presek

1

XI

1983-84

– HAMILTONOVA NALOGA ZA GRAFE

LIST ZA MLADE

MATEMATIKE

FIZIKE

ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ MATEMATIKE

18. a

Bojan MOHAR, Egon ZAKRAJŠEK

UVOD
V PROGRAMIRANJE

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

MATEMATIČNI ROKOPISI

6.

UVOD
V RAČUNALNIŠTVO

NALOGE

V. Batagelj, B. Mohor, M. Petkovšek, T. Pisanski,
E. Zakrajšek

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

UVODNIK

Dragi bralci!

Pred vami je prva številka 11. letnika Preseka, kar pomeni, da je list uspešno zaključil 10. letnico izhajanja.
V tem času je uredniški odbor skupaj s sodelavci opravil nemajhno delo. Ne bi vas dolgočasili s težavami, ki smo jih pri tem imeli. Raje se ozrimo vnaprej in se vprašajmo, ali lahko naš list s skupnimi močmi še izboljšamo. Naša prva želja in skrb je, da bi bil Presek čim bliže bralcem, da bi bil čim bolj pester, zabaven, poučen, predvsem pa razumljiv tudi najmlajšim bralcem. Ker pa nas je večina sodelavcev v uredniškem odboru in piscev prispevkov iz ozkega kroga učiteljev in asistentov na ljubljanski univerzi, je včasih to težko doseči.
Radi bi imeli več sodelavcev med učitelji iz osnovnih in srednjih šol, ki najbolj poznajo mlade bralce Preseka in vedo, kaj vas zanima. Žal, do sedaj ni bilo pravega odmeva. Zavedamo se, da poleg rednega dela ni prav mnogo časa za pisanje člankov v Presek, ali za sodelovanje pri urejanju lista.
Zato tem bolj pogrešamo odmeve na posamezne članke od vas, dragi bralci. V pismih nam napišite mnenje o članku, ki ste ga prebrali, zakaj vam ni ugajal, ali je bil pretežak. Tudi pohvale bomo zelo veseli. Z vašim sodelovanjem se bomo laže izognili višanju strokovne ravni ter dobili nove ideje in vzpodbude.
Trenutno pripravljamo tudi novo oblikovno spremembo Preseka, nekaj poskusov z izpisi člankov na drugem pisalnem stroju smo že naredili, kar ste gotovo opazili. Na novo obliko bomo prešli, ko bomo odpravili vse težave, ki jih imamo s tem.
Ob koncu za 1. številko že običajno sporočilo. Naročnina za Presek za šolsko leto 1983/84 znaša 120. - dinarjev za skupinska naročila in 150. - dinarjev za posamezne naročnike. Učitelje matematike in fizike prosimo, da nam pošljejo zbrana naročila na naš naslov do 20. septembra 1983, kajti takrat bomo oddali v tisk drugo številko in moramo vedeti za naklado. Zbrano naročnino pa potem pričakujemo najkasneje do konca koledarskega leta.

Lep pozdrav!

Andrej Likar, Edvard Kramar

VSEBINA

NA OVITKU (Glej članek na str. 34)

(Glej članek na str. 34)

I

Člani akadenije poskusov si ogledujejo alkoholni termometer (oljna slika iz tisktega časa je last Tribune Galileiane). Akademija poskusov, ki je obstajala od 1657 do 1666, je bila prva ustanova svoje vrste, na kateri so gojili poskuse. Delali so jih v dvorani Pitti v Firenzah ali na prostem.

IV

Sl. 3. Eden izmed termometrov, ki jih je uporabljal Galilei okoli leta 1597 v Padovi, se je ohranil do današnjih dni. Galilei je v spodnji del nalil vode in z roko segrel jajčasto posodo z zrakom. Zrak v njej se je raztegnil in nekaj mehurčkov je ušlo skozi vodo. Ko se je zrak v posodi ohladil in skrčil, se je dvignila v cevko voda. Čim više je bila gladina, tem nižja je bila temperatura zraka. To pa je bilo mogoče ugotavljati le za majhne temperaturne intervale in vrhu tega je bila lega gladine odvisna od zunanjega zračnega tlaka. Na osnovi poskusov s termoskopi je Galilei pozneje (leta 1623) prišel do prepričanja, da je "mraz pomanjkanje toplote". Dotlej je veljalo mnenje Aristotelovih pristašev, da sta "mraz in toplota dve različni lastnosti teles".

PRESEK - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME
11. letnik, šolsko leto 1983/84, številka 1, strani 1 - 64.

Dopise pošiljajte in list naročajte na nslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 6, tel.št. (061) 265-061/53, št.žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1983/84 je za posamezna naročila 150. - din, za skupinska naročila pa 120. - din.

List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije.
Ofset tisk Časopisno-grafično podjetje DELO, Ljubljana.

MATEMATIKA

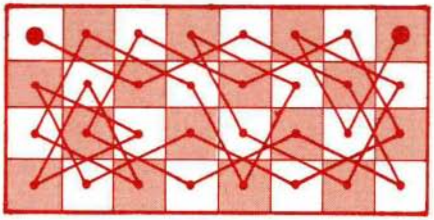
HAMILTONOVA NALOGA ZA GRAFE

Hamiltonova naloga za grafe, s katero se bomo seznanili v tem sestavku, je ena izmed "klasičnih" nalog teorije grafov. Kakor vrsta drugih področij teorije grafov in matematike nasploh, je tudi ta naloga pognala in črpala svoje osnovne zamisli in spoznanja iz bogate zakladnice kratkočasne matematike. Poglejmo si najprej tri kratkočasne naloge, ki predstavljajo nekakšne "korenine" Hamiltonove naloge:

NALOGA O POŽREŠNEM ŠAHOVSKEM KONJIČKU: V pariški Biblioteki hranijo pod številko 10287 pergament iz XIV. stoletja, v katerem je v latinščini zapisan najstarejši znani primer *naloge o požrešnem konjičku:*

Na zgornjo polovico šahovnice razmestimo vseh 32 šahovskih figur. Pri tem enega od konjev postavimo v zgornji levi vogal. Ali lahko ta konj v enointridesetih zaporednih skokih "požre" vse ostale figure?

Odgovor na zastavljeno vprašanje je pritrdilen. Eno izmed rešitev prikazuje slika 1.



Slika 1

Od tu je le korak do današnje oblike naloge o požrešnem konjičku - zastavljene za celo šahovnico. V tej obliki se je naloga razširila po Evropi nekje na začetku XVIII. stoletja. Od tedaj že ves čas privlači ljubitelje kratkočasnih nalog. Z njo se je ubadala in prispevala svoj delež k njenemu reševanju vrsta znanih matematikov: *A. de Moivre* (1667-1754), *L. Euler* (1707-1783), *A.T. Vandermonde* (1735-1796), *K.F. Gauss* (1777-1855), *H.E. Dudeney* (1857-1930), *J. Kürschak* (1864-1933), ... pa tudi drugih, ki sta jih privlačila šahovnica in "trenje orehov": *Collini* (18. stol.), *Warnsdorf* (prva polovica 19. stol.), *Jaenisch* (sredina 19. stol.), francoski general *Parmentier*, *Frost* (druga polovica 19. stol.), ...

Naloga o požrešnem konjičku ne manjka v nobeni pregledni knjigi po zabavni matematiki [1,6,7,9,10]*. Najdemo jo tudi v [13], kjer jo je *N. Wirth* uporabil za ilustracijo metode drevesnega prebora (backtracking).

Zaradi izredno velikega števila možnih skakljanj je nesistematično iskanje rešitve ponavadi obsojeno na neuspeh. Posamezni, bolj ali manj uspešni načini reševanja naloge običajno postavijo dodatna pravila, ki naj jim skakljanja zadoščajo.

Nekaj rešitev je prikazanih na sliki 2: a) *A. de Moivre*, b) *A. Pongracz*, c-d) *E. Falkner* (druga polovica 19. stol.), e-f) *T. Parmentier*, g) *C. Collini*, h) *A.H. Frost*, i-k) *L. Euler*, l-p) *A. Cretaine* (sredina 19. stol.), r-s) *A.T. Vandermonde* .

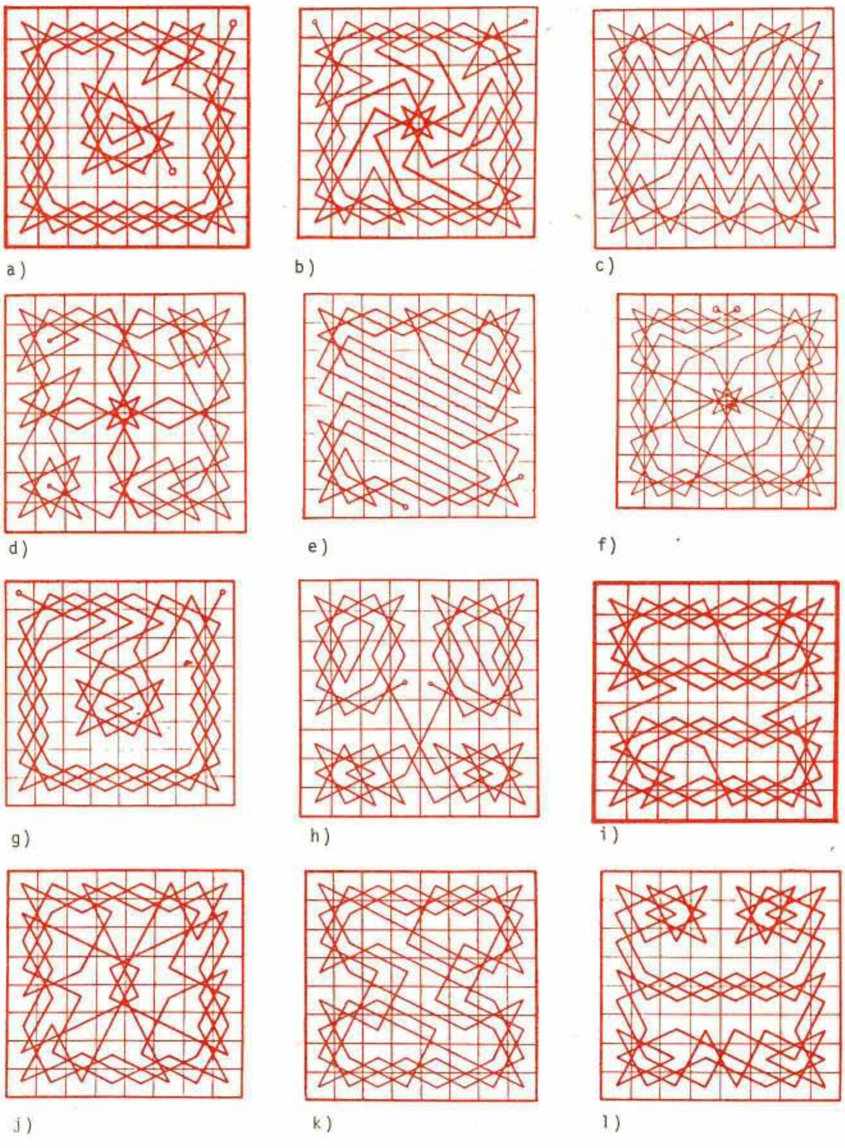
Rešitve i-s imajo še dodatno lepo lastnost, da so sklenjene - s polja, na katerem konjiček svoje skaklanje konča, lahko skoči na začetno polje.

na kateremkoli polju šahovnice. Prvo znano sklenjeno rešitev zasledimo v Eulerjevem pismu (26. april 1757) Goldbachu.

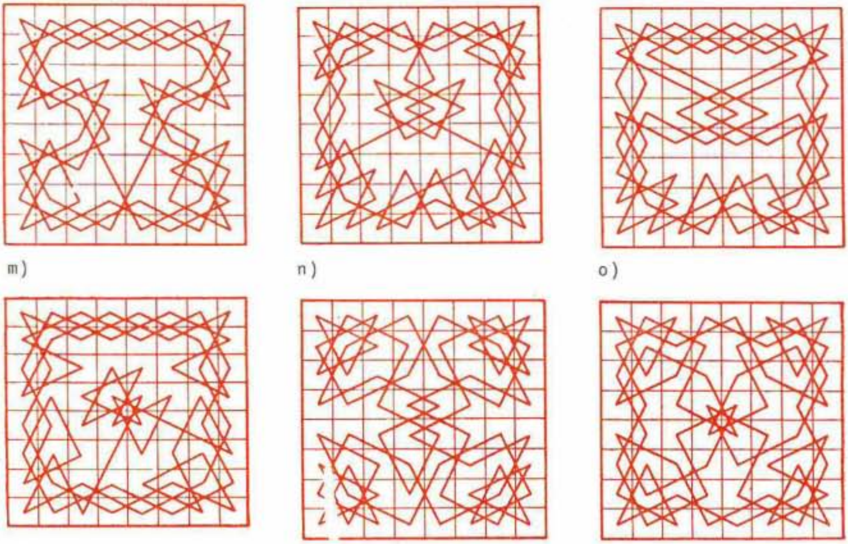
Rešitev naloge lahko podamo tudi tako, da na posamezno polje šahovnice zapišemo zaporedno številko koraka (od 1 do 64). Ta-

---

* števila v oglatem oklepaju označujejo literaturo, zbrano na koncu sestavka.



