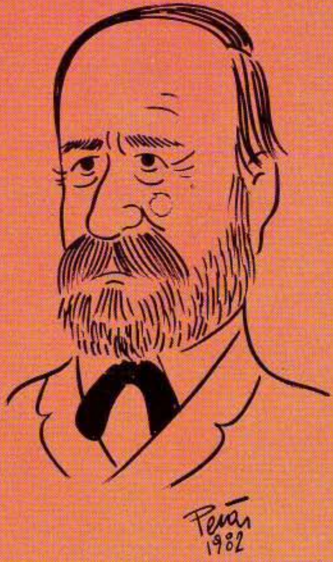
presek

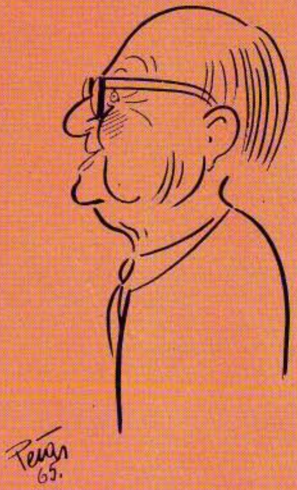
2
XI
1983-84

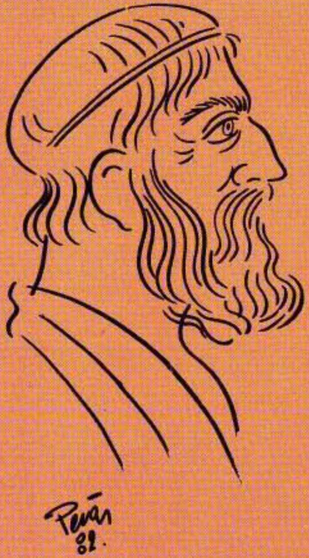
LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS


Peñas
1982


Peñas
1982


Peñas
65.


Peñas
82.

TO ŠTEVILKO P R E S E K A POSVEČAMO 200. OBLETNICI IZIDA PRVEGA V E G O V E G A LOGARITMOVNIKA

VSEBINA

P R E S E K - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
11. letnik, šolsko leto 1983/84, številka 2, strani 65-128.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 6, tel.št. (061) 265-061/53, št.žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1983/84 je za posamezna naročila 150.-din, za skupinska naročila pa 120.-din.

List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije.
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana.

MATEMATIKA

KROG IN KOCKA

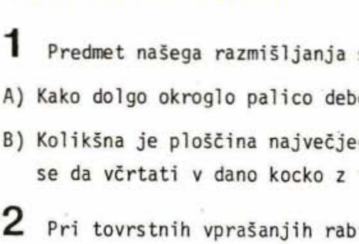
1 Predmet našega razmišljanja sta nalogi:

A) Kako dolgo okroglo palico debeline d lahko še spravimo v kocko z robom a?

B) Kolikšna je ploščina največjega kvadrata (kroga, šestkotnika, romba), ki se da včrtati v dano kocko z robom a?

2 Pri tovrstnih vprašanjih rabimo Pitagorov izrek in njegove posledice. Ponovimo: če je trikotnik ABC ob oglišču B pravokoten, je $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$. Označimo $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CA} = d$, pa imamo $x^2 + y^2 = d^2$.

Posledice. Diagonala d kvadrata s stranico a je $d = \sqrt{2}a$. V enakostraničnem trikotniku s stranico a je višina $v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$, polmer očrtanega kroga $r_o = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a$, polmer včrtanega kroga $r_v = r_o/2$, ploščina $p = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$.



Slika 1

Postavimo skozi oglišče C na ravnino trikotnika ABC pravokotnico $\overline{CD} = z$. Potem je $x^2 + y^2 + z^2 = \overline{AD}^2$.

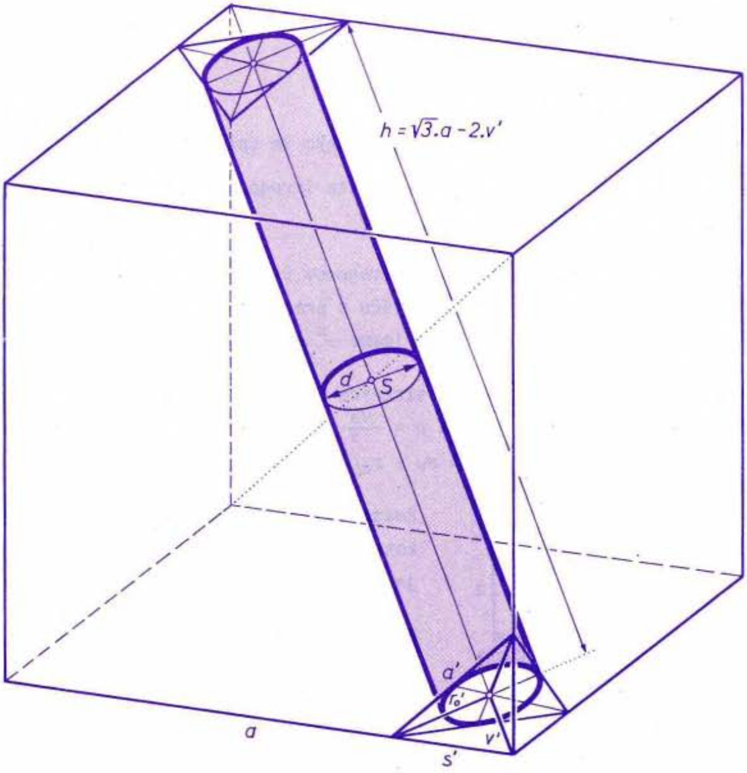
Posledice. Telesna diagonala d kvadra z robovi a, b, c ustreza enakosti $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (Slika 1).

Telesna diagonala kocke z robom a pa je $d = \sqrt{3}a$.

3 Zdaj se lotimo naloge A) pri pogoju, da je palica tanka! Palico debeline d spravimo v kocko v smeri telesne diagonale, saj domnevamo, da je lahko v tem primeru dolžina h palice najdaljša! Iz slike 2 preberemo zveze: $\frac{1}{2}\,d = \frac{\sqrt{3}}{6}\,a'$, oziroma $a' = \sqrt{3}d$; $a' \le \sqrt{2}a$, $r_o' = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a'$, $a' = \sqrt{2}s'$ in

$r_0' = d$, $s' = \sqrt{3}d/\sqrt{2} = \sqrt{6}d/2$; končno $v'^2 = s'^2 - r_0'^2 = 2d^2/4$, $v' = \sqrt{2}d/2$. Od tod dobimo za dolžino h palice $h = \sqrt{3}a - 2v'$, ali $h = \sqrt{3}a - \sqrt{2}d$. To velja pri pogoju, da je $a' \leq \sqrt{2}a$, torej $\sqrt{3}d \leq \sqrt{2}a$, ali $d \leq \frac{\sqrt{6}}{3} a \doteq 0{,}817a$.

4 Diskusija. Pri $a' = \sqrt{2}a$ dobimo, da je $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} d = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{6} a$ in $d = \frac{\sqrt{6}}{3} a$. Torej je $h = \sqrt{3}a - \sqrt{2} \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$. V tem primeru je dolžina h enaka tretjini telesne diagonale kocke.



Slika 2

4.1 Poglejmo, kolikšna je lahko debelina palice, če je največja dolžina h v mejah $a \leq h \leq \sqrt{3}a$ in smo palico spravili v kocko "diagonalno". Imamo $a \leq \sqrt{3}a - \sqrt{2}d \leq \sqrt{3}a$, oziroma $0 \leq \sqrt{2}d \leq (\sqrt{3} - 1)a$. Sledi

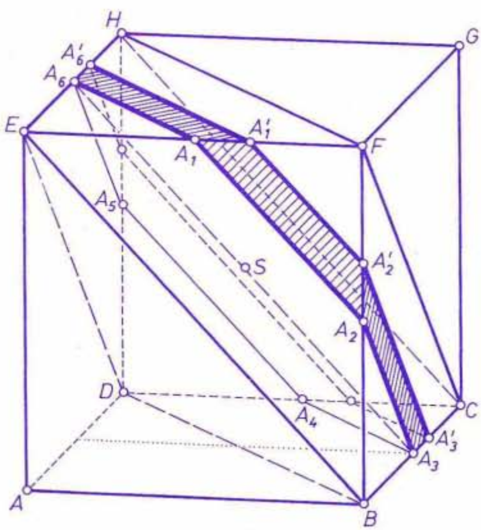
$$0 \leq d \leq \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,a \doteq 0{,}518a$$

Debelina d je v teh primerih v mejah med 0 in $\sqrt{2}a\sqrt{3}/3 = \sqrt{6}a/3 \doteq 0{,}817a$.

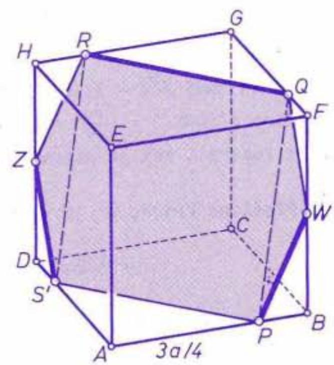
4.2 Lotimo se možnosti $\sqrt{3}a/3 < h < a$. Potem je zaradi omejitve $d \leq \sqrt{6}a/3$ in zaradi $\sqrt{2}d = \sqrt{3}a - h$, $d = \frac{\sqrt{3}a - h}{\sqrt{2}}$ debelina d v mejah $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,a < d < \frac{\sqrt{6}}{3}\,a$, ali $0{,}518a < d < 0{,}817a$. V teh primerih lahko spravimo palico kar "naravnost" (to pomeni pravokotno na stransko ploskev kocke) v kocko!

5 Pa denimo, da je zdaj debelina d palice večja od $\frac{\sqrt{6}}{3}\,a$. Kako določimo največjo dolžino h v teh primerih? Proučimo možnost, da je palica "vložena" v smeri telesne diagonale (tako, da je središčnica palice v telesni diagonali; središčnica je daljica, ki veže središči mejnih krogov palice)!

Označimo v kocki $ABCDEFGH$ njeno središče S in poglejmo ravninski presek skozi S, vzporedno z ravninama trikotnikov BED in CFH (slika 3). Opazimo, da je ta presek šestkotnik z oglišči A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Ta šestkotnik ima vse stranice enake $\sqrt{2}a/2$, to pa je polovica diagonale kvadrata največjega



Slika 3



Slika 4

kvadrata na površju kocke. Tudi vse diagonale tega šestkotnika so si med seboj enake, namreč po Pitagori dobimo za vsako izraz $\sqrt{2}a$. Sledi, da je ta šestkotnik pravilen! Polmer včrtanega kroga je v tem šestkotniku zato enak $\sqrt{6}a/4$, premer pa je potem $\sqrt{6}a/2 \doteq 1{,}225a$. Torej je mogoča večja debelina d palice od vrednosti $\sqrt{6}a/3 \doteq 0{,}817a$, namreč vrednost $\sqrt{6}a/2 \doteq 1{,}225a$. Kolikšna pa je v tem primeru največja dolžina h? Premislimo: če ravnino šestkotnika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ malo vzporedno premaknemo v lego $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$, se vidi, da se diagonale šestkotnika po dolžinah prav nič ne spremene, vse so še vedno enake $\sqrt{2}a$, spremenijo se pa dolžine stranic šestkotnika, saj očitno velja npr. $\overline{A_1'A_2'} < \overline{A_1A_2}$, $\overline{A_4A_5} < \overline{A_4'A_5'}$. Od tod z nazornostjo lahko domnevamo, da ima med vsemi ravninskimi preseki z ravninami, ki so vzporedne trikotnikovima ravninama BED, CFH in leže med njima, največjo ploščino ravno včrtani krog v šestkotniku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Če je debelina d v mejah $\frac{\sqrt{6}}{3}a < d < \frac{\sqrt{6}}{2}a$, ali približno v mejah $0{,}817a < d < 1{,}225a$, je dolžina najdaljše "diagonalne" palice v mejah $0 < h < \frac{\sqrt{3}}{3}a$, ali $0 < h < 0{,}577a$.

Vaja. Dani debelini d določite pri zgornji omejitvi ustrezno najdaljšo dolžino h!

6 Ogledali si bomo še nekaj včrtanih krogov kocke.

Poglejmo na sliki 4 v kocki $ABCDEFGH$ štirikotnik $PQRS'$, pri čemer so točke P, Q, R, S' po vrsti na robovih AB, FG, GH, DA, tako da je $\overline{PB} = \overline{QF} = \overline{RH} = \overline{S'D} = a/4$.

Po Pitagori dobimo, da je potem $\overline{S'P} = 3\sqrt{2}a/4$, $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}a/4$. Nadalje je $\overline{PR} = 3a/2$ in tudi $\overline{S'Q} = 3a/2$. Od tod sledi, da je štirikotnik $PQRS'$ kvadrat s ploščino $p(PQRS') = \frac{18}{16}a^2 = 1{,}125a^2$, kar pomeni, da se da v kocko včrtati večji kvadrat, kot je osnovna ploskev kocke!

6.1 Ploščina kroga, ki je včrtan v ta kvadrat, je enaka

$$\pi(3\sqrt{2}a/8)^2 = \frac{18}{64}\pi a^2 \doteq 0{,}884a^2$$

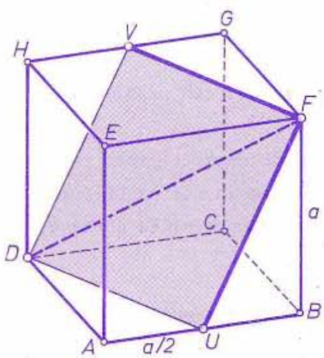
Ploščina v šestkotnik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ včrtanega kroga pa je enaka

$$\pi(\sqrt{6}a/4)^2 = \frac{3\pi}{8}a^2 \doteq 1{,}178a^2$$

torej znatno večja kot prejšnja!

Še vedno pa je odprto vprašanje, ali se da v kocko včrtati še večji kvadrat, kot smo našli v 6 , in ali se da v kocko včrtati še večji krog, kot smo ga našli v omenjenem šestkotniku.

6.2 Videli bomo, da se da v kocko včrtati romb, ki ima večjo ploščino, kot jo ima kvadrat iz 6 :



Slika 5

Oglejmo si namreč tale ravninski presek, ki poteka skozi telesno diagonalo DF kocke $ABCDEFGH$ in seče robova AB, GH v središčih U, V: (prim. sliko 5). Zaradi skladnosti pravokotnih trikotnikov UAD, VGH, VHD, UBF sklepamo, da je $\overline{UD} = \overline{VF} = \overline{UF} = \overline{VD}$. Po Pitagori je $\overline{VD}^2 = (a/2)^2 + a^2 = 5a^2/4$, torej $\overline{VD} = \sqrt{5}a/2$. To pomeni, da je štirikotnik $UFVD$ romb, njegovi diagonali sta DF, UV. Ker je $\overline{DF} = \sqrt{3}a$ in $\overline{UV} = \sqrt{2}a$, je ploščina tega romba enaka $\frac{1}{2}\ \overline{DF}.\overline{UV} = \frac{1}{2}\ \sqrt{3}a.\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2}\ a^2 \doteq 1{,}225a^2$, to je pa res malo večje od ploščine kvadrata $PQRS'$, saj je ta enaka $1{,}125a^2$, kot smo dognali zgoraj.

Včrtajmo rombu $UFVD$ krog! Njegov premer je enak višini romba; to pa določimo kot količnik med ploščino in stranico. Račun da $\sqrt{30}a/5$. Potemtakem je ploščina v romb včrtanega kroga enaka $\pi(\sqrt{30}a/10)^2 = 3\pi a^2/10$. Ker je 9/32 manjše od 3/10, je ta drugi krog večji od kroga, ki smo ga konstruirali v 6.1 . Toda je manjši od kroga, ki je včrtan v šestkotnik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, saj je 3/10 manjše od 3/8.

6.3 V prejšnjih odstavkih smo v 5 in v 6 opazili tudi dva šestkotnika, ki sta včrtana v kocko:

- v 5 je šestkotnik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ pravilen,
- v 6 pa označimo presek med ravnino kvadrata $PQRS'$ in robom BF z W, presečišče med tem kvadratom in robom DH pa z Z; tako dobimo tudi šestkotnik $PWQEZS'$ (ta seveda ni pravilen).

Kateri od njiju ima večjo ploščino? Ploščina prvega je enaka $3\sqrt{3}a^2/4 \doteq$ $\doteq 1{,}299a^2$. Ploščino šestkotnika $PWQRZS'$ pa dobimo tako, da ploščini kvadrata $PQRS'$ prištejemo ploščini trikotnikov PWQ in $S'RZ$. Najprej dobimo $\overline{PW}^2 =$ $= (a/4)^2 + (a/2)^2 = 5a^2/16$, potem višino v iz W na stranico PQ, $v^2 = \overline{PW}^2 -$ $- (\overline{PQ}/2)^2 = 2a^2/64$, $v = \sqrt{2}a/8$. Končno dobimo za ploščino $p(PWQRZS') = \overline{PQ}^2 +$ $+ \overline{PQ}.v = 21a^2/16 = 1{,}3125a^2$. Torej je šestkotnik $PWQRZS'$ ploščinkso večji od pravilnega šestkotnika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, medtem ko je včrtani krog v prvem primeru manjši kot v drugem primeru!

Povzetek. Nalog A), B) smo se lotili s kar se da preprostimi matematičnimi pripomočki. Rešili smo ju pa delno. Dodajmo tema nalogama še:

C) Kolikšen je v dani kocki ravninski prerez z največjo ploščino?

Morda bodo zgornje vrstice spodbuda, da se boste lotili teh problemov.

