave?"

"Ne, niso."

"Ali pa je kaj iz moderne umetnosti? Mogoče pa tudi kaj 'brez zveze' ali pa mogoče celo kakšen matematični izraz, kdo bi to vedel!"

"Pa ravno nekaj takega. Zapisani so posamezni simboli, ki jih uporabljajo v sodobni matematiki, še najbolj pa v matematični logiki."

"Takoj se nam je zdelo nekaj sumljivega, pa čeprav se nam znamenja ne zdijo preveč podobna matematiki. Kaj sploh pomenijo?"

"Zapovrstjo se bomo seznanili z njimi. Seveda se ne bomo spuščali v matematično logiko, temveč samo v njihov pomen, se pravi, prevedli jih bomo v vsakdanji jezik. To so simboli, pravzaprav kratice za posamezne besede ali pa nadomeščajo po nekaj besed."

"In s čim se ukvarja matematična logika?"

"To je precej težko razložiti z nekaj besedami. Kljub temu pa bi lahko rekli, da se matematična logika kot znanost ukvarja z 'mišljenjem', vendar preučuje tako imenovane oblike mišljenja in njihove medsebojne povezave in operacije, ki jih lahko te uresničijo. Logični obliki mišljenja sta pojem in izjava ali sodba."

Izjava ali sodba

"Čemu v matematiki pravijo sodba? Ima ta kakšno zvezo z okrožnim ali celo vrhovnim sodiščem? Ha, ha, ha..."

"Neposredne zveze sicer nima, vendar vaša primerjava ni čisto 'brez zveze', kakor mislite, saj je ena od bistvenih nalog sodišč, katera ste omenili, ugotoviti, ali je kaj pravilno ali nepravilno, in potem izreči sodbo. V matematiki je s sodbo mišljena izjava, na primer 'Učenci imajo radi matematiko' je izjava..."

"Ampak to ni res, mi je nimamo radi."

Rad imam matematiko!
JANEZ

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3$

"Nič ne de. Potem bo sodišče reklo: 'Izjava (priče) je lažna.' Izjava (ali sodba) namreč ni kakršen si že bodi stavek, temveč mora biti smiseln, povrh tega pa mora imeti natančno eno od lastnosti pravilnosti ali nepravilnosti."

"Kaj se pravi, da mora biti stavek smiseln?"

"Boste takoj na zgledu videli, zakaj je postavljena ta zahteva. Stavek: 'Dizlova lokomotiva pleše valček z milnim mehurčkom' ni izjava, ker je stavek brez smisla, zato se niti ne vprašamo, ali je pravilen ali ni. Vendar moramo biti tudi v takih primerih previdni, ker so nekateri stavki za koga nesmiselni, za drugega pa popolnoma razumljivi in smiselni."

"Kako je to mogoče? Na kakšne stavke mislite?"

"No, vzemimo na primer tale stavek: 'BIJELO DUGME poje.' Za tiste, ki ne poznajo sodobnih popularnih ansamblov (samo pomislite, da so tudi taki ljudje na svetu!), je ta stavek nesmiseln. (Kako bi mogel gumb peti?) Za vas, ki zelo dobro veste, da je BIJELO DUGME ime popularnega ansambla, pa je ta stavek popolnoma smiseln in jasen. Ravno tako ne bomo imeli za izjavo stavka, ki ga je neki šegav gostilničar napisal in obesil v svojem lokalu: 'Danes se plača, jutri na kredo.' Mirne duše bi bil lahko tudi napisal: 'Jutri bo pijača zastonj', ne da bi se moral bati, da bo (zaradi tega) šel na boben. Vsaka izjava je namreč ali pravilna ali nepravilna, stavek, ki ni ne pravilen ne nepravilen ali pa je pravilen in obenem nepravilen, ni izjava."

Takole si ilustrator zamišlja NEPRAVILNO IZJAVO.

"Kaj so tudi taki stavki, ki niso ne pravilni ne nepravilni?"

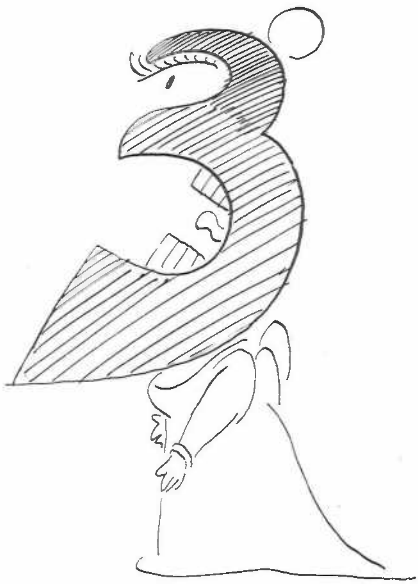
"Tudi. Tak je na primer stavek: 'Pojdi v šolo.' Je sicer smiseln, vendar ni ne pravilen ne nepravilen."

Pravi, da trojka poje, to pa ni mogoče...

"To nam je dobro znano, ker pogosto slišimo take stavke. Ampak kakšen je stavek, ki je hkrati pravilen in nepravilen?"

"To je, too jeee, na primer (uh, pa ravno zdaj se ne morem spomniti nobenega primernega zgleda, vendar jim moram kaj reči; aha, nečesa sem se le domislil) - vremenska napoved (z matematičnega vidika zgled ni ravno najbolj pravilen, vendar je za umevanje pojma dober). Vam je zdaj jasno, kaj je izjava?"

"Je, jasno. Samo zanima nas, ali je tudi to izjava, če rečemo na primer: 3 + 4 = 7."



"Seveda, to je izjava, in sicer pravilna. Matematiki po navadi izjave označujejo z velikimi črkami abecede (A, B, C, ...), da jim ni treba vselej pisati celega stavka, ki predstavlja izjavo, in pozneje namesto izjave napišejo samo črko. Tako na primer zapišejo $A \equiv 3 + 4 = 7$ in pozneje namesto izjave $3 + 4 = 7$ pišejo samo črko A. Ali: $B \equiv$ 'učenci imajo radi matematiko' in tako naprej. Da še posebej povedo, da velika črka pomeni izjavo, ki ima določeno vrednost pravilnosti, prednjo zapišejo tudi znamenje τ. Tako na primer namesto:

izjava A pišejo τA (črka A pomeni: $3 + 4 = 7$)
izjava B pišejo τB
izjava C pišejo τC in tako naprej."

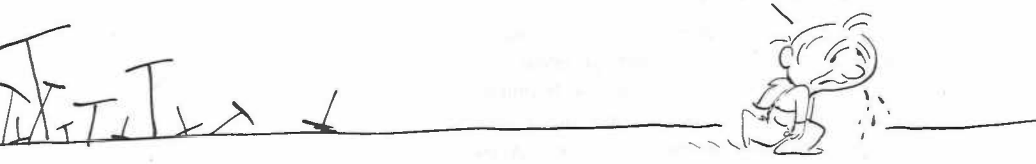
"Razumemo. Matematiki torej napišejo namesto:
Izjava $3 + 4 = 7$ je pravilna........................τA = pravilna ali
Izjava $2 - 1 = 2$ je nepravilna.................τD = nepravilna ($D \equiv 2 - 1 = 1$)."

"Ne, to pišejo še krajše. Tudi za besedi pravilen in nepravilen so vpeljali posebni znamenji, ker se jim ti besedi kar naprej ponavljata. Pri tem uporabljajo tile znamenji:
namesto: pravilna .... $\top$ (beri: 'te')
namesto: nepravilna ...... $\perp$ (beri: 'ne te')

Potemtakem pišejo omenjeni izjavi takole:

$\tau A = \top$ (beri: izjava A je pravilna)
$\tau D = \perp$ (beri: izjava D je nepravilna)

Tega se mi ne ljubi učiti... Izmuznil se bom naprej, in za me nikar ne zašpecajte profoksu!



Če je na primer C zapis za izjavo: 'Pariz je glavno mesto Albanije', napišejo samo
$\tau C = \perp$ (to pomeni: izjava C je lažna)."

"To je pravzaprav precej praktično. Ni treba veliko pisati."

"Saj sem že rekel, da matematiki nimajo radi dolgega pisanja. Njihovo geslo je: Kolikor krajše, toliko jasnejše. Poleg tega jih ne zanima kaj prida niti vsebina izjave, temveč samo njena vrednost pravilnosti, torej lastnosti $\top$ in $\perp$, ki ju ima izjava, pa nič drugega."

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1$

Operacije algebre izjav ali kako iz izjav dobivamo nove izjave

"Se to pravi, da je tudi z izjavami mogoče opravljati operacije seštevanja, odštevanja, množenja... kakor s števili?"

"Sicer ne čisto iste operacije kakor s števili, vendar nekaj podobnega. Sicer se pa spomnite, da smo tudi pri množicah imeli unijo, presek, razliko... in da smo s temi operacijami dobili nove množice. Temeljne operacije med izjavami ali natančneje, med elementoma $\top$ in $\perp$, imajo res precej nenavadna imena in simbole, vendar naj vas to nič ne moti. Hitro se jim boste privadili."

"In kako se imenujejo te operacije?"

"Te operacije so:

— konjunkcija $\&$

— disjunkcija $\vee$

— implikacija $\Rightarrow$

— ekvivalenca $\Leftrightarrow$

— negacija $\neg$."

"O, kako čudna imena. Tega si ne bomo nikoli zapomnili."

KONJUNKCIJA

"Saj ni treba, da bi jih takoj vse znali. Pregledali bomo drugo za drugo. Začnimo s konjunkcijo. Lahko si jo zapomnite tudi kot operacijo 'in'."

"Zakaj pa 'in'?"

"Zato, ker ta operacija povezuje izjavi A in B z veznikom 'in'. Zapis $\&$ namreč beremo 'et', to je po latinsko 'in'. Če sta torej A in B izjavi, bo

$$A \,\&\, B$$

označitev za novo izjavo 'A in B' ali 'A et B'. Vzemimo, da je na primer $A \equiv$ Danes je lep dan, $B \equiv$ Marija je odšla na sprehod. Izjava $A \,\&\, B$ bo torej: (Danes je lep dan) in (Marija je odšla na sprehod)."

"Ampak ali je nova izjava resnična ali zlagana?"

"No, to je odvisno od izjav A in B. Izjava $A \,\&\, B$ je kot celota pravilna takrat in samo takrat, kadar sta obe izjavi A in B pravilni."

"In če je ena od njiju nepravilna?"

"V tem primeru je izjava $A \,\&\, B$ kajpada nepravilna in nima vrednost nepravilnosti $\perp$.

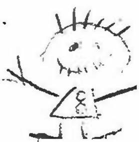
Sicer pa poglejmo, kako je to, na nekaj zgledih. Vzemimo, da sta izjavi:

$$A \equiv 4 + 5 = 9 \qquad B \equiv 8 - 3 = 5$$

Ker sta obe izjavi pravilni, to je $\tau A = \top$, $\tau B = \top$, je tudi $\tau(A \ \& \ B) = \top$. Če pa je izjava $C \equiv 2 + 4 = 3$, to je $\tau C = \perp$, je tudi $\tau(A \ \& \ C) = \perp$. Ali na primer: če je izjava $A \equiv 5 - 4 = 6$, to je $\tau A = \perp$, izvira iz tega tudi, da je $\tau(A \ \& \ C) = \perp$, ker sta obe izjavi lažni. Pri povezavi dveh izjav s kakšno operacijo v novo izjavo, morejo na splošno glede pravilnosti izjav nastati tele štiri možnosti:

Izjava A je pravilna	izjava B je pravilna
izjava A je pravilna	izjava B je nepravilna
izjava A je nepravilna	izjava B je pravilna
izjava A je nepravilna	izjava B je nepravilna

Vse te možnosti je mogoče kratko in pregledno podati v tako imenovani tabeli vrednosti pravilnosti. Za operacijo konjunkcije je ustrezna tabela pravilnosti takale:



KDOR TO BERE, JE OSU

A	B	$A \& B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Zgledi:

$$A \equiv 2 + 3 = 5,\ B \equiv 4 + 5 = 9 \qquad \tau(A \& B) = \top$$
$$A \equiv 2 + 3 = 5,\ B \equiv 4 + 5 = 7 \qquad \tau(A \& B) = \perp$$
$$A \equiv 2 + 3 = 4,\ B \equiv 4 + 5 = 9 \qquad \tau(A \& B) = \perp$$
$$A \equiv 2 + 3 = 3,\ B \equiv 4 + 5 = 8, \qquad \tau(A \& B) = \perp$$

JANEZ LJUBI MINKO!

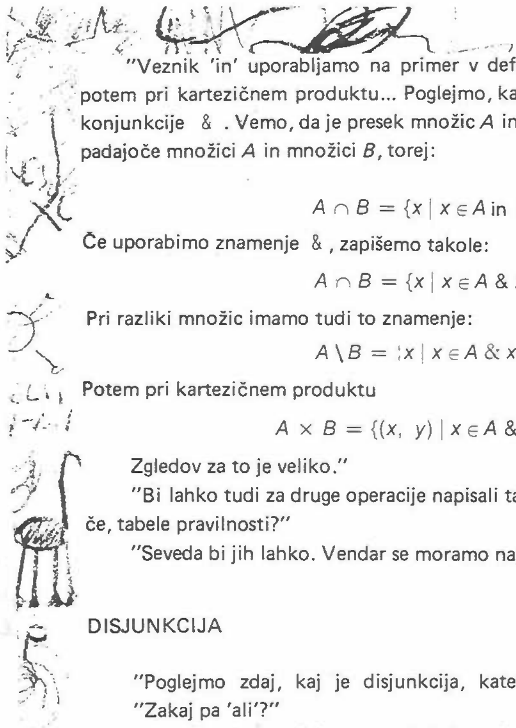
"Pa zakaj ravno tako?"

"Kako zakaj? To vendar izhaja iz *definicije* konjunkcije. Spomnite se, da je konjunkcija, se pravi izjava $A \ \& \ B$ po definiciji kot celota pravilna tedaj in samo tedaj, če imata obe izjavi A in B vrednost pravilnosti $\top$. V vseh drugih primerih je torej izjava $A \ \& \ B$ zlagana, to pa se tudi jasno vidi iz tabele pravilnosti. Vam je zdaj razumljiv smisel te tabele?"

"Je, tabela nam je jasna, vendar nas zanima, ali znamenje konjunkcije (&) v matematiki razen pri logiki uporabljajo še kje drugje."

"Seveda. S konjunkcijo namreč opisujemo sestavljene stavke, povezane z veznikom 'in'. Kjer se nam torej v kakšnem matematičnem izrazu pokaže ta veznik, ga lahko zamenjamo z znamenjem &."

"Kje na primer?"



"Veznik 'in' uporabljamo na primer v definiciji preseka in razlike množic, potem pri kartezičnem produktu... Poglejmo, kako matematik uporablja znamenje konjunkcije & . Vemo, da je presek množic A in B množica, ki ima elemente, pripadajoče množici A in množici B, torej:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ in } x \in B\}$$

Če uporabimo znamenje &, zapišemo takole:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \mathbin{\&} x \in B\}$$

Pri razliki množic imamo tudi to znamenje:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \mathbin{\&} x \notin B\}$$

Potem pri kartezičnem produktu

$$A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A \mathbin{\&} y \in B\} \text{ itd.}$$

Zgledov za to je veliko."

"Bi lahko tudi za druge operacije napisali take tabele... - ali kako se jim že reče, tabele pravilnosti?"

"Seveda bi jih lahko. Vendar se moramo najprej seznaniti s samo operacijo."

DISJUNKCIJA

"Poglejmo zdaj, kaj je disjunkcija, kateri pravimo tudi operacija 'ali'."

"Zakaj pa 'ali'?"

"Zato, ker je nova izjava, nastala iz izjav A in B, pravilna v primeru, če je pravilna izjava A ali pa izjava B. To je na primer takale izjava: 'V višji razred se lahko vpišejo bodisi učenci, ki so z uspehom končali prejšnji razred, ali tisti, ki so opravili popravni izpit.' Zadostuje torej, da je izpolnjen samo eden od teh pogojev, pa je izjava kot celota pravilna. Videli smo, da disjunkcijo označujemo s simbolom

$$\vee$$

(beri: 'vel', latinsko 'ali'), disjunkcija pa je pravilna tedaj in samo tedaj, kadar je vsaj ena od njenih komponent pravilna. Če sta torej A in B izjavi, bo $A \vee B$ kot celota nepravilna samo, če sta obe izjavi A in B lažni. Bi na tej podlagi znali napraviti tabelo pravilnosti za disjunkcijo?"

"Kaj bi je ne! Takale je:

Kdo čečka po moji knjigi...?

A	B	$A \vee B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Zgledi:

$$A \equiv 2+4=6 \quad B \equiv 4-3=1 \quad \tau(A \vee B) = \top$$
$$A \equiv 1+5=6 \quad B \equiv 5+4=8 \quad \tau(A \vee B) = \top$$
$$A \equiv 7-8=5 \quad B \equiv 5+3=8 \quad \tau(A \vee B) = \top$$
$$A \equiv 3-3=5 \quad B \equiv 2+4=9 \quad \tau(A \vee B) = \bot$$

Uporabljamo znamenje $\vee$ še kje drugje?"

"Kajpada. Na primer pri definiciji unije množic

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}."$$

IMPLIKACIJA

"In zdaj poglejmo nadaljnjo operacijo, implikacijo, ki..."

"Kako? Operacijo komplikacijo...?"

(Samo poglej, kako se delajo neumne, pa sem prepričan, da so razumeli, za katero operacijo gre.) "Oh, ne, temveč implikacijo. Zaznamujemo jo z

$$\Rightarrow$$

in preberemo: ima za posledico, implicira, vključuje, iz ... sledi ... ali če ... potem ...

- sledi iz, implicira, vključuje

S to operacijo opisujemo pravzaprav pogojne stavke, na primer: '*Če* gre dež, *potem* so ceste mokre.' Če z A in B označimo kakšni izjavi, potem je $A \Rightarrow B$ zapis za izjavo: 'A ima za posledico B' ali 'A vključuje B' ali 'A implicira B' ali ' Iz A sledi B' ali 'Če A, potem B'. Ta izjava kot celota izraža povezavo med A in B, ki jo lahko izrazimo tudi z besedami: ne more biti A, ne da bi bil B, s čimer pravzaprav rečemo, da je implikacija izjava, tako sestavljena iz dveh izjav, da je nepravilna samo tedaj, kadar je prva izjava pravilna, druga pa zlagana. V vseh drugih primerih je implikacija pravilna. Tabela pravilnosti je potemtakem takale:

A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Zgledi:

$$A \equiv 2\times 2=4, \quad B \equiv 3\times 3=9 \quad \tau(A \Rightarrow B) = \top$$
$$A \equiv 2\times 2=4, \quad B \equiv 3\times 3=8 \quad \tau(A \Rightarrow B) = \bot$$
$$A \equiv 2\times 2=5, \quad B \equiv 3\times 3=9 \quad \tau(A \Rightarrow B) = \top$$
$$A \equiv 2\times 2=7, \quad B \equiv 3\times 3=6 \quad \tau(A \Rightarrow B) = \top$$

$$\boxed{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 3+1}$$

Ko to zračunaš, boš videl, da je to stran 160

Zadnji zgled preberemo: Izjava 'Če je dvakrat dve sedem, potem je trikrat tri šest' je pravilna."

"Hu, kaj ni to čudno? Po tem bi človek sklepal, da nas nepravilne domneve lahko pripeljejo do pravilnega sklepa."

"Ja, tako nekako. Lahko pa bi navedli tudi takele zglede za implikacijo: 'Če je polž hitrejši od avtomobila, potem je $2 + 3 = 8$' ali: 'Če ima dan dvajset ur, potem je most narejen iz čokolade.' Po definiciji vrednosti pravilnosti implikacije (ki je nepravilna *samo tedaj*, kadar je prva izjava pravilna, druga pa zlagana), sta to pravilni izjavi. Čeprav je to malo nenavadno, ne bodite nič v skrbeh, ker ni tu nobenih nevarnosti. Iz take definicije vrednosti namreč ne moremo (in ne smemo) sklepati, še manj pa dokazati, da je na primer $2 + 3 = 8$ ali da ima dan dvajset ur. Če bi to mogli, bi bilo že nevarno..."

"Kdo bi si mislil, da je tudi v matematiki lahko kaj takega. Iz dveh laži dobiš resnico."

"Je že tako. Ampak zapomnite si, da je tudi po tej (nenavadni) definiciji pravilnosti izjava: 'Če imaš cvek iz matematike, potem si odličnjak' lažna (seveda če je prvi del izjave pravilen)."

EKVIVALENCA

"Preglejmo zdaj še poseben primer implikacije, pri katerem izjavama A in B lahko zamenjamo mesti, to je, da za izjavi A in B veljata obe implikaciji $A \Rightarrow B$ in $B \Rightarrow A$. O tem se bomo prepričali na nekaj zgledih. Premislite in odgovorite: Ali moremo iz izjav: 'Če gre dež, so ceste mokre' sklepati tudi obrnjeno: 'Če so ceste mokre, gre dež'?"

"Seveda lahko. Kako bi bile ceste mokre, če ne bi šel dež?"

"Nisem ravno vašega mnenja. Kaj pa, če na primer komunalno podjetje pere ceste?"

"Na to nismo pomislili."

"Se nič ne čudim (to se namreč tako redko zgodi, da bi bil presenečen, če bi se spomnili tudi te možnosti), pa vendar bodite bolj previdni pri sklepanju. Treba se je ozirati na vse, kar se teoretično lahko zgodi.

Tu torej obrnjeno ne velja. Ampak vzemimo za zgled vzporedni premici a in b.

Napravimo sestavljeno izjavo: 'Če je a vzporedna z b, je tudi b vzporedna z a.' Ali krajše: 'Če je $a \parallel b$, potem je tudi $b \parallel a$.' Ali pri tej implikaciji velja obrnjeno: 'Če je b vzporedna z a, potem je tudi a vzporedna z b'?"

"Tu to prav gotovo velja."

"Tako je. Če zapišemo:

$$A \equiv a \parallel b \ , \quad B \equiv b \parallel a$$

lahko zapišemo tudi

$$A \Rightarrow B \quad \text{in} \quad B \Rightarrow A$$

V tem primeru pravimo, da sta izjavi A in B povezani z operacijo ekvivalence, njen simbol je pa

$$\Leftrightarrow$$

se pravi, da bomo namesto $A \Rightarrow B$ in $B \Rightarrow A$ pisali $A \Leftrightarrow B$.

Vzemimo še en zgled: 'Če pri trikotniku lahko uporabimo Pitagorov izrek, je trikotnik pravokoten.' Tudi ti izjavi lahko povežemo z odnosom ekvivalence. Matematiki take primere opisujejo z besedami:

'$A \Rightarrow B$, velja pa tudi obrnjeno.'

'B je potreben in zadosten pogoj za A.'

'Pogoj A je ekvivalenten pogoju B' in tako naprej.