Slika 2.1



m) n) o)

p) r) s)

Slika 2.2.

ko dobimo kvadratno tabelo 8 x 8. *W. Baverlyju* (1848, slika 3.a) in *C.F. Jaenischu* (1852, slika 3.b) je uspelo najti rešitvi, za kateri pripadajoči tabeli predstavljata magična kvadra-

1	30	47	52	5	28	43	54	260
48	51	2	29	44	53	6	27	260
31	46	49	4	25	8	55	42	260
50	3	32	45	56	41	26	7	260
33	62	15	20	9	24	39	58	260
16	19	34	61	40	57	10	23	260
63	14	17	36	21	12	59	38	260
18	35	64	13	60	37	22	11	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

a)

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

b)

Slika 3

(Opomba: v magičnem kvadratu je vsota števil v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu vedno ista.)

ta s konstanto $(1 + 2 + 3 + ... + 64)/8 = 260$.

Nalogo o požrešnem konjičku so poskušali reševati tudi na "šahovnicah" drugih oblik in velikosti. Tako na primer obstaja sklenjena rešitev za kocko $4 \times 4 \times 4$, pri čemer enotne kocke predstavljajo polja, pa tudi za "šahovnico" na površini kocke $4 \times 4 \times 4$. Več trditev o obstoju rešitev na posameznih neobičajnih šahovnicah je postavil že *Euler*.

Za pravokotne šahovnice velikosti $p \times q$, pri čemer sta $p,q \geqq 3$, se je izkazalo:

- naloga ni rešljiva samo za naslednje šahovnice: 3×3, 3×5, 3×6 in 4×4;
- na šahovnicah: 3×4, $3 \times n$, $n \geqq 7$, 4×5, 4×6, 4×7, 4×8 in $(2n+1) \times (2m+1)$ (ter morda še katerih) obstajajo le nesklenjene rešitve.

Več o požrešnem konjičku lahko bralec prebere v knjigi [1], iz katere je povzeta tudi večina povedanega.

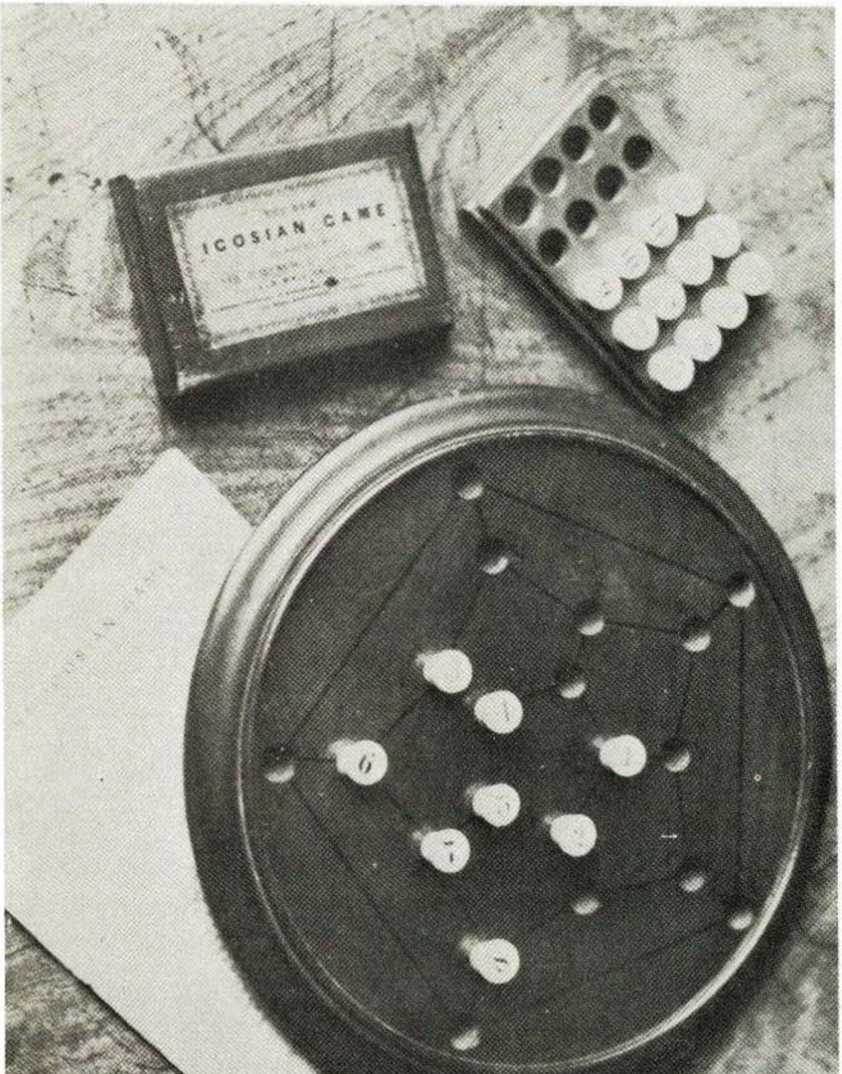
POLIEDRI IN "POPOTOVANJE OKROG SVETA" [4]: V sestavku, ki ga je *Kraljevska družba (Royal Society)* prejela 6. avgusta 1855, je *T.P. Kirkman*(1806-1895) zastavil in poskušal rešiti naslednji problem:

Ali se lahko sprehodimo po robovih poliedra*, tako da gremo skozi vsako oglišče (natanko) enkrat, in nato sprehod končamo v začetnem oglišču?

No, izkazalo se je, da je v njegovi glavni trditvi napaka. Tako je edini prispevek omenjenega sestavka zastavitev problema in dokaz, da obstaja dovolj obsežen razred poliedrov, za katere naloga ni rešljiva.

Malo zatem, 7. oktobra 1856, je znani matematik in astronom *W.R. Hamilton* (1805-1865) objavil svoj *"dvajseterski račun"* (Icosian Calculus) - primer nekomutativne operacije, ki mu je

*O poliedrih je Presek že pisal, na primer v VIII.letniku, strani 134-142.

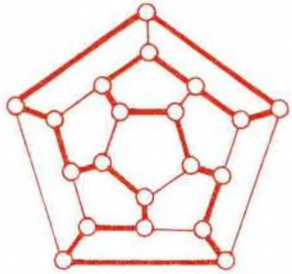


Slika 4 prikazuje komplet za dvajsetersko igro (isosian game).

našel predstavitev v sprehajanjih po mreži dodekaedra (dvanajsterec = pravilno telo z 12 (dodeka-) mejnimi peterokotniki in 20 (ikoza-, gr. eikosi) oglišči). To predstavitev je tudi uporabil kot osnovo za *"Dvajseterško igro"* (Icosian Game, glej sliko 4), ki zahteva od reševalca, da po zemljevidu, ki ga sestavlja mreža dodekaedra, obide 20 mest - vozlišča mreže, vsakega po enkrat.

Iz vozlišča, v katerega smo prišli, lahko nadaljujemo sprehod po dodekaedrski mreži le na levo (L) ali desno (D). Torej je vsak sprehod mogoče popisati z zaporedjem Ljev in Djev. Zaradi pravilnosti dodekaedra pri tem začetna točka in smer nista pomembni. Stikanje takih zaporedij je asociativna operacija; ki pa ni komutativna, saj $LD \neq DL$. Veljajo pa naslednje zveze:

$$D^5 = L^5 = 1$$
$$DL^2D = LDL$$
$$LD^2L = DLD$$
$$DL^3D = L^2$$
$$LD^3L = D^2$$



Zahtevo igre lahko sedaj povemo takole: poišči zaporedje Ljev in Djev dolžine 20, ki ima vrednost 1 in ne vsebuje nobenega podzaporedja z vrednostjo 1. Z nazornim razmislekom je kaj lahko sprevideti, da zaporedje, ki je rešitev, ne more vsebovati podzaporedij LD^2L, DL^2D, $(LD)^3L$, $(DL)^3D$, D^4 in L^4.

Naštete zveze nam omogočajo, da "izračunamo" možne rešitve. Poglejmo si primer:

$$1 = L^3 L^2 = L^3DL^3D = (L^3D)^2 = (LDL^3D^2)^2 = (LDLDL^3D^3)^2 =$$
$$= LDLDLLLDDDLDLDLLLDDD$$

Dobljeni obhod je prikazan z debelejšo črto na sliki 5.

OMIZJE KRALJA ARTURJA: še kot gimnazijec sem se, najbrž ob kakem od matematičnih tekmovanj, srečal z naslednjo nalogo:

Na dvoru kralja Arturja se je zbralo $2n$ vitezov. Za vsakega izmed njih velja, da si ni (vzajemno) sovražen z več kot $n-1$ od prisotnih vitezov. Pokaži, da Merlin (svetovalec kralja Arturja) lahko posede viteze okrog okrogle mize, tako da ne bo nihče sedel ob svojem sovražniku!

Kasneje sem to nalogo zasledil tudi v nekaj zbirkah nalog za srednješolce [5, 11] .

Za vse tri opisane naloge lahko najdemo skupni imenovalec v teoriji grafov. V nadaljevanju bomo uporabljali terminologijo iz [3]; o teoriji grafov glej še [12, 2]. Vsaki nalogi lahko priredimo graf, in sicer takole:

- *Naloga o požrešnem konjičku* : vsakemu polju šahovnice ustreza točka grafa. Točki sta povezani natanko takrat, ko sta ustrezni polji šahovnice "povezani" s konjičkovim skokom. Tako dobimo, na primer, za šahovnico 4 x 4 graf, ki je prikazan na sliki 6.

- *poliedri in popotovanje okrog sveta*: točke so oglišča poliedra, povezave so robovi poliedra, graf (pravilneje slika grafa) pa je kar mreža poliedra.

- *omizje kralja Arturja*: vsakemu vitezu ustreza točka grafa. Točki sta povezani natanko takrat, ko si pripadajoča viteza nista sovražna.

Če prevedemo zahteve vseh treh nalog v besednjak teorije grafov, spregledamo, da vse zahtevajo isto:

V danem grafu določi, če obstaja, pot (cikel), ki gre skozi vsako točko grafa natanko enkrat.

Takim ciklom (potem) pravimo *Hamiltonovi* cikli(poti)*.Če v grafu obstaja Hamiltonov cikel (pot), pravimo, da je graf *Hamiltonov (šibko Hamiltonov)*.
Brez škode za splošnost lahko v nadaljevanju predpostavimo, da so grafi, s katerimi imamo opravka, brez zank in med poljubnima točkama vodi kvečjemu ena (neusmerjena) povezava.

Osnovno vprašanje, ki si ga je teorija grafov zastavila v zvezi s Hamiltonovimi grafi, je: Kako ugotoviti, ali je dani graf (šibko) Hamiltonov? Seveda je zaželeno, da je pri tem "način ugotavljanja" kar se da splošen. Zato zastavimo *Hamiltonovo nalogo za grafe* takole:

Poišči potrebne in zadostne pogoje (postopek), ki za vsak dani graf "učinkovito" odločijo, ali je (šibko) Hamiltonov ali ni!

Žal nam teoretični dosežki, sposojeni iz računalništva, o zahtevnosti postopkov (*Karp*, 1972) kažejo na to, da najbrž (večina strokovnjakov je v to prepričana, čeprav še ni dokazano) taki pogoji (postopek) za Hamiltonovo in njej podobne naloge ne obstajajo.

Čeprav take "negativne" ugotovitve po svoje pokvarijo lepoto in miren tek teorije, pa po drugi strani zagotavljajo "neizčrpnost" ustrezne problematike. V svojih prizadevanjih, da bi ugnali Hamiltonovo nalogo, so jo matematiki "grizli" z dveh strani: *zadostni pogoji za neobstoj* (negativni pogoji) in *zadostni pogoji za obstoj* (pozitivni pogoji) Hamiltonove poti (cikla) v danem grafu. Negativni pogoji niso negacija zadostnih pogojev za obstoj (pozitivnih pogojev), ampak so negacija potrebnih pogojev za obstoj.

Do negativnih pogojev pridemo ponavadi tako, da pokažemo, da ima vsak (šibko) Hamiltonov graf neko lastnost P. Če dani graf nima lastnosti P, potem ni (šibko) Hamiltonov.

Običajno zadostuje že naslednja lastnost (šibko) Hamiltonovih grafov: če iz danega Hamiltonovega grafa odstranimo k točk, dani graf razpade na največ k povezanih delov - *komponent*; in na

---
* čeprav bi bilo, kakor vemo, bolj pošteno, da bi mu rekli Kirkmanov

največ $k+1$ komponent, če je graf šibko Hamiltonov. Iz te lastnosti izhaja:

IZREK 1: Če iz grafa G odstranimo k točk in tako dobimo graf z več kot k komponentami, potem graf G ni Hamiltonov; če je komponent več kot $k+1$, potem ni niti šibko Hamiltonov.

Izrek 1 je posplošitev ideje, s katero dokažemo, da za šahovnice z lihim številom polj ne obstaja sklenjena rešitev naloge o požrešnem konjičku. Namreč: če bi obstajala, bi, ker konjiček skače ...belo, črno, belo, črno,... vsebovala enako število belih kot črnih polj. To pa pomeni, da ima šahovnica sodo število polj.

Z izrekom 1 pokažemo tudi, da za šahovnico 4×4 ne obstaja za nalogo o požrešnem konjičku niti nesklenjena rešitev. V ta namen zadostuje, da odstranimo iz pripadajočega grafa (glej sliko 6) točke 6, 7, 10 in 11. Dobimo 6 komponent.