Opomba. Analogne probleme lahko postavimo pri drugih geometrijskih telesih (pri kvadru, pravilnem četvercu, pri pravilnih poliedrih ali pa pri okroglih geometrijskih telesih). Zanimiva bi bila tudi računalniška obravnava problema C).

7 S poznavanjem osnovnih geometrijskih zakonitosti iz srednješolskega tečaja se da pokazati, da je drugi od krogov v 6.1 v kocki z robom a največji (taki krogi so pa štirje). Eden od dokazov je opisan v dvanajstem zvezku zbirke matematičnega krožka Univerze v Moskvi: *Šklarskij, Čencov, Jaglom: Geometričeskie neravenstva i zadači na maksimum i minimum, str. 77-80.* To delo je tudi v angleškem prevodu. Dokaz pa teče tako: Najprej pokažemo, da prihajajo v poštev za "maksimalne" kroge le krogi s središčem S (središče kocke); potem konstruiramo oblo s središčem S in polmerom $r = \sqrt{6}a/4$; ta izseče iz šestih mejnih kvadratov kocke šest krožnic; če povežemo središče S s točkami teh krožnic, dobimo šest plaščev stožcev; potem pokažemo, da bi morala imeti ravnina kroga $K(S,R)$, ki ima polmer R večji od r, s temi šestimi plašči samo skupno točko S (z vsemi!); končno pokažemo, da taka ravnina ni mogoča!

Ivan Pucelj

PITAGOREJSKE N-TERICE

Pitagorejsko trojico imenujemo trojico naravnih števil (x_1, x_2, x_3), ki rešijo enačbo

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

Bralec gotovo ve, da se imenuje po Pitagori zato, ker imamo količine x_1, x_2 in x_3 lahko za dolžine stranic pravokotnega trikotnika. Vse rešitve zgornje enačbe v okviru naravnih števil dobimo po znanih formulah

$$x_1 = 2Kpq \ , \quad x_2 = K(p^2-q^2) \ , \quad x_3 = K(p^2+q^2) \tag{1}$$

kjer so p, q in K poljubna naravna števila in $p > q$. Če vzamemo $K = 1$, od p in q pa eno liho in eno sodo število, dobimo tako imenovane primitivne pitagorejske trojice, to je take, pri katerih števila x_1, x_2 in x_3 nimajo skupnega faktorja (glej npr. Presek 1977/78, str. 196). Namesto treh bi lahko iskali štiri naravna števila, ki imajo lastnost, da je vsota kvadratov prvih treh enaka kvadratu četrtega števila

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$$

Lotimo se še splošnejšega problema. Vzemimo poljubno naravno število $n \geq 3$ in imenujmo *pitagorejsko n-terico* nabor n naravnih števil $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ki rešijo enačbo

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = x_n^2 \tag{2}$$

Naša naloga bo najti kakšno pitagorejsko n-terico. Na prvi pogled je videti, da smo si zastavili težko nalogo, vendar bomo videli, da se da sorazmerno lahko najti kar precej rešitev.

Zgornjo enačbo bomo najprej nekoliko preoblikovali. Namesto količin x_1, x_2, x_3, ..., x_n vpeljimo količine u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v in z tako, da velja

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + z \\ x_2 &= u_2 + z \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{n-2} = u_{n-2}$$

$$x_{n-1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + v \qquad (3)$$

$$x_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + v + z$$

Vsaki n-terici $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ustreza natanko ena n-terica $(u_1,u_2,\dots,u_{n-2},$ $v,z)$, kajti brž lahko izrazimo nazaj nove količine s starimi:

$$u_1 = x_1 + x_{n-1} - x_n$$

$$u_2 = x_2 + x_{n-1} - x_n$$

$$\vdots$$

$$u_{n-2} = x_{n-2} + x_{n-1} - x_n$$

$$v = (n-2)x_n - (n-3)x_{n-1} - x_{n-2} - \dots - x_2 - x_1$$

$$z = x_n - x_{n-1}$$

o čemer se ni težko prepričati. Pri tem je treba povedati, da kakšna od količin u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v in z lahko tudi ni pozitivno število, čeprav so x_1, x_2, ..., x_n vsa pozitivna števila. Če sedaj zveze (3) vstavimo v enačbo (2), po krajšanju dobimo

$$2vz = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{n-2}^2 + (n-3)z^2$$

Namesto enačbe (2) moramo torej rešiti to enačbo v okviru celih števil. Ker morajo biti x_1, x_2, ..., x_n pozitivna števila, se omejimo na to, da tudi količine u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v in z vzamemo za pozitivna cela števila, s čimer zaradi (3) zgornjo zahtevo gotovo izpolnimo. Rešitve, ki bi jih dobili tako, da bi bila kakšna od količin u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v ali z negativna ali nič, nas ne bodo zanimale. Saj nam ne gre za to, da bi našli prav vse rešitve. Zgornjo enačbo lahko pišemo tudi v obliki

$$v = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{n-2}^2 + (n-3)z^2)/(2z) \qquad (4)$$

Videli bomo, da lahko dobimo veliko rešitev te enačbe. Čim večji je n, tem bogatejša je množica rešitev. Oglejmo si samo nekatere od možnih poti do nekaterih rešitev enačbe (4) in s tem potem do rešitev prvotne enačbe (2).

Izberimo najprej $z = 1$; tedaj imamo

$$v = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + (n-3))/2$$

in vidimo, da moremo količine u_1, u_2, ... in u_{n-2} izbrati čisto poljubno, le da je vsota v oklepaju sodo število. To pa dosežemo na primer tako, da izberemo za u_1 sodo število, števila u_2, u_3, ..., u_{n-2} pa so vsa liha, sicer pa čisto poljubna. Namreč če je n sodo število, je $u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2$ kot vsota lihega števila lihih števil tudi sama liho število, táko pa je tudi število n-3. Če pa je n liho število, je $u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2$ sodo število, kakršno pa je tudi število n-3. Iz zvez (3) dobimo potem iskane n-terice

$$\begin{gathered}
x_1 = u_1 + 1 \\
x_2 = u_2 + 1 \\
\vdots \\
x_{n-2} = u_{n-2} + 1 \\
x_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + (u_1^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + n-3)/2 \\
x_n = x_{n-1} + 1
\end{gathered}$$

Če uvedemo parametre $q_i = u_i + 1$, za $i = 1, 2, \ldots, n-2$, dobimo preglednejše obrazce

$$\begin{gathered}
x_1 = q_1 \\
x_2 = q_2 \\
\vdots \\
x_{n-2} = q_{n-2} \\
x_{n-1} = (q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_{n-2}^2 - 1)/2 \\
x_n = (q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_{n-2}^2 + 1)/2
\end{gathered} \qquad (5)$$

(q_1 - liho število, q_2, ..., q_{n-2} pa soda števila, večja od 1)

Dobili smo n-2 parametrično rešitev, ker števila q_1, ..., q_{n-2} lahko poljubno izbiramo, paziti moramo le na dogovor o parnosti.

Na podoben način bi lahko odbili še druge rešitve, ena je na primer tale: za u_1 vzamemo naravno število nasprotne parnosti, kot je število n, za u_2,

u_3, ..., u_{n-2} pa vzamemo števila iste parnosti, kot je n. Prepričaj se sam, da je tedaj zopet v naravno število, in sestavi obrazce za x_1, ..., x_n.

Iz dobljenih izrazov (5) lahko naredimo enostavnejše, vendar manj splošne rešitve. Ena takih možnosti je, če izberemo $q_1 = 2k + 1$, $q_2 = q_3 = \ldots = q_{n-2} = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, tedaj dobimo naslednje pitagorejske n-terice

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k + 1 \\ x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-2} &= 2k \\ x_{n-1} &= 2(n-2)k^2 + 2k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ x_n &= 2(n-2)k^2 + 2k + 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Dobili smo torej enoparametrično družino rešitev, saj lahko samo število k izbiramo še poljubno. Z nekoliko domišljije lahko zopet sam dobiš še kakšne posebne obrazce.

Zgornje rešitve smo dobili pri privzetku, da je $z = 1$. Na podoben način dobimo rešitve tudi za primere, ko postavimo $z = 2$, $z = 3$, itd.

Oglejmo si še eno zelo splošno rešitev, ki jo dobimo tako, da postavimo v (4): $z = 2m^2$ in $u_i = 2mr_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Pri tem so m in r_1, r_2, r_3, ..., r_{n-2} poljubna naravna števila. Za parameter v dobimo izraz

$$v = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{n-2}^2 + (n-3)m^2$$

katerega vrednost je gotovo naravno število. Zaradi lažjega pisanja uvedimo oznake $p_i = r_i + m$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, nakar preko zvez (3) dobimo

$$\begin{aligned} x_1 &= 2mp_1 \qquad\qquad p_i > m \\ x_2 &= 2mp_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= 2mp_{n-2} \\ x_{n-1} &= p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{n-2}^2 - m^2 \\ x_n &= p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{n-2}^2 + m^2 \end{aligned} \tag{7}$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$ in m poljubna naravna števila, le da je $p_i \geq m+1$, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (glej, kako smo vpeljali količine p_i). Za pitagorejske n-terice smo torej dobili rešitve, v katerih lahko $n-1$ parametrom izbiramo še poljubne vrednosti. Če pa upoštevamo dejstvo, da vse te količine lahko še pomnožimo s skupnim faktorjem K, dobimo celo n parametrično rešitev, torej zares bogato množico.

Oglejmo si še nekaj posebnih primerov zgornjih rezultatov. Če je $n = 3$, gre za običajne pitagorejske trojice. Zanje dobimo iz (7)

$$x_1 = 2mp, \quad x_2 = p^2 - m^2, \quad x_3 = p^2 + m^2$$

kjer smo pisali $p = p_1$. Pri tem sta p in m poljubna, le $p > m$. Če te zveze pomnožimo še s skupnim faktorjem K, dobimo na začetku omenjene rešitve (1). Iz (6) pa dobimo naslednje trojke:

$$x_1 = 2k + 1, \quad x_2 = 2k^2 + 2k, \quad x_3 = 2k^2 + 2k + 1; \quad k = 1, 2, \ldots$$

ki so najbrž tudi že komu poznane. Iz njih dobimo na primer trojke (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), itd. Vendar seveda ne vseh, npr. trojke (8,15,17) ne dobimo na ta način.

Vzemimo še primer $n = 4$. Iz zvez (5) dobimo naslednje pitagorejske četvorke

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= q_2 \\ x_3 &= (q_1^2 + q_2^2 - 1)/2 \\ x_4 &= (q_1^2 + q_2^2 + 1)/2 \end{aligned}$$

kjer je q_1 liho število, q_2 pa sodo ali obratno. Zveze (6) nam dajo rešitve, ki jih lahko pišemo v obliki

$$\begin{aligned} x_1 &= k \\ x_2 &= k + 1 \\ x_3 &= k(k + 1) \\ x_4 &= k(k + 1) + 1 \end{aligned} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

saj sta števili k in $k+1$ nasprotne parnosti. Dobili smo zelo preprost obrazec, ki nam da četvorke (1,2,2,3), (2,3,6,7), (3,4,12,13), itd. Zapišimo še obrazec, ki ga dobimo iz (7)

$$\begin{aligned} x_1 &= 2mp \\ x_2 &= 2mq \\ x_3 &= p^2 + q^2 - m^2 \\ x_4 &= p^2 + q^2 + m^2 \end{aligned} \qquad (p > m,\ q > m)$$

kjer smo pisali $p = p_1$ in $q = p_2$. Za števila p, q in m lahko izbiramo poljubna naravna števila, le na pogoj na desni moramo paziti.

Problem iskanja pitagorejskih četvork lahko tudi geometrijsko obarvamo. Iščemo take kvadre, ki imajo za dolžine stranic naravna števila $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_3$, pri katerih ima tudi telesna diagonala celoštevilsko dolžino $d = x_4$. Sicer pa tudi pri drugih geometrijskih problemih pogosto nastopajo izrazi oblike $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ in zlasti sestavljalci raznih nalog pogosto radi izberejo za x_1, x_2 in x_3 taka cela števila, da je tudi koren celo število. Tak primer je na primer $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$.

Zapišimo nazadnje nekaj pitagorejskih četvork, ki jih dobimo iz nekaterih zgornjih obrazcev. Zaradi boljše preglednosti so urejene v smislu: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$. Bralec si bo sam naredil podobne tabele za nekaj pitagorejskih peterk, šesterk, itd.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	2	3
1	4	8	9
2	3	6	7
2	4	4	6
4	4	7	9
3	6	6	9

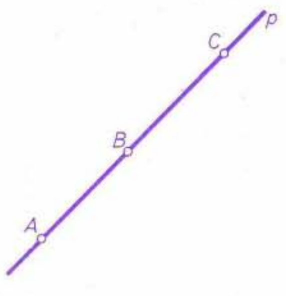
x_1	x_2	x_3	x_4
2	6	9	11
6	6	7	11
3	4	12	13
2	5	14	15
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

NALOGE

EULERJEV IZREK O ŠTIRIH KOLINEARNIH TOČKAH

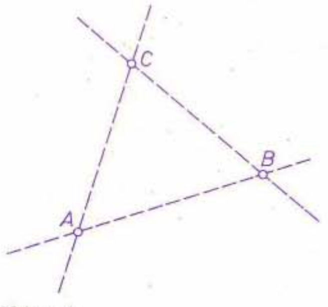
Leonard Euler (1707 - 1783) spada med najbolj plodovite matematike vseh časov. Z devetnajstimi leti je objavil svoja prva, vendar že zelo pomembna dela; s šestdesetimi leti je oslepel, kar pa ni prav nič škodilo njegovi ustvarjalni dejavnosti. Njegova odkritja srečamo na številnih matematičnih področjih, zlasti v matematični analizi. V naslednjem bomo obravnavali neko po njem imenovano enačbo.

Kolinearnost točk. Točke, ki leže na isti premici, so *kolinearne*. Dve poljubni točki sta vedno kolinearni, saj določujeta premico, ki gre skozi ti dve točki. Če je število točk večje od 2, so točke lahko kolinearne, lahko pa tudi niso.



Slika 1.

Točke A, B in C so kolinearne; leže na premici p.

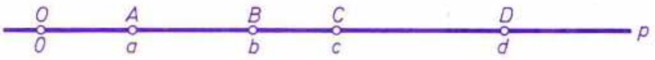


Slika 2.

Točke A, B in C niso kolinearne.

Eulerjeva enačba. Vzemimo štiri poljubne kolinearne točke A, B, C in D, ki leže na premici p.

Slika 3.



Za vsako tako četverico točk velja Eulerjeva enačba:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} + \overline{CA}.\overline{BD} = 0$$

Enačbo bomo dokazali na dva načina.

Aritmetični dokaz. Na premici p vzamemo kartezični koordinatni sistem z začetkom v točki O; v tem koordinatnem sistemu imajo točke A, B, C in D zaporedoma koordinate a, b, c in d. Daljice v Eulerjevi enačbi imajo, upoštevajoč usmerjenost, naslednje dolžine:

$$\overline{AB} = b - a \qquad \overline{BC} = c - b \qquad \overline{CA} = -(c - a)$$

$$\overline{CD} = d - c \qquad \overline{AD} = d - a \qquad \overline{BD} = d - b$$

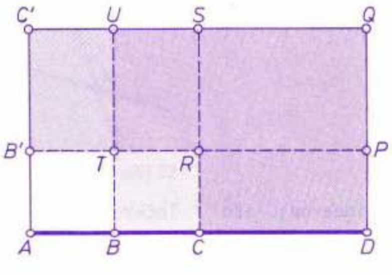
Če vstavimo te dolžine v Eulerjevo enačbo, dobimo:

$$(b - a)(d - c) + (c - b)(d - a) - (c - a)(d - b) = 0$$

Lahko je izračunati, da je leva stran te enačbe enaka 0, in s tem je dokaz končan.

Geometrični dokaz. V Eulerjevi enačbi najprej prenesemo z leve strani tretji člen na desno stran in dobimo Eulerjevo enačbo v obliki:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} = \overline{AC}.\overline{BD}$$



Pravokotno na daljico AD narišemo daljico AC', pri čemer je $\overline{AC'} = \overline{AC}$ in določimo na njej točko B' tako, da je $\overline{AB} = \overline{AB'}$. Iz točk A, B, C, D, B' in C'

potegnemo vzporednice tako, da dobimo pravokotno mrežo kot kaže slika.

Na levi strani Eulerjeve enačbe je vsota ploščin pravokotnikov $CDPR$ in $B'PQC'$, torej ploščina lika $B'RCDQC'$, na desni strani enačbe je ploščina pravokotnika $BDQU$. Ploščini teh dveh likov sta enaki, ker je lik $TRCDQUT$ skupen in ker sta pravokotnika $B'TUC'$ in $TBCR$ skladna. S tem pa je dokaz končan.

Obravnavali smo samo možnost, ko si slede kolinearne točke v zaporedju A, B, C, D. Vseh različnih možnih takih zaporedij pa je 24; prepričaj se o tem! Eulerjeva enačba velja za vsako od teh možnih zaporedij. Prepričaj se o tem! Pazi pri tem na usmerjenost daljic!

Alojzij Vadnal

POSPLOŠITEV NEKEGA PROBLEMA IZ DELJENJA DALJIC

Na nekem tekmovanju učencev osnovnih šol je bila ena od nalog:

Dokaži, da vsota poljubnih petih zaporednih naravnih števil ni praštevilo!

Nalogo posplošimo takole:

Vsota poljubnih n ($n \geq 3$) zaporednih naravnih števil ni praštevilo.