Vam je jasno, kaj pomeni, če napišemo

$$\tau\,[(A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow A)]."$$

"Je. To pomeni vrednost pravilnosti izjave, pri kateri iz A sledi B in iz B sledi A."

"Tako je. Namesto tega lahko napišemo

$$\tau\,(A \Leftrightarrow B)$$

torej:

$$\tau\,(A \Leftrightarrow B) = \tau\,[(A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow A)]$$

To lahko pojmujemo tudi kot definicijo ekvivalence. Pri tem: izjava $A \Leftrightarrow B$ je kot celota pravilna, to je, ima vrednost pravilnosti T samo tedaj, če imata izjavi A in B med seboj enako vrednost pravilnosti. Torej bo pravilna samo tedaj, če sta obe izjavi ali pravilni ali lažni. Napišimo tabelo pravilnosti za operacijo ekvivalence, pa tako, da bo razvidna tudi njena zveza z implikacijo.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Zgledi:

$$A \equiv 2+2=4, \quad B \equiv 3+4=7 \quad \tau(A \Leftrightarrow B) = \top$$
$$A \equiv 2+2=4, \quad B \equiv 3+4=5 \quad \tau(A \Leftrightarrow B) = \bot$$
$$A \equiv 2+2=3, \quad B \equiv 3+4=7 \quad \tau(A \Leftrightarrow B) = \bot$$
$$A \equiv 2+2=5, \quad B \equiv 3+4=8 \quad \tau(A \Leftrightarrow B) = \top$$

Vse operacije, s katerimi smo se seznanili, se pravi, operacije konjunkcije (&), disjunkcije ($\vee$), implikacije ($\Rightarrow$) in ekvivalence ($\Leftrightarrow$), so dvomestne (binarne)."

"In kaj pomeni dvomestna operacija?"

"To je operacija, ki veže dve izjavi in tako dobimo novo izjavo."

NEGACIJA

"Obstaja mogoče tudi operacija, pri kateri iz ene same izjave dobimo novo izjavo?"

"Obstaja. Taka operacija je na primer negacija. Zato ji pravimo enomestna (unarna). Njen simbol je

$$\neg$$

in ga beremo: *non*, to se po latinsko reče *ne*."

"Se to pravi: če je A neka izjava, je izjava $\neg A$: ni A."

"Drži, tako je. Izjava $\neg A$ je pravilna samo tedaj, če je A lažen. Zato je tabela pravilnosti tu zelo preprosta:

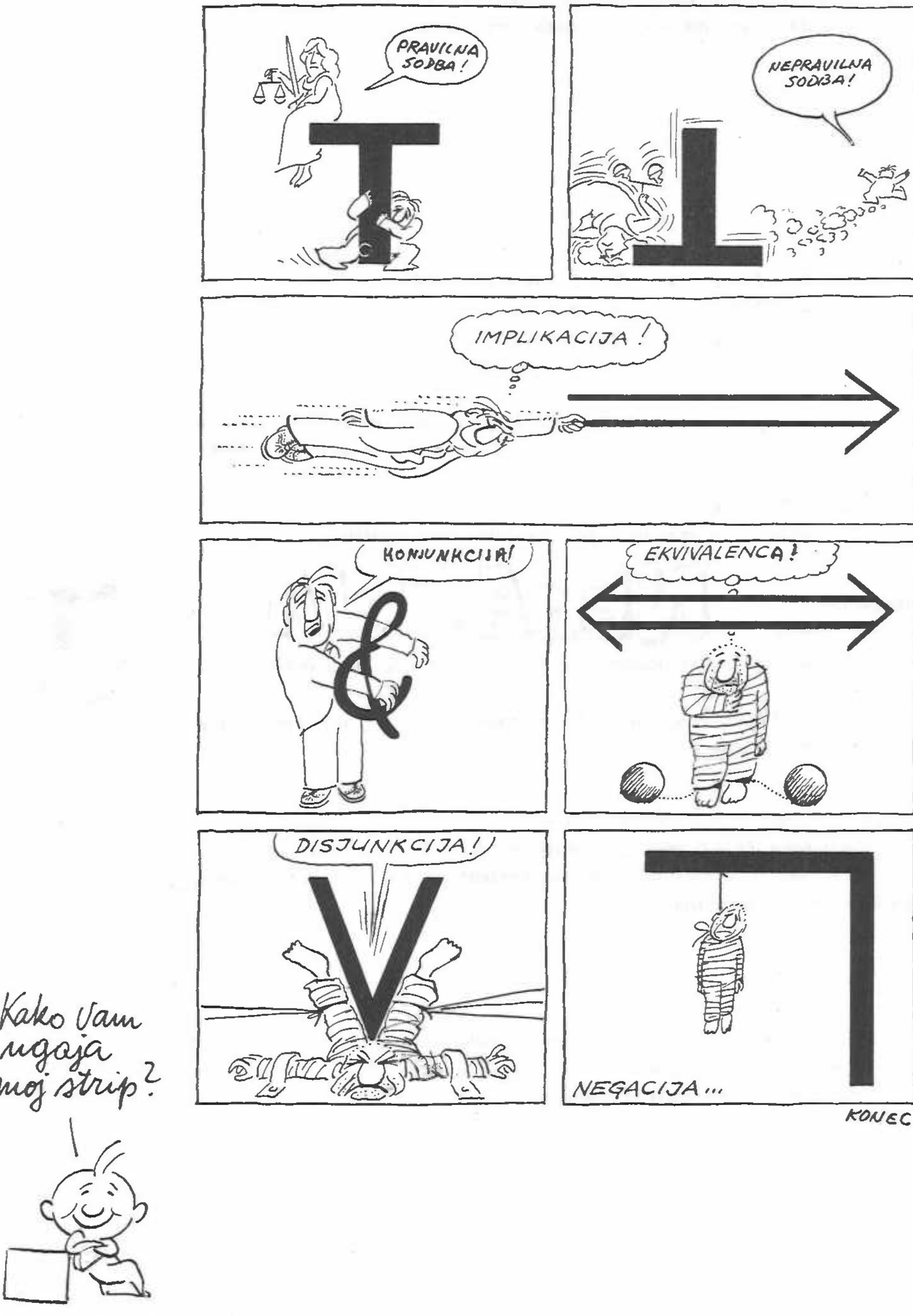
A	$\neg A$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Če je torej A zapis za izjavo: 'Radi imamo matematiko'..."

"... bomo na kratko napisali $\neg A$."

"Vidite, kako preprosta je ta operacija."

τ SODBA


PRAVILNA SODBA!
NEPRAVILNA SODBA!
IMPLIKACIJA!
KONJUNKCIJA!
EKVIVALENCA!
DISJUNKCIJA!
NEGACIJA...
KONEC
Kako Vam ugaja moj strip?

Algebra izjav

"Videli smo, da je v naslovu na začetku pisalo: 'Operacije algebre izjav.' Kaj se to pravi? Kaj imamo tudi algebro izjav?"

"Imamo jo. Tudi operacije izjavne logike imajo namreč posebne algebrajske lastnosti in ..."

"In kakšne so te lastnosti?"

"Lastnosti pač, ki jih že poznate, ker jih imamo tudi pri številih. Nekaj vam jih naštejem:

— lastnost zamenjave ali komutativnosti ($a + b = b + a$),
— lastnost asociativnosti ($(a + b) + c = a + (b + c)$,
— lastnost distributivnosti $(a + b)\, c = ac + bc$,
— lastnost, da obstaja nevtralni element ($a + 0 = a$) in tako naprej.

Poglejmo na primer lastnost zamenjave. To imajo operacije konjunkcije, disjunkcije in ekvivalence, se pravi, da je

$$A \,\&\, B = B \,\&\, A$$
$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$$

Če pa vprašate matematika: 'Kaj je algebra izjav?' , vam bo na kratko odgovoril:

'Algebra izjav je struktura $\{\{\top, \bot\};\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \neg\}$, pri čemer so operacije $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ definirane z ustreznimi tabelami.' "

"No, če je tako, ga rajši ne bomo o tem nič spraševali. Pa vendar, kakšna sreča, da tu vsaj ni nobenih formul."

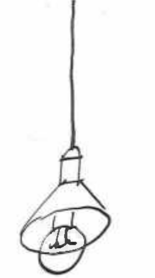
"Da ni formul? No, to ste se pa zmotili. Kakšna pa bi bila matematika brez formul in - aksiomov?"

"In kakšne so formule v algebri izjav?"

"Formule v algebri izjav so, to sooo, hm, hm (koklja jih brcni, te formule, pa sem se kljub temu domislil), to so izrazi, ki jih sestavljamo iz konstant in spremenljivk z operacijami $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ z uporabo oklepajev - na dovoljen način - se pravi tako, da $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, delujejo kot dvomestne, $\neg$ pa kot enomestna operacija. Formule v algebri izjav redno označujemo z velikimi latiničnimi črkami $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ...."

"Omenjate nekakšne konstante. Kakšne količine so to?"

"Konstanti algebre izjav sta elementa $\top$ in $\bot$. Množica predmetov algebrajske strukture, ki ji pravimo algebra izjav, ima namreč samo dva elementa, to je množica $S = \{\top, \bot\}$."



"In kaj so spremenljivke?"

"To so znamenja ali črke $x, y, z, \dots A, B, C, \dots$"

"Kakšne so potemtakem formule v algebri izjav?"

"No, dobro. Tu jih imate nekaj:

$$\mathscr{A} \equiv (A \mathbin{\&} B) \vee C$$
$$\mathscr{B} \equiv x \Rightarrow \top$$
$$\mathscr{C} \equiv x \vee (\neg\, y) \Rightarrow \top$$
$$\neg\,(A \vee B) = (\neg\, A) \mathbin{\&} (\neg\, B)$$
$$\neg\,(A \mathbin{\&} B) = (\neg\, A) \vee (\neg\, B).$$ "

"Dobro, ampak kako ali po čem je mogoče vedeti, da je tu ena stran enaka drugi in da je mogoče postaviti vmes znamenje =?"

"Čisto preprosto. Napišemo tabelo pravilnosti za obe formuli in če imata enako vrednost pravilnosti za vsako mogočo kombinacijo, pomeni, da lahko zapišemo znamenje za enakost. Na primer takole:

A	B	$A \vee B$	$\neg\,(A \vee B)$	$\neg\, A$	$\neg\, B$	$(\neg\, A) \mathbin{\&} (\neg\, B)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

"Saj to je kakor nekakšna križanka. Posrečeno."

"Po svoje tudi je, recimo - logična križanka. Vendar smo s tem dokazali, da velja formula

$$\neg\,(A \vee B) = (\neg\, A) \mathbin{\&} (\neg\, B)$$

ali da je formula na levi strani enaka formuli na desni strani. Poskušajte zdaj sami dokazati, da je:

32 $\qquad A \mathbin{\&} B = B \mathbin{\&} A$

33 $\qquad A \vee B = B \vee A$

34 $\qquad A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A.$ "

"In kako bomo to dokazali?"

"Ravno tako, kakor smo izpeljali tudi ta dokaz. Treba je napisati tabelo pravilnosti posebej za levo stran in posebej za desno stran in če so vrednosti pravilnosti za vsako kombinacijo enake, pomeni, da je leva stran enaka desni. Ampak že

4 · 40 — (— 5 — 1)

vidim, da moram sam napisati tabelo in pokazati, kako se izpolni, vi pa jo boste kvečjemu dokončali. Dokažimo torej, da je

$$A \,\&\, B = B \,\&\, A$$

A	B	$A \,\&\, B$	B	A	$B \,\&\, A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	
$\perp$	$\top$		$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$		$\perp$	$\perp$	

"Zdaj nam je jasno. Se pravi, da izpolnimo po definiciji konjunkcije."

"S tem sicer niste odkrili Amerike, pa vendar - tako je. Boste zdaj znali dokazati tudi drugi formuli?"

"Oh, to je igračka. Nobenih težav."

"Verjamem (samo poglejte, kako se takoj petelinijo) in če je tako, potem igraje napišite tabele pravilnosti še za tele formule:

35 $A \Rightarrow (B \,\&\, (\neg B))$ **36** $A \Rightarrow (B \,\&\, A)$

37 $A \,\&\, B \Rightarrow A$ **38** $B \Rightarrow A \vee B$. "

"Dosti, dosti, nimamo ravno toliko časa za igranje. Pa še nekaj drugega nas zanima."

"Kaj?"

"Zanima nas, kakšni so na primer aksiomi te izjavne algebre ."

"Kakšne izjavne algebre neki. Mogoče mislite na algebro izjav?"

"Res je, nanjo smo mislili."

"To je zanimalo tudi mene, pa sem vprašal nekega matematika o teh aksiomih v pričakovanju, da mi jih bo pojasnil in kaj spregovoril o njih. Pri tem sem mislil, da gre gotovo za kakšne temeljne logične sklepe, ki jih bom lahko razumel. Pa veste, kaj je napravil? Brez besed je vzel list papirja (ki ga še zdaj hranim - še sam ne vem, zakaj) in napisal:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$$

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A \,\&\, B)$

$A \,\&\, B \Rightarrow A$

$A \,\&\, B \Rightarrow B$

$B \Rightarrow A \vee B \qquad\qquad A \Rightarrow A \vee B$

$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$

$\neg \neg A \Rightarrow A$

Ko je vse napisal, je rekel samo: 'To so aksiomi algebre izjav in z njimi je mogoče izpeljati vsak njen izrek. Obstajajo pa še dodatni aksiomi logike predikatov in teorije števil...'

Kaj sem mogel napraviti drugega kakor reči: 'Hvala, hvala vam; veste, jaz potrebujem (vraga jih potrebujem) samo aksiome algebre izjav.' Zdaj vidite, kako so aksiomi preprosti in logični in 'lahki' za učenje na pamet. Če mi torej kdo danes reče: 'Aksiomi so temeljne resnice, ki jih ne dokazujemo, ker so same po sebi očitne', me obide želja, da bi..."

Predikati

"Tu ste omenjali tudi nekakšne predikate. Kaj pa je že spet to? Vemo, da imamo v stavku osebek in povedek (predikat), ampak od kod povedek v matematiki?"

"Zanima vas torej, kaj je predikat. Dobro, boste takoj videli. Prej mi še povejte, ali so tole izjave:

x je odličnjak

y je država v Evropi

$z > 7$."

"Niso, ker ne vemo, kdo je ta učenec 'x', katera je država 'y' in katero je število 'z'. Potemtakem tudi ne moremo vedeti, ali so izjave pravilne ali lažne, če pa tega ne vemo, se pravi, da niso izjave."

"Tako je. Vidim, da ste doumeli pojem izjave v matematiki. Takim trditvam pravimo predikati. Morete iz njih napraviti izjave?"

"Moremo, če namesto x, y in z postavimo določene vrednosti. Na primer takole:

Mrak je odličnjak

Belgija je država v Evropi .

$9 > 7$

To so zdaj izjave, in sicer pravilne."

"Vam je iz teh zgledov jasna razlika med izjavami in predikati?"

"Je. Predikat se spremeni v izjavo, če neznanka dobi določeno vrednost."

"Ali še natančneje: Predikat je stavek, v katerem je ena ali več spremenljivk, in postane izjava, če spremenljivke dobijo določene vrednosti. Predikate po navadi zapisujemo z velikimi črkami $P, Q, R, S, \ldots$, poleg njih pa je v oklepaju ena ali več spremenljivih količin $x, y, z, \ldots$, to je spremenljivk. Na primer

$$P(x) \equiv x > 6$$
$$Q(x, y) \equiv x + y = 9$$
$$R(z) \equiv z < 14$$

Ko spremenljivke dobijo določeno vrednost, postanejo predikati izjave in jih lahko pišemo na primer takole:

$\underset{\cdot}{-}P\,(9) \equiv \top$	ker je	$9 > 6$	
$\underset{\cdot}{-}Q\,(4, 5) = \top$	ker je	$4 + 5 = 9$	
$\underset{\cdot}{-}R\,(16) = \bot$	ker je	$16 < 14$	lažna izjava."

"Se pravi, da $P(x) \equiv x > 6$ postane izjava za vsak x, ki je naravno število, samo da bo ta izjava za nekatere x pravilna, za druge pa nepravilna."

"Natančno tako. Ampak še dobro, da ste me spomnili. Rekli ste 'za vsak'. Ti besedi v matematiki pogosto uporabljajo in pomenita zelo pomemben pojem, zato so matematiki zanju vpeljali tudi posebno znamenje ali simbol

$$\forall$$

ki ga preberemo: 'za vsak'. Temu simbolu pravijo matematiki tudi kvantor ali kvantifikator generalizacije."

"Kaj je tudi tega vpeljal Cantor?"

"Saj ne kantor, temveč kvantor, postavljamo pa ga po navadi ob predikat. Če je torej P predikat, je

$$(\forall x)\, P$$

označitev za nov predikat: 'za vsak x je P'. Če je na primer predikat

$$P \equiv x > y$$

bo $(\forall x)P$ pomenilo: ' za vsak x je $x > y$.' "

"Uporabljajo ta simbol še kje?"

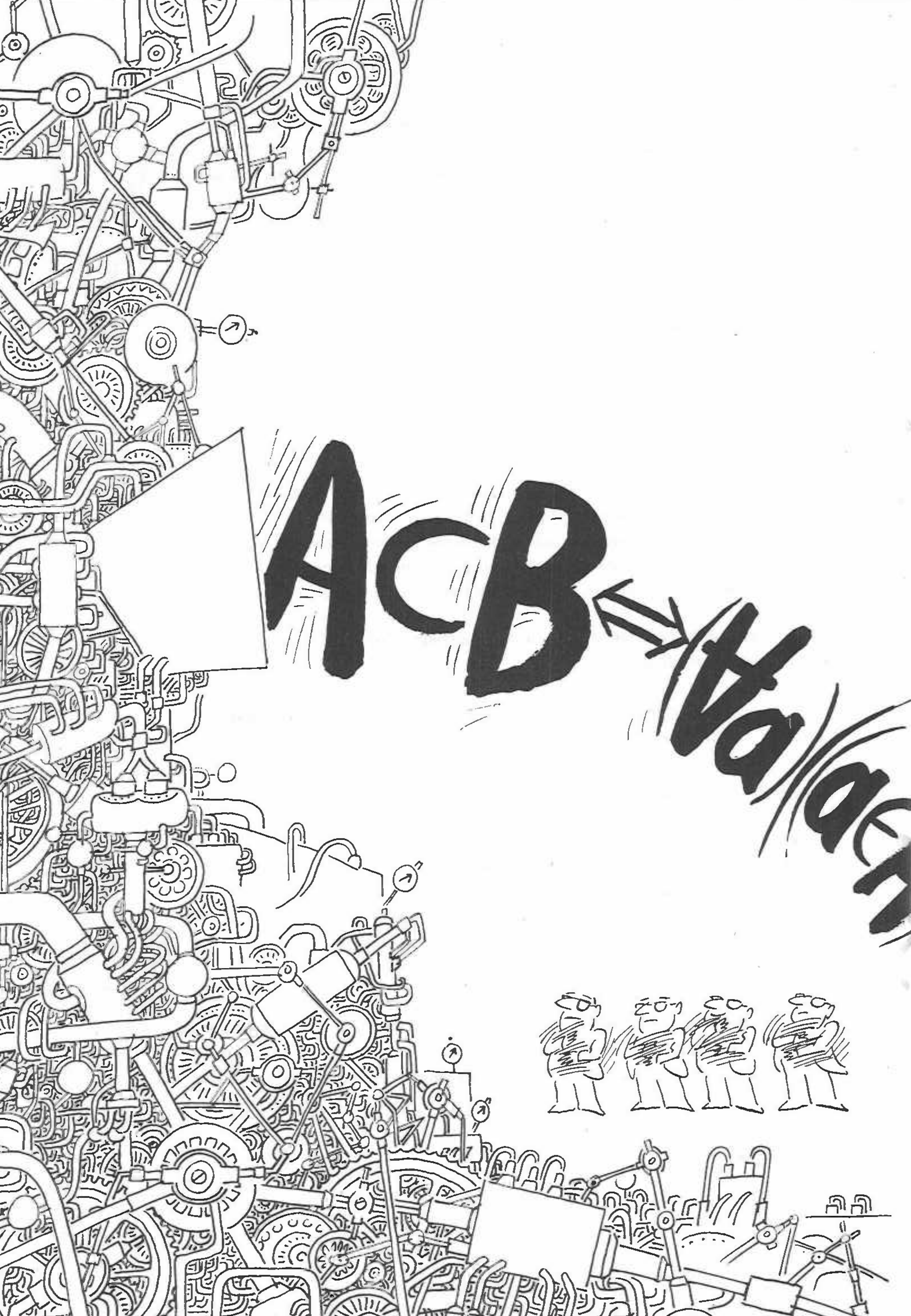
"Seveda. Zelo pogosto. Poglejmo na primer, kako opišemo pojem podmnožice z uporabo simbolov, s katerimi smo se seznanili

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Vam je jasno, kaj to pomeni?"

"Seveda nam je. Tu piše: 'A je podmnožica B je ekvivalentno z izjavo, da za vsak x, x element A, sledi, da je x tudi element B."

"Dobro. Zdaj pa poglejte, kako v teoriji množic definirajo relacijo 'enako'.


АСВ

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)\ \&\ (B \subseteq A)$, lahko pa tudi takole:
$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$."

"Zanimivo. Ampak prava sreča, da si teh definicij ni treba zapomniti. Menda vendar ne obstaja več noben tak simbol, saj bi spričo tako mogočnih simbolov lahko še pozabili - govoriti."

"Obstaja, kaj bi ne. Imamo še tako imenovani kvantor obstoja ali eksistence

$$\exists."$$

"Kakšno čudo je pa že spet to?"

"Nikakršno čudo, samo simbol s pomenom: 'obstaja vsaj en', dobite ga pa, če črko E postavite pred ogledalo, vidite, takole:

to je ogledalo

E $\exists$. Vidite, kaj vse pride matematikom na misel, samo da dobijo nova znamenja. Če je P predikat, je

$$(\exists x)\ P$$

zapis za novi predikat s pomenom: 'obstaja (vsaj en) tak x, da je P'."

"Nikoli ne bi mislili, da uporabljajo tudi simbol s takim pomenom."

"Kaj bi ga ne! Poglejmo še nekaj zgledov za njegovo uporabo: Naj sta x in y elementa množice naravnih števil, torej $x, y \in \mathbf{N}$, in naj je predikat $P(x, y) \equiv$ $\equiv x > y$. Tedaj nam $(\exists x)P(x, y)$ pomeni: 'obstaja vsaj en tak x, da je $x > y$' ali $(\forall x)\ (\exists y)P(x, y) \equiv$ 'za vsak x obstaja vsaj en tak y, da je $x > y$'. Da je ta trditev pravilna, moremo reči takole:

$$\tau\ (\forall x)\ (\exists y)\ P\ (x, y) = \top$$

Poglejte, kako lahko definiramo tudi pravo podmnožico:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall a)\ ((a \in A) \Rightarrow a \in B)\ \&\ (\exists b)\ \ (b \in B\ \&\ b \notin A)$$

Zdaj pa recite, da ni prava slast uporabljati tako simboliko! Zapišimo še trditev: Za vsaki dve naravni števili a in b obstaja vsaj eno naravno število c z lastnostjo, da je $a + b = c$. Če uporabimo simbole matematične logike, se bo to glasilo:

Lahko bi navedli še veliko zgledov, v katerih..."