Tudi pozitivnih pogojev je cel kup. Večina jih temelji na spoznanju, da je graf (šibko) Hamiltonov, če je le dovolj močno povezan (in ima morda še kako drugo lepo lastnost). Najznačilnejše za pozitivne pogoje je zaporedje pogojev, ki so sorodni trditvi iz naloge o omizju kralja Arturja. Prvi korak v tem zaporedju je *Diracov* izrek (1952), med zadnjimi pa *Chvátalov* izrek (1971). Slednjega navajam brez dokaža. Še prej pa povejmo, kaj je to *stopnja točke*: to je število (različnih) točk, ki so s povezavo povezane z dano točko. Stopnjo točke u označimo z $d(u)$. Tako, pripravljeni smo:

IZREK 2. Naj bo $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \ldots \leq d_n$ zaporedje stopenj točk grafa G na $n \geq 3$ točkah. Če je za vsako naravno število k, tako da je $1 \leq k < n/2$, velja

$$d_k \leq k \implies d_{n-k} \geq n-k$$

potem je graf G Hamiltonov.

Nekaj nadaljnjih rezultatov o Hamiltonovi nalogi je pomešanih še med naslednjimi nalogami:

NALOGE

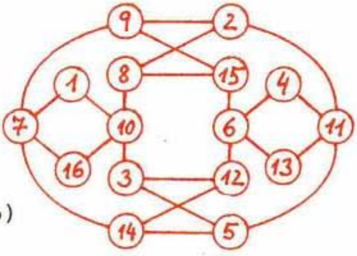
1. Pokaži, da naloga o požrešnem konjičku ni rešljiva za šahovnice: 3 x 3, 3 x 5 in 3 x 6 !
2. Poišči (nesklenjeno) rešitev naloge o požrešnem konjičku za šahovnice: 3 x 4, 4 x 5, 4 x 6 in 5 x 5 !
3. Poišči sklenjene rešitve naloge o požrešnem konjičku za šahovnico 6 x 6 , za "šahovnici" na sliki 7 in za "šahovnici" (prostorsko in površinsko) v (na) kocki 4 x 4 x 4 !
4. Na šahovnico postavimo na polja, ki vsebujejo črno piko (slika 8), črne figure. Ali lahko postavimo na šahovnico belega konja tako, da bo v 16 skokih "požrl" vse črne figure?
5. Ali velja v "Dvajseterski igri" zveza: $DL = LD^2$?
6. Določi vse rešitve "Dvajseterske igre", ki se začenjajo z *DDDL...* oziroma *LDDDLL...* !
7. Ali v grafih na sliki 9 obstaja Hamiltonov cikel (pot)? Če pot (cikel) obstaja, jo (ga) nariši!
8. Iz Chvátalovega izreka izpelji:
   a) *Orejev izrek* (1960): Naj v grafu G na $n \geq 3$ točkah za vsak par točk u in v, ki nista krajišči skupne povezave, velja:

   $$d(u) + d(v) \geq n$$

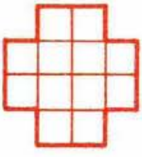
   potem je graf G Hamiltonov.
   b) *Diracov izrek*: Naj v grafu G na $n \geq 3$ točkah za vsako točko u velja $d(u) \geq n/2$, potem je graf G Hamiltonov.
9. Iz pozitivnih pogojev za obstoj Hamiltonovih ciklov dobimo običajno pozitivne pogoje za obstoj Hamiltonovih poti, tako da grafu dodamo novo točko, ki jo povežemo z vsemi točkami originalnega grafa. Izpelji pogoje za obstoj Hamiltonovih poti, ki izhajajo iz Chvátalovega, Orejevega in Diracovega izreka!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

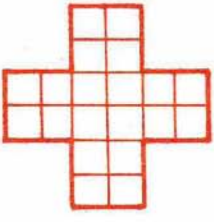
Slika 6a)



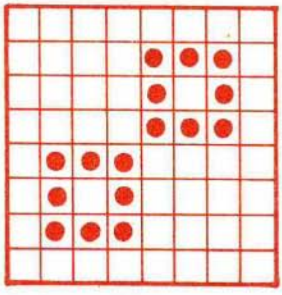
Slika 6b)



Slika 7a)



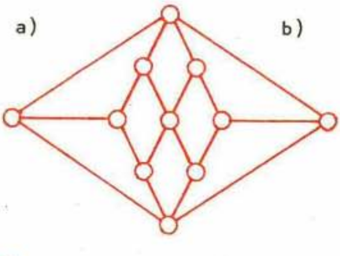
Slika 7b)



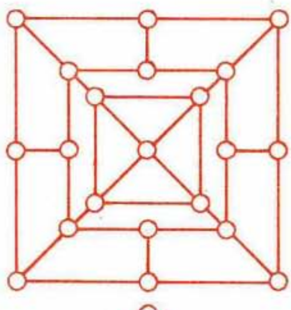
Slika 8

Slika 9

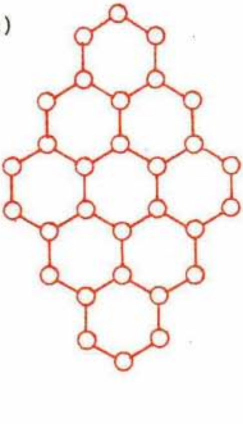
a)



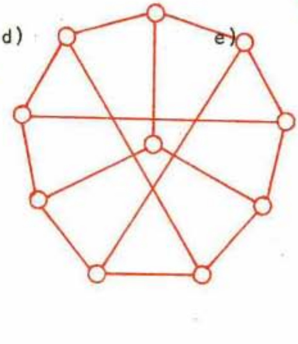
b)



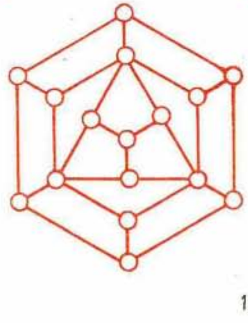
c)



d)



e)



10. n deklet in n fantov je prišlo na ples. Izkazalo se je, da se vsako dekle pozna z vsaj polovico fantov, in da se vsak fant pozna vsaj s polovico deklet.

a) Dokaži, da lahko vsi skupaj zaplešejo kolo tako, da bo vsako dekle med znanima fantoma in vsak fant med znanima dekletoma!

   Nasvet: V pripadajočem grafu lahko med seboj (vsakega z vsakim) povežemo s povezavami vse fante; ravno tako tudi dekleta. Zakaj!?

b) Dokaži, da lahko vsi hkrati zaplešejo tako, da bosta vsak par sestavljala znanca!

Vladimir Batagelj

LITERATURA

[1] W. Ahrens, *Matematische unterhaltungen und spiele*. B.G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1. del 1910 / 2. del 1918

[2] B. Andrásfai, *Introductory graph theory*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1977

[3] D. Bezek, V. Batagelj, *Nekaj o grafih in njihovi uporabi*. Presek 6 (1978/79) 1, 24-31

[4] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph theory 1736-1936*. Clarendon Press, Oxford 1976

[5] C. Budurov, V. Florov, *Sbornik ot zadači za matematičeski olimpiadi*. Narodna prosveta, Sofija 1966

[6] H.E. Dudeney, *Amusements in mathematics*. Dover, New York 1970 (ruski prevod v: *Kenterberijskie golovolomki*. Mir, Moskva 1979)

[7] M. Gardner, *Matematičeskie dosugi*. (Prevod iz angleščine) Mir, Moskva 1972

[8] M. Gardner, *Matematičeskie golovolomki i razvlečenija*. (Prevod iz angleščine) Mir, Moskva 1972

[9] E.I. Ignatiev, *V carstve smekalki*. Nauka, Moskva 1978

[10] Ž. Kostić, *Med igro in matematiko*. DZS, Ljubljana 1963

[11] D.O. Škljarskij, N.N. Čencov, I.M. Jaglom, *Izbranye zadači i teoremy elementarnoj matematiki*. Nauka, Moskva 1976

[12] J. Vrabec, *Prikaz teorije grafov*. Obzornik Mat. Fiz. 14 (1967) 58-71, 107-120

[13] N. Wirth, *Računalniško programiranje*. (Prevod iz angleščine) DMFA SRS, Ljubljana 1979

IGRA ŽIVLJENJA (nadaljevanje iz Presek 10 (1982/83) št. 3, str. 99)

V eni prejšnjih številk Preseka smo se seznanili s kolonijami celic, ki so bile naseljene na kvadratni mreži in so živele v skladu z določenim rodovnim zakonom. Sedaj pa nas bo zanimalo posploševanje tega življenja.

Igro življenja lahko posplošimo na več načinov:

- spremenimo lahko *rodovni zakon*,
- spremenimo lahko *izbor sosed*,
- uvedemo lahko *staranje* celic,
- uvedemo lahko *barve* (lastnosti) celic,
- spremenimo lahko *obliko* kletk,
- spremenimo lahko *razsežnost* življenjskega prostora.

S takim posploševanjem se območje našega raziskovanja strahovito poveča. Zaradi časovnih in prostorskih mej se bomo dotaknili le nekaterih posplošitev.

Posploševanje rodovnega zakona

Zapišimo rodovni zakon v obliki:

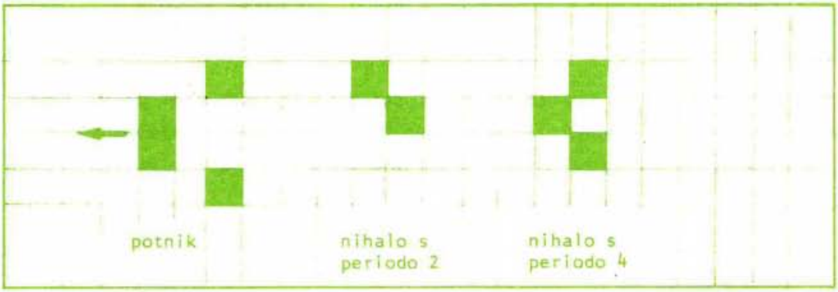
$$R(x_1,x_2,\ldots,x_m/y_1,y_2,\ldots,y_n),$$

tu naj pomenijo x_1, ..., x_m števila sosed, ki so potrebne za rojstvo nove celice (nova celica nastane v kvadratku, ki ima x_1 ali x_2... ali x_m sosed), y_1, ..., y_n pa števila sosed, ki so potrebne za ohranitev žive celice (celica se ohrani, če ima y_1 ali y_2 ... ali y_n sosed).

Naš dosedanji rodovni zakon lahko sedaj zapišemo takole:

$$R(3/2,3)$$

Sam se prepričaj, da se pri rodovnem zakonu $R(0/0)$ prazna mreža napolni s celicami, takoj v naslednjem rodu pa vse celice odmrejo - gre torej za nihalo s periodo dve. Pri rodovnem zakonu $R(2/2)$ smo našli dvoje nihal in enega potnika (slika 1).



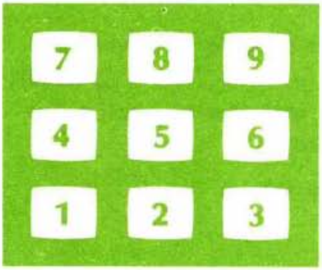
Slika 1 R (2/2)

Posploševanje štetja sosed

Dosedaj smo šteli sosede celic tako, da smo upoštevali vseh osem. Poskusimo sedaj izbor sosed skrčiti. Pravilo za štetje sosed bomo zapisali takole:

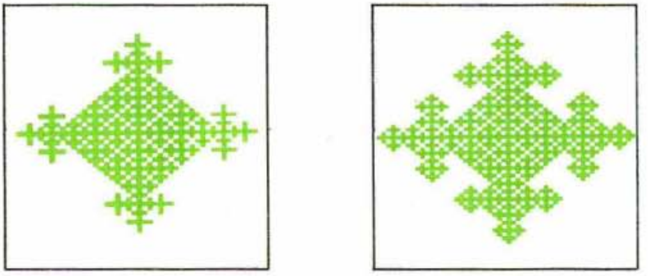
$$S(z_1,z_2,\ldots,z_k)$$

kjer so z_1, ..., z_k imena sosed, katere želimo upoštevati. Odločiti se moramo še, kako naj poimenujemo sosede. Tu se bomo sklicevali na številčnico, ki je verjetno na prav vseh žepnih kalkulatorjih in ima številke razporejene kot na sliki 2. Številka 5 se naj nanaša na našo celico, njenih osem sosed pa se imenuje 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Dosedaj smo torej šteli sosede po pravilu $S(1,2,3,4,6,7,8,9)$.