Dragoljub M. Milošević

prev. Emil Beloglavec

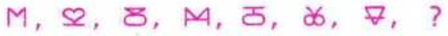
BISTROVIDEC

UGOTOVI PRAVILO

Januarja 1983 sem se z nekaterimi kolegi matematiki udeležil tečaja iz teoretičnih osnov računalništva, ki je potekal v Dubrovniku. Eno izmed predavanj je bilo tudi o induktivnem sklepanju, ki se ukvarja z naslednjim vprašanjem:

> Obstaja neko pravilo (pojav), po katerem dobivamo člene zaporedja (rezultati poskusov). Iz nekaj znanih začetnih členov poskušaj spoznati pravilo. Seveda lahko po potrebi "zahtevaš" naslednji člen.

Predavatelj Daley iz Združenih držav Amerike nam je za razmišljanje v odmorih napisal naslednja zaporedja:



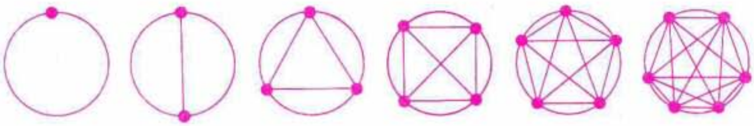
O, T, T, F, F, S, ?

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, ?

pri drugem zaporedju je potrebno znati nekaj angleščine (vsaj za eno šolsko leto); pri tretjem zaporedju pa vemo, da naslednji člen ni 21.
Udeleženec tečaja iz Norveške je dodal še zaporedje:

4, 8, 21, 52, 65, 96, ?

profesor Scott iz Združenih držav Amerike pa nas je spomnil na naslednje Polyajevo zaporedje:



1 2 4 8 16 ?

kjer je število pod posameznim krogom največje število kosov kroga, na katere ga z vsemi diagonalami z oglišči na krožnici razreže n-kotnik.
Kako bi nadaljeval gornja zaporedja? Ali znaš (razen za zadnje zaporedje) napisati pravilo? Kaj bi napisal za naslednji člen zadnjega zaporedja, če bi poznal samo zaporednje števil? Poišči obrazec za tekoči člen zadnjega zaporedja!

Vladimir Batagelj

NIHANJE ATOMOV V MOLEKULAH

Atomi se lahko združujejo v gruče, ki jih imenujemo *molekule*. V molekule so lahko povezani enaki ali različni atomi. Kisik v zraku npr. sestavljajo molekule O_2, v katerih sta povezana po dva (enaka) atoma kisika, klorvodikova kislina pa je sestavljena iz molekul HCl, v katerih sta zvezana atom vodika in atom klora.

Atomi v molekulah niso togo povezani. Sile, ki jih drže skupaj, so *električne*, vendar delujejo skoraj tako, kakor da bi bili atomi speti med sabo z zelo lahkimi vzmetmi. Vzmeti se lahko raztezajo in krčijo. Če je vzmet, ki spenja dva atoma, raztegnjena, ju vleče skupaj, če je stisnjena, ju potiska narazen. Ko sta atoma v ravnovesni razdalji, pa je vzmet neraztegnjena.

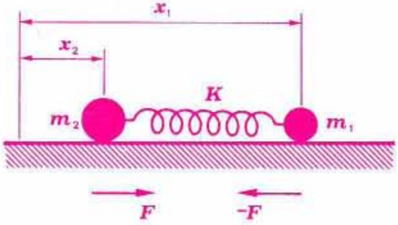
Vse to nam je že od prej znano. Morda pa bi se vendarle znašli v zadregi, če bi dobili nalogo, da izračunamo, s kolikšno frekvenco nihata okrog ravnovesne razdalje atom vodika (H) in klora (Cl) v molekuli klorvodikove kisline (HCl). Poglejmo, kako bi se lahko lotili te naloge!

Vzeli bomo, da sta atoma vodika in klora togi kroglici z masama m_1 in m_2. Izgodišče za merjenje njunih leg - označili ju bomo z x_1 in x_2 - si lahko poljubno izberemo. Ker nas zanima le, kako nihata atoma drug glede na drugega, bomo vzeli, da težišče molekule glede na to izhodišče miruje. Atoma naj bosta povezana z breztežno vzmetjo s koeficientom K, dolžina neraztegnjene vzmeti pa naj bo l.

Iz slike je razvidno, da je raztezek vzmeti x enak

$$x = (x_1 - x_2) - l. \quad (1)$$

Gibanje atomov bomo opisali s pomočjo *2. Newtonovega zakona*, ki ga bomo zapisali posebej za vsak atom v molekuli. Na atoma deluje le sila vzmeti, ki je sorazmerna z raztezkom. Če upoštevamo, da je pospešek enak *drugemu odvodu lege po času*, lahko zapišemo (glej sliko!)



$$m_1(d^2x_1/dt^2) = -Kx \quad (2a)$$

$$m_2(d^2x_2/dt^2) = Kx. \quad (2b)$$

Enačbi (2) bomo preoblikovali, tako da nam ju ne bo težko rešiti. Delimo prvo enačbo z m_1, drugo z m_2 in odštejemo drugo od prve! Dobimo

$$d^2x_1/dt^2 - d^2x_2/dt^2 = -K(1/m_1 + 1/m_2)x. \quad (3)$$

Leva stran je enaka ravno d^2x/dt^2, saj je $d^2x/dt^2 = d^2\left[(x_1 - x_2) - l\right]/dt^2 = d^2x_1/dt^2 - d^2x_2/dt^2$. Na desni strani pišimo $1/m_1 + 1/m_2 = 1/\mu$, kjer imenujemo μ *reducirana masa*. Enačbo (3) lahko sedaj zapišemo

$$d^2x/dt^2 + (K/\mu)x = 0. \quad (4)$$

V (4) spoznamo enačbo za *harmonično nihanje*. Splošna rešitev take enačbe je

$$x = x_0\cos(\omega t + \delta),$$

kjer je x_0 *amplituda nihanja*, δ *fazni kot*, ω pa *krožna frekvenca nihanja*, ki je enaka $\omega = \sqrt{K/\mu}$, oziroma

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{K\cdot\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \quad (5)$$

Frekvenco, s katero nihata vodikov in klorov atom v molekuli HCl lahko izračunamo, če poznamo konstanto vzmeti K. Iz tabel dobimo, da je enaka 500 N/m; masa vodikovega atoma je $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg, masa klorovega, ki ima relativno atomsko maso 35, pa $5{,}85\cdot10^{-26}$ kg. S temi podatki dobimo za frekvenco (5) vrednost $8{,}83\cdot10^{13}\ s^{-1}$.

Pristavimo naj, da konstanto namišljene vzmeti, s katero si mislimo zvezane atome v molekulah, običajno šele iščemo. S *spektroskopskimi meritvami* lahko izmerimo frekvenco nihanja ν, potem pa iz enačbe (5) poiščemo K. Na ta način zvemo nekaj o elektrostatičnih silah, ki v resnici delujejo med atomi.

Povejmo še to, da so amplitude, s katerimi nihajo atomi v molekulah zaradi *termičnega gibanja*, navadno zelo majhne in ne presegajo desetinke premera posameznega atoma.

LITERATURA

- Halliday - Resnick: *Physics*, John Wiley & Sons, New York 1967.
- Presek IX/3 (1981/82): Naloge z republiškega tekmovanja mladih fizikov.

Božidar Casar
(Priredil *Tomaž Kranjc*)

KRATKOČASNE VŽIGALICE

18. Iz desetih vžigalic sestavi tri enake kvadrate. Odstrani vžigalico in naredi tri paralelograme!

19. Iz enajstih vžigalic sestavi pročelje grškega svetišča! Prestavi dve vžigalici, da dobiš enajst kvadratov! Prestavi štiri vžigalice, da dobiš 15 kvadratov!

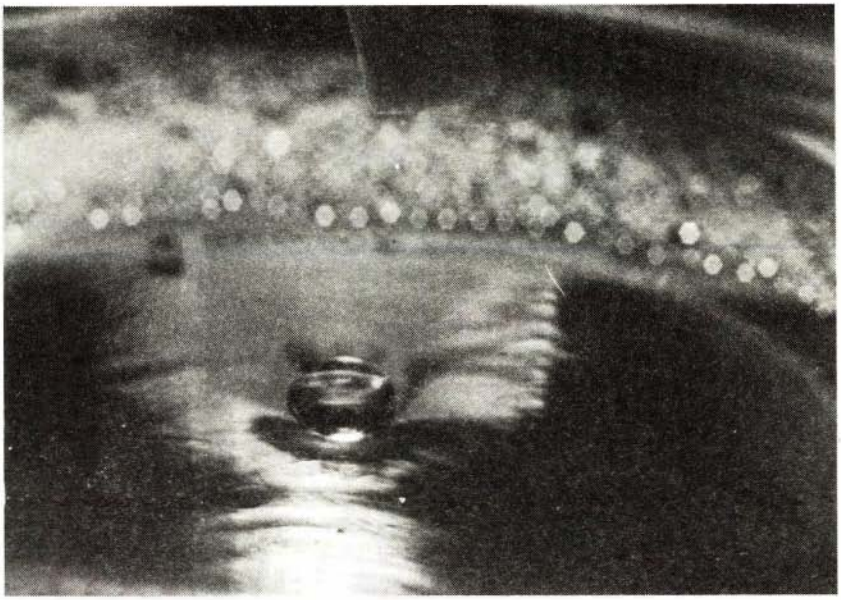
PLAVAJOČE IN POTOPLJENE KAPLJICE

Voda nam je zelo domača, saj jo srečujemo vsak dan po večkrat. Če jo skrbno opazujemo, nam nudi nešteto presenečenj, pa bodi da je v *trdnem, tekočem* ali *plinastem* stanju.

V šoli smo slišali, da se površje kapljevin vede kot kaka prožna opna in morda še to, da je to zaradi *površinske napetosti*. Vemo tudi, da imajo tekočine *gladino* in lahko tvorijo *kaplje*. In prav pri kapljah se bomo ustavili, saj so nadvse zanimive. Pogledali si bomo dva pojava: *plavajoče* in *potopljene kapljice*.

a) PLAVAJOČE KAPLJICE

Plavajoče kapljice opazimo, če odpremo pipo v umivalniku ali v banji, ki sta polna vode. Vendar so te kapljice precej redek pojav, saj v glavnem nastanejo mehurčki. Plavajoče kapljice sem opazil tudi pri veslanju, ko so hitele stran od vesel v vseh smereh. S plavajočimi mehurčki jih ni mogoče zamenjati, ker se pri kapljicah vidi vdrta gladina. V sončni svetlobi imajo značilen lesk. Ločimo jih tudi po izraziti obliki, ki je tem bolj sploščena, čim večje so kapljice. (Slika 1 in 2)



SLIKA 1. Plavajoča kapljica

SLIKA 2. Večja kapljica je bolj sploščena

Plavajoče kapljice najlažje dobimo tako, da kapljevino stiskamo iz plastične posodice s približno 0,5 centimetrov široko odprtino cevke. Mirujoče kapljice, ki jih dobimo na ta način, lahko spravimo tudi v gibanje, če ob pladenj pritrdimo fen, tako kot na sliki 3.

SLIKA 3. Naprava za opazovanje plavajočih kapljic

Življenjski čas kapljic je odvisen od prašnosti površine in od tega, ali se kapljica giba ali pa miruje. Večino poskusov sem opravil z vodnimi kapljicami. Kapljica živi kake pol sekunde, če na vodni gladini plavajo smeti, ki kapljico predrejo. Za tovrstno opazovanje sem vodo zaprašil z otroškim pudrom. Na čisti gladini se kapljice zlijejo z gladino dobro sekundo po tem, ko se ustavijo.

Če kapljica miruje, s svojo težo pritiska na zračno blazino pod seboj, tako da se blazina neprenehoma tanjša. Pri tem zrak teče tako, kot kaže slika 4.

SLIKA 4. Odtekanje zraka pri mirujoči kapljici

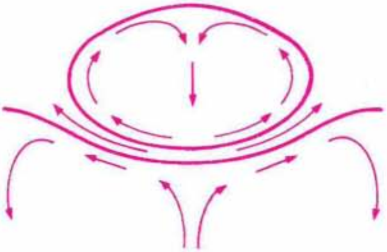
SLIKA 5. Gibanje zraka pod kapljico, če se kapljica giblje proti desni

Kapljica se ne zlije z gladino pod njo toliko časa, dokler je vmesna plast dovolj debela.

Življenjski čas gibajočih se kapljic je povprečno pet sekund, kar je bistveno več kot pri mirujočih. Plavajoča kapljica namreč med gibanjem spredaj zajema zrak, zadaj pa ga pušča za seboj, tako kot kaže slika 5. Njeno gibanje lahko primerjamo z gibanjem vozil na zračno blazino.

Celotna količina zraka pod kapljico se torej le počasi zmanjšuje ali pa sploh ne, kar gibajočim se kapljicam podaljša življenjski čas. Trenje na zračni blazini, po kateri se kapljica giblje, je zelo majhno, zato se kapljica počasi zaustavi.

Poskuse s plavajočimi kapljicami je najlepše delati, če vodi, iz katere nastajajo kapljice, in vodi v pladnju dodamo malo detergenta. Življenjski čas mirujočih kapljic je potem v povprečju dve sekundi, življenjski čas gibajočih se pa kar deset sekund. Nekatere žive tudi čez minuto in dosežejo premer par centimetrov. Pojasnilo najdemo v dejstvu, da je detergent površinsko aktivna snov in se koncentrira na površini kapljevine. Ta plast je zelo viskozna, če ne celo plastična, tako da tvori skoraj trdno skorjo na površini kapljevine. Ko izpod čiste kapljice odteka zrak, se giblje tudi plast kapljevine pod in nad njim, tako kot na sliki 6. Zaradi velike viskoznosti se plast detergenta ne giblje in je zato hitrostni profil spremenjen. Slika 7 kaže hitrostni profil pri odtekanju zraka na čisti površini in na površini z dodatkom detergenta.

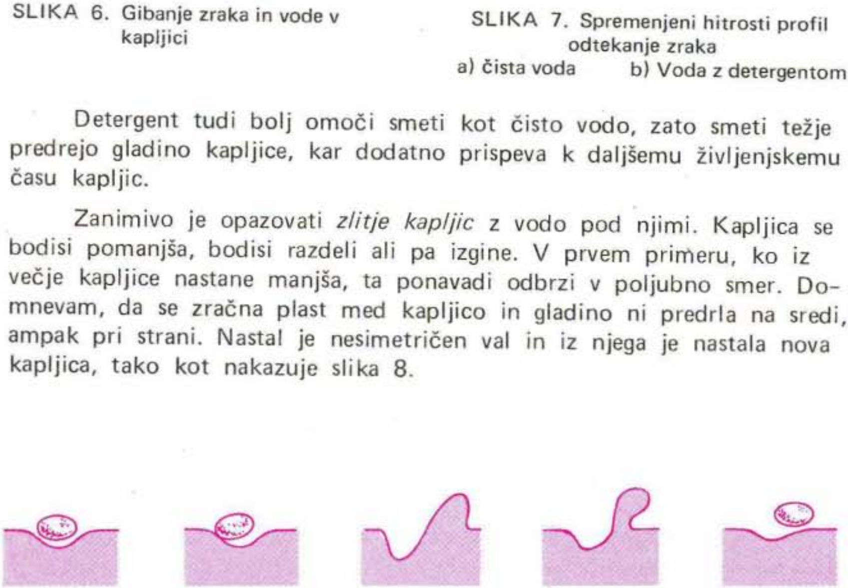


SLIKA 6. Gibanje zraka in vode v kapljici

SLIKA 7. Spremenjeni hitrosti profil odtekanje zraka
a) čista voda b) Voda z detergentom

Detergent tudi bolj omoči smeti kot čisto vodo, zato smeti težje predrejo gladino kapljice, kar dodatno prispeva k daljšemu življenjskemu času kapljic.

Zanimivo je opazovati *zlitje kapljic* z vodo pod njimi. Kapljica se bodisi pomanjša, bodisi razdeli ali pa izgine. V prvem primeru, ko iz večje kapljice nastane manjša, ta ponavadi odbrzi v poljubno smer. Domnevam, da se zračna plast med kapljico in gladino ni predrla na sredi, ampak pri strani. Nastal je nesimetričen val in iz njega je nastala nova kapljica, tako kot nakazuje slika 8.

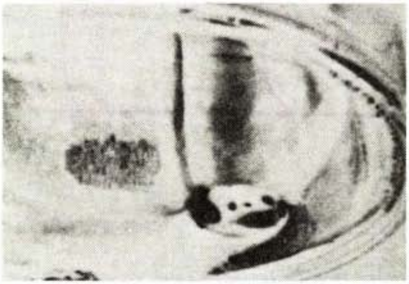


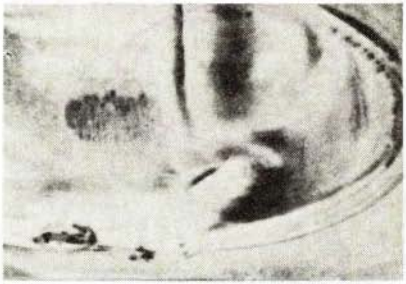
SLIKA 8. Nastanek manjše kapljice iz večje

Če nastaneta iz ene kapljice dve kapljici ali več, je hitrost vsake v splošnem manjša, kot če nastane ena sama.

Zlitje kapljice z vodo je tako hitro, da ga s prostim očesom ne moremo opazovati. Da je čas zlitja krajši od šestnajstinke sekunde, sem razbral iz filmskega posnetka. Na sliki 9 je plavajoča kapljica, na sliki 10, ki je naslednja na filmskem traku s šestnajst posnetki na sekundo, pa se vidi le še vdrta gladina.