"Hvala, hvala, v resnici imamo zadosti, se nam že v glavi vrti od teh kva... kva.. kva..."

"Mislite - kvantorjev?"

"Oh, sploh nič več ne mislimo."

"Vem, da ste že utrujeni od vseh teh simbolov, definicij, pravil, tabel... ampak nikar se zaradi tega strašiti in izgubljati pogum. Ko bo treba, se boste postopoma vsega naučili in lepega dne vam bo še kratek čas pisati tabele pravilnosti za razne formule ali prevajati razne izjave v jezik matematike, če pa vam ne bo treba - še toliko bolje."

"In kaj je tisto najnujnejše, kar bi morali v vsakem primeru vedeti?"

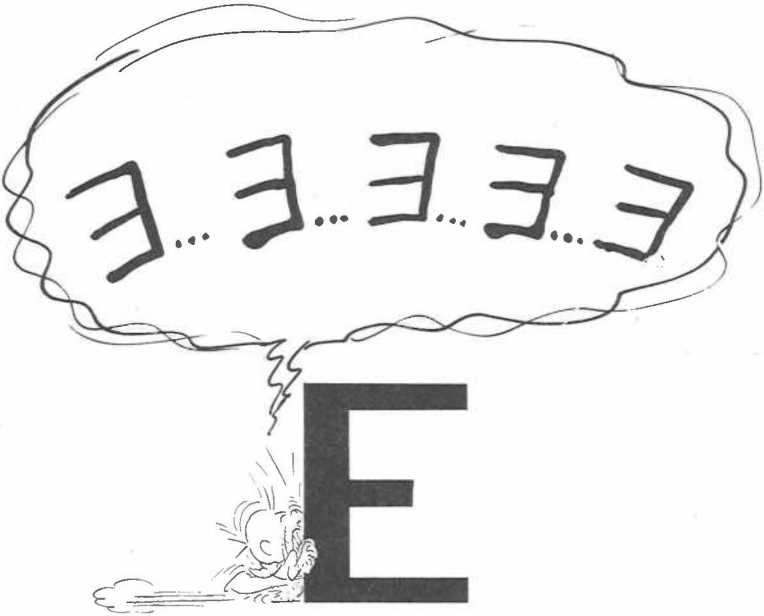
"Hm, hm, zdi se mi, da bi bilo dobro, če si zapomnite vsaj simbole, njihovo uporabo in pomen. Tako boste brez skrbi, da si niste zapomnili stvari, ki vam ne bi bila prej ali slej potrebna."

"Katere simbole pa?"

"Vse vendar. Menda niste mislili samo vsakega drugega? Na primer takole:

$\underset{\cdot}{-}$	$\underset{\cdot}{-} A$	funkcija, ki izjavi A priredi pravilnost ali laž; izjava A
$\top$	$\underset{\cdot}{-} A = \top$	pravilno; izjava A je pravilna
$\perp$	$\underset{\cdot}{-} B = \perp$	nepravilno; izjava B je nepravilna
&	$A \,\&\, B$	simbol konjunkcije; A in B (operacija 'in')
$\vee$	$A \vee B$	simbol disjunkcije; A ali B ali oba (operacija 'ali')
$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$	znamenje implikacije; če je A, potem je tudi B; iz A sledi B
$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$	znamenje ekvivalence; A in B sta ekvivalentna; če je A, potem je tudi B in narobe, če je B, je tudi A
$\neg$	$\neg A$	znamenje negacije; ni A
$\forall$	$(\forall x) P$	kvantor generalizacije; za vsak x je P
$\exists$	$(\exists x) P$	kvantor obstoja; obstaja (vsaj en) tak x, da je P

Če boste vsaj to vedeli, bo za začetek dovolj."



MALO ZGODB O MATEMATIKI IN OB NJEJ

LAHKO JE DAJATI NALOGE

"To bi znali tudi mi, težko pa jih je reševati, to je tisto..."

"Prepričan sem, da takole premišljujete skoraj vselej, kadar vam učitelj postavi vprašanje, na katero (seveda) ne znate odgovoriti. Vendar nimate čisto prav, če tako sklepate."

"Kako da ne? Oh, prava reč dati nalogo. To zna vsak."

"Dobro, dobro, ne bomo se prerekali o tem, vendar vam bom pokazal nekaj zgledov, iz katerih boste sprevideli, da dostikrat tudi dajanje nalog ni tako preprosto, kakor mislite. Boste videli, da se lahko znajdemo v škripcih, če jih dajemo kar na pamet, kakor se ravno spomnimo, ne da bi o njih dodobra premislili in jih najprej preverili. Za dokaz vam bom dal kakšen ducat preprostih nalog. Odgovorite mi nanje in potem si bomo vsako nalogo in odgovor podrobneje ogledali. Začnimo spet z množicami:

Imamo dve množici A in B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad B = \{1, 3, 5\}$$

Odgovorite: Katera množica je večja?"

"Oh, to je vendar lahko. Prav gotovo je množica A večja od množice B."

"Preidimo na drugo vprašanje:

Množice A, B, C, D in E so dane takole:

$A \equiv$ množica velikih mest.
$B \equiv$ množica lepih knjig.
$C \equiv$ množica pametnih dečkov.
$D \equiv$ množica debeluhov.
$E \equiv$ množica elegantnih žensk.

So *vse* množice *dobro* podane?"

"Mislimo, da so. Zakaj pa bi ne bile?"

"Odgovorite zdaj na vprašanje:

En zvezek stane 15 dinarjev. Koliko boste plačali za tri zvezke?"

"Ha, ha, ha, vsak otrok ve, da bodo trije zvezki stali 45 dinarjev."

"In če se skupina 16 učencev razdeli na štiri skupine, koliko učencev bo v vsaki od njih?"

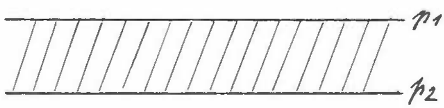
"V vsaki skupini bodo kajpak po štirje učenci."

"Zamislite si takle položaj: Imamo štiri knjige in dve torbi. Na koliko načinov lahko damo te knjige v torbi?"

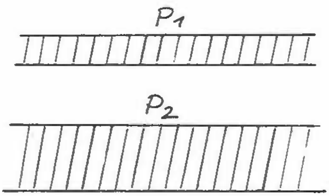
"Na osem načinov."

"Zdaj pa kaj iz geometrije.
Na poltraku *VZ* je točka *A*.

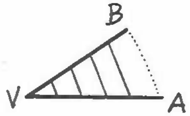
Kateri poltrak je večji - *VZ* ali *AZ*?"
"Smešno vprašanje. Seveda je *VZ* večji poltrak, in sicer za daljico *VA*."
"Kolikšna je ploščina, omejena z dvema vzporednima premicama?"



"Ploščino dobimo, če dolžino premice pomnožimo z razdaljo med premicama, vendar bi morala biti razdalja dana, da bi mogli zračunati."
"Dobro, pa bi znali povedati, katera ploščina je večja - P_1 ali P_2?"

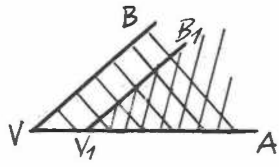


"Razume se, da je ploščina P_2 večja."
"Še naloga s koti. Vzemimo, da kot nastane z vrtenjem poltraka okoli njegovega krajišča in da s kotom mislimo ploščino, omejeno s poltrakoma, to je s krakoma kota, da torej kot *AVB* narišemo na primer takole



Odgovorite: Kateri kot je večji - *AVB* ali AV_1B_1?"

"Očitno je kot AVB večji, in sicer za ploščino med krakoma VB in V_1B_1."



$VB \parallel V_1B_1$

"Ko padalec skoči iz letala, ali pada po zamišljeni navpičnici, spuščeni iz letala proti zemeljski površini?"

"Kako pa naj bi drugače padal kakor po navpičnici?"

"Je kvadriranje injektivna funkcija, to je funkcija, ki različnim elementom vhodne množice prireja različne vrednosti elementov izhodne množice?"

"Seveda je, saj vemo, da je na primer $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $6^2 = 36$, ..., da so torej različnim elementom vhodne množice $\{2, 3, 6, ...\}$ prirejene različne vrednosti $\{4, 9, 36, ...\}$ elementov izhodne množice."

"Ko smo tako lepo 'rešili' vse naloge, vam lahko povem, da noben vaš odgovor ni pravilen in da je poleg tega večina nalog tudi napak postavljena."

"Ni mogoče. Saj so bile vendar vse naloge jasne in preproste."

"So, za tistega, ki ne zna matematike ali jo slabo zna.

Sicer pa, poglejmo lepo po vrsti:

Pri prvi nalogi se glasi vprašanje: Katera množica je večja, A ali B? Smola je, da med množicami sploh nista definirani relaciji 'biti večja' in 'biti manjša', to je $>$, $<$, zato ne moremo niti govoriti o večjih ali manjših množicah. Ti relaciji uporabljamo na primer med *števili*, pri množicah pa imamo odnos: podmnožica ($\subseteq$) ali nadmnožica ($\supseteq$). V našem primeru seveda velja, da je $B \subseteq A$. Kakor hitro vas torej kdo vpraša: katera od množic je večja, vedite, da nima pojma o množicah. Pri drugi nalogi nobena od množic A, B, C, D in E ni dobro podana, saj velik, lep, pameten, debel in eleganten niso lastnosti, po katerih bi mogli zanesljivo ugotoviti, ali kdo pripada posamezni množici ali ne."

"Dobro, če je že tako, ali smo vsaj nalogo z zvezki pravilno rešili?"

"Ta naloga, pa tudi nadaljnja - z razdelitvijo 16 učencev na štiri skupine - ni dobro postavljena, ni natančno podana. Dovolj je, da pogledate samo v svojo tor-

bo, pa boste videli, da so zvezki različne velikosti in cene. Če torej eden od njih stane petnajst dinarjev, lahko drug stane dvajset, tretji deset dinarjev."

"Res je, v nalogi ni bilo nič povedanega o tem, da gre za enake zvezke. Zdaj nam je jasno, da je tudi skupino 16 učencev mogoče razdeliti v štiri skupine na razne načine. Važno je, da je vsota učencev v vseh štirih skupinah 16."

"Tako je. Vidite torej, kako moraš biti pri dajanju nalog natančen in pazljiv. Če vam kdo odgovori, da na primer trije zvezki stanejo 50 dinarjev ali da je v eni skupini šest učencev, v drugi štirje, v tretji in četrti po trije učenci, mu ne morete dokazati, da odgovor ni pravilen."

"Kaj je pa narobe z nadaljnjo nalogo?"

"Ta naloga je dobro postavljena, vendar je veliko bolj zapletena, kakor se nam prvi trenutek zazdi. Vsak matematik vam bo na tako formulirano nalogo odgovoril, da štiri knjige lahko spravimo v dve torbi na 16 načinov, ker je toliko vseh preslikav štirielementne množice v dvoelementno. Sicer pa napišimo vse možnosti, kako lahko spravimo knjige v torbi. V ta namen zaznamujmo knjige s črkami A, B, C, $Č$ in torbi s T_1 in T_2. V torbo T_1 moremo dati:

a) Po eno knjigo, in sicer ali A ali B ali C ali $Č$ (torej na štiri načine), v torbo T_2 pa preostale.

b) Po dve knjigi: $A, B; A, C; A, Č; B, C; B, Č; C, Č$ (6 načinov), v torbo T_2 pa preostali.

c) Po tri knjige: $A, B, C; A, B, Č; A, C, Č; B, C, Č$ (štirje načini), v torbo T_2 pa preostalo.

To je skupaj (4 + 6 + 4) = 14 načinov, lahko pa seveda tudi vse štiri knjige damo v torbo T_1 ali v torbo T_2 (2 načina) in tako smo dobili 16 načinov, kako lahko 4 knjige spravimo v dve torbi."

"Kaj tudi naš odgovor glede poltrakov VZ in AZ ni pravilen?"

"Vprašanje ni dobro. Tudi tu je podobno kakor pri prvi nalogi o množicah. Relacija 'biti večji' tudi tu ni določena, se pravi, da je vprašanje brez smisla. Poleg tega je pa vse tisto, kar lahko z vzporednim premikom ali translacijo pripravimo do tega, da se pokriva, enako in poltrak VZ je mogoče prenesti tako, da točka V preide v točko A in bosta poltraka zmeraj enaka. Tudi naloge o ploščinah so nesmiselne..."

"Zakaj?"

"Zato, ker je ploščina *število*; o nji je mogoče smiselno govoriti (v območju elementarne matematike) samo pri *končnih* geometrijskih likih, neskončnih pa ni

mogoče izraziti s številom, zato je vprašanje nesmiselno. Ravno tako nesmiselno bi bilo tudi vprašanje: Kolikšna je površina nebesnega oboka?"

"Kaj ni vendarle ploščina $P_2 > P_1$?"

"Že spet ženete svoje. Dokažite mi najprej, da je števil 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, .. več kakor števil 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, ..., pa bom tudi jaz sprejel, da je $P_2 > P_1$."

"Oh, tega vendar ni mogoče dokazati."

"No, potem pa pojdimo naprej."

"Zdaj že sami vidimo, da vprašanje s koti nima smisla: če je kot ploščina, ne vemo, kolikšna je."

"Tako je. Kote je sicer mogoče primerjati, vendar šele potem, ko je vpeljano *merjenje* kotov. Lahko na primer rečemo, da je kot 50^0 večji od kota 40^0, zato ker smo vpeljali kotno mersko število, in vemo, da je $50 > 40$, saj se med števili smeta uporabljati relaciji $>$ in $<$."

"In kaj je s padalcem? Kaj res ne pada navpično?"

"Ne, nikakor. V fiziki se boste podrobneje seznanili s tem vprašanjem in zvedeli, da padalec pada po precej zamotani krivulji, ki v idealnem primeru ustreza loku parabole."

"Ampak zakaj bi kvadriranje ne bilo injektivna funkcija?"

"Saj nisem rekel, da ni. Mogoče je, mogoče pa ne. Gre za to, da tudi to vprašanje ni natančno zastavljeno, ker ni rečeno, v kateri množici gledamo kvadriranje. Če namreč gledamo kvadriranje v množici naravnih števil, se pravi kot funkcijo iz množice naravnih števil v množico naravnih števil (to je kot $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$), kakor ste vzeli vi, tedaj kvadriranje *je* injektivna funkcija. Vendar kvadriranje v množici celih (ali racionalnih) števil ni injektivna funkcija, ker nam preslika množico celih števil $\mathbf{Z}$ v množico nenegativnih celih števil, $\mathbf{N}_0$, in to je potemtakem funkcija iz $\mathbf{Z}$ v $\mathbf{N}_0$ (to je $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}_0$). Zdaj lahko različnim elementom množice $\mathbf{Z}$ (na primer 2 in -2) pripada ista vrednost (število 4) množice $\mathbf{N}_0$. Vidite torej, da je vprašanje neprecizno, ker je odgovor odvisen od tega, v kateri množici gledamo kvadriranje."

"Res, drži, da tudi nalog ni tako lahko postavljati, kakor smo mislili."

"Tako je, ker je tudi po načinu dajanja mogoče odkriti, ali tisti, ki jih postavlja - pozna matematiko."

SOS! SOS! SOS! MNOŽICE V "ZOSU"
ali
KAKO SO MATEMATIKI REŠILI MNOŽICE

"Ha, ha, ha! Ni mogoče, da so bile tudi množice v nevarnosti. Pa nas res zanima, za kaj gre, v čem je vic. Zmeraj smo mislili, da smo mi v nevarnosti pred množicami, zdaj so pa na vsem lepem v nevarnosti množice. Kaj to drži?"

"Drži, verjemite mi, res je bilo tako, matematiki pa še danes neradi govorijo o tem; ne marajo niti pomisliti, kaj bi se bilo lahko zgodilo množicam. Pa niti ne, kaj bi se bilo lahko zgodilo, temveč kaj se jim je že zgodilo. Sicer pa poslušajte: Bilo je že v začetku tega stoletja, kakšnih trideset let po utemeljitvi teorije množic. Ravno v času, ko so jo začeli matematiki na debelo obdelovati in uporabljati in uživati osvežitev, ki jo je prinesla matematiki. Bila je pravzaprav še mlada, vendar je imela pred seboj sijajne možnosti in napovedovali so ji veliko prihodnost. Tako je šlo vse v najlepšem redu, dokler se ni znani filozof, ki se je ukvarjal tudi z matematiko, ali če hočete matematik, ki se je ukvarjal tudi s filozofijo (to je zmeraj najbolj nesrečna kombinacija), in to je bil s kostmi in kožo sam Bertrand Russell, [22] spomnil in postavil zelo nenavadno vprašanje:

'Ali obstaja množica vseh množic?'

Kako preprosto zveni to vprašanje! Skoraj kakor kakšna besedna igra. Ampak delovalo je kakor bomba!

'Kaj je to tako pomembno? Kar naj obstaja, prava reč! Ena množica več ne more nič škodovati množicam. Ne gre nam v glavo, zakaj se je zaradi tega gospod Russell, naš spoštovani kolega, tako vznemiril. V tem ni nič senzacionalnega.' so rekli matematiki.

'Ampak če taka množica obstaja,' je izjavil Russell, 'in v načelu ni mogoče zanikati njenega obstoja, vam lahko dokažem, da njen obstoj pripelje v teoriji množic do paradoksa in s tem vrednost vse teorije po svoje spravi na rob varnosti, ker so omajani njeni temelji. Povejte mi no, lepo vas prosim, kakšna stroga matematična teorija pa je to, da je v nji mogoč paradoks!'

'Nezaslišano! To je vendar sramota. Od kod pa paradoks med množicami? Tega ne smemo dovoliti,' so se razburili matematiki. 'Kaj ni zadosti že to, da se razni paradoksi kažejo v vsakdanjem življenju. Zdaj bi pa radi še v matematiko. Ne, kar je preveč, je preveč. Pri Pitagorovem izreku, tega ne bomo dovolili! Boje-

[22] Bertrand Russell (1872 - 1970), angleški filozof in matematik.

vali se bomo do zadnjega in če bo treba, bomo pognali v boj tudi same aksiome, ampak paradoksi ne bodo zašli v matematiko.'

Vem, da ste radovedni in bi radi zvedeli, zakaj je nastal tak preplah med matematiki, ali kakšen paradoks je ugotovil Russell, vendar vam bom najprej, preden se seznanimo z Russellovim paradoksom, poskusil pokazati na zgledu, kaj je pravzaprav paradoks in zakaj je njegov obstoj tako rekoč katastrofalen za vsako teorijo. S paradoksom si namreč mislimo sklep, nasproten pričakovanemu, sklep, ki (pa čeprav samo na videz) nasprotuje pravilni presoji. V matematiki je zelo znan paradoks, na videz soroden Russellovemu, vendar je veliko preprostejši in ima zelo simpatično ime: 'brivčev paradoks'. Seznanimo se najprej s tem paradoksom, ker je izredno primeren za razumevanje vprašanja. No, 'brivčev paradoks' je torej takle: Zamislite si, da v neki vasi živi brivec."

"Dobro, zamislili smo si."

"Vzemimo, da naš brivec brije vse tiste in *samo tiste* vaščane, ki se ne brijejo sami."

"To je vsaj jasno."

"V redu, v redu. Zdaj pa dobro premislite in odgovorite na vprašanje: Ali se brivec sam brije?"

"Seveda se sam brije. Menda se ne bo hodil brit k brivcu v sosednjo vas."

"Čakajte, pazite. Rekli smo, da brivec brije samo tiste vaščane, ki se ne brijejo sami. Potemtakem..."

"Uh, pa res. Ne sme se sam briti - kakšen čuden brivec. Priznamo, da je to malo nenavadno, ampak menda ni v tem paradoks, da se tudi brivec hodi brit."

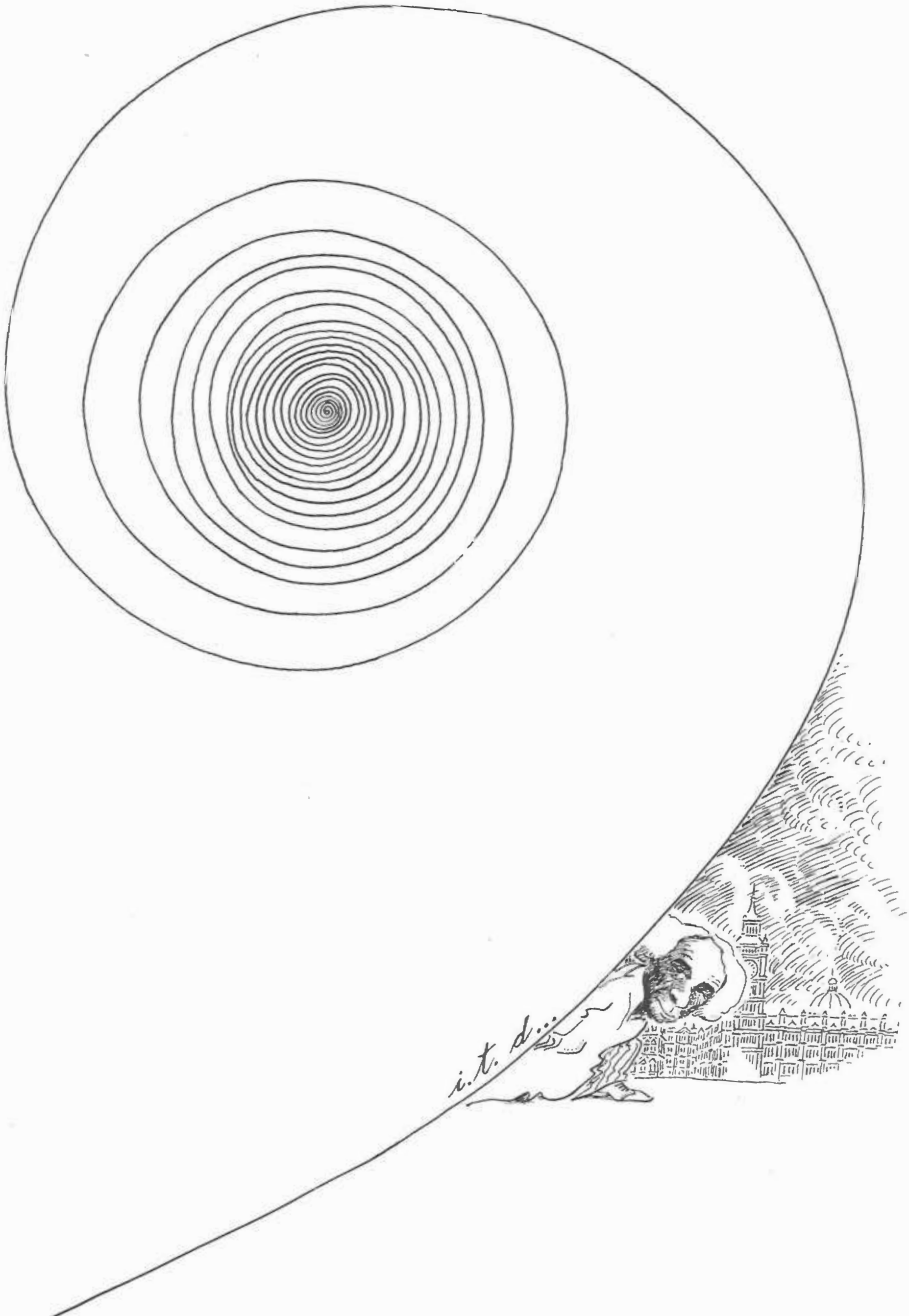
"Pa ravno v tem je problem. Če se brivec namreč ne brije sam, je eden od vaščanov, ki se ne brijejo sami, in bi moral potemtakem (po predpostavki) briti tudi sebe."