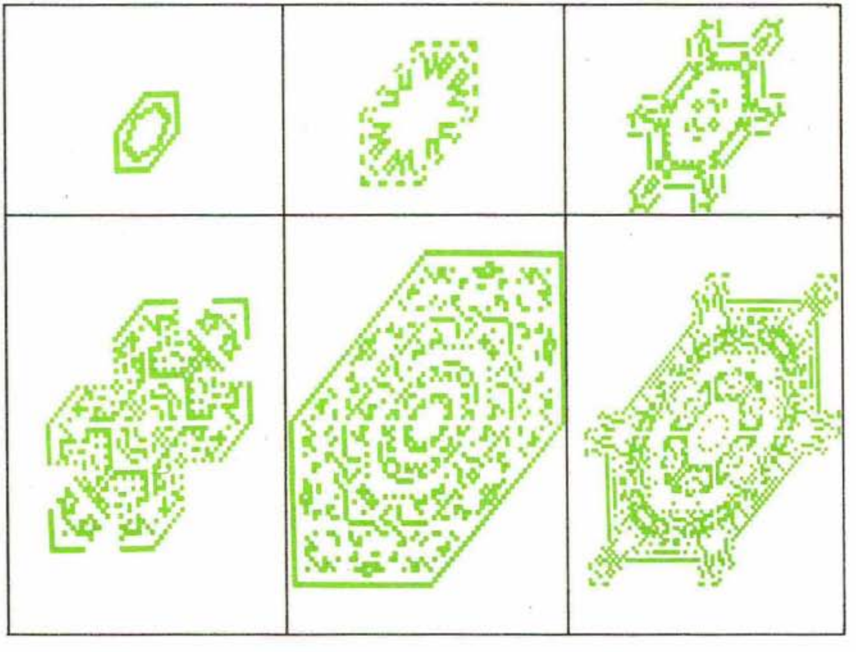
Slika 2

Sedaj je na vrsti presenečenje. Če vzamemo rodovni zakon $R(1/0,1,2,3,4,5,6,7,8)$ in štejemo sosede po $S(2,4,6,8)$ (se pravi zgornji, spodnji, levi in desni sosed), potem dobimo iz ene same celice znano mrežerastko *CRUCICRAX SIMPLEX* (glej Presek številka 3 iz leta 74/75). Slika 3 prikazuje dva rodova iz mrežerastkinega življenja.

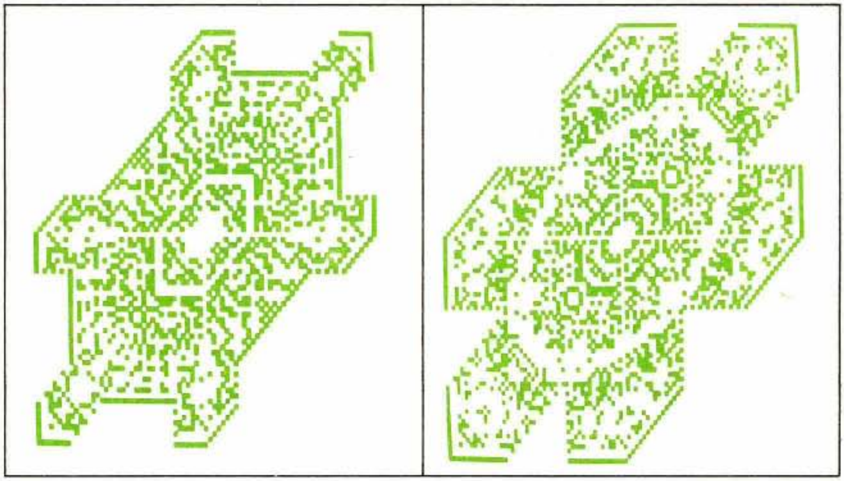


Slika 3. Crucicrax simplex

Na sliki 4 si oglejmo, kaj nastane iz ene celice pri pravilih $R(1/2)$ in $S(1,2,4,6,8,9)$.



Slika 4.1



Slika 4. $R(1/2)$, $S(1,2,4,6,8,9)$

Staranje celic

Celicam lahko dodelimo novo lastnost: starost. Ko se celica rodi, je stara 0 rodov, v vsakem naslednjem rodu pa se starost celice poveča za 1. Podrobnosti moramo predpisati v rodovnem zakonu, na primer:

- celica se rodi s pomočjo dveh sosed, ki sta stari od 3 do 5 rodov (vključno),
- celica se ohrani, če je mlajša od 7 rodov in ima natančno 2 sosedi poljubnih starosti.

Barvanje celic

Celice lahko pobarvamo, poleg tega moramo potem še določiti pomen barv, saj drugače barvanje ni imelo smisla. Pomen barv določimo v rodovnem zakonu, na primer:

- vsaka celica se lahko rodi s pomočjo ali ene rumene in ene zelene sosede ali ene rdeče sosede ali ene zelene in dveh modrih sosed,

- vsaka celica se ohrani, če ima tri sosede poljubnih barv ali eno rumeno in eno rdečo sosedo ali dve oranžni in eno modro sosedo,
- rumena celica postane rdeča, če ima eno modro sosedo,
- vsaka celica postane rumena, če ima dve modri sosedi.

Rodovno pravilo je lahko zelo zapleteno, paziti pa moramo tudi, da pravilo ni protislovno. Zapleteno je tudi samo računanje rodov in bi nam moral tu pomagati kar precej močan računalnik.

Spreminjanje oblike kletk

Namesto kvadratov lahko vzamemo pravilne trikotnike ali pravilne šestkotnike. Sam preštej, koliko sosed imajo lahko celice v takih mrežah. V tej smeri še nismo raziskovali in tako nimamo kaj poročati.

Spreminjanje razsežnosti

Namesto kvadratov lahko vzamemo trirazsežni prostor s kockami. Vsaka kocka ima 26 sosednjih kock. Trikotnike bi lahko posplošili v tetraedre (koliko sosedov ima vsak tetraeder?), lahko pa bi življenjski prostor sestavili tudi iz tristranih ali šeststranih prizem. Tudi v to smer še ni stopilo naše raziskovanje.

Roman Rojko

GRŠKA ABECEDA

Učitelji matematike v uredniškem odboru PRESEKA so nas opozorili, da učenci slabo poznajo grško abecedo, še posebej tiste črke, ki se redko uporabljajo. Tudi pri pisavi le teh imajo ne malo težav. Zato smo v današnji številki Preseka pripravili slikovno križanko, v kateri so upoštevane vse tiskane grške črke. V kolikor zares ne poznate imen grških črk, uporabite pri reševanju križanke matematične in druge priročnike.

Ciril Velkovrh

NALOGE

"TEŽKA" VPRAŠANJA

Vprašanja, ki jih boste prebirali na teh straneh, niso prav nič težka, nudijo pa obilo zabave ob premišljevanju, manj pa ob branju odgovorov. Včasih nas spodbudijo, da si obnovimo znanje, ki smo ga pozabili (ali pa nikoli imeli prav trdnega).

1. V idealno izolirani sobi je le hladilnik z odprtimi vrati. Hladilnik vklopimo ter merimo temperaturo v sobi. Ali temperatura pada, raste ali pa se ne spreminja?
2. V vlaku sedi otrok v zaprtem vagonu. V roki ima vrvico, na koncu vrvice pa je balon, napolnjen s helijem. Vlak, ki je prej vozil po ravni progi, zapelje v krožni ovinek v levo. Na katero stran se nagne balon?
3. Ali veste, kako so se tehtali vesoljci v kapsuli, ki je krožila okrog Zemlje? Pomnite, da je v kapsuli stanje breztežnosti. Ali ima tehtanje v takem primeru sploh kakšen smisel?
4. V kozarcu je voda in 1 cm^3 ledu, ki prosto plava na površini. Vode je ravno toliko, da sega do roba kozarca. Koliko vode steče iz kozarca, ko se led v topli sobi stali?
5. Enako težka fanta na kotalkah preizkušata, kdo je močnejši. Postavita se drug proti drugemu, zaznamujeta na tleh začetni položaj in se nato močno odrineta drug od drugega. Močnejši je tisti, ki se zapelje dlje od označene črte. Ali je tak način merjenja premoči zanesljiv?
6. Ko odpremo pivo ali kislo vodo, se iz steklenice pokadi. Zakaj?
7. Iz prazne steklenice z usti posesamo nekaj zraka in steklenico s prstom zamašimo. Čez nekaj časa prst na hitro odmaknemo, tako da zrak vdre v steklenico in se tlak v njej izenači z zunanjim. Takoj nato steklenico obrnemo in ustje potopimo v vodo. (Poskusite to napraviti sami.) Ali steklenica potegne vodo vase, ali gredo iz steklenice mehurčki zraka, ali pa se ne zgodi nič?

8. Kameleon oceni razdaljo do žrtve iz akomodacije leče v očesu. Če je leča bolj izbočena, je žrtev blizu, če pa manj, pa daleč. Kameleonu so pritrdili pred oko razpršilno lečo, drugo oko pa so mu zakrili. Ali je kameleon premalo iztegnil jezik ali preveč? Mogoče pa ga leča sploh ne moti?

9. Vsi vemo, da se okna orosijo na notranji strani. Ali je mogoče, da se okna zarosijo na zunanji strani?

10. V avtomobilu sta mož in žena. Prvo polovico poti prevozi žena s hitrostjo 50 km/h, drugo pa mož. Kako hitro mora voziti on, da bo povprečna hitrost 100 km/h?

11. Na tehtnici imamo peščeno uro. Ali pokaže tehtnica manj, ko peščena ura "gre"?

12. Na tehtnici imamo kozarec, v njem pa je zaprta muha. Muha lebdi v kozarcu. Ali kaže tehtnica večjo težo ko muha pristane?

13. Na tehtnici imamo kozarec za vlaganje sadja. Na vrvici, ki je pritrjena na pokrovu, visi svinčena kroglica. Ali tehtnica zaniha, ko se vrvica pretrga in pade kroglica na dno kozarca.

14. Na električnem grelniku je zapisano, da je njegova moč 40 W, ko ga priključimo na napetost 12 V. Kolikšen tok teče skozi grelnik? Kolikšen pa, če zmanjšamo napetost na polovico?

Andrej Likar

Dokaži naslednji trditvi;

1. Vsako šestmestno naravno število, pri katerem so številske vsote cifer na 1. in 4. mestu, na 2. in 5. mestu ter na 3. in 6. mestu po 10, je deljivo s 111.
(Primer: 816294; 8 + 2 = 10, 1 + 9 = 10, 6 + 4 = 10)

2. Vsako šestmestno naravno število, pri katerem so številske vsote cifer na 1. in 4. mestu, na 2. in 5. mestu ter na 3. in 6. mestu po 9, je deljivo s številoma 27 in 37.
(Primer: 793206; 7 + 2 = 9, 9 + 0 = 9, 3 + 6 = 9)

Stanislav Horvat

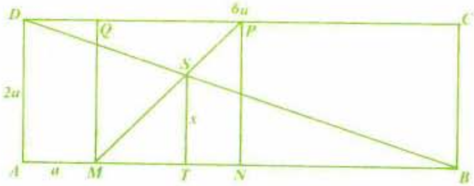
PREMISLI IN REŠI

Rešitev naloge iz tretje številke X. letnika

Dobili smo 14 odgovorov. Poslali so nam jih *Božo Dajčman* iz Novega mesta, *Franci Dimc* iz Medvod, *Irena Drevenšek* iz Maribora, *Franc Jerala* iz Kranja, *Stane Kavčič* iz Horjula, *Juš Kocijan* iz Ljubljane, *Štefan Krampač* iz Želimelj, *Bojan Kuzma* iz Ljubljane, *Helena Lipovec* iz Radovne, *Teja Medved* iz Maribora, *Barbara Motnikar* iz Kamnika, *Hinko Plevnik* iz Gornje Radgone, *Uroš Seljak* iz Nove Gorice in *Dušan Vejnovič* iz Titovega Velenja.

Žreb je določil Francija Dimca, Boža Dajčmana in Hinka Plevnika. Pošiljamo jim *Kratko zgodovino astronomije* Milutina Milankovića, ki je pred kratkim izšla v zbirki Sigma.

Objavljamo pa Dimčevo rešitev, ki je najkrajša:



$$\overline{MT} = x$$

$$\overline{MB} = 5a - x$$

$$\overline{TS} : \overline{AD} = \overline{MB} : \overline{AB}$$

$$x : 2a = (5a - x) : 6a$$

$$x = \frac{5}{4}a$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}\,a}{x} - 1 = \frac{\sqrt[3]{2}\,a.4}{5\,a} - 1 =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2.64}{125}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1024}{1000}} - 1 =$$

$$= \sqrt[3]{1,024} - 1 = 0,794\% \doteq 0,8\%$$

Peter Petek

NA PRESEKOVI ČRPALKI

Teta Amalija je ustavila na Presekovi črpalki, da natoči gorivo. Cene bencina ni poznala. Dvakrat je med točenjem pogledala na števec, videla je le dinarski del cene, par pa ne, saj se je kolesce števca prehitro vrtelo. Poglejte, kaj je videla in povejte ceno litra bencina na Presekovi črpalki!

Rešitve nam pošljite do 1. 10. 1983.

Peter Petek

BISTROVIDEC

ZLOMKI

Ulomek na levi strani enačaja

$$\frac{1\,3\,4\,5\,8}{6\,7\,2\,9} = 2$$

vsebuje vsako izmed cifer od 1 do 9 po enkrat.

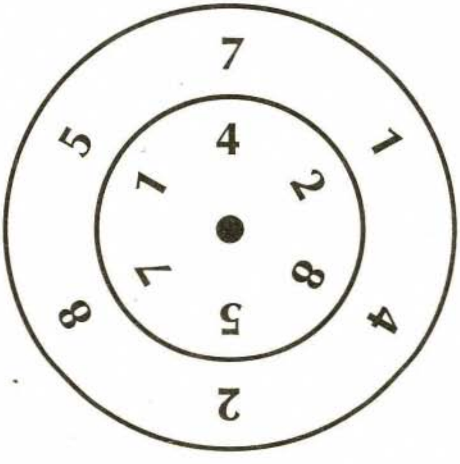
Ali obstajajo tudi podobni ulomki z vrednostmi 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9?