SLIKA 9. Fotografija plavajoče kapljice, narejena po filmskem posnetku



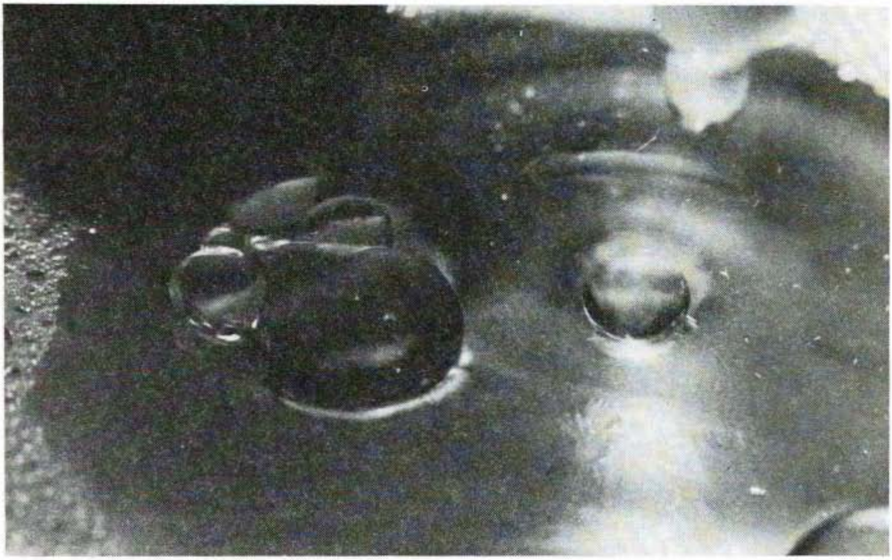


SLIKA 10. Šestnajstinko sekunde za sliko 9 je ostala le še vdrta gladina

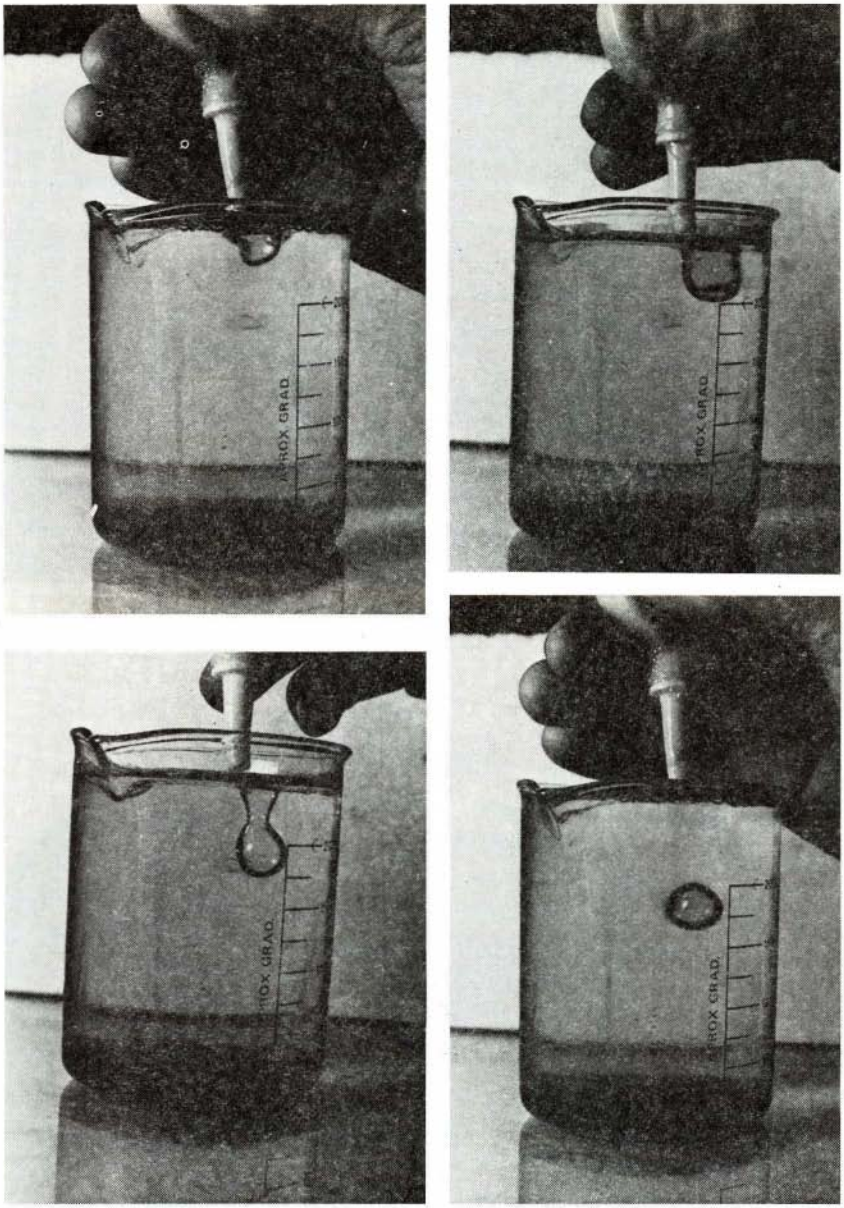
Posnetek na sliki 11 kaže, kako se je plavajoča kapljica iz črnila zlila z vodo pod seboj. S filmskega traku sem spet razbral, da je čas za nastanek takšne gobe krajši kot šestnajstinka sekunde.

SLIKA 11. Hip zatem, ko se je kapljica zlila z vodno gladino

Plavajoča kapljica lahko razpade na manjše tudi takrat, ko se vanjo zaleti druga. Če je sunek manj silovit, se kapljici odbijeta, največkrat pa se združita v večjo, kot kažeta sliki 12. in 13. Način druževanja kapljic je najbrž podoben kot pri zlitju kapljice z gladino pod njo, kar kaže tudi kratek čas združevanja. S filmskega posnetka sem razbral enako zgornjo mejo za ta čas, kot v obeh prejšnjih primerih.



SLIKA 12, 13. Združevanje manjših plavajočih kapljic v večje



b) POTOPLJENE KAPLJICE

Kapljice se pod posebnimi pogoji lahko potope pod vodno gladino, pri čemer kapljico obkroža tanka zračna plast. Takšne kapljice so torej nekakšni "antimehurčki". Pri mehurčkih je kapljevina okrog plina, pri potopljenih kapljicah pa plin obkroža kapljevino.

Za opazovanje je primerna ista stisljiva posodica kot za opazovanje plavajočih kapljic. Posodico dvignemo za centimeter nad površino vode, jo napolnimo z vodo z dodatkom detergenta in jo stisnemo. Če ne stisnemo niti preveč niti premalo, se oblikuje kapljica, ki se potopi pod vodno gladino. Slike 14 do 17 kažejo, kako kapljica nastane.

Ker kapljica kmalu zatem, ko se dotakne površja, poči, dodamo vodi, ki jo natakamo iz stisljive posodice, malo soli in tako povečamo gostoto kapljic. Da kapljica ne pade na dno, kjer bi njen ovoj prav tako počil, pa damo na dno čaše žličko medu. Z difuzijo nastane plast z neenakomerno gostoto, ki deluje kot nekakšna mehka podlaga. Kapljica se od nje nekajkrat odbije in nato obsedi,

Za čudo pa se takšna kapljica po nekaj minutah spet dvigne. Pojasnilo najdemo v dejstvu, da vsebuje voda raztopljen zrak. Iz vode se ga nekaj izloči, tako da se površinska plast odebeli. Ko se povprečna gostota kapljice z zrakom izenači z gostoto okolišnje kapljevine, se kapljica dvigne. Najdelj se kapljice obdrže na dnu, če jih potopimo v prekuhano vodo, v kateri je malo raztopljenega zraka, najmanj pa, če jih potopimo v kozarec z radensko.

V primeru, da kapljico naredimo v steklenici, jo lahko obdržimo dlje časa. Če se hoče kapljica vzdigniti, pritisnemo na zamašek in tako stisnemo zrak, ki jo obkroža. S tem ji povečamo povprečno gostoto, tako da se začne spet spuščati, podobno kot Kartezijev plavač.

Franci Demšar

Povzeto iz diplomskega dela (1982) na VTOZD, Oddelek za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo Univerze E. Kardelja, Ljubljana.

SLIKE 14 do 17. Nastajanje potopljene kapljice

PISMA BRALCEV

Učenci, zbrani v matematičnem krožku na osnovni šoli Velika Poljana, se vam oglašamo prvič.

Na naši šoli deluje matematičen krožek redno že drugo leto. V tem času smo dosegli lepe uspehe na tekmovanjih.

Nimamo dosti gradiva za poglabljanje matematičnega znanja, zato te prosimo, da svetuješ

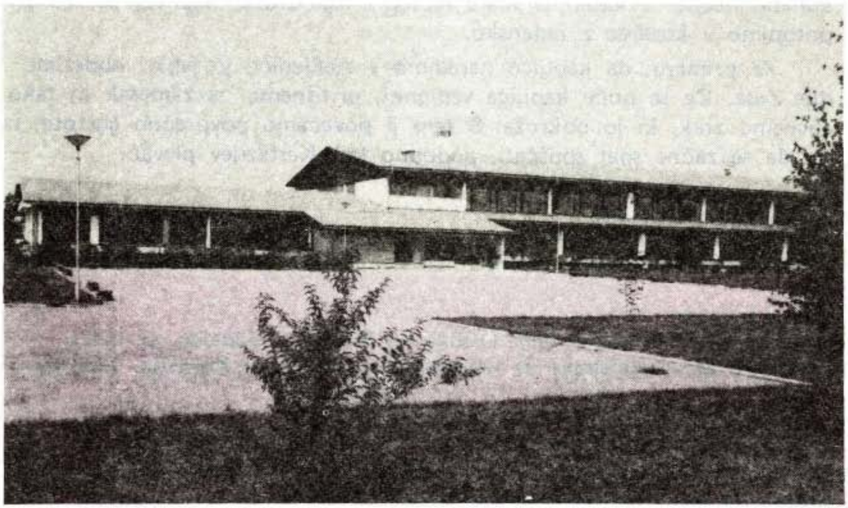
- od kod naj ta gradiva dobimo, iz katerih revij ali knjig in kje naj jih naročimo?

- radi bi tudi izvedeli kaj več o življenjepisih znanih matematikov. Ne vemo od kod zvedeti kaj več o tem.

Radi bi torej, da nam pomagaš in svetuješ pri našem delu.

Presek tudi redno prebiramo in izvemo dosti zanimivega.

Lepo te pozdravljamo!



Sporočate nam o uspešnem delovanju vašega matematičnega krožka. Zanimalo nas bi, ali krožek vodite sami ali vam pri tem pomaga vaš učitelj matematike. Poleg pisma smo veseli tudi vaših uspehov na tekmovanjih. Knjig in revij, ki so primerne za vas, je dandanes pri nas in v svetu zelo veliko. Poleg Preseka objavlja naloge in druge zanimivosti iz matematike še Proteus, ki ga izdaja Slovensko prirodoslovno društvo, Ljubljana, Novi trg 4, Matematički list za učenike osnovnih škola (Društvo matematičara i fizičara SR Srbije, Beograd, Knez Mihailova 35), Numerus : popularno matematičko spisanie za učenici na osnovnoto učiliste (Društvo matematičara NRM, Pedagoška akademija Kliment Ohridski, Partizanski odredi b.b., Skopje), Mladi matematičar (Gimnazija Valjevo) in Matematičko-fizički list (Društvo matematičara i fizičara SRH, Zagreb, pp 258).

Med knjigami pa vam priporočamo nekatere brošure, ki so izšle v Presekovi knjižnici (glejte seznam v Preseku), nekatere knjige iz Knjižnice Sigma (Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 61111 Ljubljana, p.p. 6): Vidav I., Rešeni in nerešeni problemi matematike; Vidav I., števila in matematične teorije; Prijatelj N., Osnove matematične logike, 1. del, ter knjige iz zbirke Matematička biblioteka (Školska knjiga, Zagreb). Če poznate kak svetovni jezik, vam bomo lahko postregli še z mnogimi naslovi revij in knjig. Tudi domačih knjig bi lahko dobili še nekaj deset.

Sprašujete nas tudi, kje bi lahko izvedeli kaj več o življenjepisih znanih matematikov. Nekaj smo o tem pisali tudi že v Preseku. Pri našem društvu lahko dobite tudi starejše številke Preseka. Katere številke so objavile zaželjene prispevke, lahko ugotovite tudi sami po brošuri Desetletno kazalo Preseka, ki jo imajo na vsaki šoli. V lanski peti številki, ki se imenuje Presekov koledar, so bili objavljeni krajši življenjepisi štirih znamenitih slovenskih matematikov. V Knjižnici Sigma smo prevedli in izdali knjigo Kratka zgodovina matematike. Večina astronomov in mnogi fiziki so se veliko ukvarjali tudi z matematiko. V isti zbirki sta letos izšli še Kratka zgodovina astronomije in Kratka zgodovina fizike. Ob stoletnici rojstva največjega slovenskega matematika je profesor dr. Ivan Vidav izdal knjigo o Josipu Plemlju. Pri SLovenski akademiji znanosti in umetnosti pa so izšle že tri knjige prof. Jožeta Povšiča: Biografije in bibliografije Jurija Vege, Franca Močnika in Franca Hočevarja. Isti avtor je pred kratkim pri Založbi Obzorja izdal drobno brošuro o Juriju Vegi, novinar Sandi Sitar pa dve knjigi o istem matematiku, prvo pri Mladinski knjigi in drugo pri Partizanski knjigi v zbirki Znameniti Slovenci. Vse te knjige lahko dobite pri našem društvu z 2o% popustom, ki velja za člane društva in naročnike Preseka.

Ko boste prebrali te knjige, vam bomo lahko postregli še z drugimi.

Lepe pozdrave in veliko užitkov pri branju domače literature.

Ciril Velkovrh

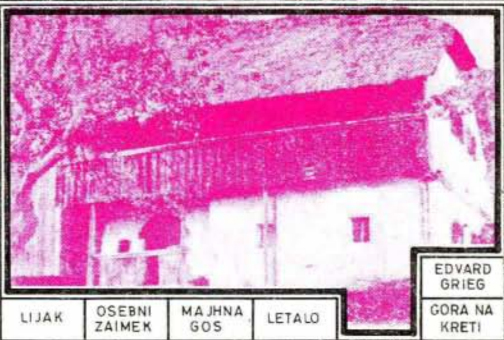

LOGARITHMISCHE, TRIGONOMETRISCHE, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete TAFELN UND FORMELN.

Herausgegeben von GEORG VEGA, Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem K. K. zweyten Feld-Artillerie-Regiment.

WIEN,

1783-1983

200



					LIJAK	OSEBNI ZAIMEK	MAJHNA GOS	LETALO		EDVARD GRIEG / GORA NA KRETI
	POLETNA SLAŠČICA	CEVOVOD ZA PLIN / ODISEJEVA ŽENA								
PRŠILO						BLIŠČ				
VEČJI RIBIŠKI ČOLN					20. IN 3. ČRKA ABECEDE	PTICA PEVKA / MERE ZA ZLATO				AVSTRIJ. POROČEV. AGENCIJA
ANICA				GOSLI / VAS J OD LJUBLJANE						GOZDNA ŽIVAL / OBRI
ZNAMENJE ZODIAKA							ČLOVEK Z VELIKIMI OČMI	M. IME (VANČ) / GERMAN TITOV		
RUSKO M. IME					V ENEM KONCU ZDRUŽENI VEJI / KATRAN					
TRAVNIK OB VODI				DEL PARTITURE / LIDIJA OSTERC					NAUK O ATOMIH / PAVEL ŠIVIC	
NAŠIVEK NA UNIFORMI								DIAMETER		
IME SLOV. SKLADAT. JENKA								SPOJ PRI ŠIVANJU		

STAVIL: AVLE EGORC	TEKOČA SNOV V NOTRANJ. ZEMLJE	SREBRO	HRVAT.-OGRSKI KRALJ (MATIJA)	BORIŠČE	ZNAMENJE ZODIAKA	TELIČEK	VODNI VRTINEC			
E M.IME ARIOS) / ERIN OŽ										
		POBOČJE / SILOVIT VIHAR							PANOGA MATEMAT.	UP
							M. IME / TRENJE			
RIJA TAL.) / NJENJE					GRŠKA ČRKA	IZLET V GORE / DELIBESOVA OPERA				
	KRAPINA / POŠKODBA KOSTI			SOL KLOROVODIKOVE KISLINE						
			ALUMINIJ	IME ŠPAN. IGRALKE MONTIEL						
				IVAN KRILOV / DEL KRIVULJE			JANEZ MENART / ZIM. LETOV. V ŠVICI	....		GLAVNO MESTO MAROKA
		ENAKI ČRKI / KONEC MOLITVE			PRIPADNIK MAVROV / KRAJ JV OD SARAJEVA					
			LAŽIA GLAS. OBLIKA / JELENJE USNJE							
						OGIBANJE / UMBERTO NOBILE				
				GLAVNO MESTO ZAMBIJE						
	NATHANIEL HAWTHORNE			1				ALJA TKAČEVA		

TEKMOVANJA - NALOGE

24. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letos se je prvič po nekaj letih drugačne prakse zgodilo, da tekmovalna komisija ob razglasitvi rezultatov republiškega tekmovanja ni izbrala članov ekipe za zvezno tekmovanje. Tega ni mogla storiti, saj ni bilo znano, kje bo tekmovanje. Zaostrene gospodarske razmere so tako posegle tudi na to področje: oddaljenost kraja tekmovanja in dolžina bivanja tam vplivata na velikost stroškov, kar narekuje število članov ekipe. Šele sredi aprila je organizator potrdil, da bo 24. zvezno tekmovanje v *Prištini*, vendar bo trajalo le dva dni: 23. in 24. aprila. Na podlagi tega je tekmovalna komisija izbrala v ekipo deset najbolje uvrščenih dijakov. Kar trije od povabljenih četrtošolcev se tekmovanja iz različnih vzrokov niso mogli udeležiti in tako je bilo naposled v ekipi naslednjih deset mladih upov:

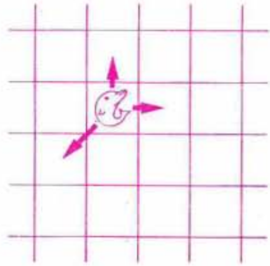
1. razred: *Jože FARČIČ*, SNMKSŠ Postojna;
2. razred: *Toni BIASIZZO*, SNMKSŠ Postojna, *Roman DRNOVŠEK* in *Dušan GORŠE*, oba SNŠ Ljubljana;
3. razred: *Vlado ROBAR* in *Jure ŠKARABOT*, oba Gimnazija M. Zidanška, Maribor, *Uroš SELJAK* in *Miloš ŽEFRAN*, oba SŠZD Nova Gorica;
4. razred: *Marjeta CEDILNIK*, SNŠ Ljubljana, *Dean MOZETIČ*, SPNMŠ Koper.