"Se pravi, da se le brije sam..."

"Ampak kaj, ko smo že ugotovili, da se ne sme sam briti..."

"Zakaj ne? Ta je pa dobra! Navsezadnje kaže, da se ne sme ne briti ne ne briti..."

"Natančno tako. Saj ravno v tem je 'brivčev paradoks', iz katerega se brivec nikakor ne more izvleči. Očitno pri tem nekaj ni v redu, čeprav je naše sklepanje pravilno, pa še sami ne vemo, kaj ni v redu. Bi mogli vi priskočiti na pomoč brivcu? Ko sem prvikrat zvedel o tem paradoksu, sem ga poskušal rešiti 'eksperimentalno'. In sicer zelo preprosto. Odšel sem v najbližjo brivnico - brit se. In medtem


i.t.d...

ko me je zgovorni brivec bril, sem mu povedal 'brivčev paradoks' in ga vprašal, kaj misli o tem vprašanju. Brivec se je samo malo zamislil, se zresnil, pomenljivo pokimal in rekel:

'Slišiste, dragi muoj gespud. Jaz se ne zastuopim kaj preveč ne na filozofijo ne na matematko, ampak iz svoje izkušnje vam puvem, da je ni vasi, v kteri se ne bi brivec sam bril.'

Tako je brivec preprosto rešil 'brivčev paradoks' in - verjemite ali ne - imel je prav.

39 Ampak vrnimo se zdaj k Russellovemu paradoksu, čeprav ga ne bomo mogli podobno 'rešiti'. Poskušal vam ga bom razložiti v malo poenostavljeni obliki. Izhodišče Russellovega razglabljanja je takole: Vse množice je mogoče spraviti v dve vrsti, v:

1. množice, ki vsebujejo samo sebe kot element - imenujemo jih množice *d*;
2. množice, ki ne vsebujejo same sebe kot element - pravimo jim množice *n*.

d

n

Če torej opazujemo katero si že bodi množico *S*, je bodisi množica *d* ali pa *n*. Če obstaja 'množica vseh množic', to je množica, ki kot element obsega vse množice, bo očitno množica *d*, saj ima kot element vse množice in tako samo sebe. In zdaj smo pri ključni točki Russellovega paradoksa. Množica *P* je namreč definirana kot množica, ki obsega kot elemente vse množice *n*, pa nobene množice *d*. Množico *P* torej sestavljajo vse množice, ki ne vsebujejo kot element same sebe. Postavlja se vprašanje: Je množica *P* sama vrste *d* ali *n*? (Ali se brivec brije?) Če je množica *P* množica vrste *d*, če ima torej samo sebe kot element, bi bila (zaradi definicije množice *P*) ena od množic vrste *n*, to je, kot element ne bi bila v sami sebi. Vendar nikar prehitro ne sklepajmo, da je množica *P* ena od množic vrste *n*; če bi bila namreč *P* množica vrste *n*, to je, da ne bi obsegala sama sebe kot element, bi bila množica *P* (že spet po definiciji množice *P*) eden od elementov množice *P*, se pravi, da bi vsebovala samo sebe kot element in bi bila potemtakem množica vrste *d*. Sklepamo torej, da množica *P* ne more biti ne množica vrste *d* ne množica vrste *n*, in v tem je paradoks tega protislovja. Zagotavljam vam, da tega paradoksa ne more rešiti noben brivec. Pa tudi matematike je paradoks grdo prestrašil in pošteno namučil. V začetku so nekam naivno mislili, da ga bodo rešili še kar miroljubno, z navadnim preverjanjem dokumentov množice *P*, se pravi njene dovolilnice za bivanje med množicami. Mislili so namreč, da je množica *P* (definirana kot množica vseh množic, ki ne obsegajo sebe kot element), ilegalno zašla v klasično 'naivno' teorijo množic in da njeni dokumenti niso v redu. In ko se to ugotovi, bo naprej lahko. Straža jo bo vrgla iz množic, kakor na primer na nogometni tekmi redarji vržejo ven človeka, ki nima vstopnice. Vendar so se zastran tega zmotili. Množica P jim je lepo pokazala izkaznico, vstopnico in jih še porogljivo vprašala, če jih nemara zanima številka žiro računa. Potem so ji morali priznati, pa čeprav neradi, da je enakopravna vsem drugim članom društva NAIVCEV (pa ne Ivana Kušana,[23] temveč) TEORIJE MNOŽIC. 'Ej, tu ni več šale,' so ugotovili matematiki. Te neugodne gostje se je treba prej ko prej in kakor si že bodi iznebiti, brez veliko pregovarjanja. In kako se še dela važno in se nam še v brk posmehuje. Ven z njo! Pri tej priči! In povrh tega se je treba zavarovati, da se tudi v prihodnje ne zgodi kaj podobnega. Danes je prišla množica vseh množic, jutri pa prileze mogoče še kdo drug s svojim paradoksom, pa bo - konec z množicami. Ne, tako ne gre. Koliko naporov je bilo vloženih v to teorijo, zdaj pa naj se kdo meni nič tebi nič pritepe in nam vse skupaj pokvari. Tu je treba napraviti red. Množice se morajo zavarovati in za naprej je treba natančno vedeti, kaj sme biti in kaj ne. Matematiki so želeli zavarovati množice pred takimi neprijetnimi presenečenji, zato so jih na hitro spravili v stavbo iz debelega armiranega betona, postavili okoli stavbe celo četo stražarjev, oboroženih z aksiomi, in zdaj so brez skrbi, da nobena nezaželena množica ne more v stavbo s svojim paradoksom."

"Kaj ni tak način obrambe teorije malo nenavaden v matematiki?"

"Ni. Nasprotno. V novejšem času ga čedalje bolj uporabljajo, in sicer skoraj na vseh področjih matematike. Matematiki so temu postopku preselitve množic na en prostor rekli aksiomatiziranje teorije množic. Imeli so že čez glavo 'naivne' teorije množic, kamor lahko stopi vsak, kdor se spomni. Zdaj ima prost vstop med množice samo tisti, ki ga spustijo skozi aksiomi. Če nima dovoljenja aksiomov, naj niti ne pomisli na vstop med množice. In eden prvih aksiomov, ki so jih matematiki sprejeli in razglasili na slovesni seji, se je glasil:

Ni množice vseh množic!"

"Kaj ni to protizakonito?"

"Ne, ni. Ta odlok namreč velja samo v območju stavbe, v kateri so matematiki nastanili svojo aksiomatizirano teorijo množic, zunaj te stavbe pa nikogar ne

[23] Ivan Kušan (1933-) sodobni hrvaški književnik. Leta 1975 je objavil roman NAIVCI; v njem se norčuje iz raznih sodobnih "naivnosti", še prav posebej iz množične mode naivnih slikarjev v podravskih vaseh.

obvezuje. Ko torej na sprehodu zagledate mogočno stavbo z debelimi železnimi vrati, na katerih piše:

Množici vseh množic vstop najstrože prepovedan!

STOP
STOP
STOP
STOP
STOP
STOP
STOP
STOP
....

vedite, da je to sedež aksiomatizirane teorije množic. Sicer je malo verjetno, da boste na sprehodu prišli do te stavbe, ker je postavljena na zelo nedostopnem svetu in zahajajo vanjo predvsem matematiki alpinisti. Vidite, tako se je matematikom vrnilo mirno spanje. Rešili so množice paradoksa."

"Nazadnje se je torej vendarle vse dobro končalo. Matematiki so bili gotovo zelo veseli takega uspeha."

"No ja. Ne ravno preveč, saj je bila tudi cena zmage precej velika."

"Kako to mislite? Kaj je vendarle še kaj narobe?"

"Seveda je, pa tudi ni. Kakor se vzame. Poglejte, za kaj gre:

Komaj so matematiki spravili množice na varno in mislili, da je s tem vprašanjem paradoksa rešeno, so se že začeli neki mladi ambiciozni matematiki upirati in ugovarjati:

'Zakaj bi mi, ki so nam množice potrebne, morali hoditi ponje v 'njihov' bunker, ki je tako daleč in se v njem tudi ne počutimo posebno udobno. O komfortu v njem rajši niti ne govorimo. Včasih zmanjka toka, včasih spet ni vode. Kakšno udobje pa je to? In pri tem vse drago plačujemo, kakor da smo v hotelu kategorije A. In povrh tega se morajo, in to je najhujše, vse naše množice podrejati 'njihovim' aksiomom in se ravnati po hišnem redu, ki so ga 'oni' predpisali. Za nas bi bilo preprostejše, in še celo cenejše, če bi si postavili svoje poslopje, lepše in modernejše, in v njem bodo množice živele po pravilih, ki jih mi sami napišemo."

"In kaj se je zgodilo? So to v resnici naredili?"

"Seveda. Nahitroma so postavili svoje poslopje na svetu, ki so ga sami izbrali, postavili straže s svojimi aksiomi in tako imajo zdaj vse pri roki in vse je po njihovem okusu."

"Se pravi, da imamo dva sistema aksiomov teorije množic..."

"Ko bi bila samo dva. To bi še ne bilo tako grozno. Ampak bržkone že slutite..."

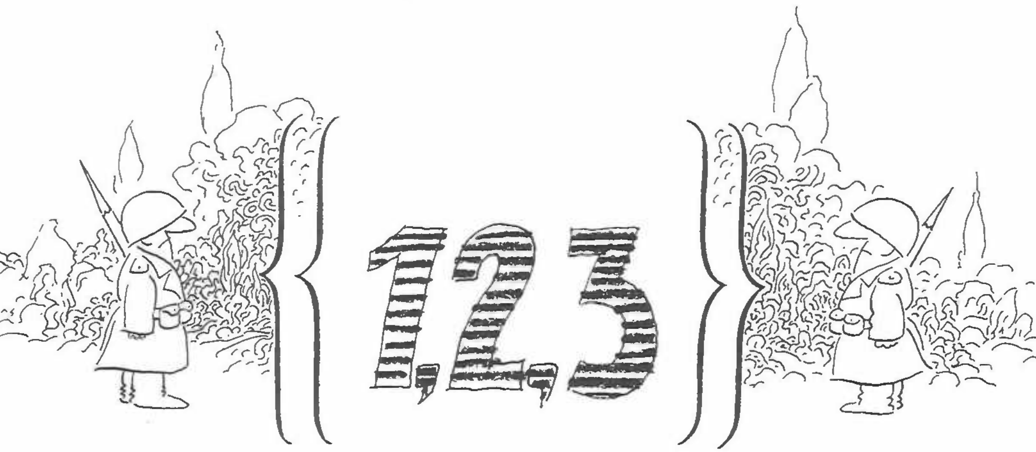
"... da se je kaj kmalu oglasila še tretja skupina matematikov s svojimi aksiomi..."

"... tako, tako in potem še četrta...

In tako imamo danes nekaj aksiomatik teorije množic. In privrženci vsake aksiomatike se bahajo, kako je ravno njihova stavba najboljša za nastanitev množic in postavljena na svetu, od koder je najlepši razgled na razne matematične strukture."

"Hu, to je malo neprijetno. Kadar so matematikom potrebne množice, se morajo torej odločiti..."

"... bodisi za eno od aksiomatik teorije množic, in tedaj so brez skrbi, da se ne bodo oglasili paradoksi (vendar so zato vse postavljene na težko dostopnih terenih - in ne morejo do njih z avtomobilom), ali pa za klasično 'naivno' teorijo množic. Pot do te je sicer zelo dostopna, zato pa je nobena zavarovalnica ne mara, za noben denar, zavarovati pred morebitnim vdorom paradoksov, zato morajo biti tisti, ki jo uporabljajo, zelo zelo pozorni in previdni. Vidite, to je cena, ki so jo morali matematiki plačati, da so rešili množice in jih izvlekli iz 'zosa'."



S ČIM SE UKVARJAJO MATEMATIKI DANES

"S čim se ukvarjajo? Namesto da odgovorim na to, bi vam rajši postavil vprašanje:

'S čim se pa ne ukvarjajo?' Saj namreč skoraj ni področja človeške dejavnosti, da se ne bi vanj 'mešali' matematiki. Ne morem vam seveda natančno odgovoriti na vaše vprašanje, zato bom naštel nekaj pomembnejših področij sodobne matematike, iz njih pa boste sami spoznali, s čim vse se 'kratkočasijo' današnji matematiki. Tu je torej nekaj matematičnih vej:

- logika in osnove,
- teorija množic,
- teorija števil,
- algebrajska teorija števil, teorija obsegov in polinomi,
- komutativni kolobarji in algebre,
- algebrajska geometrija,
- linearna in multilinearna algebra, teorija matrik,
- asociativni kolobarji in algebre,
- teorija kategorij, homološka algebra,
- teorija grup,
- topološke grupe, Liejeve grupe,
- realne funkcije,
- mera in integracija,

kaj je tudi to matematika

- funkcije kompleksne spremenljivke,
- teorija potenciala,
- posebne funkcije,
- diferencialne enačbe,
- parcialne diferencialne enačbe,
- Fourierjeva analiza,
- integralske transformacije, operacijski račun,
- funkcionalna analiza,
- teorija operatorjev,
- variacijski račun,
- konveksne množice in geometrijske neenakosti,
- diferencialna geometrija,
- splošna topologija,
- algebrajska topologija,
- analiza na mnogoterostih,
- teorija verjetnosti in stohastični procesi,
- informacija in komunikacija,
- numerična...
- ...."

"Dosti, dosti, zdaj nam je vse jasno, pravzaprav nam ni nič jasno. Ampak kaj se to pravi? Od kod vsi ti izrazi? Kaj vse to sodi v matematiko? Saj si tega človek ne more niti zapomniti. Mi smo pa mislili, da matematika sestoji iz aritmetike in geometrije in pa tehle množic, ki so jih vpeljali pred nekaj leti."

"Tako je, to je sodba, kakor je prevladovala pred petsto do šeststo leti in je tudi ustrezala tedanjemu stanju."

"Kdaj pa so potem nastale vse te mogočne panoge matematike? Koliko so stare?"

"Hja, ene več, druge manj. Nekatere, na primer teorija oblike, so le nekoliko starejše od vas, saj jim je šele komaj dobrih dvajset let. Nekaterim od njih je trideset, nekaterim petdeset, nekaterim sto let, nekaterim pa veliko več."

"Pa se mora vsak, kdor bi želel postati matematik, najprej naučiti vseh teh vej matematike?"

"Še misliti ni. Če bi bilo tako, bi bila najbrž tudi množica matematikov - prazna. Vsak matematik se ukvarja s svojim področjem in mogoče še z nekaj sosednjimi področji, o drugih pa ve pravzaprav zelo malo. Tako se že danes dogaja, da se srečata dva matematika, strokovnjaka z različnih področij, pa vsak od njiju govori in piše v 'svojem' jeziku, tako da ga sosed (večidel) nič ne razume, in tako se po nekaj minutah nimata več o čem pogovarjati. To se kajpak ne zgodi, če govorita o osnovnih, temeljnih pojmih matematike, pa čeprav imata tudi tukaj lahko različna gledanja, tako da..."

"Pa obstaja vendarle kaj skupnega, kar je značilno za vso sodobno matematiko, za vsa njena področja?"

"Matematiki pravijo, da tako rekoč v vseh panogah današnje matematike srečujemo logiko, množice in strukture. Nekateri celo mislijo (če se niso premislili), da je mogoče, logično rečeno, vso sodobno matematiko izpeljati iz enega vira - iz teorije množic. Za preučevanje množic pa so potrebne, celo krvavo potrebne, zelo tenkočutne logične presoje."

"In kaj je struktura? To besedo slišimo prvič."

"Ne verjamem, da je v resnici niste še nikoli slišali, saj jo zelo pogosto uporabljajo v vsakdanjem govorjenju, v časopisju, pa tudi na raznih drugih znanstvenih in življenjskih področjih. Govorimo na primer o strukturi družbene ureditve, o strukturi družbe, o strukturi atoma, molekule, o političnih strukturah, o strukturi našega šolskega sistema, o strukturi... poleg tega pa vidim, da ste pozabili, kako smo tudi algebri izjav rekli struktura."

"Res je, slišali smo o strukturah, pa nismo niti pomislili, da so tako zelo pomembne. Algebro izjav pa smo pri branju knjige preskočili, priznamo."

"Vse zglede, ki sem vam jih navedel, lahko vzamemo tudi kot določene množice, in sicer množice, ki - imajo strukturo."

"Se pravi, da obstajajo tudi množice brez strukture?"

"Poglejte, za kaj gre: nobena množica sama po sebi nima strukture. Za matematika množica preide v strukturo tisti trenutek, ko v nji definira kakšno ope-

racijo ali relacijo, ki ne odvaja iz množice, torej operacijo, zaprto glede na množico. Ali: algebrajska struktura je taka (neprazna) množica, v kateri je definirana vsaj ena operacija."

"Ni nam jasno, kaj to pomeni."

"Kako ni jasno? Struktura je vendar... (Odkrito rečeno, tudi jaz sem to do kraja razumel šele po nekaj konkretnih zgledih. Vsa čast definicijam, ampak veliko povedo samo - če jih razumemo. Tudi njim bom poskusil to razložiti z zgledom.) Dobro, pojem algebrajske strukture vam bom razložil na zgledu. Vzemimo zelo preprosto množico s samo tremi elementi

$$S = \{1,\ 2,\ 3\}$$

Napišite zdaj vse podmnožice te množice."

"To so množice:

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$. Skupaj jih je osem."

"Zapomnite si še, da vse podmnožice kakšne množice S sestavljajo tako imenovano partitivno množico, ki jo zapisujemo s $P(S)$. To je torej množica, katere elementi so množice, se pravi vse podmnožice dane množice. Seveda bo v tem primeru

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,\ 2\}, \{1,\ 3\}, \{2,\ 3\}, \{1,\ 2,\ 3\}\}$$

Če zdaj definiramo na primer unijo v tej množici $\mathcal{P}(S)$, postane struktura glede na to, da nas unija katerih si že bodi dveh podmnožic množice S ne odpelje iz množice $P(S)$. Vzemimo na primer unijo podmnožic $\{1, 2\}$ in $\{1, 3\}$. Vemo, da je po definiciji unije

$$\{1,\ 2\} \cup \{1,\ 3\} = \{1,\ 2,\ 3\}$$

množica $\{1, 2, 3\}$ pa pripada $P(S)$, se pravi, da z operacijo unije nismo šli iz množice $P(S)$. Bi znali navesti še kakšno operacijo, ki nas ne pripelje iz množice $P(S)$?"

"Zdi se nam, da bi to utegnila biti na primer operacija preseka množic."

"Tako je. Če napravimo presek katerih si že bodi dveh elementov, ki pripadata $P(S)$, bomo za rezultat spet dobili kakšen element množice $P(S)$. Na primer

$$\{1,\ 2\} \cap \{1,\ 2,\ 3\} = \{1,\ 2\}$$

"In zdaj navedite zgled operacije, ki - uporabljena na dveh podmnožicah množice S - dá kot rezultat množico, ki ni zajeta v $P(S)$."

2 · 5 · 19

$2 \cdot 5 = 10 \cdot 19$

10

90

190

"To je, to je kartezični produkt množic. Če namreč napravimo ta produkt na primer za množici { 1, 2 } in { 1, 3 }, dobimo

$$\{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

ampak te množice ni v $\mathcal{P}(S)$."

"Vidite, kako ste hitro razumeli. Pa kljub temu poglejmo še en zgled, in sicer z množico naravnih števil

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots\}$$

Premislite in povejte, katera računska operacija, definirana v tej množici, nas ne odpelje iz nje?"

"Seštevanje."

"Drži. Pa poznate še kakšno operacijo s to lastnostjo?"

"Odštevanje."

"Odgovorili ste malo zaletavo, brez premisleka. Kaj nastane, če večje število odštejemo od manjšega? Je tedaj rezultat naravno število?"

"Ni, saj je $5 - 8 = -3$, -3 pa ni naravno število."

"Torej z operacijo odštevanja v množici naravnih števil ne bomo dobili strukture. Dobili bi jo pa..."

"Z množenjem."

"Tako je. Ti dve operaciji, to je seštevanje in množenje, nas ne odpeljeta iz množice naravnih števil, zato pravimo, da množica naravnih števil obenem z operacijo seštevanja ustvarja strukturo. To se krajše napiše:

$(\mathbf{N}, +)$ je struktura, seveda pa je

$(\mathbf{N}, \cdot)$ ravno tako struktura.