Vladimir Batagelj

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

ŠTEVILSKA VETRNICA

Številsko vetrnico sestavljata večji in manjši krog. Oba izrežeš iz kartona in spneš v središču, tako da sta vrtljiva okoli skupne osi. V smeri vrtenja urnega kazalca na približno enakih razdaljah po obodu zapiši cifre iz števila 1 4 2 8 5 7 . Pazi, da bodo cifre na enem in drugem krogu zapisane tako, da bodo pri vrtenju podpisane ena pod drugo oziroma ena nad drugo.



Prva zanimivost:

Z vrtenjem krogov lahko dobimo podpisane različne cifre. Na primer:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{array}$$

Vzemimo, da sta to dve šestmestni števili in ju seštejmo! Čudno! Vsota je spet šestmestno število, sestavljeno natanko iz istih

$$285714 + 571428 = 857142$$

cifer, ki nastopajo v obeh seštevancih: (1, 2, 4, 5, 7 in 8).

Naloga: Z vrtenjem vetrnice poišči še vse druge pare šestmestnih števil, ki imajo lastnost, da je njuna vsota spet šestmestno število, sestavljeno iz cifer: 1, 2, 4, 5, 7 in 8.

Druga zanimivost: V prejšnji nalogi si pri iskanju parov morda ugotovil, da v posebnih primerih kot vsoto dveh šestmestnih števil s ciframi 1, 2, 4, 5, 7 in 8 dobimo spet šestmestno število 999999. Na primer: $142857 + 857142 = 999999$.

Druga naloga: Poišči vse druge pare šestmestnih števil, katerih vsota je šestmestno število 999999. Pomagaj si s številsko vetrnico!

Tretja zanimivost: Pri množenju števila 142857 s številom 7 dobimo število 999999. Ugotovitev zapišemo kot enačbo $142578 \cdot 7 = 999999$ in to enačbo preoblikujemo v sorazmerje $142578/999999 = 1/7$. Iz zapisanega sorazmerja se vidi, da je število 142578 perioda desetiške številke, s katero zapišemo ulomek $1/7 = 0,\overline{142857}$. Tvegamo še korak dalje in poiščemo periodo desetiške številke, s katero zapišemo ulomek 2/7 ($2/7 = 0,\overline{285714}$). Preseneča nas, da periodo sestavljajo že znane cifre 1, 2, 4, 5, 7 in 8. Isto velja tudi za periode decimalnih števil, s katerimi zapišemo ulomke 3/7, 4/7, 5/7 in 6/7. Z drugimi besedami lahko to zanimivost povemo takole: Če število 142857 pomnožimo z 1, 2, 3, 4, 5 in 6, dobimo vsakič kot produkt šestmestno število, ki ga sestavljajo cifre 1, 2, 4, 5, 7 in 8 (namreč $1/7 \cdot 2 = 2/7 = 0,\overline{285714}$!).

Tretja naloga: Pokaži, da lastnost, ki jo ima številska vetrnica za seštevanje, velja v določenih primerih tudi za odštevanje. Poišči vse pare takih šestmestnih števil, katerih razlika je spet šestmestno število s ciframi 1, 2, 4, 5, 7 in 8.

Četrta naloga: Premisli, ali bi lahko sestavil številsko vetrnico s tremi krogi, tako da bi bila vsota treh že znanih šestmestnih števil spet šestmestno število s ciframi 1, 2, 4, 5, 7 in 8.

Četrta zanimivost: Prej smo pokazali, kako z množenjem števila 142857 po vrsti z 1,2,3,4,5 in 6 dobimo produkte:

1 4 2	8 5 7	5 7 1	4 2 8
2 8 5	7 1 4	7 1 4	2 8 5
4 2 8	5 7 1	8 5 7	1 4 2

Vsako od teh šestmestnih števil lahko razpolovimo, tako kot kaže zgornji primer, in tako dobimo iz vsakega števila dve trimestni števili. Če ju seštejemo, dobimo vselej vsoto 999.

Peta zanimivost: Številska vetrnica, ki smo jo sestavili s številom 142857, je le ena od primerov številskih vetrnic. Obstajajo še druge. Število, ki ga je treba v vetrnico vpisati, je vselej perioda v decimalni številki, s katero zapišemo ulomek $1/a$, pri čemer je imenovalec a praštevilo. V periodi pa mora nastopati $(a - 1)$ decimalnih mest.

Peta naloga: Poišči ulomek, ki se da zapisati z decimalno številko, katerega perioda bo imela zgoraj opisano lastnost. Za to število naredi številsko vetrnico in preizkusi kako od zanimivosti!

Rešitve:

Prva naloga: (142857, 285714), (142857, 428571), (142857, 571428), (142857, 714285), (285714, 428571), (285714, 571428)

Druga naloga: (142857, 857142), (285714, 714285), (428571, 571428)

Tretja naloga: (285714, 142857), (428571, 285714), (428571, 142857), (571428, 428571), (571428, 285714), (571428, 142857), (714285, 571428), (714285, 428571), (714285, 285714), (714285, 142857), (857142, 571428), (857142, 428571), (857142, 714285), (857142, 285714), (857142, 142857).

Četrta naloga: Razlago zanimivosti opremo na računanje z ulomki: $1/7 + 2/7 + 3/7 = 6/7$ in od tod: $142857 + 285714 + 428571 = 857142$!

Peta naloga: $1/17 = 0{,}0588235294117647$

$1/29 = 0{,}0344827586206896551724137931$

Literatura:

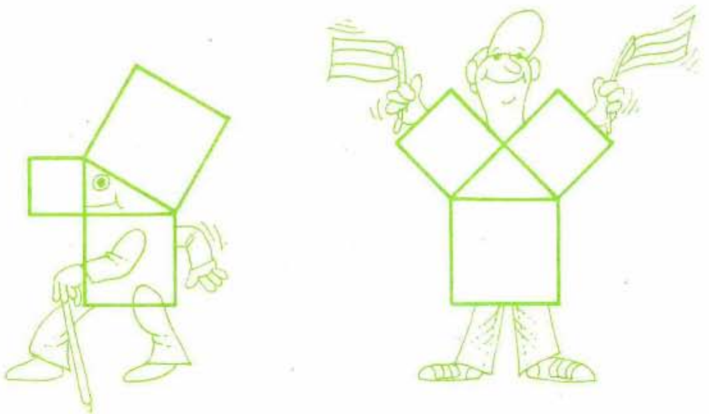
Stanko Prvanović: Zbirka matematičkih zadataka, Tehnička knjiga, Beograd 1966.

Danijel Bezek

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

OSLOVSKI MOST[1][2]

Pri učenju matematike se že v osnovni šoli seznanimo z vsebino *Pitagorovega izreka*. Pitagorov izrek govori o zvezi med dolžinami stranic v *pravokotnem trikotniku*. Tolikokrat in v tako različnih zvezah slišimo zanj, da si upamo njegovo vsebino izdati kar s karikaturo (slika 1).



Slika 1.

---

(1) Tako je v prispodobi Pitagorov izrek poimenoval dr. Milan Vidmar (1885-1962) - znanstvenik elektrotehnik in svetovno znan šahist, ki je leta 1936 napisal knjigo z enakim naslovom.

(2) Rek *oslovski most* (latinsko: *pons asinorum*) je med učitelji matematike po svetu že dolgo znan, vendar običajno označuje trditev, da sta kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika skladna. (Op.ur.)

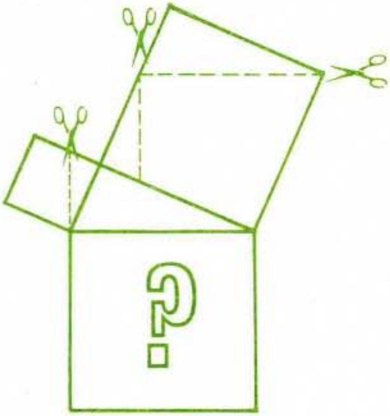
O Pitagorovem izreku in šolarjih je razmišljal Milan Vidmar takole: Vrag vedi, zakaj je Pitagorov stavek postal *oslovski most*. Kot da loči dva svetova, razumnega od nerazumnega, nadarjene od nenadarjenih glav. Saj se suče vendar samo okoli pravokotnih trikotnikov, okoli neznatnega drobca geometrije, ki sama

Slika 2.

nikakor ne napolni duhovnega sveta. Zakaj opazujemo tako pozorno človeka, ki se obregne obenj? Silno smo radovedni, ali ga bo razumel ali ne. Zakaj?
V duhovnem svetu je nešteto sob, katerih vrata se neprestano odpirajo, ker dohajajo neprestano novi posestniki ...Pitagoras je eden izmed mnogih duhovnih zdravnikov, ki čaka na posestnike v zaprti sobi. Zakaj so ravno njegova vrata *oslovski most*?

Sprehod skozi življenje mnogih znamenitih matematikov nam odkrije, da so se mnogi med njimi radi ukvarjali s Pitagorovim izrekom in poskušali odkriti kako posebej zanimivo uporabo tega izreka ali dokaz zanj.

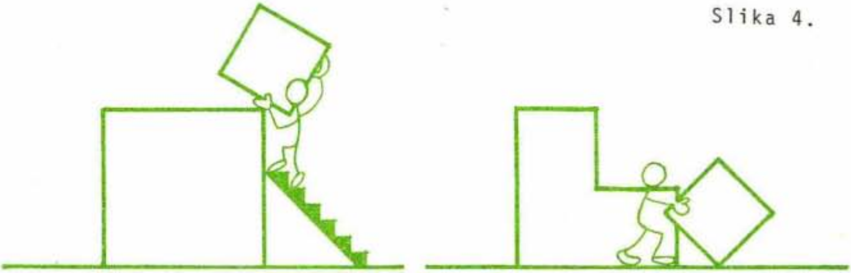
Posebej zanimivi so taki dokazi za Pitagorov izrek, kjer si resničnost trditve ponazorimo s škarjami in modelom. Iz kartona izreži pravokotni trikotnik in kvadrata nad katetama. Oba kvadrata razreži, kot kaže slika 3. Iz razrezanih kosov sestavi kvadrat nad hipotenuzo.



Slika 3.

Kdor pa raje riše, lahko svoje poznavanje Pitagorovega izreka preskusi ob naslednji nalogi:

Slika 4.



Dana sta kvadrata. Nariši tretji kvadrat, čigar ploščina bo v prvem primeru enaka vsoti ploščin obeh kvadratov, v drugem primeru pa enaka razliki ploščin obeh danih kvadratov.

Literatura:
dr. Milan Vidmar: Oslovski most, Ljubljana 1936
Miroslav Živković: Razni dokazi Pitagorine teoreme, Matematički list, Beograd 1980

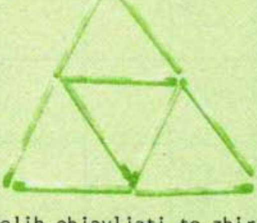
Danijel Bezek

KRATKOČASNE VŽIGALICE*

15. Iz 6 vžigalic sestavi 4 enakostranične trikotnike.

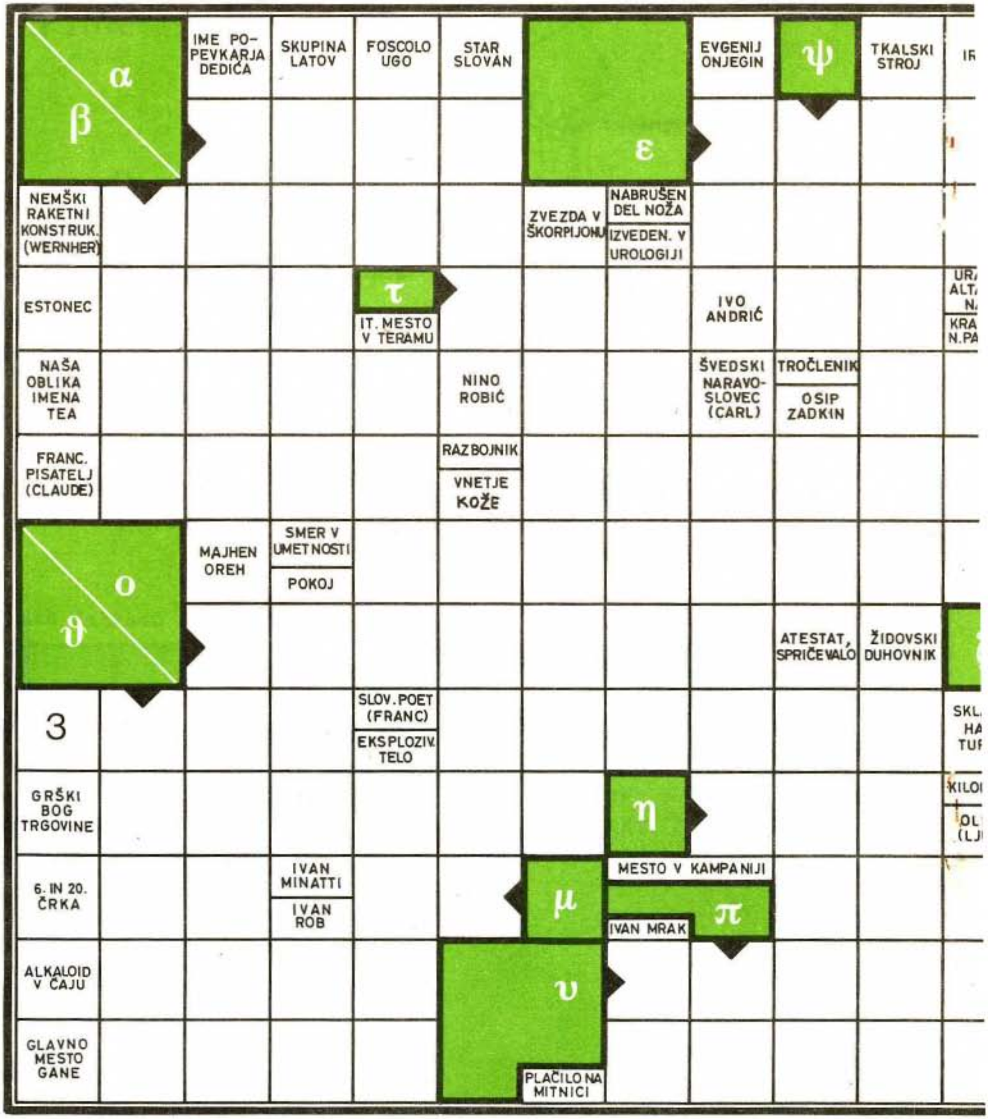
16. Iz zvezde naredi pet kvadratov s premikom osmih vžigalic!