Spremljevalec ekipe je bil letos *Bojan MAGAJNA*, član zvezne tekmovalne komisije pa *Gorazd LEŠNJAK*. Pred odhodom so se dijaki zbrali na enodnevnih pripravah v Ljubljani. Lani je bilo drugače, saj so se tekmovalci pripravljali teden dni. V soboto zjutraj so z letalom odpotovali v Prištino in se takoj po prihodu odpravili na izlet po Kosovu, ki ga je priredilo tamkajšnje Društvo matematikov, fizikov in astronomov. Ogledali so si naravno znamenitost podzemeljsko jamo *Gadimlje*, turistični center *Brezovico* in značilno staro arhitekturo *Prizrena*. V tem času je tekmovalna komisija izbrala naloge za naslednji dan. Naporno delo se je zavleklo pozno v noč. Da bi bil izbor ekipe za olimpiado lažji, so bile naloge za 3. in 4. razred enake.

1. razred

1) Določite vsa naravna števila n z lastnostjo: števili n^3 in n^4 lahko zapišemo tako, da vsako od cifer 0, 1, 2, ..., 9 uporabimo natanko enkrat!
2) Shemo s 1983 vrsticami formiramo na sledeč način: v prvi vrstici so v tem vrstnem redu zapisana števila 1, 9, 8, 3; nato pod vsako število zapišemo vsoto ostalih števil te vrstice, zmanjšano za to število. Katero število se nahaja na prvem mestu 1983. vrstice?
3) Dan je trikotnik ABC, v katerem je $\overline{CA} = \overline{CB}$ in $\sphericalangle ACB = 80^\circ$. Naj bo M takšna točka v notranjosti tega trikotnika, da je $\sphericalangle MBA = 30^\circ$ in $\sphericalangle MAB = 10^\circ$. Izračunaj $\sphericalangle AMC$!

4) "Delfin" imenujemo figuro, ki se na šahovski plošči v vsaki potezi premakne: ali za eno polje v desno ali za eno polje navzgor ali pa za eno polje diagonalno na levo navzdol (glej sliko!). Ali lahko "delfin", ki krene na pot iz levega spodnjega polja plošče, pride spet na to polje tako, da je pred tem prehodil vsako polje šahovske plošče natanko enkrat?



II. razred

1) Če so x, y in z takšna pozitivna realna števila, da je

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

dokažite, da je

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geqq 8$$

2) Dokažite, da za vsako realno število $x \geqq 1/2$ obstaja takšno celo število n, da je

$$|x-n^2| \leqq \sqrt{x-\frac{1}{4}}$$

3) Dan je pravokotnik $ABCD$. Na manjšem loku AB krožnice, očrtane pravokotniku $ABCD$, izberemo poljubno točko M. Skoznjo potegnemo vzporednici stranicam pravokotnika. Ena teh premic seka stranici AB in CD v tem vrstnem redu v točkah P in R, druga pa premici BC in DA v tem vrstnem redu v točkah Q in S. Dokažite, da sta premici PQ in RS medsebojno pravokotni in da se sekata na diagonali pravokotnika $ABCD$!

4) Pravokotnik velikosti $1 \times n$ je sestavljen iz n kvadratov s stranico 1 ($n \geqq 4$), po vrsti oštevilčenih od 1 do n. Na poljih n, $n-1$ in $n-2$ stoji po en žeton. V igri igralca izmenoma premikata po en žeton na poljubno prazno polje z manjšo zaporedno številko. Igro izgubi tisti, ki je na vrsti, pa ne more odigrati nobene poteze. Dokažite, da lahko prvi igralec tako igra, da zanesljivo zmaga!

III. in IV. razred

1) Naj bosta p in q kompleksni števili. Dokažite: koreni enačbe $x^2+px+q=0$ imajo absolutno vrednost enako 1 tedaj in samo tedaj, če je $|p| \leqq 2$, $|q|=1$ in je p^2/q nenegativno realno število!

2) Funkcija f je definirana na množici celih števil in zadošča pogoju:

$$f(x)=\begin{cases} x-10, & x>100 \\ f(f(x+11)), & x \leqq 100 \end{cases}$$

Dokažite, da je za $x \leqq 100$: $f(x)=91$

3) Naj bo P takšna točka v notranjosti trikotnika ABC, da je $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$, M in L pa nožišči pravokotnic iz točke P na stranici AC oziroma BC. Če je D središče stranice AB, dokažite, da je $\overline{DL}=\overline{DM}$!

4) Zaporedje naravnih števil $\{x_n\}$ je definirano takole:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = [\frac{3}{2} x_n] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dokažite, da je v zaporedju $\{x_n\}$ neskončno mnogo lihih in neskončno mnogo sodih števil! ($[x]$ je največje celo število, ki ni večje od x)

S temi nalogami se je v nedeljo, 24. aprila, od 9^h do 13^h ukvarjalo kar 109 dijakov iz vse Jugoslavije. Po tekmovanju so si tekmovalci ogledali Prištino, tekmovalna komisija, okrepljena s spremljevalci ekip, pa se je lotila pregledovanja rešitev. Prvi rezultati so bili znani okrog 18^h in so presenetili marsikaterega dijaka, saj so bile očitne velike razlike med pričakovanimi in objavljenimi uvrstitvami. Razlogi so bili isti kot že večkrat doslej: predvsem časovna stiska, neusklajeni kriteriji, površno opravljeni pregledi, nepoznavanje jezikov drugih narodov, ... Pri tem so bili oškodovani tudi nekateri naši tekmovalci, nekomu je na primer komisija ob ponovnem pregledu priznala še 35 točk (od 100 možnih). Pritožb je bilo zelo veliko in kljub naporom komisije le-ta do 22^h ni uspela vseh temeljito obravnavati. Zaradi pritožb se je tudi svečanost ob razglasitvi rezultatov zavlekla pozno v noč. Naši dijaki na podelitev nagrad in pohval niso mogli čakati: še pred polnočjo jih je odpeljal vlak proti domu, kamor so prispeli naslednji večer. Več časa so potrebovali organizatorji: priznanja, pohvale in nagrade so na posebno prošnjo poslali šele junija ...

Naši dijaki so se v Prištini odlično odrezali: ekipno so se uvrstili takoj za ekipo Srbije. V opombo: njihova ekipa je štela 24 dijakov, ekipa Bosne in Hercegovine pa kar 28 srednješolcev. Le iz Črne gore in s Kosova je bilo manj dijakov.

Tako je za osvojeno:
2.-3. mesto v 1. razredu *Jože FABČIČ* prejel II. nagrado;
2. mesto v 2. razredu *Roman DRNOVŠEK* prejel II. nagrado;
2.-3. mesto v 3. razredu *Vlado ROBAR* prejel III. nagrado;
5.-9. mesto v 4. razredu *Dean MOZETIČ* prejel pohvalo.

Moramo zapisati, da so tudi vsem ostalim pohvale ušle le za las! V ekipo za olimpiado, ki je bila letos od 1. do 12. julija v *Parizu*, so se uvrstili trije drugošolci (med njimi *Roman Drnovšek*), en tretješolec in dva četrtošolca. Do takšnega izbora je prišlo zaradi zelo slabih rezultatov (glede na največje možno število točk) v 3. in 4. razredu, kar je predvsem odraz neprimerno izbranih nalog za to skupino in pa zaradi misli, da je na olimpiadi važneje sodelovati kot pa za vsako ceno doseči čimboljši rezultat.

Za konec še nekaj vtisov s Kosova: življenje teče spet normalno in tudi revščine ni opaziti. Priština, gospodarsko in politično središče Kosova, deluje kot mlado mesto. Po eni strani zato, ker je v mestu mnogo novih razkošnih palač, ki so v ostrem nasprotju s starimi deli mesta, predvsem pa zaradi velikega števila mladih. V mestu je namreč veliko srednješolcev in študentov. Zvečer mesto zaživi. Tedaj središče mesta zapro za promet, glavna ulica pa postane prava promenada mladih, ki jo napolnijo tako rekoč do zadnjega kotička.

Gorazd Lešnjak, Dean Mozetič

7. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ RAČUNALNIŠTVA

Letošnje tekmovanje, ki je bilo že sedmo republiško tekmovanje srednješolcev iz računalništva in informatike, je organiziralo Slovensko društvo Informatika v sodelovanju s Fakulteto za elektrotehniko, Institutom Jožef Stefan in Društvom matematikov, fizikov in astronomov SRS. Tekmovanje je bilo v soboto, 16. aprila 1983 na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani.

Kvaliteta znanja, ki jo kažejo mladi tekmovalci (nekateri celo iz osnovnih šol), nam je narekovala, da smo že pred tekmovanjem razdelili tekmovalce v tri tekmovalne skupine. Skupini po prvem in po drugem letu pouka računalništva sta ostali v bistvu nespremenjeni, v tretji skupini, ki jo imenujemo skupina za izkušenejše tekmovalce, pa so tekmovali tekmovalci, ki se z računalništvom ukvarjajo že več let. Vse spremembe razvrščanja in prehajanja tekmovalcev med tekmovalnimi skupinami bodo objavljene v eni od naslednjih številk Preseka skupaj z razpisom za osmo republiško tekmovanje. Režim tekmovanja ostaja nespremenjen, kar pomeni, da imajo tekmovalci vseh treh skupin za reševanje nalog na voljo po dve uri in pol časa in da pri tem smejo uporabljati poljubno literaturo. Žepni kalkulatorji so dovoljeni. Uradni programski jeziki tekmovanja so pascal, fortran, basic in PL/1.

Naloge so bile takšne:

a) za tekmovalce po enem letu pouka računalništva

1. Zaporedje A je definirano takole: A(0) = a, A(k+1) pa izračunamo tako, da A(k) + 4 obrnemo vrstni red cifer v desetiškem zapisu. Primer za a = 4:

4, 8, 21, 52, 65, 96, 1, 5, 9, 31, 53, 75, 97, 101, 501, ...

Napiši PROGRAM, ki izračuna kateri člen zaporedja je enak 1 (v našem primeru izračuna torej k = 6). Program prebere podatek a.

2. Črnobela fotografija je predstavljena kot dvodimenzionalna tabela 512 x 512 točk, pri čemer je svetlost v vsaki točki celoštevilska vrednost med 0 in 127. Radi bi spremenili sliko tako, da ne bi imela poltonov (sivih tonov), in to po možnosti tako, da bo polovica točk imela vrednost 0, polovica pa vrednost 127. Napiši DEL PROGRAMA, ki najprej poišče mejno

vrednost pod katero bodo točke črne, nato vrednost, nad katero bodo bele, nato pa sliko ustrezno obdela.

3. Kaj izpiše program? Odgovor primerno utemelji.

```
program zogica(output);
  const xmax = 31;
        ymax = 23;
  var   x, y: integer;
        dx, dy: integer;
        j: integer;
  begin
    x := 1; y := 1; dx := 1; dy := 1; j := 1;
    repeat
      x := x + dx; y := y + dy;
      if (x < 1) or (x > xmax) then
        begin dx := -dx; x := x + dx; end;
      if (y < 1) or (y > ymax) then
        begin dy := -dy; y := y + dy; end;
      j := j + 1;
    until (x = 1) and (y = 1) and (dx = 1) and (dy = 1);
    writeln(j);
  end.
```

```
C     program Zogica
        integer Xmax, Ymax
        integer x, y, dx, dy, j
        Xmax = 31
        Ymax = 23
        x = 1
        y = 1
        dx = 1
        dy = 1
        j = 1
1       continue
          x = x + dx
          y = y + dy
          if ((1.le.x).and.(x.le.Xmax)) goto 2
            dx = -dx
            x = x + dx
2         continue
          if ((1.le.y).and.(y.le.Ymax)) goto 3
            dy = -dy
            y = y + dy
3         continue
          j = j + 1
        if ((x.ne.1).or.(y.ne.1).or.
     -      (dx.ne.1).or.(dy.ne.1)) goto 1
        write (3,4) j
4        format(I5)
      end
```

4. V nekem skladišču uporabljajo avtomatske viličarje. Poti viličarjev so narisane na tla z enakomerno debelo črno črto. Viličar ima na spodnji strani dva optična senzorja. Razdalja med senzorjema je manjša od debeline črte. Viličarja seveda krmili računalnik, ki ima na voljo funkcijo SENZOR (stran), ki vrne vrednost 0, če senzor ne vidi črte, in vrednost 1, če jo vidi. Argument funkcije (stran) ima lahko samo dve vrednosti: L za levi in D za desni senzor. Razen tega ima računalnik na voljo tudi podprogram ZAVIJ (stran), ki pove viličarju, naj zavije na levo, desno ali naj gre naravnost. Argument (stran) ima tu lahko vrednosti L, D ali N.

A. Napiši POSTOPEK, s katerim bi vodil viličarja po črti.

B. Napiši POSTOPEK, s katerim bi viličar izbral levi (ali desni) krak razvejišča črt v obliki črke Y.

b) za tekmovalce po dveh letih pouka računalništva

1. Napiši PROGRAM, ki izračuna vsa taka petmestna števila n, za katera velja, da nastopajo v desetiškem zapisu števil n in 2*n vse desetiške cifre, vsaka natanko enkrat.

Primer:

n	2*n
09327	18654
20679	41358
48651	97302

2. V nekem labirintu so vsa razpotja označena s pozitivnimi celimi števili (različna razpotja so različno oštevilčena). Sprehod po labirintu smo začeli na nekem razpotju in našli pot do končnega razpotja. Pri tem smo si vestno zapisovali vse številke razpotij, ki smo jih prehodili. Napiši PROGRAM, ki iz takega opisa sprehoda izračuna opis poti, kjer ni več nepotrebnih zank (torej takšnih delov poti, ki se začnejo in končajo na istem razpotju).

3. Imamo robota, ki nadzira polnjenje sodov v neki polnilnici. V polnilnici je N polnilnih mest. Robot mora na polnilno mesto podstaviti sod, vključiti polnjenje, izključiti polnje-

nje in sod odstaviti. Polnjenje sodov gre z neenakomerno hitrostjo, vendar je hitrost navzgor omejena. Napiši POSTOPEK za vodenje robota. Pri tem lahko uporabiš naslednje operacije (povsod je i med 1 in N):

ODPRI(i)	odpre dotok v sod na polnilnem mestu i; izvede se takoj;
ZAPRI(i)	zapre dotok v sod na polnilnem mestu i; izvede se takoj;
ODSTAVI(i)	odstavi sod iz polnilnega mesta i; operacija traja tri časovne enote in med to operacijo robot ne more početi ničesar drugega;
PODSTAVI(i)	podstavi sod na polnilnem mestu i; operacija traja dve časovni enoti in med to operacijo robot ne more početi ničesar drugega;
KOLIKO(i)	pove, čez najmanj koliko časovnih enot bo sod na polnilnem mestu i poln; če vrne vrednost 0, pomeni, da je sod poln, če vrne vrednost -1, na polnilnem mestu ni soda; odgovor dobimo takoj.

Robota je treba voditi tako, da se nikoli ne bo zgodilo, da bi polnili že poln sod, in seveda tudi tako, da izkoristimo polnilna mesta kar se da optimalno. Število polnilnih mest in minimalni čas polnjenja praznega soda nista znana vnaprej.

4. Kaj počne program za pozitivne podatke a in b? Odgovor primerno utemelji!

```
program Puzzle(input,output);
  var a, b: integer;
  function Mac(a, b: integer): integer;
    var x, c: integer;
    begin (*Mac*)
      x := 1; c := 0;
      while (a <> 0) or (b <> 0) do
        begin
          if odd(a+b) then c := c + x;
          x := 2*x; a := a div 2; b := b div 2;
        end;
      Mac := c;
    end (*Mac*);
  begin (*Puzzle*)
    readln(a,b);
    a := Mac(a,b); b := Mac(a,b); a := Mac(b,a);
    writeln(a,b);
  end (*Puzzle*).
```

```
C     program Puzzle
        integer a, b
        read (2,1) a, b
1       format (2I10)
        a = Mac(a,b)
```

```
      b = Mac(a,b)
      a = Mac(b,a)
      write (3,2) a, b
2     format(2I10)
      end
      function Mac(u, v)
      integer u, v, c, a, b, x, s
      a = u
      b = v
      x = 1
      c = 0
1     if ((a.eq.0) .and.  (b.eq.0)) goto 2
        s = (a+b) - (a+b)/2*2
        if (s.ne.0) c = c + x
        x = 2 * x
        a = a / 2
        b = b / 2
      goto 1
2     continue
      Mac = c
      return
      end
```

<u>c) za tekmovalce tretje skupine</u>

1. Če je M celo pozitivno število, je 1/M periodično decimalno število. Napiši PROGRAM, ki izračuna za poljuben M med 1 in 1000 neperiodični in periodični del decimalnega števila.