Ravno tako je struktura tudi

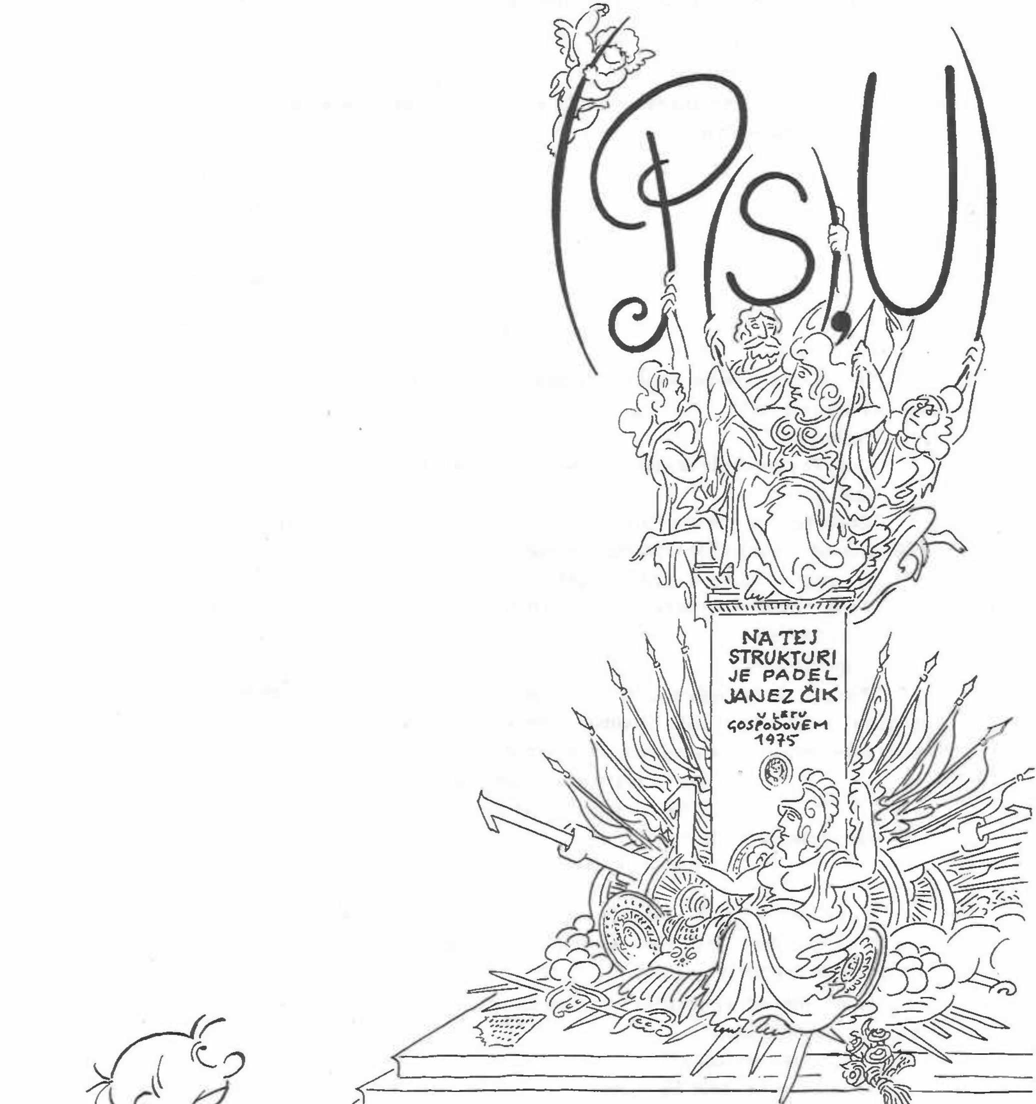
$(\mathcal{P}(S), \cup)$ kakor tudi $(\mathcal{P}(S), \cap)$

To so kajpak zgledi nekaterih najpreprostejših struktur. Vsaka struktura ima še posebno ime. Tako vsem navedenim strukturam pravimo grupoidi. Matematiki takole definirajo grupoid:

Če je S (neprazna) množica, $\circ$ pa binarna operacija v S, potem urejeni dvojici $(S, \circ)$ pravimo grupoid.

Ste razumeli definicijo?"

"Smo, samo ne vemo, kaj pomeni ta krožec."


(PS,U)
NA TEJ STRUKTURI JE PADEL JANEZ ČIK V LETU GOSPODOVEM 1975

"S krožcem ($\circ$) ali z zvezdico ($*$) po navadi nakažemo, da uporabljamo *kakšno* binarno operacijo. To je v prvem primeru seštevanje, v drugem množenje, v tretjem krožec zamenja znamenje unije ali preseka in tako naprej; potemtakem je to splošno znamenje za binarno operacijo.

Ampak zdaj si oglejmo še nekaj struktur. Operacija $\circ$ more imeti tudi posebne lastnosti. Znano je na primer, da imajo tudi seštevanje in množenje in unija in presek - poleg drugih lastnosti - tudi lastnosti komutativnosti in asociativnosti, se pravi, vse te operacije so komutativne in asociativne. Pa se sploh še spomnite, za kakšne lastnosti gre pri tem?"

"Kaj bi se ne! Za naravna števila a, b, c na primer velja

$a + b = b + a$ lastnost komutativnosti za seštevanje,

$a \cdot b = b \cdot a$ lastnost komutativnosti za množenje in

$(a + b) + c = a + (b + c)$ lastnost asociativnosti za seštevanje,

medtem ko je..."

"Dobro, dobro, vidim, da niste pozabili in boste razumeli, kaj pomeni, če rečemo: če je definirana operacija asociativna, pravimo strukturi polgrupa. Ali: asociativnemu grupoidu pravimo tudi polgrupa.

Potem so polgrupe tudi tile grupoidi:

$$(\mathbf{N}, +), \qquad (\mathbf{N}, \cdot), \qquad (\mathcal{P}(S), \cup) \qquad (\mathcal{P}(S), \cap)$$

Vam je jasno, zakaj je za vsako dano množico S grupoid ($\mathcal{P}(S)$, $\cup$) polgrupa?"

"Zato vendar, ker je operacija $\cup$ asociativna."

"Drži. In če v polgrupi velja še zakon komutativnosti, pravimo, da je komutativna. Če zaznamujemo z a, b elemente partitivne množice $\mathcal{P}(S)$, je polgrupa komutativna, če je

$$a * b = b * a \qquad (\forall\, a, b) \in \mathcal{P}(S)$$

(beri: za vsaka a, b, ki sta elementa partitivne množice $\mathcal{P}(S)$).

Če polgrupa ustreza še določenim pogojem, postane grupa, vendar se v to ne mislimo spuščati, saj sem vam že tako ali tako želel samo pojasniti pojem strukture v matematiki."

"Pa so še kakšne strukture poleg teh?"

"Seveda so. Navedem vam imena samo nekaj pomembnejših struktur:

— grupoid
— polgrupa
— grupa
— kolobar
— obseg
— komutativen obseg...

"Uh, kakšna nenavadna imena. Kolobar, obseg... kdo bi neki rekel, da so to tudi matematični izrazi. Dobro, videli smo torej, kaj v matematiki pomeni struktura, zanima nas pa vendarle, zakaj je preučevanje raznih struktur tako pomembno v današnji matematiki."

"Poskusil vam bom odgovoriti na to vprašanje, čeprav nisem prepričan, da vam bom mogel z nekaj besedami tudi razložiti. Moderna algebra izhaja iz splošnega pojma množice in preučuje samo množice, v katerih je definirana vsaj ena operacija ali relacija, se pravi množice, ki imajo strukturo, in sicer ne glede na to, kaj predstavljajo elementi množice. Osrednja naloga pri tem je raziskovanje struktur in lastnosti operacij v množicah. Ker imata lahko dve različni množici s popolnoma različnimi elementi isto strukturo - če v njiju velja ista operacija - je naloga moderne algebre, da odkriva *isto strukturo v različnih objektih.* Se pravi, da opozarja na skupno, kar se skriva pod različnostjo. Odkrivanje skupnega pri na videz različnem je ena od bistvenih nalog današnje algebre. Če pa tako raziskovanje vzamemo kot igro, potem so:

igralni pripomočki...temeljni pojmi formalne logike in teorije množic,

pravila igre...algebrajske operacije in zakoni strukture,

igrišče...določena algebrajska struktura.

Vidite, zato je danes preučevanje raznih struktur za matematike tako pomembno."

"Pogovarjali smo se že o vsem mogočem, ampak kako da nismo skoraj nič govorili o geometriji? Kaj ni tudi geometrija veliko in tehtno področje matematike?"

"Imate prav. Zelo je pomembna, poleg tega pa tudi zelo stara veja matematike. Njeni začetki so bili že pri starih Egipčanih, kjer je bila precej razvita zaradi potreb pri merjenju zemljišč. O nji pa kratko in malo zato nismo govorili, ker še nismo utegnili. Mogoče ob kakšni drugi priložnosti. Ampak vendar, da ne bo kdo rekel, da je nismo niti omenili, povejte mi, ali vam je znano:

Kaj je geometrija?"

"Kaj bi ne bilo. Geometrija jeee... geometrija je veda..."

"No, dobro. Nikar si ne prizadevajte. Vem, da vam je znano, s čim se geometrija ukvarja, jaz pa vam bom povedal eno od definicij geometrije, ki izvira izpod peresa O. Veblena in o kateri je veliki matematik geometer Felix Klein [24] rekel, da mu je še najbolj všeč od vseh definicij, kar jih pozna. Takole se glasi:

GEOMETRIJO IMENUJEMO VEJO MATEMATIKE, GLEDE KATERE SE PRECEJ KOMPETENTNIH LJUDI STRINJA, DA JI PRAVI TAKO IZ SENTIMENTALNIH IN 'TRADICIONALNIH' VZROKOV."

---

[24] Felix Klein (1849 - 1925), nemški matematik.

"O, tudi nam je ta definicija všeč. Zelo je posrečena."

"Vedel sem, da vam bo všeč, čeravno pravzaprav ni niti malo šaljiva, saj obsega globoko resnico o geometriji, popolnoma pa jo boste razumeli šele potem, ko se boste malo bolje seznanili tudi z vso matematiko."

Tega ne potrebujem ...
se mi mudi v šolo...

MATEMATIK, KI SE NE STARA

"Kaj pa to? Pa menda niso matematiki iznašli kakšnega čarovnega napoja? Več ko smešno. Kako je mogoče ne se starati?"

"Ne, niso iznašli nobenega eliksirja večne mladosti, pa vendar obstaja matematik, ki je večno mlad - po letih in po idejah."

"Pa nas res zanima, v čem je štos. Kdo je ta matematik? Kje živi? In kako se doseže večna mladost?"

"Zelo preprosto. Najprej vam bom povedal, kako so sploh prišli na misel, da bi 'napravili' matematika, ki se ne bo nikoli postaral. Na splošno je namreč znano, da ljudje z leti dobijo več znanja in izkušenj, to je gotovo pozitivno, še največkrat pa postanejo tudi preveč obremenjeni s starim, kar jih pogosto veže, da teže sprejemajo novo, se teže prilagajajo in se jim zmanjšuje ustvarjalna zmožnost..."

"Vemo, vemo, mi mladi dobro vemo, v čem se ločimo od starejših..."

"Nisem mislil ravno na vas, ampak naj vam bo. Ko so matematiki premišljevali o tem vprašanju, so ugotovili, da bi bilo za razvoj vse matematike dobro, če bi bil kakšen matematik, ki bi imel hkrati veliko znanja z vseh področij matematike, se pravi, da bi bil vsestranski, izkušen, pri tem pa ves čas mlad, da bi zlahka sprejemal vse novo in neprenehoma ustvarjal. Ker takega človeka ni in ga ne more biti, so ga matematiki naredili."

"Kako pa je mogoče koga narediti?"

"Lahko, zakaj pa ne? Poglejte, kako. Skupina mladih francoskih matematikov se je dogovorila, da bodo skupaj pisali in izdajali matematična dela pod izmišljenim imenom *Nicolas Bourbaki.*"

"To je torej tisti vsestranski matematik. Pa nam vendarle ni jasno, kako da se ne postara. Saj sčasoma tudi ti mladi matematiki postanejo čedalje starejši, se pravi, da bo tudi ta skupina lepega dne postala skupina - starih matematikov."

"Že že, ampak ti so se temu izmaknili na zelo izviren način. Kakor hitro član skupine dopolni določeno leto, neha biti njen član, na njegovo mesto pa izberejo mlajšega matematika. Tako je povprečna starost članov skupine praktično zmeraj ista, se pravi, da se Nicolas Bourbaki ne stara."

"Zelo posrečena odločitev. Pa bi nas vendar zanimalo, kako more cela skupina matematikov kaj skupaj pisati. Ali vsak od njih napiše po eno poglavje knjige?"

"Ne ve se čisto natančno, kako nastajajo njihova dela, vendar najbrž delajo takole: kateri od članov skupine mora kaj napisati, potem pa razpošljejo vsem članom . Ko vsi preberejo, se snidejo, povedo svoje misli, poiščejo napake, kritizirajo..."

"... kakor učitelji delajo z nami pri izpitih..."

"Mogoče res nekako tako, samo da je ta 'izpit' veliko veliko strožji. Ko tako napisano besedilo temeljito pretresejo in predelajo, ga dajo v tisk pod imenom Nicolas Bourbaki. V resnici je, kakor vidite, le malo možnosti, da se v knjigo, ki jo napiše Nicolas Bourbaki, prikrade kakšna napaka."

"Če je tako, zakaj pa podobno ne pišejo tudi naših vadnic?"

"Uh, vi pa tudi sprašujete vse mogoče!"

KAJ IMA VEČ TOČK: DALJICA ALI PREMICA

"Priznajte, da je to vprašanje malo nenavadno."

"Ni nenavadno, temveč - smešno."

"Zakaj smešno?"

"Zato, ker nam je treba samo pogledati skico ali si zamisliti daljico in premico, pa je - brez vsakršnega znanja matematike odgovor jasen. Premica ima veliko več točk kakor daljica."

"Pa ste res čisto prepričani o tem? In kako utemeljujete svojo trditev?"

" Kaj pa je treba tu utemeljevati, če je že vse jasno s slike. Daljica je *del* premice, omejena z dvema točkama. Potemtakem so vse točke daljice obenem tudi točke premice, na premici pa je še veliko točk, ki niso obenem tudi točke daljice. Vse točke na prečrtkanem delu premice ne pripadajo daljici, zato je jasno, da ima premica več točk kakor daljica. Vsaj o tem smo prepričani, čeprav matematika ni naša močnejša stran, ampak oči nas ne slepijo."

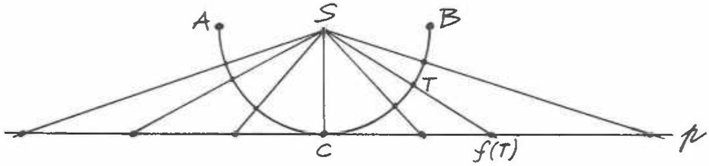
"Dobro, dobro. Verjamem, da imate dobre oči, pa vendar se spomnimo, kako moremo za množici (premica in daljica sta namreč množici točk) ugotoviti, ali imata isto število elementov."

"S prirejanjem elementov. Če je mogoče med množicama vzpostaviti bijektivno preslikavo, pomeni, da imata isto število elementov. Če pa v eni množici ostanejo neprirejeni elementi, se pravi, da ima ta množica več elementov. Vsaj tega nismo pozabili."

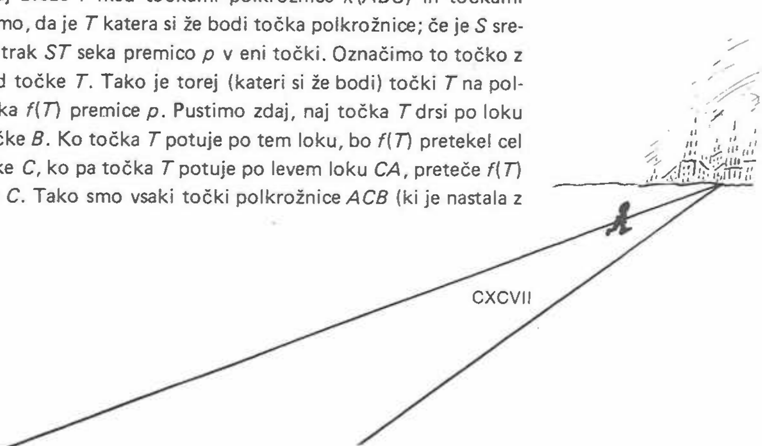
"Ljubo mi je, da ste si zapomnili. Preden odgovorimo na postavljeno vprašanje, ravnajmo torej tako tudi pri teh dveh množicah. Samo toliko, da bomo imeli mirno vest. Prirejajmo točke daljice točkam premice."

"Dobro, če že ravno želite (čeprav bomo samo v prazno izgubljali čas). Ampak kako poteka tako prirejanje?"

"Zelo preprosto. Po 'geometrijski' poti. Zamislimo si, da je naša daljica AB zvita v polkrožnico ACB (kakor da je iz sukanca), premica p pa naj se je dotika v točki C. Vidite, takole:



Vzpostavimo zdaj zvezo f med točkami polkrožnice $k(ABC)$ in točkami premice p takole: recimo, da je T katera si že bodi točka polkrožnice; če je S središče polkrožnice, poltrak ST seka premico p v eni točki. Označimo to točko z $f(T)$, ker je odvisna od točke T. Tako je torej (kateri si že bodi) točki T na polkrožnici prirejena točka $f(T)$ premice p. Pustimo zdaj, naj točka T drsi po loku CB od točke C do točke B. Ko točka T potuje po tem loku, bo $f(T)$ pretekel cel poltrak desno od točke C, ko pa točka T potuje po levem loku CA, preteče $f(T)$ poltrak levo od točke C. Tako smo vsaki točki polkrožnice ACB (ki je nastala z



zvijanjem daljice AB) priredili eno točko premice. S tem postopkom smo torej vzpostavili bijektivno preslikavo med točkami daljice in točkami premice in na tej podlagi ugotavljamo, da..."

"V resnici čudno. Potemtakem kaže, kakor da ima daljica ravno toliko točk kakor premica. Prav neverjetno. Pa menda ni to kakšen trik?"

"Ne, ni. To nam samo kaže, da se ne smemo preveč zanesti na tisto, kar 'vidimo'. Zato matematiki 'nazornih' slik sploh ne sprejemajo kot dokaz kakšne trditve. In moramo priznati, da imajo prav. Slike so nam sicer pogosto zelo koristne, vendar nas včasih speljejo tudi na napačno pot."

"To si bomo zapomnili, da se tudi mi ne zmotimo. Pa vendar nas zanima še nekaj v zvezi s premico."

"In kaj vas zanima?"

"Koliko točk je pravzaprav na premici?"

"Hm, hm, verjemite, da to vprašanje ni niti malo preprosto (moram, presneta reč, prej ko mogoče končati ta pogovor, drugače se bom znašel v še hujšem 'zosu' kakor množice, če bodo naprej tako sprašovali). Priznam, da osebno nisem štel vseh točk na premici, zato vam ne morem zanesljivo reči, vendar verjemimo rajši matematikom, ko pravijo (mogoče jih je kateri od njih v resnici preštel, kaj se ve): Na premici je natanko toliko točk, kolikor je realnih števil. To 'število' točk na premici ali realnih števil označujemo s črko c (začetna črka besede *continuum* ali *in continuo* (latinsko), kar pomeni nepretrgano, ves čas). Če množico realnih števil označimo z $\mathbf{R}$, bo njeno kardinalno število

$$k\,\mathbf{R} = c$$

Samemu Cantorju se je že leta 1873 posrečilo dokazati (o tem je pisal Dedekindu v pismu, ki smo ga navedli v začetku), da je kardinalno število množice realnih števil večje od kardinalnega števila množice naravnih števil, da je torej

$$k\,\mathbf{R} > k\,\mathbf{N}$$

ali

$$c > \aleph_0$$

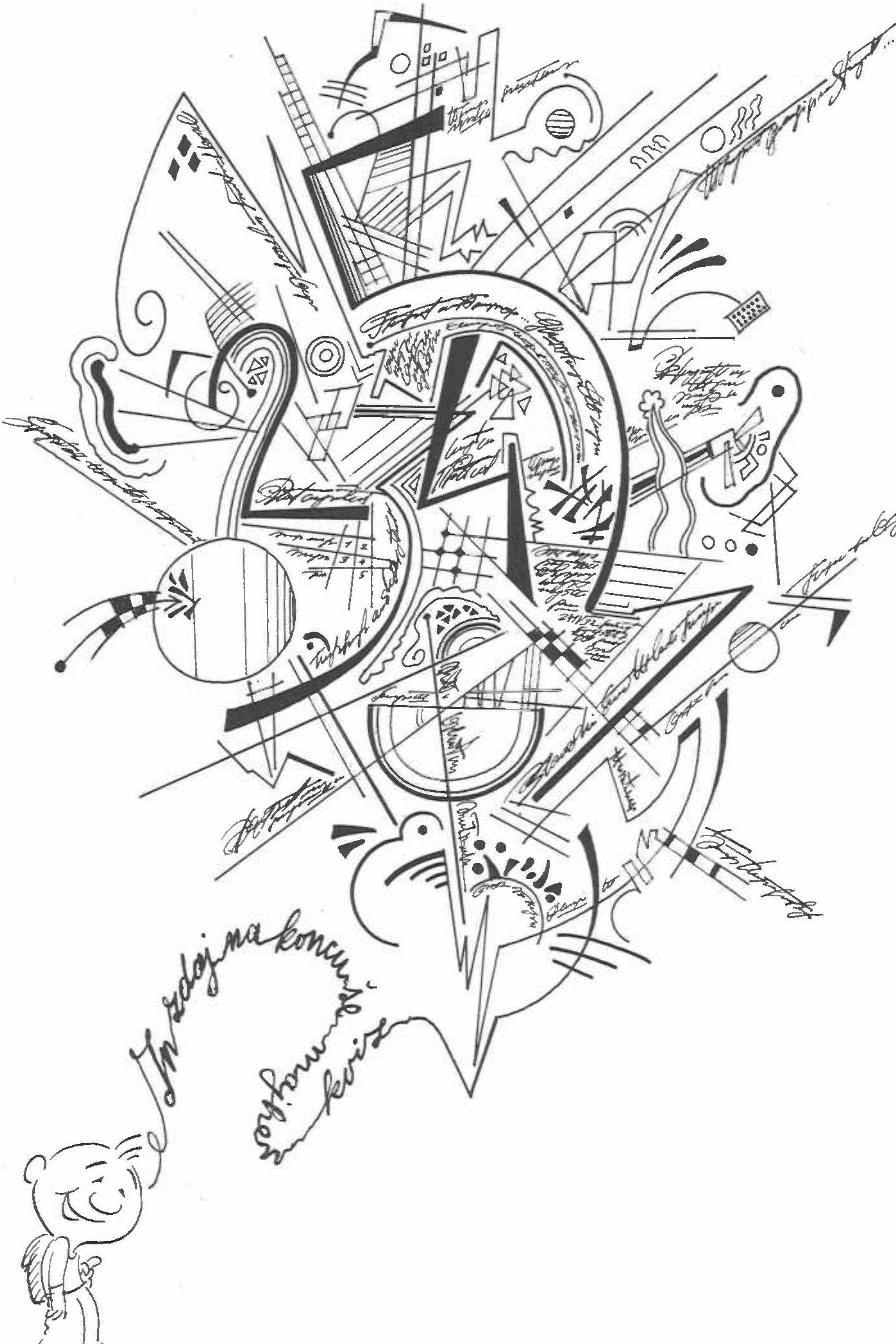
Do tega sklepa je prišel Cantor in ugotovil, da ni mogoče izčrpati vseh točk na premici, se pravi vseh realnih števil, s prirejanjem naravnim številom. Ker tu ne obstaja bijektivna preslikava, saj so na premici tudi neprirejene točke, to pomeni, da je $c > k\mathbf{N}$. In to je hkrati tudi začetek teorije množic in bi s tem lahko končali.

Vsaj to natančno vemo, kje smo. Iz tega zgleda tudi vidimo, da je teorija množic potrebna in nenadomestljiva, ko uporabljamo neskončne količine. Ta nam tudi omogoča razlikovati razne vrste neskončnosti. Ta teorija je pravzaprav nujno morala nastati, ko so se matematiki začeli ukvarjati s takimi vprašanji in če bi (po naključju) ne bilo teorije množic - bi si jo bilo treba izmisliti.