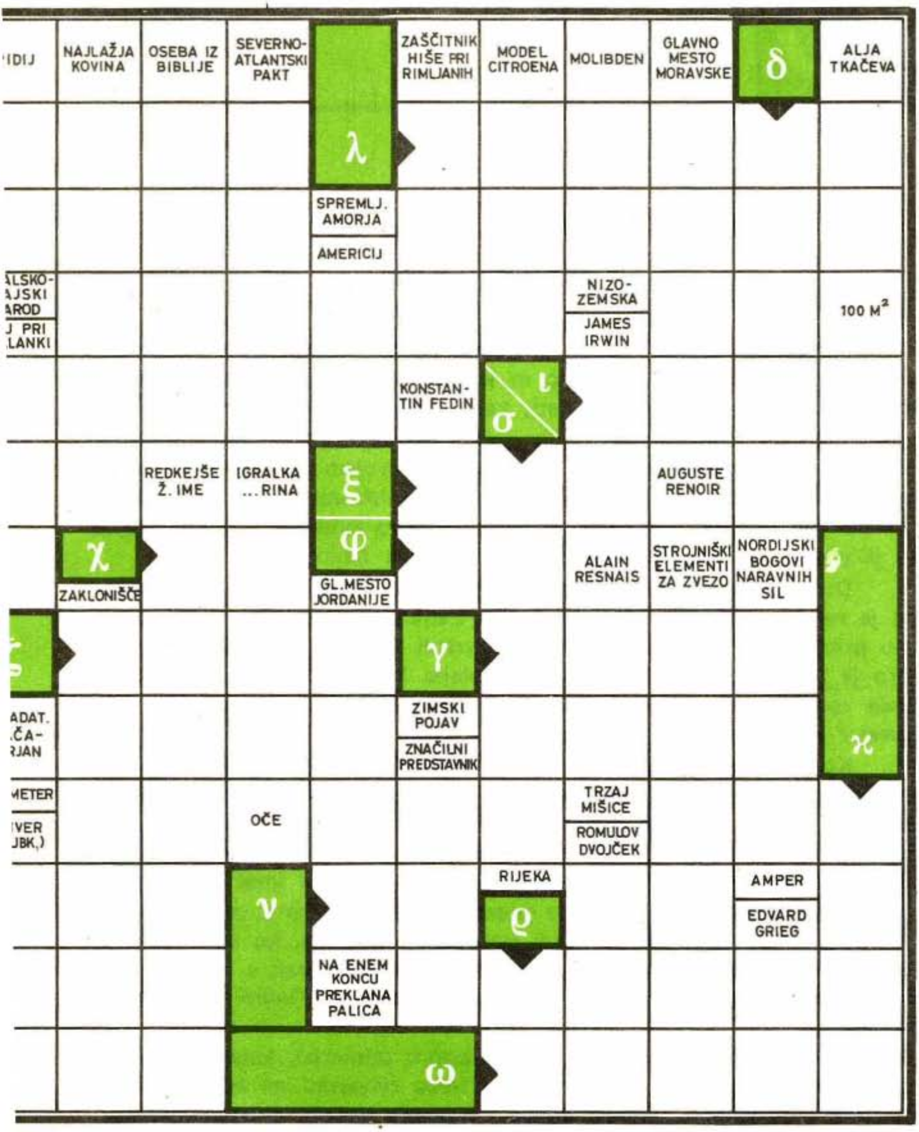
17. Odstrani dve vžigalici, da dobiš dva enakostranična trikotnika!



*V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko zabavnih nalog, ki jo je za Presek pripravil Roman Rojko. (Se nadaljuje)

K R I Ž A N K A "GRŠKA ABECEDA"




IDIJ
NAJLAŽJA KOVINA
OSEBA IZ BIBLIJE
SEVERNO-ATLANTSKI PAKT
λ
ZAŠČITNIK HIŠE PRI RIMLJANIH
MODEL CITROENA
MOLIBDEN
GLAVNO MESTO MORAVSKE
δ
ALJA TKAČEVA
SPREMLJ. AMORJA
AMERICIJ
ALSKO-AJSKI AROD
J PRI LANKI
NIZO-ZEMSKA
JAMES IRWIN
100 M²
KONSTAN-TIN FEDIN
ι
σ
REDKEJŠE Ž. IME
IGRALKA ...RINA
ξ
AUGUSTE RENOIR
χ
φ
ALAIN RESNAIS
STROJNIŠKI ELEMENTI ZA ZVEZO
NORDIJSKI BOGOVI NARAVNIH SIL
ZAKLONIŠČE
GL. MESTO JORDANIJE
γ
ADAT. ČA-RJAN
ZIMSKI POJAV
ZNAČILNI PREDSTAVNIK
ϰ
METER
IVER JBK.)
OČE
TRZAJ MIŠICE
ROMULOV DVOJČEK
RIJEKA
AMPER
ν
ϱ
EDVARD GRIEG
NA ENEM KONCU PREKLANA PALICA
ω

FIZIKA

O MERJENJU TEMPERATURE IN TERMOMETRIH

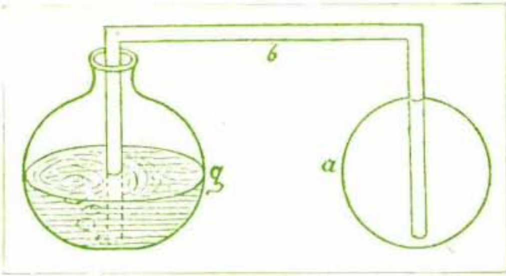
Iz zgodovine fizike

Dandanes nimamo težav, ko želimo v vsakdanjem življenju izmeriti temperaturo: stopimo v trgovino in kupimo termometer. Nekdaj pa ni bilo tako. Zanimivo si je ogledati, kako so zgradili prve termometre in vpeljali pojem temperature. To je dobrodošel zgled, ki pokaže, kako je razvoj fizike pogosto neločljivo povezan z razvojem merilne tehnike. Prve termometre so sestavili tedanji fiziki v svojih laboratorijih in preteči je moralo precej časa, preden so prevzele njihovo izdelavo tovarne. Enako se je godilo tudi drugim merilnim napravam v fiziki.

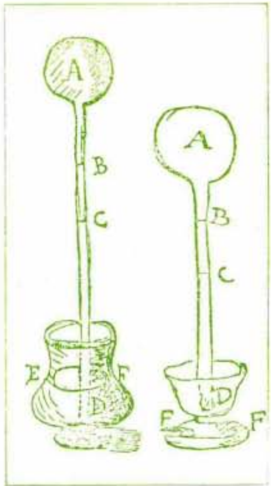
Dolgo časa so se ljudje zadovoljevali s površnim opisom občutka, da je neko telo bolj toplo kot drugo. Lahko so si celo sestavili nekakšno približno *lestvico,* v katero so razvrstili telesa glede na občutek, katero je bolj toplo. Mlačna voda je toplejša kot voda, v kateri plava led, vrela voda toplejša kot mlačna, ogenj toplejši kot vrela voda.
Vendar nas občutek lahko vara.

Ko so ljudje začeli podrobneje opazovati naravo in raziskovati povezave med pojavi, se niso mogli več zadovoljiti s tako približno lestvico. Med prvimi, ki si je prizadeval z merjenjem ugotoviti, kako toplo je kaj, je bil Galileo Galilei (okoli leta 1592). Ni presenetljivo, da se je tudi prvi pravi fizik ukvarjal s to zadevo (seveda je imel že predhodnike) (sl. 1). Galilei je stekleno posodo z ozko cevko z zrakom segrel in potopil cevko v vodo. Voda v cevki se je dvignila, ko se je zrak ohladil (sl. 2). Poslej je gladina kazala, kako topel je zrak v cevki: čim bolj se je segrel, tem niže se je spustila. Pozneje je Galilei zavil cevko navzgor.

Galilei je lahko s svojim *termoskopom* primerjal, katero od dveh teles je toplejša, ne da bi se mu bilo treba sklicevati na občutke (sl. 3). Pri tem je izkoriščal lastnost zraka, da se mu poveča prostornina, ko ga segrejemo. To pa velja le, če se zunanji zračni tlak ne spremeni. Vi-



Sl. 1: Termoskop Filona iz Blzanca iz 3. stoletja pred našim štetjem. Zrak v svinčeni posodi a se raztegne, ko ga segrejemo, in iz cevi b uhajajo skozi vodo v posodi g mehurčki.

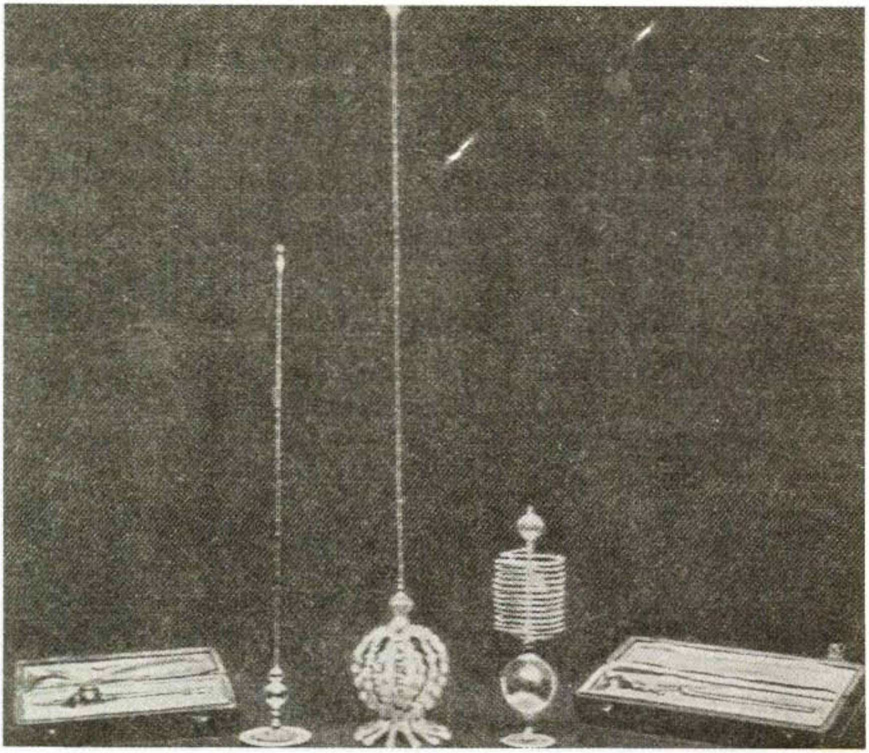


Sl. 2: Risba Galilejevega termoskopa iz Galilejevih zbranih del.

šina vodne gladine v termoskopu je torej odvisna od zunanjega zračnega tlaka, za katerega vemo, da se spreminja z vremenom. Kaže, da se Galilei te pomanjkljivosti ni zavedal.

Galilejevo delo so nadaljevali njegovi učenci in drugi člani *Akademije poskusov (Accademia del Cimento),* ki jo je osnoval v Florenci (današnje Firencah) Leopold Medici leta 1657. Z njo sta sodelovala tudi Evangelista Torricelli, ki je prvi izmeril "težo zraka" ali po naše zračni tlak, in Leopoldov brat toskanski nadvojvoda Ferdinand II. Namesto zraka so uporabili alkohol ("špirit"). Stekleno bučko, ki se je nadaljevala v navpično cevko s konstantnim presekom, so napolnili z alkoholom in jo segreli, da se je gladina dvignila čim više. Nato so cevko zatalili, tako da ni ostalo v njej nič zraka. Ko se je naprava ohladila, se je gladina znižala, nad njo pa je ostal "prazen prostor" z alkoholnimi parami. Taka naprava je izkoriščala lastnost alkohola, da se mu poveča prostornina, ko ga segrejemo. (Pravzaprav bi morali reči: da se mu poveča prostornina bolj kot steklu. Če bi se namreč alkoholu in steklu ob segrevanju prostornina enako povečala, bi bila gladina ves čas na istem mestu.) Sprememba gladine je tem bolj opazna, čim večja je posodica z alkoholom in čim manjši je presek cevi. Podobne termometre z obarvanim alkoholom uporabljamo tu in tam še dandanes.