Primer:
   1/7   = 0.(142857)
   1/100 = 0.01(0)
   1/22 = 0.0(45)
(število v oklepaju se periodično ponavlja).

2. Imamo tabelo velikosti N x N, vsak element tabele pa ima lahko samo vrednosti 0 ali 1. V tej tabeli je z enicami "narisana" slika, ki je sestavljena iz več delov. Napiši del PROGRAMA, ki dobi kot podatek položaj neke točke na sliki in zbriše s slike vse, kar je s podano točko povezano. Točka je povezana s štirimi (in ne z osmimi) sosedi. Slike v tabeli so sestavljene pretežno iz črt in imajo malo ali nič pobarvanih površin.

Primer: (tabela 10 x 10)

```
        Originalna slika                      Rezultat
          1234567890                            1234567890
        1 0000---0--                          1 -------0--
        2 0--0-0-000                          2 -------000
        3 0-00-0---0  Koordinati              3 ---------0
        4 000--00--0  začetne točke:          4 ---------0
        5 0-00--00-0  (3,4)                   5 ---------0
        6 -0-0---0-0                          6 -0-------0
        7 -0-00000-0                          7 -0-------0
        8 000-----00                          8 000-----00
        9 0-0000000-                          9 0-0000000-
        0 0--0-0-0--                          0 0--0-0-0--
```

3. Zelo dolga vrstica teksta je bila v več izvodih natisnjena na list papirja. Ločeno smo našli več kopij tega lista, vendar so bile vse raztrgane na drobne kosce. Opiši POSTOPEK, po katerem bi iz teh informacij lahko rekonstruirali originalno vrstico

A. ob upoštevanju, da noben košček ni bil izgubljen in da so znaki na pretrganih mestih enolično čitljivi;

B. v primeru, da pogoj A ni izpolnjen.

Postopek naj izračuna vsaj eno rešitev, če jih je več. Število različnih kopij, ki smo jih našli, je poljubno (najmanj dve). Kopije smo našli tako, da zagotovo vemo, kateri koščki spadajo k eni kopiji.

4. Na neki računalnik je priključenih N tračnih enot (ali česa drugega). V tem računalniku se (navidezno) hkrati izvaja več programov. Kadar želi program uporabljati tračno enoto, jo mora priključiti. Priključi jo tako, da pokliče podprogram Priključi, ko pa tračne enote ne potrebuje več, pokliče podprogram Sprosti. Oba podprograma sta del operacijskega sistema in zanju je poskrbljeno, da se vedno izvedeta od začetka do konca brez prekinitev. Podprograma uporabljata skupno globalno spremenljivko (na nivoju sistema) št_enot. Podprograma delujeta takole:

```
Priključi:
  če je št_enot >= n potem
    postavi program, ki nas je poklical, v čakalno vrsto
  sicer
    št_enot povečaj za 1;
    povej programu, ki nas je poklical, da je
      priključen na enoto št_enot.
```

Sprosti:
  št_enot zmanjšaj za 1;
  če je v čakalni vrsti kakšen program, mu dodeli pravkar
    sproščeno enoto in ga poženi.

A. Ali lahko pokažeš situacijo, v kateri nas ta način dodeljevanja enot spravi v neprijeten položaj? Ali imaš predlog za izboljšavo načina dodeljevanja enot?

B. Če bi več računalniških sistemov uporabljalo istih N enot, bi lahko na vsakem za dodeljevanje enot uporabljali podprograma Priključi in Sprosti, le spremenljivka št_enot bi morala biti skupna vsem programom (bila bi npr. v skupnem delu spomina). Ali bi to delovalo? Kje je problem?

K tekmovanju se je prijavilo 160 učencev iz 25 šol, udeležilo pa se ga je 137 učencev iz 23 šol, kar pa je za dobro tretjino več kot prejšnja leta. Pri spopadu s tekmovalnimi nalogami so bili najuspešnejši naslednji tekmovalci:

a) prve skupine

nagrada	št. točk	tekmovalec	šola
I.	94	Martin Juvan	Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad
I.	92	Uroš Habič	Srednja šola za računalništvo Ljubljana Vič
I.	91	Marko Pirc	Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad
II.	88	Roman Drnovšek	Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad
II.	82	Izidor Seliškar	Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad
II.	81	Marko Pokorn	Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad
III.	79	Stanko Gruden	Šolski center Idrija
III.	80	Viljem Križman	Srednja družboslovna šola, Sežana
III.	78	Matija Drobnič	Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad

b) druge skupine

nagrada	št. točk	tekmovalec šola
I.	90	Matjaž Kovačec Gimnazija Miloša Zidanška, Maribor
I.	89	Tomaž Slivnik OŠ Prežihov Voranc in Računalniški krožek Iskra, Kranj
II.	77	Roman Šoper Gimnazija Novo mesto
II.	74	Tomaž Gornik Gimnazija Miloša Zidanška, Maribor
III.	70	Dean Mozetič Srednja naravoslovno-matematična šola, Koper
III.	64	Borut Zalar Gimnazija Novo mesto

c) tretje skupine

nagrada	št. točk	tekmovalec šola
I.	82	Ivan Pepelnjak Srednja naravoslovna šola Ljubljana Bežigrad
II.	77	Mitja Bensa Gimnazija Nova Gorica
III.	74	Tomaž Čebašek Računalniški krožek Iskra, Kranj

Tudi letošnje tekmovanje so finančno podprle organizacije združenega dela, ki so zainteresirane za razvoj slovenskega računalništva. Ne smemo pozabiti zahvale DO Iskra-Delti, Intertradu TOZD Zastopstvo IBM in TOZD OP ter Slovenijalesu - Tovarni meril Slovenj Gradec, ki so prispevali sredstva v nagradni sklad. Poleg nagrad najbolje uvrščenim tekmovalcem je vsak tekmovalec prejel v spomin na tekmovanje nekaj novih slovenskih knjig s področja računalništva ter Bilten tekmovanja. Prav tako se zahvaljujemo tudi vsem, ki so pomagali pri organizacijskem delu, izboru in popravljanju nalog.

Vzporedno s tekmovanjem je za spremljevalce tekmovalcev, učitelje računalništva ter za strokovnjake s področja računalništva potekala okrogla miza z naslovom AKCIJA ZA ZAGOTOVITEV RACUNALNIŠKE OPREME SREDNJEŠOLCEM, ki jo je vodil vodja Odseka za računalništvo in informatiko na Institutu Jožef Stefan dr. Marjan Špegel. Okrogla miza je obravnavala eno najbolj ključnih in kritičnih vprašanj razvoja naše celotne družbe. Že dvanajst let namreč načrtno skrbimo za strokovno usposabljanje učiteljev računalništva in skrajni čas je že, da jim za pouk preskrbimo tudi primerno računalniško opremo.

Iztok Tvrdy

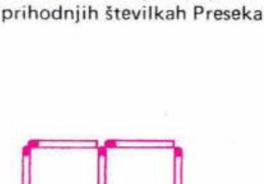
KRATKOČASNE VŽIGALICE

V tretji številki devetga letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

20. Iz dvanajstih vžigalic sestavi tale vzorec:

a) Odstrani dve vžigalici, da dobiš dva kvadrata!
b) Prestavi tri vžigalice, da dobiš tri enake kvadrate!
c) Prestavi štiri vžigalice, da dobiš tri enake kvadrate!
d) Prestavi dve vžigalici, da dobiš sedem kvadratov!
e) Prestavi štiri vžigalice, da dobiš deset kvadratov!

21. Iz 24 vžigalic sestavi tale vzorec:



a) Prestavi 12 vžigalic, da dobiš dva enaka kvadrata!
b) Odstrani 4 vžigalice, da dobiš 5 kvadratov, enega večjega in 4 manjše!
c) Odstrani 4, 6 ali 8 vžigalic, da dobiš 5 enakih kvadratov!
d) Odstrani 8 vžigalic, da dobi6 4 enake kvadrate!
e) Odstrani 6 vžigalic, da dobiš 3 kvadrate!
f) Odstrani 6 vžigalic, da ostaneta 2 kvadrata!
g) Odstrani 8 vžigalic, da dobiš 3 kvadrate!
h) Odstrani 6 vžigalic, da ostaneta 2 kvadrata in 4 nepravilni šesterekotniki!

19. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Število tekmovalcev vsako leto narašča, tako je bilo letos prijavljenih 85 sedmošolcev in 250 osmošolcev (to so tisti učenci, ki so na občinskem tekmovanju dosegli 20 in več točk od 25 možnih). Tekmovanje je bilo v soboto, 14. maja 1983, v petih regijah Slovenije.

Enajst članska komisija, ki ji je predsedovala prof. Tereza Uran, je pripravila izbor nalog, korigirala naloge, določila kriterij za podelitev ZVP in izbrala ekipo za zvezno tekmovanje, ki je bilo letos v Kumrovcu. Vsi tekmovalci so prejeli Presekove značke.

Zlato Vegovo priznanje so zaslužili:

7. razred

I.-III. nagrada: *VINTAR Zarja*, R.Jakopič, Ljubljana, *PERKO Boris*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *ŽVANUT Breda*, D. Bordon, Koper;

FAJFAR Andrej, P. Voranc, Ljubljana, *KUHAR Mojca*, P. Voranc, Ljubljana, *SLIVNIK Tomaž*, P. Voranc, Ljubljana, *MAVER Jerica*, Solkan, *GREŠOVNIK Igor*, Neznanih talcev, Dravograd, *GOVEKAR Primož*, J. Mihevc, Idrija, *VOVK Edi*, F. S. Finžgar, Lesce, *TOMAŽEVIČ Aleš*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *SLUGA Boštjan*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *PAVLOVEC Damjan*, D. Bordon, Koper, *JAMNIK Borut*, Vojke Šmuc, Izola, *KRIŽMAN Marina*, E. Kardelj, Lucija, *TOMAŽIN Petra*, T. Tomšič, Ljubljana, *PETROVIČ Dušan*, F. Vrunč, Slovenj Gradec, *GORJAK Robert*, Ormož, *VOVK Tomaž*, P. Voranc, Ljubljana, *POGAČNIK Tadeja*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *POKORN Miran*, P. Kavčič, Škofja Loka, *BREŠAR Bojan*, V. Vlahović, Titovo Velenje, *PEHANI Špela*, P. Voranc, Ljubljana, *VRANIČ Andrej*, F. Vrunč, Slovenj Gradec, *OREŠIČ Tomaž*, B. Ilich, Maribor, *GOLOB Aleš*, Prule, Ljubljana, *JERAJ Robert*, L. Seljak, Kranj, *KLINAR Tomaž*, Ledina, Ljubljana, *MUSEK Kristijan*, M. Šušteršič, Ljubljana, *KUŠAR Miha*, Prule, Ljubljana, *KRAMAR Martina*, Solkan, *ROBNIK Marko*, R. Iršič, Mislinja, *DOLINŠEK Jernej*, Daković-Hecimović, Selnica ob Dravi, *LIPOVEC Rudi*, Osmih talcev, Logatec, *STRAH Matej*, T. Tomšič, Ljubljana, *SKOK Božo*, D. Bordon, Koper, *TEKAVEC Tomaž*, Bratov Mravljak, Titovo Velenje, *IVŠEK Gregor*, A. Aškerc, Rimske Toplice, *DRAME Andrej*, P. Šprajc-Jur, Žalec, *KOS Nataša*, M. Štrukelj, Nova Gorica, *GOMBOC Andreja*, E. Kardelj, M. Sobota, *NOVAK Jelka*, B. Ilich, Maribor, *LIPOVŠEK Marija*, T. Brejc, Kamnik, *FIDLER Barbara*, Bratje Dobrotinšek, Vojnik, *VLADKOVIĆ Sindi*, T. Čufar, Jesenice, *POLJANEC Marko*, S. Jenko, Kranj, *SMOLEJ Katarina*, Prof. dr. J. Plemelj, Bled

8. razred

I. nagrada: *JORDAN Vesna*, K. Rupena, Novo mesto;
II. nagrada: *VOVK Borut*, F. S. Finžgar, Lesce;
III. nagrada: *ROVAN Aljoša*, Bratov Ribar, Brežice, *KUZMA Bojan*, I. Novak-Očka, Ljubljana;

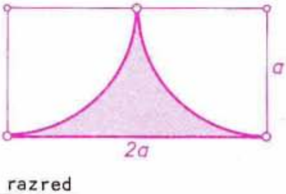
PFAJFAR Martina, A. Veluščček-Matevž, Kanal, *BAJC Jure*, Z. Runko, Ljubljana, *ZIDAR Peter*, B. Ziherl, Ljubljana, *MARTELJ Alenka*, Kranjska gora, *TURK Mateja*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *GROŠELJ Marta*, I. Novak-Očka, Ljubljana, *FILLI Marko*, D. Bordon, Koper, *ŠAJNA Mateja*, M. Štrukelj, Nova Gorica, *FUNA Igor*, A. Ukmar, Koper, *SUŠNIK Matej*, L. Seljak, Kranj, *KRANJEC Primož*, Ledina, Ljubljana, *STOPAR Marko*, D. Bordon, Koper, *GRUDEN Kristina*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *BLAZNIK Barbara*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *JEJČIČ Magdalena*, B. Kidrič, Ajdovščina, *BEVK Marija*, J. Broz Tito, Predoslje, *POMPE Uroš*, I. Cankar, Vrhnika, *FERJAN Matjaž*, A. T. Linhart, Radovljica, *BOGATAJ Tomo*, V. Vlahović, Ljubljana, *JARM Tomaž*, V. Vodnik, Ljubljana, *MALEJ Matevž*, D. Bordon, Koper, *DUKIČ Rasto*, M. Pečar, Ljubljana, *BERKOPEC Aleš*, M. Vrhovnik, Ljubljana, *NAJVIRT Dušanka*, Malečnik, Maribor, *KUKAR Matjaž*, P. Voranc, Ljubljana, *BRAČUN Franci*, J. Dalmatin, Krško, *HITI Andreja*, Notranjski odred, Cerknica, *KLEMENČIČ Rado*, I. Tavčar, Gorenja vas, *TRNOVŠEK Robert*, Bratov Juhart, Šempeter, *ČEBULAR Anica*, Šmarje pri Jelšah, *BERCE Matjaž*, R. Bordon, Koper, *BAUMGARTNER Tone*, A. T. Linhart, Radovljica, *PUHAN Janez*, Šlandrove brigade, Domžale, *ANASTASOV Peter*, Borovnica, *MARASPIN Miha*, D. Bordon, Koper, *ROZMAN Robert*, I. Cankar, Vrhnika, *JAKŠIČ Eva*, K. Odreda, Križe pri Tržiču, *ŠIRCA Simon*, Ledina, Ljubljana, *ŽITNIK Sašo*, Borovnica, *JOVANOVSKI Pavle*, Z. Runko, Ljubljana, *MILANIČ Srečko*, IX. korpus NOVOJ, Nova Gorica, *HITI Mojca*, P. Trubar, Laško, *CREVATIN Branko*, E. Kardelj, Lucija, Piran, *RENER Ksenija*, V. Šmuc, Izola, *UMEK Tomaž*, R. Bordon, Koper, *PRAPROTNIK Blaž*, A. T. Linhart, Radovljica, *GOGOLA Andrej*, R. Jakopič, Ljubljana, *ANTOLOVIČ Zoran*, B. Ribar, Brežice.

V ekipo, ki bo zastopala slovenske osnovnošolce na zveznem tekmovanju iz matematike, so bili izbrani: *Zarja VINTAR*, *Boris PERKO*, *Breda ŽVANUT* iz sedmega razreda in *Vesna JORDAN*, *Borut VOVK*, *Aljoša ROVAN*, *Bojan KUZMA*, *Martina PFAJFAR*, *Jure BAJC* in *Peter ZIDAR* iz osmega razreda.

NALOGE

7. razred

1) Velikosti kotov nekega štirikotnika so dane z izrazi: x, $x + 20^\circ$, $x + 30^\circ$, $x + 50^\circ$. Poišči x in dokaži, da je štirikotnik trapez!
2) Drugo, dopolnjeno izdajo knjige so prodajali po ceni, ki je 120% cene prve izdaje. Cena tretje izdaje je cena druge izdaje, zmanjšana za 20%. Ugotovi, v kateri izdaji je bila knjiga najcenejša. Za koliko procentov je bila cenejša od cene prve izdaje?
3) Nariši pravilni šestkotnik, če je dolžina krajše diagonale 4 cm! Zapiši po korakih načrt za delo!
4) Palico smo razdelili na tri dele tako, da je vsak naslednji del polovica prejšnjega. Ali lahko iz teh delov sestavimo trikotnik? Utemelji odgovor!
5)



Krivi črti na sliki sta krožna loka. Ploščina črtkanega lika meri $(32 - 8\pi)\,cm^2$. Izračunaj obseg črtkanega lika!

8. razred

1) Poišči števili u in v, ki ustrezata enačbi

$$9u^2 + 16v^2 + 6u - 24v + 10 = 0$$

2) V trimestnem številu z vsoto cifer 15 je desna cifra za 5 manjša od skrajne leve cifre. Če to število delimo s številom, ki ima cifre v obrnjenem vrstnem redu, dobimo količnik 2 in ostanek 228. Katero število je to?
3) V enakostraničnem trikotniku deli točka M stranico a na dva dela. Kolikšna je vsota razdalj točke M od drugih dveh stranic? Ali je vsota razdalj

odvisna od lege točke M na stranici a? Odgovor utemelji!