Se strinjate?"

KVIZ IZ MATEMATIKE

Izločilno besedilo
Veliki matematiki
O matematičnih simbolih
Matematični pojmi in definicije



Izdaj na koncu še
kviz

KVIŽ

KVIZ IZ MATEMATIKE

To se takole piše, po meni pa šalo, igro, preizkušnjo znanja s postavljanjem nalog ...
Beseda je sad stave nekega angleškega igralca; stavil je, da bo v 24 urah vpeljal novo besedo v pogovorni jezik ... Ponoči je na veliko hiš napisal besedo QUIZ. Zjutraj so se ljudje spraševali, kaj to pomeni ... Tako je bila beseda sprejeta in igralec je stavo dobil ...

Predlagam, da ga obvezno organizirate, ko preberete to knjigo, drugače - ste jo brali v prazno. Seveda je treba tudi za ta kakor za vsak drug kviz opraviti potrebne priprave. Narežite najprej 62 enakih kosov čistega papirja v velikosti kart, s kakršnimi očka igra preferans (ampak za vse nič ne smete uporabiti njegovih kart). Na kartice napišite v kotu s svinčnikom - da boste pozneje lahko zbrisali - številke vprašanj. To je potrebno zato, ker boste kdaj drugič vrstni red vprašanj spremenili, da vas ne bo mogel nihče prepetnajstiti tako, da bi se na pamet naučil odgovore na vprašanja pod stalnimi številkami. Potem na papirje prepišite, vendar berljivo in čedno, vsa vprašanja, napisana na straneh 211 do 214. Vprašanja so, kakor vidite, razvrščena v tri skupine, in sicer:

a) 1 do 12	VELIKI MATEMATIKI
b) 1 do 30	O MATEMATIČNIH SIMBOLIH
c) 1 do 20	MATEMATIČNI POJMI IN DEFINICIJE

Za vsako skupino vprašanj so predvidene točke. Ko opravite vse, kar je treba, imenujte sodnike. To so lahko na primer mama, očka in kateri od njunih gostov (tako mu vsaj ne bo prišlo na misel, da bi vas dolgočasil). Če ti ne utegnejo ali jih je strah prevelike odgovornosti, izberite za sodnike tri starejše in telesno močnejše (to je zelo važno) prijatelje. Vaši sodniki ne bodo samo brez dela sedeli, dajte jim nalogo, naj zapisujejo število točk, ki jih dobi vsak kandidat, in točke seštevajo (vi pa tu pa tam preverjajte). In zdaj vam preostane samo še, da odberete kandidate. Zavedajte se, da je med šestimi, sedmimi, ki se prijavijo za kviz, zmeraj nekaj brezzveznikov, ki nimajo pojma o nobeni stvari, vendar jim gre samo za to, da se pokažejo na zaslonu ali nastopijo v kvizu. Take je treba takoj izločiti; to boste napravili na podlagi posebnega izločilnega besedila (IB). Po vrsti pokličite kandidate in vsakemu preberite (vsaj) dve vprašanji, na kateri mora odgovoriti v desetih sekundah. Kandidata, ki ne odgovori pravilno na nobeno vprašanje, ali pa odgovori, da je naravno število tisto, ki ni umetno, ali o Descartesu reče, da je vratar francoske nogometne reprezentance, je treba brez pomišljanja izločiti. Če pa kljub temu želi na kviz, mu recite, naj se priglasi kje drugje, ne pri vas. Pazite tudi, da se vam na kviz ne pretihotapi kdo, ki več ko dobro zna matematiko. Napotite ga v šolo in naj se priglaša učitelju matematike, ne pa vam, saj vi organizirate kviz za tiste, ki nimajo radi matematike, pa se je morajo - hočeš nočeš - učiti. Pravico do sodelovanja na kvizu imajo vsi, ki nimajo radi matematike, in sicer od osmih do osemdesetih let. Mlajši od osmih let namreč niso primerni, ker veliko vreščijo in bi nazadnje utegnili planiti še v jok, če ne bi odgovorili na kakšno vprašanje, starejši od osemdesetih let pa že slabše slišijo, tako da bi jim morali vsako vprašanje ponavljati, to pa bi utegnilo drugim kandidatom zmanjšati zbranost. Ko je vse pripravljeno, se kviz lahko začne. Kot voditelj si zamislite, da ste nič več in nič manj kakor - Tomaž Trček in se tako tudi obnašajte (priporočam kravato, vendar ni obvezna), saj je navsezadnje od vas odvisen tudi uspeh kviza (samo naivčki mislijo, da je pri kvizu najpomembnejše znanje kandidatov). V začetku pozdravite vse navzoče, predstavite sodnike (mamo poprej opozorite, naj ne teka kar naprej v kuhinjo, očka pa, naj med kvizom ne igra kart in ne bere časopisov), seznanite kandidate s pravili igre (med kvizom ni dovoljeno prišepetavanje, pogledovanje v zapiske - grda razvada iz šole - in prerivanje).

Gledalcem predstavite kandidate z besedami:

"Spoštovani gledalci in spoštovani poslušalci, dovolite, da vam predstavim današnje kandidate velikega matematičnega kviza OH, TA MATEMATIKA. To so tovariši in tovarišice (izgovarjajte jasno in razločno njihova imena, na primer): Peter Čik, Marička Bunka in Janez Cvek. Potem se z vsakim kandidatom malo pogovorite, da jih opogumite in jim odpravite tremo. Ne pozabite, da je pri vsakem kvizu najpomembnejša stvar ustvariti pravo ozračje, to pa je tudi najpomembnejša naloga voditelja. Kandidatom postavite nekaj uvodnih vprašanj, ki jim bodo ulila zaupanje v lastno znanje. Vprašajte jih na primer takole:

"Kolikokrat ste že imeli enko iz matematike?

Kako ste se počutili zadnjič pri popravi?

Ste imeli kaj treme?

Ste že ponavljali kakšen razred?"

(Če vam kandidat na to vprašanje odgovori, da ne, se nikar po naključju ne zmotite in ne recite: "Škoda, škoda. Pa nič ne de, saj je še čas.") Ko ste s takimi (in podobnimi) vprašanji ustvarili primerno ozračje, začnite kviz, to je, postavite prvo skupino vprašanj. Kandidati naj odgovorjajo po abecednem redu, če se niste drugače dogovorili. Kandidat sam izbere številko od 1 do 12, vi pa vzamete listek s tem vprašanjem, opozorite kandidata, da mora v desetih sekundah odgovoriti na vprašanje:

a) v katerem stoletju je živel tisti matematik;

b) po čem je znan (dovolj je, da navede vsaj nekaj, po čemer je znan v matematiki).

Potem napravite kratek premolk, se imenitno postavite in z dramatičnim glasom (najprej se tudi še odkašljajte) spregovorite ime, zapisano na listku. Po-

tem ko vsak kandidat odgovori (ali premolči) svoja tri vprašanja, sledi kratek odmor. Medtem sodniki seštevajo točke, kandidati pa se krepčajo s sokom. Potem razglasite rezultate prvega kroga tekmovanja in naznanite začetek drugega kroga.

O MATEMATIČNIH SIMBOLIH

Prvi kandidat spet po svoji volji izbere številko, vendar zdaj med 1 in 30. Opozorite ga, da mora v tridesetih sekundah odgovoriti na vprašanje:

"Kako pravimo simbolu in kaj pomeni?"

Obenem poveste, koliko točk prinese pravilen odgovor. V tem krogu vsak kandidat odgovori najmanj na šest vprašanj (lahko pa tudi na več). Vmes sproti sporočate kandidatom, koliko točk so že zbrali. Če se po naključju zgodi, da kateri od kandidatov pravilno odgovori na vprašanje, nikar ne zamudite priložnosti: takoj ga pohvalite, ker ga s tem opogumite, pa tudi ustvarite pravo ozračje kviza. Se pravi, pravilne odgovore spremljajte s komentarjem:

"Sijajno, sijajno! Odlično!
Fenomenalno!
Kakšno znanje! Neverjetno!
Čestitam, čestitam, izredno!"

Pohvala zelo ugodno vpliva na kandidata, vi pa potem nadaljujte:

"In zdaj poglejmo, ali se je tudi drugi kandidat tako dobro pripravil."

Če ugane tudi ta, ohranjajte še naprej tekmovalnega duha z besedami:
"Tekmovanje postaja čedalje bolj napeto.
Kakšno izenačeno znanje. Takega še nismo videli!
Vsi trije kandidati imajo že po štiri točke!
Razburljivo, v resnici razburljivo! Neverjetno!"
Gledalcem pa:
"Prosim samo, brez ploskanja. Naj se kandidat zbere."

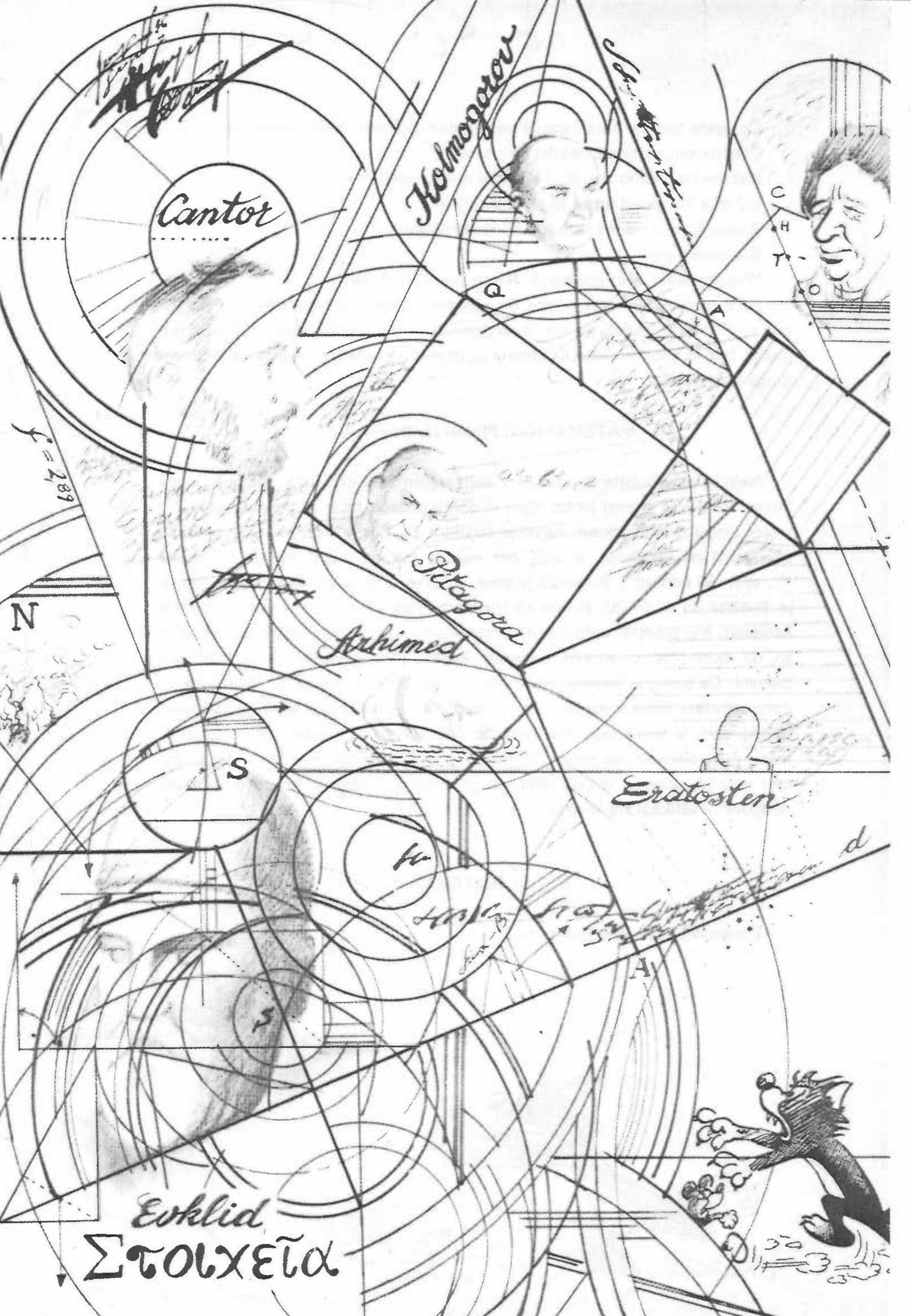
Po drugem krogu spet odmor (to pot malo daljši, da očka lahko v miru popije svoj deci, kandidati pa sok, da si opomorejo od vznemirjenosti). Potem razglasite število točk vsakega kandidata in naznanite začetek tretjega, odločilnega kroga tekmovanja.

MATEMATIČNI POJMI IN DEFINICIJE

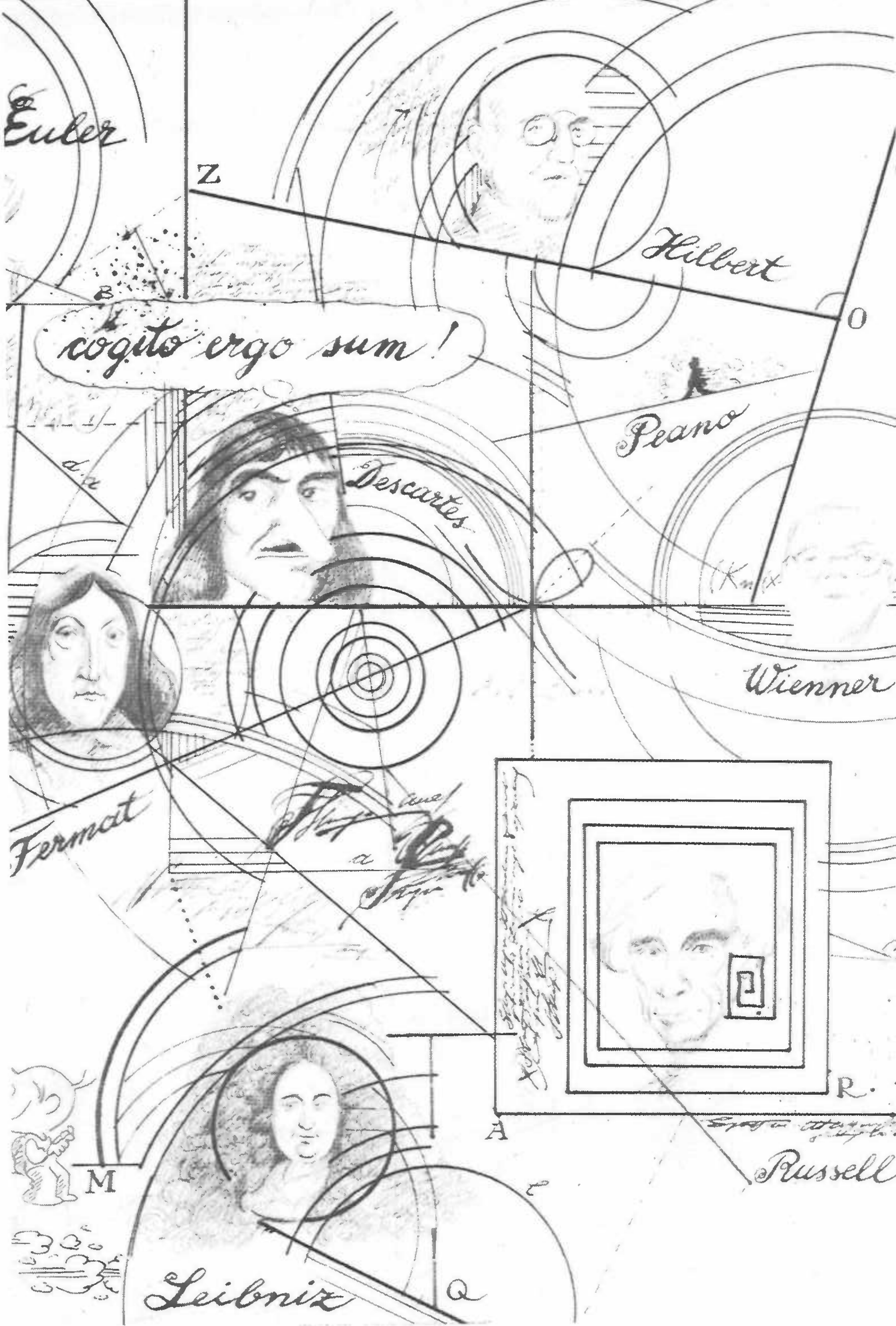
Najprej spodbujajte kandidata z najmanjšim številom točk, da še ni vsega konec. Točke še zmeraj lahko zbere in dohiti vodeče, saj je za pravilne odgovore v tem krogu mogoče dobiti največje število točk. Čas, v katerem mora kandidat odgovoriti na vprašanje, je zdaj ena minuta (da bo slišati več, lahko rečete "... celih 60 sekund"). Postopek je sicer isti kakor prej, samo da kandidati izbirajo številke od 1 do 20. Potem ko izvlečete listek s številko, ki vam jo je rekel kandidat, mu povejte, koliko točk prinese pravilen odgovor, in ga opozorite na to, da mora prebrati simbol, povedati, kakšno je njegovo ime, in razložiti, kaj pomeni. Če potegne kakšno definicijo, jo mora v celoti povedati. Potem kandidatu pokažete listek z vprašanjem (in medtem ko premišljuje, sami zase preberete odgovor). V tem krogu vsak kandidat odgovori na tri vprašanja (lahko tudi na manj, če je nevarno, da kateri od njih zaradi razburjenosti in treme omedli). Potem sodniki seštejejo točke, sami vse preverite in nazadnje slovesno razglasite zmagovalca velikega superkviza

OH, TA MATEMATIKA

Zmagovalcu prisrčno čestitajte:



Cantor
Kolmogorov
Pitagora
Arhimed
Eratosten
Evklid
Στοιχεια
f = 289
N
S
Q
A
C
H
T
O
d


Euler
Z
Hilbert
O
cogito ergo sum!
Peano
Descartes
Wienner
Fermat
R.
A
Russell
M
Leibniz
Q

"Čestitam, čestitam. Bravo! Pokazali ste v resnici izredno znanje! Oo, ampak bilo je tudi nekaj sreče. No, dobro ste se pripravili."

Drugemu rečete:

"Ni slabo, ni slabo. Ko bi bilo le malo več sreče. Pa nič ne de. Še ni vseh dni konec."

Zadnjemu pa:

"Mi je prav žal, iz srca mi je hudo. Zato bo pa drugič (v istem razredu) bolje. Upanje ostane. Nikoli ni prepozno. Vi ste še mladi (to izpustite, če je kandidatu že nad šestdeset let). Kar korajžno."

In zdaj še vsem navzočim:

"Hvala, hvala vsem.

Na svidenje."

Dragi gledalci, v prihodnjih nekaj minutah si oglejte našo EPP, potem pa sledi serijska kriminalka...

IZLOČILNO BESEDILO (IB)

Kandidatom preberemo vse tri odgovore in sami morajo povedati, kateri od njih je pravi: a), b) ali c).

1. Naravna števila so:
   a) 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ...
   b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
   c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$
2. Georg Cantor je zasnoval:
   a) teorijo množic
   b) teorijo števil
   c) verjetnostni račun
3. Konjunkcija je:
   a) vrsta preslikave
   b) operacija v algebri izjav
   c) veja moderne matematike
4. Dve množici sta enaki:
   a) če imata isto število elementov
   b) če imata iste elemente
   c) če ju je mogoče surjektivno preslikati
5. René Descartes je:
   a) matematik in filozof iz 17. stoletja
   b) starogrški matematik
   c) sodobni francoski matematik
6. Bijekcija je:
   a) geometrijski lik
   b) operacija v algebri izjav
   c) vrsta preslikave
7. Z nič smemo deliti:
   a) vsako število
   b) samo pozitivna števila
   c) z nič ne smemo deliti nobenega števila
8. Praštevila so:
   a) poznali že stari grški matematiki
   b) odkrili matematiki konec 16. stoletja
   c) odkrili matematiki v začetku 20. stoletja

Stran 209

9. Dve množici sta disjunktni, če:
   a) imata en element skupen
   b) nimata nobenega elementa skupnega
   c) imata vse elemente skupne

10. Ničla pripada množici:
    a) celih števil
    b) naravnih števil
    c) praštevil

11. Pitagorov izrek velja za:
    a) enakostranični trikotnik
    b) poljuben trikotnik
    c) pravokotni trikotnik

12. Racionalna števila so:
    a) podmnožica množice realnih števil
    b) podmnožica množice naravnih števil
    c) podmnožica množice celih števil

13. Število ena je: „enka in samo enka!
    a) praštevilo
    b) sestavljeno število
    c) ni ne praštevilo ne sestavljeno število

HA! HA! HA
HA! HA!
HA! HA!
HA!
HA!
HA
H

14. Zakon asociativnosti ne velja pri:
    a) deljenju števil
    b) seštevanju števil
    c) množenju števil

15. Katera od množic je dobro podana:
    a) množica rumenih svinčnikov
    b) množica števil, deljivih s tri
    c) množica dečkov s sinjimi očmi

16. V veljavi je označitev za množico celih števil:
    a) **N**
    b) **C**
    c) **Z**

VELIKI MATEMATIKI

1. FERMAT	7. PITAGORA
2. EVKLID	8. PEANO
3. DESCARTES	9. ARHIMED
4. HILBERT	10. KOLMOGOROV
5. ERATOSTEN	11. EULER
6. CANTOR	12. BOURBAKI

Vsak pravilen odgovor prinese po tri točke.

MATEMATIČNI SIMBOLI IN OZNAČITVE
— uporaba in pomen

1.	τ	τA	16.	$\times$	$A \times B$
2.	$\subseteq$	$A \subseteq S$	17.	$\leq$	$a \leq b$
3.	$\vee$	$A \vee B$	18.	$\forall$	$(\forall x)\, P$
4.	$\cup$	$A \cup B$	19.	$\subset$	$A \subset S$
5.	$\geq$	$a \geq b$	20.	$\emptyset$, v	
6.	(,)	(a, b)	21.	$\neg$	$\neg A$
7.	$\exists$	$(\exists x)\, P$	22.	$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$
8.	$\in$	$a \in S$	23.	$\cap$	$A \cap B$
9.	$\mathscr{P}(S)$		24.	$\top$	$\tau A = \top$
10.	&	$A \,\&\, B$	25.	$\mid$	$\{x \mid \ldots\}$
11.	$\setminus$	$A \setminus B$	26.	$*$, $\circ$, $\square$, $\otimes$	
12.	$\aleph_0$	$k\mathbf{N} = \aleph_0$	27.	$\rightarrow$	$f : A \rightarrow B$
13.	$\notin$	$a \notin S$	28.	$<$	$a < b$
14.	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$	29.	$\mathbf{N}$	$a \in \mathbf{N}$
15.	$\perp$	$\tau A = \perp$	30.	$\mapsto$	$x \mapsto f(x)$

Vsak pravilen odgovor prinese po pet točk.