Nekateri pripisujejo levji delež zaslug Torricelliju, drugi Ferdinandu (že okoli leta 1650), zopet drugi pa akademiji kot celoti. Dejstvo je, da so se *florentinski termometri* (sl. 4) v 17. stoletju razširili po vsej Evropi.



Sl. 4: Termometri *Akademije poskusov* na alkohol, ki so v 17. stoletju postali znameniti kot *florentinski termometri*.

Opisano napravo so morali še umeriti, preden so jo lahko uporabili kot pravi *termometer*. Po daljši negotovosti so uvideli, da je treba predpisati dve stanji pri dveh različnih legah gladine; eno samo stanje ne zadostuje. Zaznamovali so torej lego gladine v prvem stanju in ji pripisali neko temperaturo, lego gladine v drugem stanju in ji pripisali drugo temperaturo, razdaljo med obema legama pa razdelili na določeno število enakih enot. Za temperaturno enoto se je udomačilo ime *stopinja*. Ime izvira od podobnosti s kotno stopinjo, ker je nekdo razdelil temperaturni interval na 360 stopinj, ali pa od stopnje. Glede temperature prvega in drugega izhodiščnega stanja in števila stopinj med obema je skoraj vsak izdelovalec termometrov ponujal svoj predpis. Omenimo le, da je Isaac Newton predlagal za izhodišči ledišče in normalno človeško temperaturo.

Veliko izboljšavo je dosegel Daniel Fahrenheit, ki je pribežal iz Nemčije na Nizozemsko in je slovel kot izdelovalec meteoroloških instrumentov. V Kopenhagnu je obiskal Olafa Roemerja, ki se je tudi ukvarjal z alkoholnimi termometri (pozneje je kot prvi določil hitrost svetlobe). Fahrenheitu pa se alkohol s svojim sorazmerno nizkim vreliščem ni zdel primeren in ga je nadomestil z živim srebrom. Leta 1714 mu je uspelo najti način čiščenja, saj se je neprečiščeno živo srebro lepilo na steno cevke in ni bilo za rabo. Ni maral, da bi morali meteorologi uporabljati negativne temperature, zato je izbral – enako kot Roemer – temperaturo, pri kateri sta v ravnovesju led in vodna raztopina kuhinjske soli. Kot drugo je izbral – enako kot Newton – normalno človeško temperaturo. Prvi je priredil 0 stopinj (^{0}F), drugi pa 96 stopinj. Tako je dosegel dovolj drobno razdelitev, 96 pa je izbral najbrž zaradi tega, ker je deljivo z 2, 3, 4, 6, 8 in 12.

Fahrenheitova lestvica se je hitro razširila po vseh angleško govorečih deželah in jo pogosto uporabljajo še danes, le da je določena malo drugače kot nekdaj: 32 ^{0}F ustreza ledišču 212 ^{0}F pa vrelišču vode pri navadnem tlaku, tako da je normalna človeška temperatura 98,6 ^{0}F in ne 96^{0}. (Ta podatek pride prav pri gledanju ameriških filmov.) Pri nas se Fahrenheitova lestvica ni udomačila. Živosrebrne termometre pa uporabljajo vsi. Živo srebro ima namreč pred alkoholom to prednost, da se razširja ob segrevanju bolj enakomerno.

Kdo bi si mislil, da poznamo danes astronoma Andersa Celsiusa (Celzija) le po njegovi lestvici za živosrebrni termometer. Leta 1742 je priredil vrelišču vode 0 stopinj in ledišču 100 stopinj. V tem je sledil predlogu člana Akademije poskusov Carla Rinaldinija iz leta 1694. Naslednje leto pa se je Celzij premislil in stvar zasukal tako, kot jo poznamo še danes. Zato ima velike zasluge njegov astronomski tovariš Martin Strömer. Mednarodni odbor za uteži in mere je leta 1948 potrdil *stopinjo Celzija* (^{0}C) kot enoto za temperaturo in imenoval lestvico po Celziju. Lestvico uporabljamo v vsakdanjem življenju in pogosto tudi v naravoslovju še dandanes. Naš zakon o merskih enotah in merilih iz leta 1976 to dopušča, čeprav predpisuje drugo lestvico za temperaturo.

Tudi zgodba o poti do te lestvice je zanimiva. Guillaume Amontons je razvil Galilejev termoskop v drugo smer. Cevko je zaprl z živim srebrom in poskrbel, da se je gladina živega srebra vrnila v prvotno lego, potem ko je zrak segrel. To je dosegel z dvigovanjem posode z živim srebrom. Čim bolj je segrel zrak, tem večja je bila višinska razlika med gladinama živega srebra v posodi in v cevki. Temperaturo je torej določil preko tlaka. Njegova naprava je bila prednica *plinskega termome-*

tra s konstantno prostornino. (Galilejev termoskop pa je bil prednik *plinskega termometra pri konstantnem tlaku.)* Amontons je prvi ugotovil, da vrejo kapljevine pri danem tlaku vedno pri enaki temperaturi. Šele po tem odkritju je bilo mogoče uporabiti kot izhodišče vrelišče vode pri navadnem tlaku.

Amontons je tudi raziskoval zvezo med prostornino plina in njegovo temperaturo. Dokopal se je do spoznanja, da je pri konstantnem tlaku sprememba prostornine zraka sorazmerna s spremembo temperature. Naj tej osnovi je razvil predstavo o "absolutnem mrazu", pri katerem se plin ne more več krčiti. Svoje izsledke je objavil leta 1696, a so ostali sto let neopaženi.

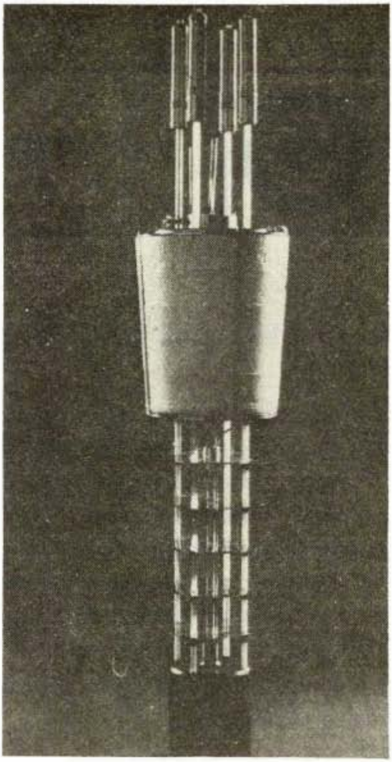
Mimogrede omenimo Reneja de Reaumurja, ki je poskušal izboljšati Amontonsov termometer. Potem pa je zavrgel plinski termometer in uporabil kapljevinskega z mešanico vode in alkohola (v razmerju 1 : 5). Njegova mešanica je imela pri ledišču in pri vrelišču prostornini v razmerju 1000 : 1080, zato je uvedel lestvico z 80 stopinjami (°R). Nekateri starejši ljudje se še spominjajo termometrov, na katerih je bila poleg Celzijeve in Fahrenheitove lestvice navedena še Reaumurjeva.

Jacques Alexandre Charles je prišel sto let po Amontonsu do enakih spoznanj, ne da bi vedel za njegovo delo. Trdil je, da postane pri dovolj nizki temperaturi prostornina plina enaka nič, in je po tem sklepal, da v naravi ne more biti nižjih temperatur. Charles svojih izsledkov ni objavil, pač pa je o podobnih poskusih poročal Joseph Louis Gay—Lussac. Leta 1802 se je prepričal, da je za različne pline sprememba prostornine sorazmerna s spremembo temperature. Vsi bi imeli prostornino enako nič pri isti temperaturi.

Charlesove izide je leta 1848 proučeval William Thomson (lord Kelvin). Za razliko od Charlesa je menil, da ne postane prostornina plinov pri dovolj nizki temperaturi enaka nič, ampak da se pri tej temperaturi prenehajo gibati molekule. Predlagal je *absolutno (Kelvinovo) lestvico,* ki je v veljavi danes. V tej lestvici priredimo ravnovesnemu stanju ledu, kapljevinske vode in vodne pare temperaturo 273,16 K. (Razmerje temperatur je določeno termodinamično (Presek X, 1. štev., str. 31).) S tem dosežemo, da je 1 kelvin enako velik kot stopinja Celzija. *Absolutni nični* 0 K ustreza – 273,15 (ali približno – 273) stopinj Celzija, ledišču pa 273,15 K (ali približno 273 K). Absolutne ničle ni mogoče doseči, lahko se ji le poljubno približamo.

Iz zgodbe se lahko marsičesa naučimo. Dokler niso izdelali prvega zanesljivega termometra, sploh ni bilo mogoče vpeljati temperature. Izhodiščni stanji je bilo treba izbrati, kakor je najbolje ustrezalo potrebam. Najboljši je najpreprostejši predpis. Množica lestvic, ki so jih predlagali v

Sl. 5: Sodobni plinski termometer s konstantno prostornino v ameriškem državnem uradu za standarde. Na dnu slike je steklena posoda, ki jo obdaja posoda iz kovine, da se zares ne spremeni njena prostornina, ko se poveča tlak plina. S plinskim termometrom je določena temperaturna lestvica med 5 K in 1337 K(tališčem zlata pri navadnem na tisočinko kelvina natančno. Slika je iz članka L.A.Guilderja, The measurement of termodynamic temperature, Physic Today, december 1982.



18. stoletju, ne pomeni, da so tedanji fiziki ravnali nepremišljeno. Enako kot današnji so si prizadevali dobiti notranje usklajeno sliko o svetu, le da so razpolagali z manj podatki. Prav zato, ker spočetka niso vedeli, da se pri danem tlaku kapljevina strdi vedno pri enaki temperaturi in vedno pri enaki temperaturi vre, so se odločali za izbire, ki se danes zdijo nenavadne. Seveda je bolje uporabiti plinski termometer kot kapljevinski, ker pri plinskem rezultati niso odvisni od kemijske sestave merilne snovi. Vendar je bila v vmesnem času uporaba kapljevinskih termometrov utemeljena, ker še niso vedeli, da se vsi plini obnašajo podobno in ker so kapljevinski termometri priročni.

Današnja definicija temperature krona delo iz preteklih stoletij. Seveda pa fiziki tudi dandanes niso brez skrbi, ko gre za merjenje zelo visokih in zelo nizkih temperatur in ko si prizadevajo, da bi čim natančneje merili temperaturo.

Janez Strnad

TEKMOVANJA - NALOGE

9. PREDTEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA DIJAKE SREDNJIH ŠOL

Letošnjega predtekmovanja se je udeležilo rekordno število srednješolcev: kar 1300 dijakov iz 32 srednjih šol iz vse Slovenije je v soboto, 12. marca, reševalo naloge, ki jih je pripravila Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli. Tokrat smo se člani Komisije ušteli v presoji zahtevnosti nekaterih predlaganih nalog. Tako se je izkazalo, da je bila za veliko večino dijakov prvega razreda druga naloga pretežka, ostale tri pa so bile ravno pravšnje. Prav tako je bila druga naloga trd oreh za dijake tretjega razreda, saj jo je ugnalo le nekaj dijakov. Vendar pa so tudi druge naloge mnogim povzročajo precej težav. Bralce vabimo, da se ob reševanju nalog o tem sami prepričajo.

NALOGE S PREDTEKMOVANJA

1. RAZRED

1. Poiščite tisto racionalno število x, ki ustreza enačbi

$$0,7\overline{72}.0,\overline{36} + x = 1$$

2. Naj bosta m in n naravni števili, $m < n$. Dokažite, da število $2^{2^m} + 1$ deli število $2^{2^n} - 1$!
3. Dve medsebojno pravokotni ravnini sekata dolg valj s polmerom r pod kotom $45°$. Oba preseka imata edino skupno točko na plašču valja. Izračunajte prostornino telesa, ki ga ravnini odrežeta od valja!

4. Avtobusna proga povezuje kraja A in B. Avtobusi vozijo od kraja A do B 60 minut, od B do A pa 45 minut. Na vsaki od obeh končnih postaj stojijo po 10 minut. Koliko vozil potrebujemo, če naj avtobusi vozijo v presledkih po 25 minut?

2. RAZRED

1. Določite celi števili x in y tako, da bo

$$\frac{x}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=0$$

2. Enotski vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ oklepajo med sabo kote $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 30^\circ$, $\sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = 150^\circ$ in $\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = 30^\circ$. Izračunajte dolžini diagonal paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ in $\vec{n} = -3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$!

3. Za stranice pravokotnega trikotnika velja: $a < b < c$ in $a + c = 2b$. Izračunajte $\operatorname{tg}\alpha$!
4. Utemeljite odgovor na vprašanje: ali je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{2^x - 1} + \frac{x}{2}$$

soda, liha ali ne eno ne drugo?