4) Načrtaj polkrog, katerega ploščina je vsota ploščin štirih polkrogov z danimi polmeri r_1, r_2, r_3 in r_4. Načrtovanje utemelji.
5) Kocki z robom a podaljšamo diagonali iste mejne ploskve na vsako stran za polovico njene dolžine. Dobljene točke povežemo s priležnimi oglišči nasprotne mejne ploskve. Izračunaj prostornino nastalega telesa!

Pavle Zajc

PREMISLI IN REŠI

Rešitev naloge ODREŽIMO TRETJINI KROGA iz četrte številke X. letnika so nam poslali: *Janez Bartol* iz Hoč, *Jožica Doler* iz Strmca pri Vojniku, *Franc Jerala* iz Kranja, *Andreja Jurica* iz Slovenskih Konjic, *Tihana Nikolič* iz Šenčurja, *Miha Pavli* iz Domžal, *Mihael Poberžnik* iz Šentjanža, *Mitja Rihtaršič* iz Železnikov, *Uroš Seljak* iz Nove Gorice in *Metod Zabret* iz Bobovka.

Izžrebali smo Janeza Bartola, Andrejo Jurica in Mihaela Poberžnika ter vsakemu poslali knjigo Nika Prijatelja *Osnove matematične logike*, 1. del.

Vse rešitve, ki ste nam jih poslali, so bile zanimive, zato jih bomo uredili in objavili v naslednji številki.

Za novo nalogo pa smo vam pripravili problem z naslovom:

TRINAJST PARADIŽNIKOV

Na gredico v obliki pravokotnika 3,5m X 2,2m moraš posaditi čimveč paradižnikovih sadik. Pri tem pa morata biti poljubni dve sadiki vsaj 1 m narazen. Dvanajst sadik zna posaditi vsakdo, kako pa bi jih posadili trinajst? Narišite načrt saditve in ga pošljite do 25. 12. 1983.

Peter Petek

NOVICE

ČESTITKA

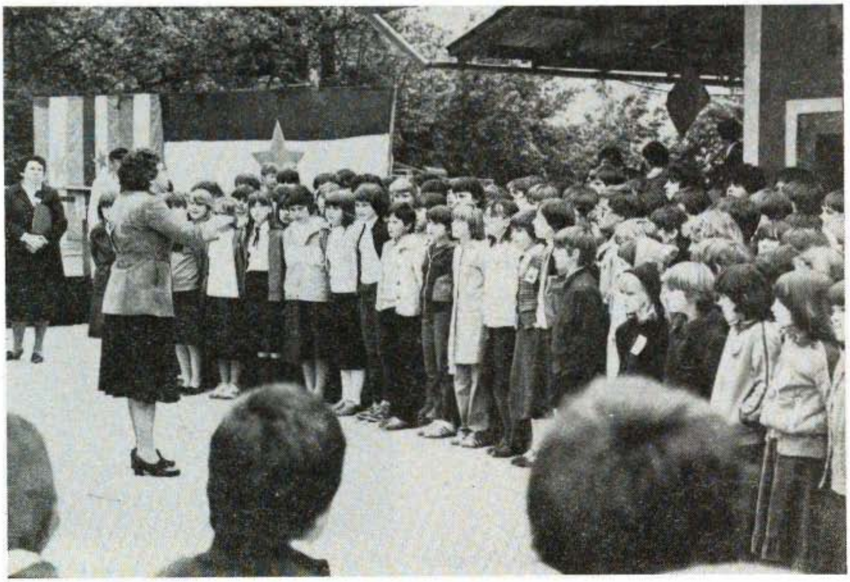
Pred kratkim je slavil svojo osemdesetletnico profesor dr. Fran Dominko, prvi profesor astronomije na ljubljanski univerzi in ustanovitelj Astronomsko-geofizikalnega observatorija na Golovcu. Vsi ga poznamo kot neumornega popularizatorja astronomije na Slovenskem. Pred kratkim smo lahko o njem tudi brali v Preseku 10 (1982/83) str. 65 ob priliki njegove izvolitve za častnega člana Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Ob njegovem jubileju se mu iskreno zahvaljujemo za delo z mladimi in mu želimo še mnogo zdravih in uspešnih let.

Uredniški odbor Preseka

(Foto Ciril Velkovrh)

V SPOMIN NA JURIJO VEGO IN NJEGOVA DELA

Znameniti slovenski matematik JURIJ VEGA je napisal več matematičnih učbenikov in znanstvenih razprav ter izdal več različnih matematičnih tabel. Njegove prve logaritemske tabele so izšle že leta 1783, točno pred dvesto leti. Pomembno obletnico smo kljub slabemu vremenu zelo svečano in lepo proslavili. V Zagorici nad Dolskim, rojstni vasi JURIJA VEGE, se je 28. maja zbralo veliko udeležencev proslave, med katerimi smo bili člani Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, zastopniki skupščin občin Ljubljana Moste-Polje in Litija, še največ pa je bilo domačinov, ki so velik prostor pred rojstno hišo JURIJA VEGE skoraj docela napolnili. Slovesnost je pričel predsednik skupščine kulturne skupnosti Ljubljana Moste-Polje, dr. Tihomir Pintar, slavnostni govor pa je imel doc. dr. Tomaž Pisanski z ljubljanske univerze, ki je tudi odkril doprsni kip (Slika na naslednji strani). V kulturnem programu so nastopili združeni pevski zbori osnovnih šol Moravče, Ljubljana-Polje in Dolsko (Slika spodaj) pod vodstvom Andreja Rupnika, Irene Mejač in Nežke Čad, pevski zbori tovarne ISKRA-Kibernetika, tozd VEGA iz Ljubljane, mladinski pevski zbor krajevne skupnosti Klopce pod vodstvom Pavla Povirka, učenci domače osnovne šole Križevska vas pa so pripovedovali o življenju JURIJA VEGE.



V Spomin na našega rojaka JURIJA VEGO je bilo že veliko storjenega. V rojstni vasi je bila večkrat preurejena spominska soba (1865, 1904, 1954, 1982), za kar ima največ zaslug prof. Jože Povšič v sodelovanju z ing. arh. Matijo Suhadolcem, ki je uredil tudi okolico najnovejšega Vegovega spomenika v Zagorici. V nadaljevanju bomo na kratko prikazali seznam večine pomembnejših znanih del in poimenovanj v spomin na JURIJO VEGO.

LITERARNA DELA

1. *Jakob Bedenek, Od pluga do krone : Zgodovinski roman. - Ljubljana : Ig. pl. Kleinmaver und Fed. Bamberg, 1891.*
2. *Niko Kuret, Kranjski baron, radijska igra, Ljubljana, 1954.*
3. *Makso Pirnat, Jurij baron Vega : slovenski junak in učenjak. - Celovec : Družba sv. Mohorja, 1906.*
4. *Lavo Čermelj, Jurij Vega. - Ljubljana : DMFA SRS in Mladinska knjiga, 1954.*
5. *Jože Povšič, Bibliografija in biografija Jurija Vege. - Ljubljana : Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1972.*
6. *Sandi Sitar, Moja žena Svoboda : televizijska drama. - 1980.*
7. *Sandi Sitar, Jurij Vega. - Ljubljana : Mladinska knjiga, 1980.*
8. *Jože Povšič, Jurij Vega. - Maribor : Založba Obzorja, 1983.*
9. *Sandi Sitar, Jurij Vega. - Ljubljana : Partizanska knjiga, 1983. - Znameniti Slovenci.*

SLIKE

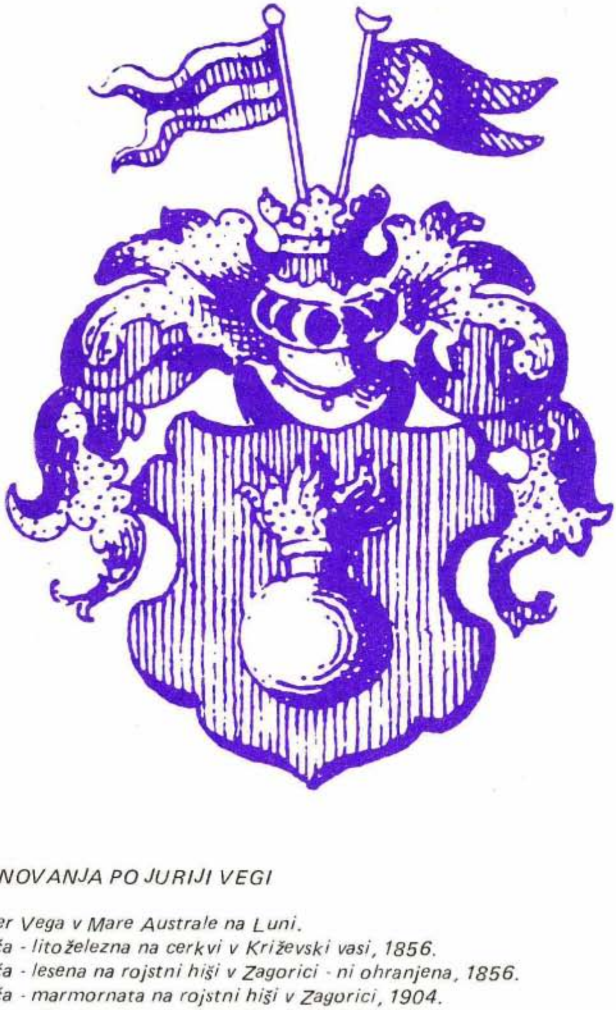
1. *A.Ecker, H.Benedicti, grafika - kot major, (1793-1796); - kot podpolkovnik, 1802.*
2. *P.Wolf p., grafika, 1802, 1838.*
3. *(Ivan Zajc), risba, okoli 1904.*
4. *Miha Maleš, lesorez, 1922; kasneje s korekturami.*
5. *Elko Justin, lesorez, Življenje in svet, 14 (1933) št. 20.*
6. *Matej Sternen, olje, 1938, Jugoslovanska dvorana na univerzi v Pitsburgu, ZDA.*
7. *M.Zlamalik, S.Dokić, B.Kocmur, znamka, 1954.*
8. *Miligoj Dominko, barvna ilustracija, Galaksija (1979) oktober, št. 90.*

KIPI

1. *(Franc Zajc), mali kip, 1873, last prof. dr. Alojzija Vadnala.*
2. *Martin Bizjak, na* portalu *nekdanje idrijske gimnazije, 1903.*
3. *Ivan Zajc, osnutek za kip v Ljubljani - ni ohranjen, Slovan, 1903.*
4. *Ivan Zajc, mavčni osnutek, 1903, DMFA SRS; 1906, Moravče; 1969, fakulteta za elektrotehniko v Ljubljani.*
5. *Aladar Zahariaš, mavčni osnutek, 1981, SO Ljubljana* Moste-Polje*; 1983, Zagorica.*

DRUGE PUBLIKACIJE

1. *Spominska razglednica ob 150. obletnici rojstva, 1904.*
2. *prospekt, Ljubljana : DMFA SRS in Mladinska knjiga, 1968.*
3. *Razglednica (P.Eolf p.). - Ljubljana : DMFA SRS in Mladinska knjiga, 1968.*
4. *barvna razglednica (M.Sternen) DMFA SRS, 1983.*



POIMENOVANJA PO JURIJI VEGI

1. *Krater Vega v Mare Australe na Luni.*
2. *plošča - lito železna na cerkvi v Križevski vasi, 1856.*
3. *plošča - lesena na rojstni hiši v Zagorici - ni ohranjena, 1856.*
4. *plošča - marmornata na rojstni hiši v Zagorici, 1904.*
5. *Vegova ulica (Vegastrasse) na Dunaju v XIX. okrožju.*
6. *Vegova ulica v Ljubljani.*
7. *Vegova uliva v Moravčah.*
8. *osnovna šola Jurija Vege v Moravčah.*
9. *šolski center (prej gimnazija) Jurija Vege v Idriji.*

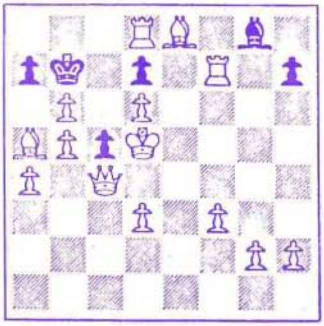
0\. *tovarna Iskra Kibernetika, Kranj - tozd VEGA, Ljubljana.*

Ciril Velkovrh

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

ŠAHOVSKA UGANKA

črni: Čarli



beli: Janez

V knjižici ugank Aaron J. Friedland, Puzzles in Math & Logic, Dover Publ. 1970, najdemo tudi tole šahovkso uganko:

"Vidim, da si spet igral s Čarlijem," reče Peter Janezu. "Predpostavljam, da je imel spet slab dan."

"Res je," odgovori Janez. "Proti koncu je bila pozicija naslednja: jaz sem bil na potezi."

Peter nekaj časa razmišlja in reče: "Predpostavljam, da si ga v tej potezi matiral."

"Jasno," odvrne Janez.

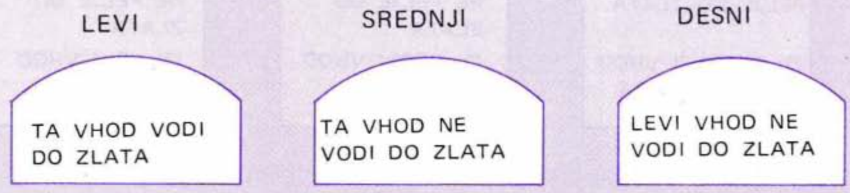
Katera je bila ta poteza?

Izidor Hafner

α β γ δ ε ζ η ϑ ι ϰ λ μ ν ξ ο π ϱ σ τ υ φ χ ψ ω

KAKO PRITI DO ZAKLADA

Vse, kar je stari iskalec zlata zapustil svojemu sinu, je bila karta z označbo kraja, kjer je ležal zapuščen rudnik zlata. Na drugi strani je bila naslednja skica:



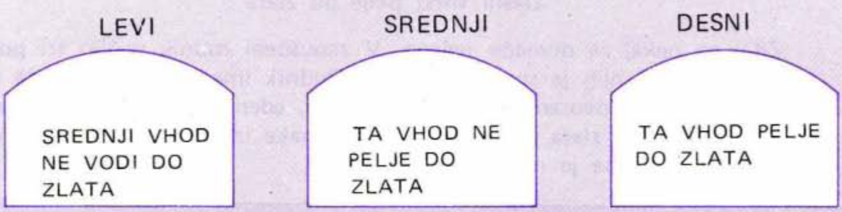
OD VSEH TREH TRDITEV JE NAJVEČ ENA RESNIČNA.

Poiščimo sedaj pot do zlata! Izjavi, zapisani na levi in desni negirata ena drugo, zato je ena resnična druga pa napačna. Ker pa je kvečjemu ena od treh izjav resnična, je srednja izjava neresnična, njena negacija

"Srednji vhod vodi do zlata"

pa je resnična.

Sedaj pa premislimo, kje bi bil zaklad, če bi bila skica takšnale



NAJMANJ ENA OD TEH TRDITEV JE RESNIČNA, NAJMANJ ENA PA JE NAPAČNA.

Leva in srednja trditev izražata eno in isto, sta torej obe resnični ali obe napačni. Če desni vhod vodi do zlata, so vse tri izjave resnične. Torej mora biti desna trditev neresnična, drugi dve pa resnični. Srednji vhod ne pelje do zlata, desni pa tudi ne. Do zaklada pelje levi vhod.

Po napornem potovanju skozi rudniški jašek je sin prišel do podzemeljske dvorane, ki je imela še nadaljnje tri izhode. Tam je našel skrinjo, v kateri je bila naslednja skica:

LEVI	SREDNJI	DESNI
(1) TA VHOD NE PELJE DO ZLATA	(1) LEVI VHOD NE PELJE DO ZLATA	(1) TA VHOD NE PELJE DO ZLATA
(2) SREDNJI VHOD VODI DO ZLATA	(2) DESNI VHOD PELJE DO ZLATA	(2) LEVI VHOD PELJE DO ZLATA

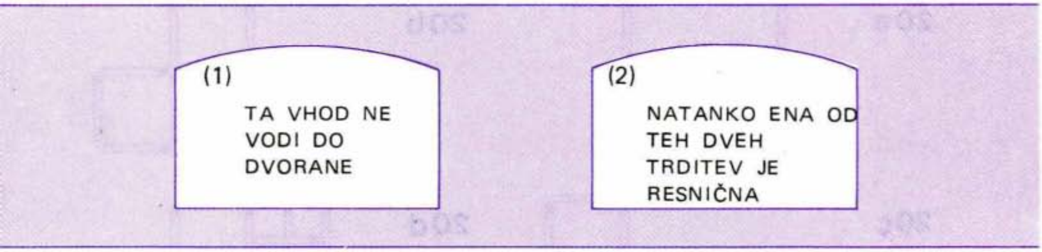
NA ENEM VHODU STA OBE TRDITVI RESNIČNI, NA DRUGEM OBE NAPAČNI, NA TRETJEM JE ENA TRDITEV RESNIČNA, DRUGA PA NAPAČNA.

Kje naj sin nadaljuje pot? Za vse pare izjav na vratih velja: če je spodnja izjava resnična, potem je tudi zgornja izjava resnična. Iz spodnjega pogoja sledi, da je samo ena od spodnjih trditev resnična, od zgornjih pa samo ena napačna. Zgornji trditvi na levi in v sredini povesta isto, zato morata biti resnični, zgornja desna trditev pa napačna. Njena negacija je resnična

"Desni vhod pelje do zlata".