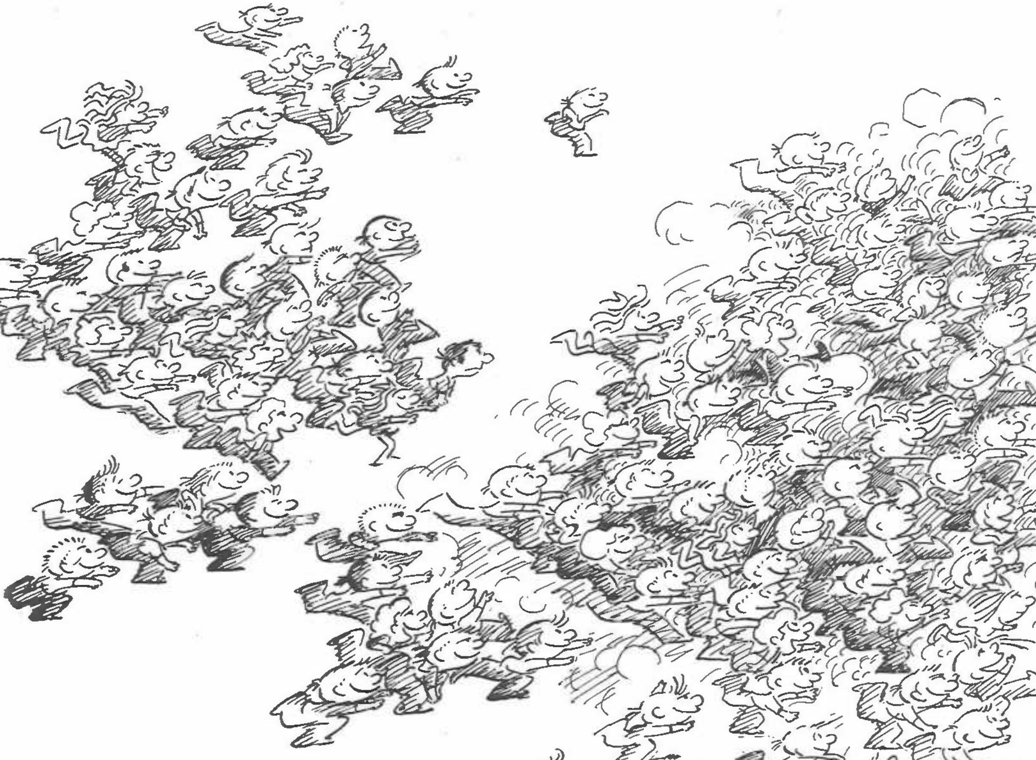
Ko bo konec risanke, napišite pod vsako znamenje, kaj pomeni!

$x - 211 = 0$

MATEMATIČNI POJMI IN DEFINICIJE

1. Kaj je konjunkcija? Napiši tabelo pravilnosti konjunkcije.
2. $A \cup B = \{ \ldots.$ Napiši in povej z besedami.
3. Kaj je polgrupa? Navedi zgled.
4. Katere so, po Kolmogorovu, najpomembnejše etape v razvoju matematike?
5. Pojasni pomen: $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{+} \mathbf{N} \quad (a,b) \mapsto a+b \quad (a,b \in \mathbf{N})$.
6. Kaj je partitivna množica $\mathcal{P}(S)$ množice S? Napiši $\mathcal{P}(S)$ za poljubno trielementno množico S.
7. $A \setminus B = \{ \ldots$ Napiši in povej z besedami.
8. Naštej Peanove aksiome in jih razloži.
9. $A \cap B = \{ \ldots$ Napiši in povej z besedami.
10. Kaj je implikacija? Napiši tabelo pravilnosti implikacije.
11. $A \times B = \{ \ldots$ Napiši in povej z besedami.
12. Kako definiramo relacijo "="? Napiši in razloži.
13. Kako se glasi tako imenovani veliki Fermatov izrek?
14. Razloži pojem funkcije. Ilustriraj s kakšnim zgledom.
15. Navedi vsaj tri zakone, ki veljajo v množici naravnih števil, in jih razloži z zgledi.
16. Kdaj je kakšna množica urejena? Kakšna je razlika med urejeno in dobro urejeno množico? Navedi zgled.
17. Razloži, kaj je bijektivna preslikava. Navedi zgled.
18. Napiši v desetiškem sistemu število, ki ga v dvojiškem sistemu zapišemo z 110101.
19. Razloži pomen simbola $\aleph_0$ in navedi vsaj dve njegovi lastnosti.
20. Navedi vsaj še dve množici števil, ki jima je množica naravnih števil podmnožica. Definiraj te množice in napiši, v kakšni medsebojni zvezi so.

Vsak pravilen odgovor prinese po deset točk.



REŠITVE IN ODGOVORI

HEHEJ!

Beri knjigo do konca in ko prideš do rešitev, pokukaj semle...

1. Presek premice p in ravnine Π je enoelementna množica, ki jo zapisujemo s $p \cap \Pi = \{S\}$, samo v primeru, če premica prebada ravnino v točki S. Če je premica p vzporedna z ravnino, je njun presek prazna množica, torej $p \cap \Pi = \emptyset$, če pa sta premica in ravnina v takem položaju, da ravnina Π vsebuje premico p, je presek premice in ravnine sama premica, to je $p \cap \Pi = p$.

2. Število elementov razlike množic $A \setminus B$ je enako razliki števil elementov množic A in B samo tedaj, kadar je množica B podmnožica množice A, torej samo za $B \subsetneq A$.

3. Razdeljevanje pisem bo:
   a) injektivno, če jih pismonoša deli tako, da v vsakem stanovanju izroči največ eno pismo,
   b) surjetkivno, če v *vsakem* stanovanju izroči *vsaj* eno pismo (seveda jih lahko v enem stanovanju izroči tudi po več; bistveno je, da je množica stanovanj "pokrita" s pismi),
   c) bijektivno, če pismonoša v *vsakem* stanovanju izroči *po eno* pismo (natančno eno),(se pravi, da mora biti pisem *ravno toliko* kakor stanovanj).

4. Urejena dvojica (a, b) ni množica *dveh* elementov, če je $a = b$, ker imamo množico $\{a, a\}$ za enoelementno množico.

5. Dva robca predstavljata dvojico, dvoje čevljev pa urejeno dvojico.

6. Množici $M \times N$ in $N \times M$ nista enaki, ker ne obsegata *istih* elementov. Urejena dvojica (na primer svinčnik, kreda) kot element množice $M \times N$ je različna od dvojice (na primer kreda, svinčnik), ki je element množice $N \times M$.

7. Množici $M \times N$ in $N \times M$ sta ekvipolentni, ker je med njima mogoče vzpostaviti bijektivno preslikavo, se pravi, da imata isto število elementov.

8. $M \times M = \{$(svinčnik, svinčnik), (svinčnik, pero), (pero, svinčnik), (pero, pero)$\}$.
   $N \times N = \{$(kreda, kreda), (kreda, goba), (goba, kreda), (goba, goba)$\}$.

9. Število elementov v kartezičnem produktu množic A in B $(A \times B)$ je enako zmnožku števila elementov v množicah A in B.

10. 10.1. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$
    $B \cap A = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\}$, torej $A \cap B = B \cap A$.
    10.2. velja
    10.3. $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \emptyset = \emptyset$.
    $(A \cap B) \cap C = \{1, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$, torej $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
    10.4. velja
    10.5. $A \cap A = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} = A$.
    10.6. $A \cup A = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} = A$.
    10.7. $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4\}$
    $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, torej
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    10.8. velja
    10.9. $A \setminus (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \emptyset$
    $(A \setminus B) \setminus C = \{2, 4\} \setminus \{2, 4, 6\} = \emptyset$, torej $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
    10.10. $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$
    $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2. 3, 4, 5\}$,
    torej relacija cija $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ ne velja, ker je $(A \cup B) \setminus C \subsetneq A \cup (B \setminus C)$.
    10.11. $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}$
    $B \setminus A = \{1, 3, 5\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{5\}$, zato $A \setminus B \neq B \setminus A$.
    10.12. velja
    10.13. $A \times B = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 3, 5\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$
    $B \times A = \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$,
    torej je $A \times B \neq B \times A$.
    10.14. $k(A \times B) = 12$ $k(B \times A) = 12$ in zato je $k(A \times B) = k(B \times A)$.

10.15. $k(A) = 4$, $k(B) = 3$, $k(A \cup B) = 5$, $k(A \cap B) = 2$, pa imamo: $4 + 3 = 5 + 2$. Velja
10.16. $k(A \setminus B) = 2$, $k(A) = 4$, $k(A \cap B) = 2$, kar da : $2 = 4 - 2$. velja

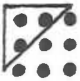
11. Enakosti 11.1, 11.2, 11.3 in 11.4 veljajo za katero si že bodi naravna števila a, b, c.
11.5 velja samo za $a = 1$.
11.6 ne velja za nobeno naravno število (0 nimamo za naravno število).
11.7 velja za vsako naravno število.
11.8 ne velja za naravna števila.
11.9 in 11.10 velja za vsako naravno število.
11.11 velja samo, če je $a = b$.
11.12 velja za vsako naravno število.

12. S primerjanjem relacij 10.1 do 10.12 z enakostmi 11.1 do 11.12 sklepamo, da enakost 11 dobivamo iz 10 z zamenjavo simbolov:

$\cap$ s $\cdot$
$\cup$ z $+$
$\setminus$ z $-$

in seveda z zamenjavo množic A, B, C s števili a, b, c.

13. Podajmo z risbo dve sosednji trikotni števili, na primer 3 in 6. Njuna vsota $3 + 6 = 9$ pa je kvadratno število (3^2). Podobno lahko predočimo vsako vsoto sosednjih trikotnih števil.



14. za $m = 4$: $2^{m+1} - 1 = 2^{4+1} - 1 = 2^5 - 1 = 31$, 31 pa je praštevilo, zato je $2^m(2^{m+1} - 1) = 2^4 \cdot 31 = 16 \cdot 31 = 496$ popolno število. Njegovi delitelji so 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 in 248, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

15. Pravokotna in kvadratna števila so sestavljena, ker jih lahko napišemo kot zmnožek praštevil.

16. Ni največjega naravnega števila. Če si namreč mislimo, da je kakšno število M največje naravno število, lahko zmeraj z dodano eno dobimo še večje naravno število $M + 1$.

17. Število 1 nima svojega predhodnika v množici naravnih števil, vsa druga naravna števila pa imajo vsako svojega predhodnika, to je, za vsako naravno število n je predhodnik $n - 1$.

18. To drži, vendar samo za tako imenovane števno neskončne množice. Neskončne množice so namreč lahko števne in neštevne. Števne so množice, ki imajo ravno toliko elementov kakor množica naravnih števil. Ali: neskončna množica je števna, če njene elemente lahko oštevilčimo z naravnimi števili, to pa pomeni, da so števne vse množice, ki so ekvipolentne množici naravnih števil.
Neštevne so množice, katerih (vseh) elementov ni mogoče oštevilčiti z naravnimi števili. To sta na primer:

- množica vseh točk na premici,
- množica vseh realnih števil.

Lahko dokažemo (in to je storil že Cantor leta 1873), da realnih števil ni mogoče uvrstiti v zaporedje (kakor smo napravili na primer s sodimi in lihimi števili) in tedaj to zaporedje oštevilčiti z naravnimi števili. Ni torej mogoče vzpostaviti bijektivne preslikave med množico naravnih in množico realnih števil. Na tej podlagi sklepamo, da je realnih števil več kakor naravnih, čeprav je teh in onih neskončno veliko. Na splošno: neštevne množice imajo več elementov kakor števne.

19. To sicer ni čisto natančno, ker moreta nastati tudi primera, pri katerih v hotelu ne ostane neskončno veliko gostov, se pravi, hotel ostane prazen ali pa s končnim številom gostov. Hotel ostane prazen, če odide iz njega ves **N** gostov, pri čemer nam **N** pomeni množico naravnih števil. Tedaj bo namreč:

$$\mathbf{N} \setminus \mathbf{N} = \emptyset.$$

Če pa hotel zapustijo vsi gostje, ki so v sobah s številko, večjo od n ($n \in \mathbf{N}$), bo v hotelu ostalo končno veliko, se pravi n gostov. Ta primer zapišemo takole:

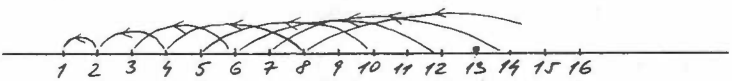
$$\mathbf{N} \setminus (\mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

V vseh drugih primerih v hotelu ostane neskončno veliko gostov, ne glede na to, koliko jih je odšlo iz hotela. Če odidejo iz hotela na primer vsi gostje iz sob z lihimi številkami, zapišemo to takole:

$$\mathbf{N} \setminus \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\} = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

20. Vprašanje bi ne imelo smisla, saj po nakazanem oštevilčenju v hotelu z neskončno veliko sobami ni zadnje sobe (saj tudi v množici naravnih števil ni "zadnjega" števila).

21. Vzemimo, da so iz hotela odšli vsi gostje iz sob z lihimi številkami 1, 3, 5, 7, 9, ..., torej neskončno veliko gostov. Prazne sobe receptor zasede tako, da gosta iz sobe številka 2 preseli v sobo številka 1, gosta iz sobe številka 4 v sobo 2, potem pa iz sobe 6 v sobo 3, iz sobe 8 v sobo 4 in tako naprej. Na splošno: iz sobe s številko $2n$ bo preselil gosta v sobo s številko n ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$), torej $2n \to n$.



22. Razlika $\aleph_0 - \aleph_0$ je lahko vsako končno število, lahko je 0, lahko pa je tudi $\aleph_0$, zato pišemo $\aleph_0 - \aleph_0 \leqslant \aleph_0$. Še enkrat preglej razglabljanje rešitve pod številko 19.

23. Pri tem mislimo na geometriji Lobačevskega[25] in Riemanna.[26] Evklidski geometriji pravimo tudi parabolična, Riemannovi eliptična, geometriji Lobačevskega pa hiperbolična. Te tri geometrije se bistveno razlikujejo po aksiomu o vzporednicah, ki jih lahko potegnemo skozi točko zunaj premice ali geodetske črte tiste ploskve. V eliptični geometriji ne gre skozi točko zunaj geodetske črte nobena vzporednica, v parabolični geometriji teče ena vzporednica, v hiperbolični pa je mogoče skozi točko zunaj geodetske črte potegniti dve vzporednici s to črto. Tu namreč velja izrek: Skozi vsako točko zunaj premice tečeta dve različni premici z dano premico vzporedni, in neskončno veliko premic, ki ne sekajo dane premice, pa tudi niso z njo vzporedne. Seveda je pri tem tudi vzporednost malo drugače definirana kakor v Evklidovi geometriji. Te tri geometrije se poleg drugega razlikujejo tudi po vsoti kotov v trikotniku. V hiperbolični geometriji je vsota kotov v trikotniku manjša od dveh pravih kotov, v eliptični večja, v parabolični geometriji pa enaka dvema pravima kotoma.

NALOGA

v katerih primerih je rezultat odštevanja naravnih števil naravno število?

24. Z odštevanjem manjšega naravnega števila od večjega dobimo vselej naravno število; torej za $a, b \in \mathbf{N}$ bo $a - b$ naravno število, če je $a > b$.

25. Če je naravno število, ki ga delimo, mnogokratnik števila, s katerim delimo, je rezultat deljenja vselej naravno število, torej: če je za $a, b \in \mathbf{N}$

$$a = nb \text{ in } n \in \mathbf{N}, \text{ bo očitno } \frac{a}{b} = n \in \mathbf{N}$$

26. Tukaj so vpeljana tudi negativna števila, vendar ta ne pripadajo množici naravnih števil (in zakonov, ki veljajo za naravna števila, ne bi smeli "avtomatsko" uporabljati tudi za cela ali za negativna števila). Predpostavljamo tudi, da je znano, kako množimo negativno število s pozitivnim, vendar je to treba šele definirati.

---

[25] Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1794 - 1856), ruski matematik, profesor na vseučilišču v Kazanu.

[26] Bernhard Riemann (1826 - 1866), nemški matematik, profesor na vseučilišču v Göttingenu.

27. Množica naravnih števil ni gosta, ker med sosednjima številoma ni nadaljnjega števila.

28. Mogoče je namreč dokazati, da velja izrek: Vseh realnih števil je ravno toliko, kolikor je neskončnih dvojiških zaporedij ali

$$kR = 2^{kN}$$

Če kardinalno število množice realnih števil **R** označimo s c (c imenujemo tudi polenca kontinuuma), kardinalno število množice naravnih števil **N** pa s $\aleph_0$, lahko zapišemo: $c = 2^{\aleph_0}$. Pripomnimo še, da je bistvena razlika med množico naravnih števil **N** in množico realnih števil **R** v tem, ker je množica **N** neskončna in števna, množica **R** pa neskončna in neštevna.

29.
$19 = 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$234 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
$879 = 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$903 = 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
$1024 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
$1469 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$23456 = 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$
$32470 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
$3400897 = 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

30.
$17 = 16 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10001$
$23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10111$
$45 = 32 + 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101101$
$78 = 64 + 8 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$= 1001110$
$115 = 64 + 32 + 16 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 +$
$+ 1 \cdot 2^0 = 1110011$
$187 = 128 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 +$
$+ 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10111011$
$324 = 256 + 64 + 4 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 +$
$+ 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 101000100$
$640 = 512 + 128 = 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 +$
$+ 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1010000000$.

31. Lahko ugotovimo po zamenjavi znamenj: žarnica gori = 1, žarnica ne gori = 0. Če pregledamo zapisa v dvojiškem in desetiškem sistemu, ugotovimo, da je v dvojiškem sistemu

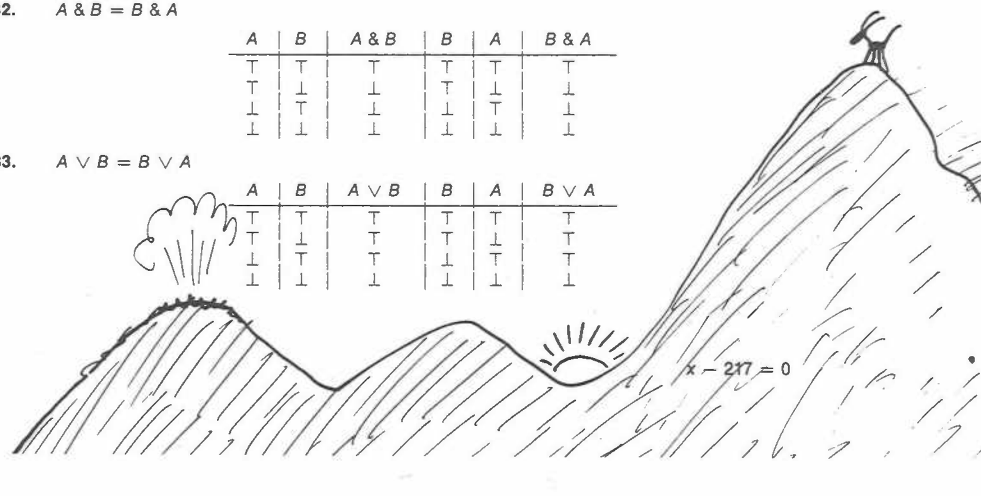
$$\begin{array}{r} 101 \\ 110 \\ \hline 1011 \end{array} \quad \text{isto kakor v desetiškem} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 6 \\ \hline 11 \end{array}$$

32. $A \& B = B \& A$

A	B	$A \& B$	B	A	$B \& A$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

33. $A \vee B = B \vee A$

A	B	$A \vee B$	B	A	$B \vee A$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥



34. $A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$

A	B	$A \Leftrightarrow B$	B	A	$B \Leftrightarrow A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$

35. $A \Rightarrow (B \,\&\, (\neg B))$

A	B	$\neg B$	$B \,\&\, (\neg B)$	$A \Rightarrow B \,\&\, (\neg B)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$

36. $A \Rightarrow (B \,\&\, A)$

A	B	$B \,\&\, A$	$A \Rightarrow (B \,\&\, A)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

37. $(A \,\&\, B) \Rightarrow A$

A	B	$A \,\&\, B$	$(A \,\&\, B) \Rightarrow A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

38. $B \Rightarrow A \vee B$

A	B	$A \vee B$	$B \Rightarrow A \vee B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

39. Z analizo tega problema je namreč mogoče ugotoviti, da vprašanje ("Če brivec brije vse tiste in samo tiste vaščane, ki se ne brijejo sami, ali brije tudi sebe?") pravzaprav ni pravilno formulirano. Pravilna formulacija vprašanja bi se glasila: "Ali more obstajati vas z brivcem, ki tako dela?" Odgovor je: "Taka vas ni mogoča." V tem smislu je brivčev odgovor pravilen.

Izločilno besedilo

1.b) 2.a) 3.b) 4.b) 5.a) 6.c) 7.c) 8.a)
9.b) 10.a) 11.c) 12.a) 13.c) 14.a) 15.b) 16.c)

Veliki matematiki

Pierre FERMAT (1601-1665), francoski matematik iz 17. stoletja. Ukvarjal se je s teorijo števil in položil tudi temelje verjetnostnega računa. Našel je veliko pomembnih izrekov, posebej pa je znan po tako imenovanem velikem Fermatovem problemu, o katerem še danes ne vemo, ali je sploh rešljiv.

EVKLID (okoli 330 do okoli 275), v četrtem in tretjem stoletju pred našim štetjem, eden od največjih grških matematikov starega veka. Ustanovil matematično šolo v Aleksandriji. Napisal več del iz geometrije, optike in astronomije. V svojem znanem delu *Elementi* je prvi sistematično in aksiomatsko obdelal vso dotlej znano geometrijo.

René DESCARTES (1596-1650), francoski filozof, matematik in fizik iz 17. stoletja. Postavil je vrsto pomembnih izrekov na raznih področjih matematike, s svojim delom *Geometrija* pa odprl novo dobo v razvoju matematike z uporabo koordinatnega sistema in z vpeljavo med seboj odvisnih spremenljivk. S tem je vzpostavil zvezo med algebro in geometrijo in utemeljil analitično geometrijo.

David HILBERT (1862-1943), nemški matematik iz 19. in 20. stoletja, ki je na raznih področjih matematike veliko prispeval. Imajo ga za zadnjega vsestranskega matematika. Ukvarjal se je poleg drugega s teorijo števil, z matematično logiko, z osnovami matematike, z diferencialnimi in integralnimi enačbami, poleg tega pa je tudi elementarno geometrijo postavil na strogo aksiomatsko podlago. Njegova dela so znatno vplivala na matematiko 20. stoletja.

ERATOSTEN iz Kirene (276-194), velik učenjak helenske dobe iz 3. stoletja pred našim štetjem. Pisal je astronomska, matematična, zemljepisna in filozofska dela. Ustanovitelj znanstvenega zemljepisja. Ukvarjal se je z merjenjem obsega zemeljske oble in dokazoval, da je mogoča plovba okoli sveta. Iznašel je postopek, s katerim je mogoče odkrivati praštevila po njihovem naravnem vrstnem redu (tako imenovano Eratostenovo rešeto).

Georg CANTOR (1845-1918), nemški matematik iz 19. in 20. stoletja. Eden od poglavitnih predstavnikov matematične misli na prehodu iz 19. v 20. stoletje. Utemeljitelj moderne teorije množic, ki je odprla pot k popolnoma novim spoznanjem in rezultatom v matematiki.

PITAGORA (580-500), grški filozof in matematik iz 6. stoletja pred našim štetjem. Utemeljil je matematiko kot znanost in ustanovil svojo šolo (Pitagorova šola). Pripisujejo mu tudi najdbo tako imenovanega Pitagorovega izreka, čeprav je bila geometrijska interpretacija tega vprašanja znana tudi že prej.

Giuseppe PEANO (1858-1932), italijanski matematik in logik iz 19. in 20. stoletja. Pomembna so njegova raziskovanja v zvezi z logično-formalnimi kritikami osnov matematike. Avtor prve aksiomatike naravnih števil, tako imenovanih Peanovih aksiomov.

ARHIMED (okoli 287 do okoli 212), največji matematik in fizik starega veka. Živel v 3. stoletju pred našim štetjem, napisal vrsto del iz geometrije in fizike. Določil je približno vrednost števila π (3,14), po svojih metodah izračunal ploščine številnih ravninskih likov in prostornine teles. Utemeljitelj hidrostatike. Še danes so znani pojmi: Arhimedov vijak, Arhimedova spirala, Arhimedov zakon, Arhimedov aksiom.

Andrej Nikolajevič KOLMOGOROV (1903), znan sodobni ruski matematik; ukvarja se z raznimi področji matematike. Veliko je prispeval k teoriji funkcij, k topologiji, k matematični logiki in funkcionalni analizi, teorijo verjetnosti pa je postavil na aksiomatske temelje. Poleg tega se ukvarja tudi s problematiko pouka matematike.

Leonhard EULER (1707-1783), švicarski matematik, fizik in astronom iz 18. stoletja; eden največjih matematikov svojega časa. Razvil je teorijo vrst, vpeljal tako imenovane Eulerjeve integrale, v geometriji pa je postavil znani izrek, ki je tudi ime dobil po njem. Dokazal je več izrekov iz teorije števil in našel delno rešitev velikega Fermatovega problema.

Nicolas BOURBAKI, izmišljeno ime, pod katerim skupina uglednih francoskih matematikov (ki si je postavila nalogo, da bo sistematizirala celotno matematiko po sodobnem pogledu), objavlja svoja dela pod naslovom *Osnove matematike*; do zdaj je izšlo že nad trideset zvezkov. S temi deli burbakijevci močno vplivajo na sodobno matematiko.

O MATEMATIČNIH SIMBOLIH

1. Znak za funkcijo, ki izjavi daje vrednost pravilnosti ali nepravilnosti; izjava A.
2. Znak za podmnožico; A je podmnožica S.
3. Simbol disjunkcije; A ali B ali oba (operacija "ali").
4. Znak za unijo; unija množic A in B.
5. Več ali enako; a več ali enako b.
6. Simbol za urejeno dvojico; urejena dvojica elementov a in b.
7. Kvantor eksistence; obstaja (vsaj en) tak x, da je P.
8. Znak pripadnosti množici; a je element S.
9. Partitivna množica množice S.
10. Simbol konjunkcije; A in B (operacija "in").
11. Znak za razliko množic; razlika množic A in B.
12. Simbol za "število", ki pripada števno neskončnemu, alef nič. Kardinalno število množice naravnih števil je alef nič.
13. Znak nepripadanja množici: a ni element množice S.
14. Simbol implikacije; iz A sledi B, A ima za posledico B.
15. Simbol za nepravilno; izjava A je nepravilna.
16. Znak za produkt; kartezični produkt množic A in B.
17. Manj ali enako; a manj ali enako b.
18. Kvantor generalizacije; za vsak x je P.
19. Znak za pravo podmnožico; A je prava podmnožica S.
20. Simbol prazne množice.
21. Simbol za negacijo: ni A.
22. Simbol za ekvivalenco: A in B sta ekvivalentna.
23. Znak za presek; presek množic A in B.
24. Simbol za pravilno; izjava A je pravilna.
25. Simbol, ki pomeni: "z lastnostjo, da je".
26. Znaki za binarne operacije.
27. Funkcija f iz A v B.
28. Simbol za "manj", a je strogo manj od b.
29. Označitev množice naravnih števil; a je element množice N.
30. Priredba elementa x elementu $f(x)$.

MATEMATIČNI POJMI IN DEFINICIJE

1. Konjunkcija je operacija algebre izjav, s katero iz dveh izjav A in B dobimo novo izjavo $A \& B$.
Izjava $A \& B$ je kot celota pravilna samo tedaj, kadar imata obe izjavi A in B vrednost pravilnosti $\top$. Tabela pravilnosti se glasi:

A	B	$A \& B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

2. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
Unija množic A in B je množica, sestavljena iz elementov x z lastnostjo, da je x element množice A ali pa element množice B.

3. Če je S neprazna množica, $*$ pa binarna operacija v S, urejeni dvojici $(S, *)$ pravimo polgrupa, če v tej strukturi velja tudi zakon asociativnosti.
Zgledi: $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{N}, \cdot)$, $(\mathcal{P}(S), \cup)$.

4. Po Kolmogorovu so najpomembnejše etape v razvoju matematike:
   a) Od prvih začetkov v antiki do nastanka Descartesove koordinatne geometrije v 17. stoletju. Matematiki so v tej dobi preučevali stalne količine in geometrijske like.
   b) Od Descartesa do srede 19. stoletja prevladuje oblikovanje pojma funkcije (v matematiko so torej prišle tudi spremenljive količine) in geometrijskih struktur.
   c) Od srede 19. stoletja do tridesetih let 20. stoletja. Težišče zanimanja je v izoblikovanju in preučevanju množic in matematične logike. Razne panoge matematike (geometrija, aritmetika...) se postavljajo na aksiomatske temelje. Čutiti je vlogo in pomen preučevanja raznih struktur, po katerih nastaja sinteza različnih področij matematike.
   č) Moderna doba je prišla z nastankom hitrih računalnikov. Naglo so se razvijala abstraktna algebra, topologija, logika, numerična analiza in drugo. Raziskovanja na abstraktnih področjih matematike so čedalje bolj uporabljana v praksi. Zmanjšuje se razlika med teoretično in praktično matematiko.

5. Z $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \nrightarrow \mathbf{N}$ $(a, b) \mapsto (a + b)$ $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$ je simbolično nakazano, da je seštevanje funkcije $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, pri čemer je torej $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ vhodna množica (domena), množica naravnih števil $\mathbf{N}$ pa izhodna množica (kodomena). Pri tem je vsaki urejeni dvojici (a, b) $(a, b \in \mathbf{N})$ iz domene prirejen en sam element (število c) kodomene. To pomeni, da za dve števili a, b obstaja eno samo število $c \in \mathbf{N}$, ki se imenuje njuna vsota: $a + b = c$.

6. Partitivna množica $\mathcal{P}(S)$ neke množice S je množica, ki jo sestavljajo vse podmnožice množice S. Za trielementno množico $S = \{a, b, c\}$ bo:

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

7. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}$.
   Razlika med množicama A in B je množica, sestavljena iz elementov x z lastnostjo, da je x element množice A in x ni element množice B.

8 Peanovi aksiomi:
   1. 1 je naravno število.
   2. Vsako naravno število n ima ravno enega naslednika n' $(n' = n + 1)$.
   3. 1 ni naslednik nobenega števila.
   4. Če je $m' = n'$, potem je tudi $m = n$.
   5. Vsaka množica, ki vsebuje 1 in ki z vsakim številom n vsebuje tudi n' $(n' = n + 1)$, obsega *vsa* naravna števila.

9. $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$.
   Presek množic A in B je množica, sestavljena iz elementov x z lastnostjo, da je x element množice A in je x element množice B.

10. Implikacija je operacija algebre izjav, s katero iz dveh izjav A in B dobimo novo izjavo $A \Rightarrow B$. Izjava $A \Rightarrow B$ kot celota je nepravilna samo, če je izjava A pravilna, izjava B pa zlagana. Tabela pravilnosti se glasi:

A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

11. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ \& \ y \in B\}$.
    Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih dvojic x in y z lastnostjo, da je x element množice A in y element množice B.

12. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \ \& \ (B \subseteq A)$.
    Izrek: $A = B$ je ekvivalentno s trditvijo: A je podmnožica B in B je podmnožica A.

ZAUPNO
vam povem na
uho...
Našel sem
TRI napake
v knjigi,
pa vam ne
izdam,
kje so...

13 13 13 13 13 13 13 13 13 13

13. Veliki Fermatov problem se glasi: Če so x, y in z cela števila, ali ima enačba $x^n + y^n = z^n$ rešitev v množici od nič različnih števil tudi za $n > 2$ $(n \in \mathbf{N})$?

14. Če sta A in B dve neprazni množici, funkcija rečemo priredbi, s katero na kakršen si že bodi način vsakemu elementu množice A priredimo samo en element množice B. S simboli to zapišemo: $A \xrightarrow{f} B$ ali $f : A \rightarrow B$, pri čemer je A vhodna množica ali domena, B izhodna množica ali kodomena, f pa postopek prirejanja.

15. Zakon komutativnosti:

$a + b = b + a \qquad a, b \in \mathbf{N}$
$a \cdot b = b \cdot a$

Zakon asociativnosti:

$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad a, b, c \in \mathbf{N}$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Zakon distributivnosti množenja proti seštevanju:

$a\,(b + c) = ab + ac \qquad a, b, c \in \mathbf{N}$

Zakon kancelacije:

če je $a + c = b + c$, je $a = b$ za $a, b, c \in \mathbf{N}$.

16. Množica je urejena, če o katerih si že bodi dveh njenih elementih vemo, kateri pride pred katerim, ali natančneje: rečemo, da je množica S linearno urejena z relacijo $<$, če za vsak $a, b, c \in S$ velja:
   1. če je $a \neq b$, potem je bodisi $a < b$ bodisi $b < a$,
   2. če je $a < b$ in $b < c$, potem je tudi $a < c$,
   3. $a < a$ ni pravilno za noben element a.

   Za urejeno množico ni nujno, da bi imela začetni element, če pa ima urejena množica in vsak njen del, ki ni prazen, začetni element, rečemo, da je množica dobro urejena.

17. Bijektivna preslikava je preslikava, pri kateri se različnim elementom vhodne množice priredijo različni elementi izhodne, ni pa neprirejenih elementov.
Torej: funkcija $f : A \rightarrow B$ je bijekcija, če je f injekcija in surjekcija. Če med množicama lahko vzpostavimo bijektivno preslikavo, se to pravi, da sta množici ekvivalentni.

18. $110101 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 53.$

19. Alef nič $(\aleph_0)$ je kardinalno število množice naravnih števil, to je $k\ \mathbf{N} = \aleph_0$. Njegove lastnosti so na primer:

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
$\aleph_0 - \aleph_0 \leqq \aleph_0$
$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

20. Množica celih števil $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

Množica $\mathbf{Z}$ je enaka uniji množice naravnih števil, množice, katere edini element je ničla, in množice negativnih celih števil. Množica racionalnih števil $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid b \neq 0,\ a,\ b \in \mathbf{Z}\right\}$$

Množica $\mathbf{Q}$ je enaka množici števil oblike $\frac{a}{b}$ z lastnostjo, da je b različen od nič, a in b sta elementa množice celih števil.

Množica realnih števil $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$$

Množica $\mathbf{R}$ je enaka uniji množic racionalnih in iracionalnih števil.

Množice $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ so v zvezi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

In za konec še nekaj misli znanih matematikov, ki so prebrali besedilo, preden je knjiga izšla.

MATEMATIČNA VSEBINA TE KNJIGE JE PRAZNA (MNOŽICA).
prof. dr. N. N.

KNJIGA JE DOBRO NAPISANA. BERE SE KAKOR KRIMINALKA. ŠKODA, DA V NJI NI TUDI MATEMATIKE.
dr. P. P., docent

VELIKO GOVORJENJA – MALO MATEMATIKE
dr. X. Y., izredni profesor

NISEM POKLICAN, DA BI DAJAL MNENJA O LITERATURI ZA OTROKE.
dr. M. M., izredni profesor

In poglejmo še, kaj pravijo nematematiki:

Likovni umetnik:
PA NAJ MI ŠE KDO REČE, DA JE TEŽKO RAZUMETI ABSTRAKTNO SLIKARSTVO.

Znan pisatelj in ugleden strokovnjak s področja književnosti je izjavil, potem ko je prebral besedilo:
MISLIM, DA JE ROKOPIS ŠE KAR ZANIMIV; ČEPRAV MORAM PRIZNATI, DA SEM Z NAJVEČJO TEŽAVO DOUMEL KOMAJ POL BESEDILA.

Ekonomist iz gospodarske organizacije:
RAJŠI BI SAM PRIPRAVIL PRORAČUN FEDERACIJE KAKOR PREUČEVAL DANAŠNJO MATEMATIKO.

STVARNO KAZALO

*Janez Čik, učenec, to preštudiral 1976...

Moja pripomba

PRESEKOVA KNJIŽNICA – 16

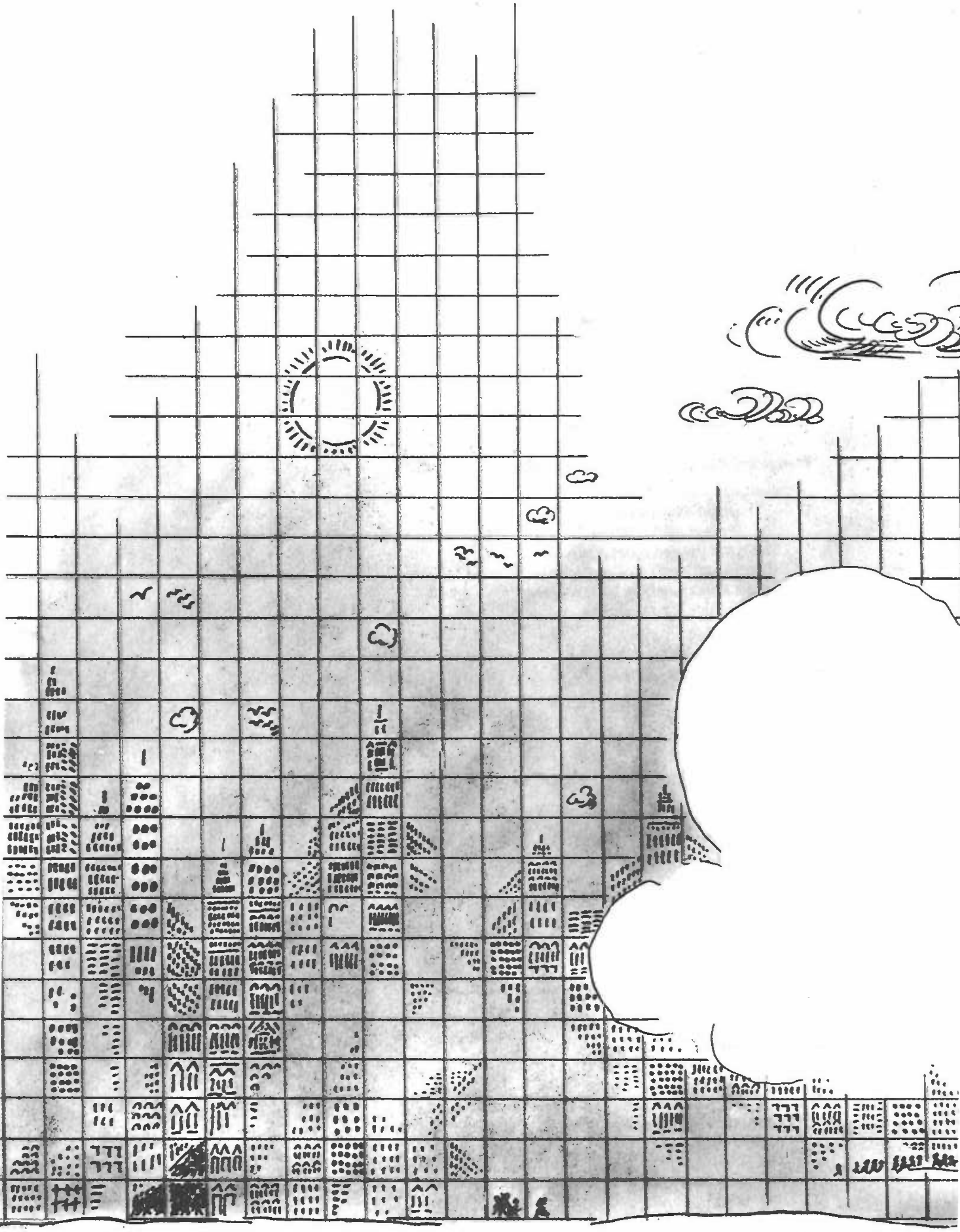
Odgovorni urednik Edvard Kramar

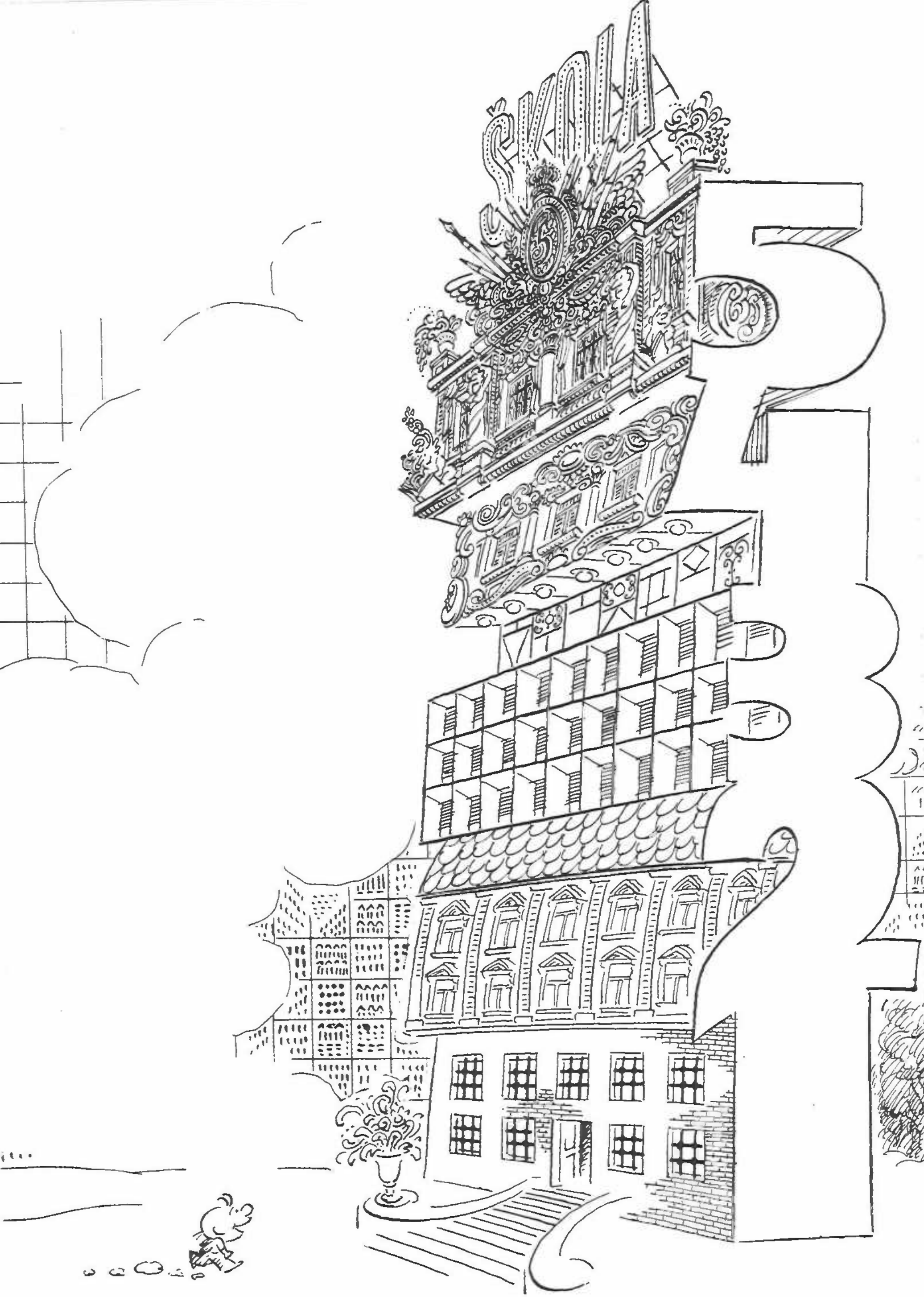
Zlatko ŠPORER: OH, TA MATEMATIKA

Ilustracije in komentar Nedeljko Dragić
Oprema Ciril Velkovrh
Prevod Janko Moder
Strokovni pregled Janez Rakovec
Rokopis natipkala Dušica Boben
Tiskarske korekture bral Janez Markelj
Urednik Ciril Velkovrh

ŠPORER Zlatko

Oh, ta matematika / Zlatko Šporer. – Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1984. – 3–226 str. ; 20 cm. – (Presekova knjižnica ; 16)




ŠKOLA

PRESEKOVA KNJIŽNICA

1. Vidav I., JOSIP PLEMELJ - Ob stoletnici rojstva, 1975
2. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev šestih, sedmih in osmih razredov osnovnih šol SRS, 1977
3. Prosen M., ASTRONOMSKA OPAZOVANJA - Kako v astronomiji s preprostimi sredstvi opazujemo in merimo, 1978
4. Strnad J., ZAČETKI SODOBNE FIZIKE - Od elektrona do jedrske cepitve, 1979
5. Strnad J., RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE - Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce, 1979
6. Landau L.D., Rumer J.B., KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI - Nobelov nagrajenec predstavi spremenjene poglede na prostor, čas in maso, 1979
7. Križanič F., UKROČENA MATEMATIKA - Zapoznelo opozorilo na računske zakone ali fižol namesto množic, 1981
8. Ranzinger P., PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA - Fotografije Bojan Dintinjana, 1981
9. Strnad J., ZAČETKI KVANTNE FIZIKE - Od kvanta do snovnega valovanja, 1982
10. Kuščer I., ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE - Čuda se kažejo ob vsakem koraku, 1982
11. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol SR Slovenije, 1982
12. Ranzinger P., NAŠE NEBO - Astronomske efemeride 1983, 1982
13. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol, 1983
14. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol, 1983
15. Ranzinger P., NAŠE NEBO - Astronomske efemeride. Umetni sateliti. Potresi. 1984, 1983
16. Šporer Z., OH, TA MATEMATIKA, 1984