Zdaj pa nekaj za domačo nalogo. V zapuščeni rudnik vodijo tri poti, toda ena izmed njih je smrtno nevarna. Rudnik ima dva vhoda, toda le ena pot pelje do dvorane, ki ima tri izhode, eden od njih vodi do zlata. Kako priti do zlata, če je na začetku vsake izmed poti zapisana neka trditev, skica pa je naslednja:

A	B	C
TA POT JE SMRTNO NEVARNA	TALE POT JE DOBRA	NAJVEČ ENA OD TEH TREH TRDITEV JE RESNIČNA



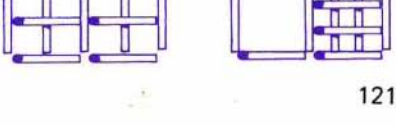
Izidor Hafner

REŠITVE NALOG

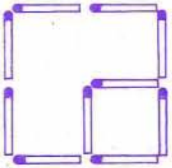
KRATKOČASNE VŽIGALICE - rešitve s str. 85 in 109

18.

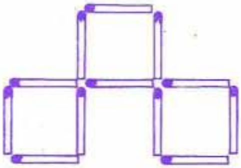
19.



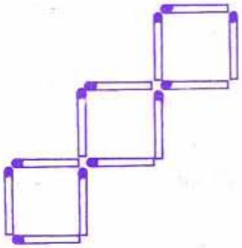
20a



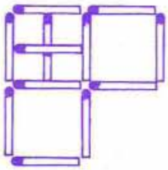
20b



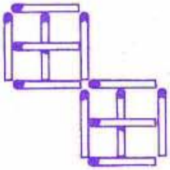
20c



20d

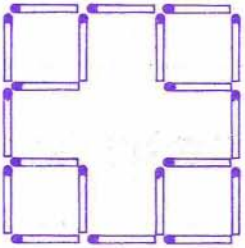


20e



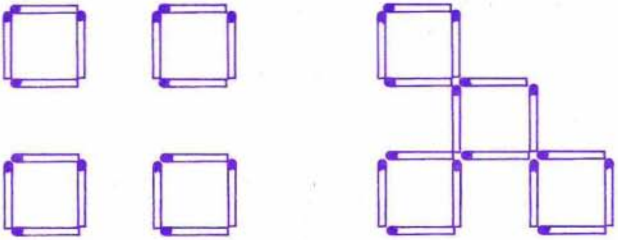
21a Vzemi vse notranje vžigalice in iz njih sestavi še en tak kvadrat!

21b

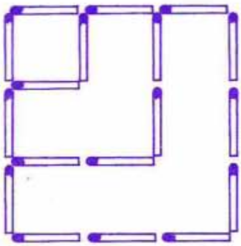


21c

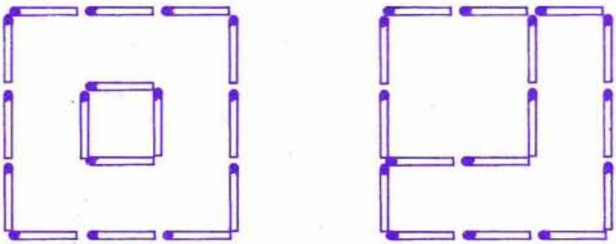
21d



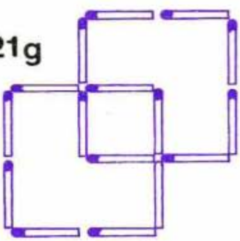
21e



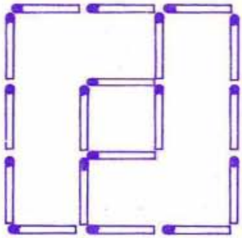
21f



21g



21h



REŠITVE NALOG Z 19. REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

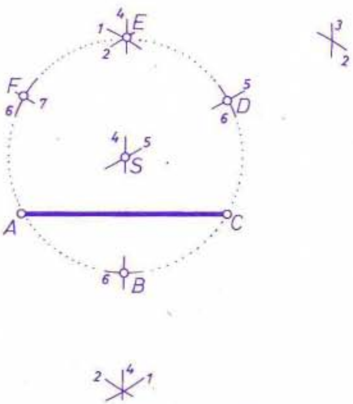
Naloge so objavljene v tej številki PRESEKA na strani 110.

7. razred

1) Vsota notranjih kotov štirikotnika je 360°. Če so x, $x+20^\circ$, $x+30^\circ$ in $x + 50^\circ$ velikosti notranjih kotov, je zato $x + (x+20^\circ) + (x+30^\circ) + (x+50^\circ) = 360^\circ$. Odtod dobimo $x = 65^\circ$, ostali koti pa merijo 85°, 95° in 115°. Če so to velikosti zaporednih kotov štirikotnika, ugotovimo, da sta prvi in četrti kot suplementarna, prav tako pa tudi drugi in tretji kot. Štirikotnik, v katerem sta dva para kotov suplementarna, pa je trapez.

2) Ceno knjige iz prve izdaje označimo z a. Cena knjige iz druge izdaje je tedaj b = 120% od $a = 1{,}2a$. Cena knjige iz tretje izdaje je c = 80% od $b = 0{,}8.1{,}2a = 0{,}96a$. Torej je c = 96% od $a = 0{,}96a < a < 1{,}2a = b$. Knjiga je bila najcenejša v tretji izdaji, ko je bila za 4% cenejša od knjige v prvi izdaji.

3)



Možne so različne poti. Prikazana rešitev je zasnovana na velikosti $\sphericalangle SAC = 30^\circ$, pri čemer je S središče očrtanega kroga. Zaradi boljše preglednosti je na sliki prikazana le konstrukcija oglišč.

4) Če ima prvi del palice dolžino d, ima drugi del dolžino $d/2$ in tretji del $d/4$. V trikotniku je vsota dolžin dveh stranic večja od dolžine tretje stranice, zato iz teh delov ne moremo sestaviti trikotnika tako, da bi krajišča teh delov bila oglišča. Drugi in tretji del sta namreč prekratka: $d/2 + d/4 = 3d/4 < d$!

5) Črtkani lik dobimo iz pravokotnika tako, da odstranimo četrtini dveh krogov s polmerom a, zato je ploščina lika $(32 - 8\pi)\mathrm{cm}^2 = 2a.a - 2.\pi a^2/4 = a^2(4 - \pi)/2$. Torej je $a^2 = 16\mathrm{cm}^2$ in $a = 4\mathrm{cm}$. Lik je omejen z daljico dolžine $2a$ in z dvema krožnima lokoma, katerih vsak meri četrtino obsega kroga s polmerom a. Zato je obseg tega lika enak $2a + 2.2\pi a/4 = a(2 + \pi) = (2 + \pi).4\mathrm{cm} \doteq 20{,}57\mathrm{cm}$.

8. razred

1) Enačbo $9u^2 + 16v^2 + 6u - 24v + 10 = 0$ najprej preoblikujemo tako, da združimo člene, ki vsebujejo isto spremenljivko:

$$9u^2 + 6u + 16v^2 - 24v + 10 = 0$$

Prva dva člena dopolnimo do popolnega kvadrata in isto ponovimo z drugima dvema členoma:

$$(9u^2 + 6u + 1) + (16v^2 - 24v + 9) - 1 - 9 + 10 = 0$$

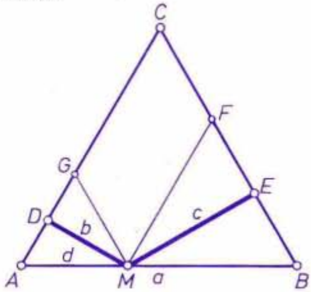
Dobimo:

$$(3u + 1)^2 + (4v - 3)^2 = 0$$

Vsota kvadratov je enaka 0 le, če sta oba kvadrata enaka 0, tedaj pa je $3u + 1 = 0$ in $4v - 3 = 0$ ali $u = -1/3$ in $v = 3/4$.

2) Cifre iskanega števila naj bodo a, b in c. O njih vemo: $a + b + c = 15$, $c = a - 5$ in $100a + 10b + c = 2.(100c + 10b + a) + 228$. Drugo zvezo upoštevamo v prvi: $b = 15 - a - c = 20 - 2a$, vse to pa upoštevamo v tretji: $100a + 200 - 20a + a - 5 = 2(100a - 500 + 200 - 20a + a) + 228$ ki jo uredimo: $567 = 81a$ in rešimo: $a = 7$. Iskano število je 762.

3) Skica:

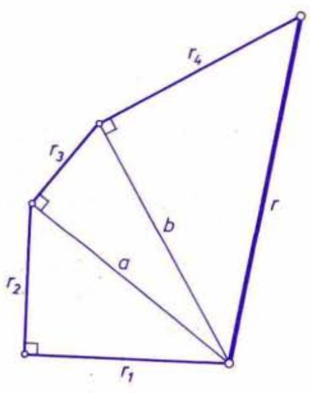


Pravokotnika iz M na AC naj to stranico seka v točki D, pravokotnica na stranico BC pa seka BC v točki E. MD in ME sta višini enakostraničnih trikotnikov ΔAMG in ΔMBF ($\overline{AD} = \overline{DG}$ in $\overline{BE} = \overline{EF}$). Če označimo: $b = \overline{DM}$, $c = \overline{ME}$ in $d = \overline{AM}$, velja:

$$b + c = d\,\frac{\sqrt{3}}{2} + (a - d)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vidimo, da je vsota razdalj enaka višini enakostraničnega trikotnika in zato neodvisna od lege točke M na stranici a.

4) Iz zahteve $\frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{1}{2}(\pi r_1^2) + \frac{1}{2}(\pi r_2^2) + \frac{1}{2}(\pi r_3^2) + \frac{1}{2}(\pi r_4^2)$ izluščimo: $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$. Od tod sledi:



$$r_1^2 + r_2^2 = a^2$$

$$a^2 + r_3^2 = b^2$$

$$b^2 + r_4^2 = r^2$$

Z besedami: a je hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama r_1 in r_2, b je hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama r_3 in a in r je hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama b in r_4.

5) Nastalo telo je prisekana piramida. Njeno prostornino lahko izračunamo tako, da od piramide (glej oznake na sliki) *PIJKL* odvzamemo njej podobno piramido *PEFGH*, torej

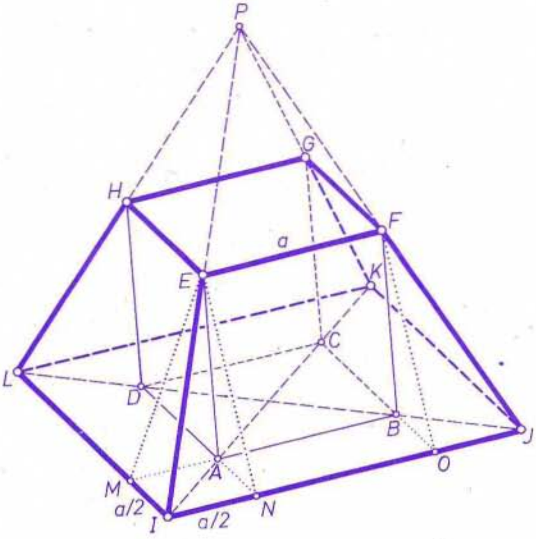
$(2a)^2 . 2a/3 - a^2 . a/3 =$

$= 8a^3/3 - a^3/3 = 7a^3/3$

Lahko pa jo tudi izračunamo iz prostornin "sestavnih" delov: kocke s stranico a, štirih trikotnih prizem (npr. *FENOBA*) in štirih "stranskih piramid (npr. *EMINA*). Tedaj se račun glasi:

$a^3 + 4.a.(a.a/2)/2 +$

$+ 4.(a/2)^2.a/3 = 7a^3/3$



Gorazd Lešnjak in Pavle Zajc

ŠAHOVSKA UGANKA - rešitev s strani 116

V omenjeni knjigi je podana tale rešitev:

Ključ do rešitve je v analizi potez, ki so pripeljale do te pozicije. Črni v svoji zadnji potezi ni mogel premakniti kralja, ker bi bil ta v šahu, ne glede na potezo belega (razmisli!). Prav tako ni mogel premakniti kmetov na štartnem položaju, niti tekača. Zadnja poteza je bila s kmetom C5. Toda ta kmet ni mogel priti s C6, ker bi bil v tem primeru beli v šahu. Se pravi, da je bila zadnja poteza kmet s C7 na C5. Torej beli zmaga, če vzame kmeta na C5 s kmetom na B5 (en passant) in z njim šahira črnega.

Izidor Hafner

POSPLOŠITEV NEKAGA PROBLEMA IZ DELJIVOSTI ŠTEVIL

rešitev s strani 82 (Dragoljub D.Milošević, prev. Mitja Lakner)

Vzemimo n zaporednih naravnih števil in označimo prvo število s k. Potem velja:

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+n-1) = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{n\text{-krat}} + (1 + 2 + \ldots + n-1)$$

Vsota prvih $n-1$ naravnih števil je enaka $n(n-1)/2$, zato je

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+n-1) = nk + n(n-1)/2$$

Ločimo dva primera:

(a) Če je n liho število, je $n-1$ sodo število in zato deljivo z 2, torej je vsota enaka

$$n(k + (n-1)/2)$$

in je deljiva z n. (V oklepaju imamo naravno število, večje od 1.)

(b) Če je n sodo število, torej $n = 2p$, je

$$nk + n(n-1)/2 = 2pk + 2p(2p-1)/2 = p(2k + 2p - 1)$$

Torej je vsota deljiva s p, pri čemer je p različen od 1, ker je $n \geq 3$. S tem je naloga rešena.

KRIŽANKA "GRŠKA ABECEDA" - Rešitev iz P/XI-1, str. 32

NOVE KNJIGE

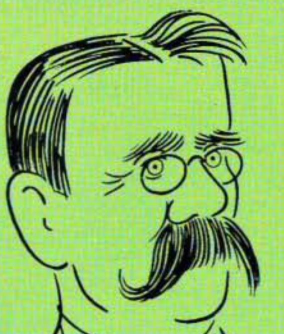
KARIKATURE SLOVENSKIH MATEMATIKOV IN FIZIKOV

V lanski 5. številki Preseka, ki je bila pripravljena kot Presekov koledar za letošnje leto, smo med dvanajstimi simboli, ki smo jih potrebovali za nove značke, objavili tudi karikature znamenitih slovenskih matematikov in fizikov. Med njimi je bila izjema karikatura grškega matematika in fizika Arhimeda. Ing. Borut Pečar je za naš list upodobil naslednje slavne može:

1. Jurij VEGA
2. ARHIMED
3. Lavo ČERMELJ
4. Ignac KLEMENČIČ
5. Jožef STEFAN
6. Franc MOČNIK
7. Franc HOČEVAR
8. Josip PLEMELJ

Originali visijo na stopniščin oddelka za matematiko in oddelka za fiziko fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani, Jadranska c. 19. Ker so se nekateri kolegi s srednjih in osnovnih šol zanimali za te slike v želji, da bi z njimi opremili tudi svoje šolske kabinete, smo z dovoljenjem avtorja pripravili nekaj kopij, ki jih lahko dobite pri Komisiji za tisk DMFA SRS. Cena posameznega izvoda je 5o.-din, za člane društva in naročnike Preseka pa 40.-din. Zaradi velikega formata 30 x 40 cm slik ne moremo poŠiljati po pošti. Interesente prosimo, da jih prevzamejo osebno. Pomanjšane kopije objavljamo na naslednjih dveh straneh.

Ciril Velkovrh



ZNAMENITI SLOVENCI

JURIJ VEGA

KNJIGI O JURIJU VEGI

sandi sitar

Letos mineva 200 let od izida prvega Vegovega logaritmovnika. To obletnico sta počastili kar dve novi knjigi o najpomembnejšem slovenskem matematiku osemnajstega stoletja. Obe toplo priporočamo našim naročnikom. Drobnejšo knjižico z naslovom JURIJ VEGA je napisal profesor Jože Povšič, ki je lep kos svojega življenja posvetil študiju slovenskih matematikov. V njegovi knjižici bo bralec našel vse pomembnejše podatke o življenju in delu tega našega velikana. Čeprav se Povšičevo pisanje opira na strogo dokumentirana dejstva, je zanimivo tudi za mlajše bralce.

Drugo delo o matematiku, vojaku in balistiku z enakim naslovom je za zbirko Znameniti Slovenci napisal znani novinar Dnevnika Sandi Sitar. Sitar je eden redkih novinarjev s posluhom za znanost in znanstvenike. Njegova knjiga je verjetno doslej najpopolnejši življenjepis JURIJA VEGE. Knjiga prikazuje poleg življenske zgodbe in dela nesrečnega VEGE tudi zgodovinsko ozadje njegovega časa. Zato bo zanimivo branje za naše bralce, saj so avtorjevi sklepi na več mestih korak pred dokaznimi dejstvi.

Knjigi bosta pripomogli, da bomo o VEGI vedeli več kot naši predniki. Naša naloga pa je, da živo zavest o VEGI in drugih slovenskih znanstvenikih zapustimo našim naslednikom. Prav zato pa moramo knjigi v resnici prebrati.

Tomaž Pisanski

Povšič Jože, JURIJ VEGA. - Maribor : Založba Obzorja, 1983. - 31 strani. - (Kulturni in naravni spomeniki Slovenije : Zbirka vodnikov) Cena 45. - din (Za naročnike Preseka je ceneje: 36.-din)

Sitar Sandi, JURIJ VEGA. - Ljubljana : Partizanska knjiga, 1983. - 188 str. - (Znameniti Slovenci) Cena 350.-din (280.-din)

partizanska knjiga