3. RAZRED

1. Dokažite, da pri lihih m in n enačba

$$x^2 + mx + n = 0$$

nima racionalnih korenov!
2. Točka T leži v ravnini enakostraničnega trikotnika ABC in je od A oddaljena 3cm, od B 5cm in od C 8cm. Koliko meri stranica trikotnika ABC?
3. Enačba $x^3 + ax^2 + bx + 14 = 0$ $(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$ ima koren $x = 2 - \sqrt{3}i$. Poiščite druga korena in določite koeficienta a in b!
4. Dokažite: za poljubna tri pozitivna števila x, y in z velja neenačba

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq 4(x - z)$$

4. RAZRED

1. Dokažite, da v razvoju binoma $(1 + i)^{4k+2}$ velja: vsota členov na lihih mestih je enaka 0!
2. Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{x}$$

3. Naj bosta p in q naravni števili, za kateri je

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{27}$$

Dokažite, da je število p deljivo z 41!

4. Na tekmovanju ima vsaka država ekipo s tremi člani. V prvem delu tekmovanja tekmujejo med sabo ekipe, v drugem posamezniki. Nekdo je opazil, da je bilo število vseh podelitev kolajn v prvem delu 3/8 števila podelitev v drugem delu; hkrati pa so se na vsakem delu razvrstile vse možne razporeditve po treh zastav. Koliko držav je sodelovalo na tekmovanju? Koliko podelitev je bilo v prvem in koliko v drugem delu?

Po pregledu rešitev so profesorji matematike in fizike predlagali Komisiji, da povabi na republiško tekmovanje kar 174 dijakov prvega, 85 dijakov drugega, le 47 dijakov tretjega in 66 dijakov četrtega razreda. Odločitev o izbiri je bila težka le za prvi razred: kar 73 dijakov je pravilno rešilo tri naloge, le 19 pa jih je doseglo še kakšno točko več. Odločili smo se, da lahko na republiško tekmovanje pridejo tudi tisti dobitniki zlatih Vegovih priznanj v prejšnjem šolskem letu, ki so pravilno rešili tri naloge. Tako smo izbrali 38 dijakov prvega, 32 dijakov drugega, 29 dijakov tretjega in 33 dijakov četrtega razreda. Omeniti pa velja še tole: na predtekmovanju so uspešno sodelovali tudi dijaki prvih in drugih razredov srednjih šol, ki v svojem programu nimajo naravoslovno-matematične usmeritve. Upamo, da bo to vzpodbudilo profesorje in dijake katere od šol, ki letos niso sodelovale, da se prihodnje leto vključijo v tekmovanje mladih matematikov.

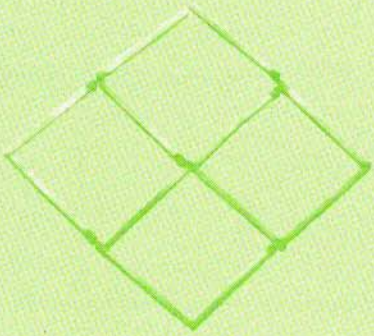
Gorazd Lešnjak

KRATKOČASNE VŽIGALICE - REŠITVE S STRANI 31.

REŠITVE S STRANI 31.

15. Z mirno roko lahko sestaviš tetraeder (pravilna tristrana piramida).

16.



17.

27. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnje republiško tekmovanje je bilo 2. aprila 1983 v Škofji Loki. Udeležilo se ga je 135 mladih matematikov iz vse Slovenije (42 učencev prvih razredov, 32 učencev drugih razredov, 29 učencev tretjih razredov in 32 učencev četrtih razredov). Tekmovanje je organizirala *Gimnazija "Boris Ziherl"* v prostorih šolskega centra *"Boris Ziherl"* v Škofji Loki.

Na svečani otvoritvi so tekmovalce pozdravili ravnateljica Gimnazije *Vladka Jan*, predsednik komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli *Tomaž Pisanski* in predstavnik Zavoda za šolstvo iz Kranja *Lojze Malovrh*.

Ob 10. uri se je začelo reševanje nalog, ki jih je pripravila komisija za popularizacijo matematike. Za reševanje so tekmovalci imeli dve uri in pol časa.

NALOGE S TEKMOVANJA:

1. RAZRED

1. Poišči vsa šestmestna števila z lastnostjo: če zamenjamo prvo in drugo trojico njegovih cifer, dobimo šestkratnik tega števila!
2. Pokaži, da enačba
$$x + y + z = 8k + 7$$
nima celoštevilskih rešitev! ($k \in Z$)
3. V enakostraničen trikotnik z osnovnico a včrtamo štiri kroge s polmerom r tako, da je središče enega izmed njih središče trikotnika in da se preostali trije dotikajo po dveh stranic in srednjega kroga. Izračunaj razmerje $r : a$!
4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje krivulja z enačbo
$$|x + y + 4| + |2x - y - 1| = 3$$

2. RAZRED

1. Stranico AB paralelograma $ABCD$ razdelimo na n enakih delov. Prvo delišče P pri oglišču A zvežemo z ogliščem D. Dokaži, da daljica PD odseka na diagonali AC daljico AQ z dolžino $1/(n + 1)$ diagonale!
2. Naj bo $c > 0$, $a > c$, $b > c$. Pokaži, da velja neenačba
$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)}$$
3. Izven kroga s polmerom r leži točka T. Poišči tisto premico skozi T, ki seka krožnico v točkah A in B tako, da je $\overline{TA} = \overline{AB}$! Koliko rešitev ima naloga?
4. V trapezu z osnovnicama a in c ter višino v potegnemo tisto vzporednico osnovnicama, ki razdeli trapez na ploščinsko enaka dela. Izračunaj njeno dolžino!

3. RAZRED

1. Če tangens enega notranjega kota trikotnika povečamo za 1, dobimo tangens drugega, če pa ga zmanjšamo za 1, dobimo tangens tretjega notranjega kota. Koliko meri ploščina tega trikotnika, če poznamo polmer očrtanega kroga?
2. Dokaži, da za notranje kote trikotnika velja:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

3. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$4z^2 + z + k|z^2| = 0$$

Pri tem je k poljubno realno število!
4. Dokaži, da polinom p s celoštevilskimi koeficienti, za katerega sta $p(0)$ in $p(1)$ lihi celi števili, nima nobenega celoštevilskega korena!

4. RAZRED

1. Tangenta v poljubni točki T krivulje $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ seka abscisno os v točki M, vzporednica z ordinatno osjo skozi točko T pa jo seka v točki N. Pokaži, da je $\overline{OM} = (n - 1)\overline{MN}$, kjer je O koordinatno izhodišče!
2. Dokaži, da za vsa naravna števila n, večja od 1, velja

$$\sqrt{1.2} + \sqrt{2.3} + \ldots + \sqrt{n(n-1)} + \sqrt{n.1} < \frac{n.(n+1)}{2}$$

3. Reši enačbo

$$\frac{\log(x^2)}{\log^2 x} + \frac{\log(x^3)}{\log^3 x} + \ldots = 8$$

4. Šahovski konjiček skače po šahovnici, veliki 1983 x 1983. Svojo pot začne v levem spodnjem kotu. Določi najmanjše število skokov, ki jih mora narediti, da pride v zgornji desni kot!

Po končanem tekmovanju so se dijaki odpeljali v Železnike, kjer so jim v tovarni ALPLES pripravili kosilo in razkazali računski center. Potem so se odpeljali še v Dražgoše, kjer so si ogledali spomenik dražgoški bitki in kraje, kjer je bitka potekala.

Medtem so člani tekmovalne komisije ob pomoči spremljevalcev ekip pregledali izdelke tekmovalcev. Število srednješolcev je bilo precejšnje, zato je tudi pregledovanje izdelkov trajalo precej časa. Dijaki so se zelo dobro odrezali, zato se je komisija odločila kar za 23 nagrad in 26 pohval. Tekmovalna komisija je nagrade in pohvale podelila na svečanosti ob koncu tekmovalnega dne.

NAGRAJENI IN POHVALJENI TEKMOVALCI:

1. razred: 1. nagrada: *FABČIČ Jože*, SNMKSŠ Postojna;
2. nagrada: *VASLE Tadej*, SŠC RM Kamnik;
ŽELJKO Matjaž, SŠR Ljubljana;
KOKOL Damjana, Gimnazija Kranj;
3. nagrada: *FELDIN Aljoša*, Gimnazija Kranj;
GORNIK Davor, GMZ Maribor;
OZBIČ Lidija, SŠZD Nova Gorica;
HLEBEC Mojca, SŠZD Nova Gorica;
Pohvale: *PODGORELEC David*, GMZ Maribor;
VIDMAR Matija, SNŠ Ljubljana;
INDIHAR Mojca, GMZ Maribor;
POPOVIĆ Pavle, SNŠ Ljubljana;
PODGORNIK Primož, SETŠ Ljubljana;
MOLAN Gregor, SENMPŠ Brežice;
JURKOVIČ Ivan, SPNMŠ Koper;
TOPIĆ Marko, SNŠ Ljubljana;
LEVART Peter, SŠR Ljubljana;

2. razred: 1. nagrada: *BIASIZZO Toni*, SNMKSŠ Postojna;
DRNOVŠEK Roman, SNŠ Ljubljana;
3. nagrada: *KOSELJ Marko*, ŽIC Jesenice;
STRLE Sašo, SŠE Ljubljana - Šentvid;
GORŠE Dušan, SNŠ Ljubljana;
Pohvale: *JUVAN Martin*, SNŠ Ljubljana;
ROUS Marko, SNŠ Ljubljana;
PODGORNIK Aleš, SPNMŠ Koper;
KOBE Zdravko, SNŠ Ljubljana;
ZAVADLAV Mare, SŠR Ljubljana;
BOLČINA Marijan, SŠZD Nova Gorica;
JEREBIC Izidor, Gimnazija Kranj;

3. razred: 1. nagrada: *ŽEFRAN Miloš*, SŠZD Nova Gorica;
SELJAK Uroš, SŠZD Nova Gorica;
2. nagrada: *ŠKARABOT Jure*, GMZ Maribor;
ROBAR Vlado, GMZ Maribor;
3. nagrada: *VINDŠNURER Primož*, SŠZD Nova Gorica;
Pohvale: *GRUDEN Stanko*, SNMŠ Idrija;
JAKLIČ Boštjan, SNŠ Ljubljana;
PETROV Aleksander, SNŠ Ljubljana;
PANGERŠIČ Joža, SŠNMEU Trbovlje;
DOMA Mitja, SNŠ Ljubljana;

4. razred: 1. nagrada: *MOZETIČ Dean*, SPNMŠ Koper;
2. nagrada: *PEPELNJAK Ivan*, SNŠ Ljubljana;
RODOŠEK Robert, GMZ Maribor;
3. nagrada: *CEDILNIK Marjeta*, SNŠ Ljubljana;
TURNŠEK Aleksej, SŠ I.C. Ljubljana;
Pohvale: *ZALAR Borut*, SŠPTNU Novo mesto;
MOTNIKAR Barbara, SŠC R.M. Kamnik;
KOCIJAN Juš, SETŠ Ljubljana;
BLAZNIK Polona, SNŠ Ljubljana;
MENCIN Alenka, SNŠ Ljubljana.

Tekmovanje so denarno podprli delavci združenega dela škofjeloške občine, največ tovarna pohištva ALPLES v Železnikih. K dobremu počutju tekmovalcev, spremljevalcev in tekmovalne komisije je pripomogel tudi *Dom učencev* v Škofji Loki. Tu so prenočili tekmovalci iz oddaljenih krajev. Za tekmovalno komisijo, spremljevalce in tiste dijake, ki so takoj po tekmovanju odšli domov, je Dom učencev pripravil tudi kosilo.

Tekmovalci so v spomin prejeli knjige iz zbirke *Sigma*, *Presekove značke*, *Bilten tekmovanja* in tiskovino o Škofji Loki.

Ob koncu se zahvaljujem vsem, ki so pripomogli, da je tekmovanje uspelo.

Marija Rovtar

Mohar B., Zakrajšek E., UVOD V PROGRAMIRANJE. - Ljubljana : DMFA SRS, 1982. - 180 str. - (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 18) Cena 160.- din (200.-din)

Batagelj V., Mohar B., Petkovšek M., Pisanski T., Zakrajšek E., UVOD V RAČUNALNIŠTVO : NALOGE. - Ljubljana : DMFA SRS, 1983. - 96 str. - (Matematični rokopisi ; 6) Cena 160.-din (200.-din)

Za dijake srednjih šol, ki se zanimajo za računalništvo, sta ti sve knjigi dober vir informacij. Uvod v programiranje natančno in s primeri razloži programski jezik PASCAL, ki je za splošne računalniške obdelave najbolj primeren. Opozoriti velja, da je za popolnega začetnika nekoliko prezahteven učbenik, saj zahteva nekaj predznanja. Uvod v računalništvo : naloge je zbirka domačih nalog s kolokvijev in izpitov pri predmetu Uvod v računalništvo na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Za marsikoga bo veliko nalog nerazumljivih, ker snovi tega predmeta ne pozna, vendar bo druge lahko rešil, če le pozna programski jezik PASCAL. Kdor se spoprime z obema knjigama, ki nista lahko branje, naj upošteva naslednji recept:

Ponavljaj:
  Knjigo preberi. Vse, kar je nerazumljivega, pozabi.
  Če je kaj ostalo v tvojem spominu,
    potem zapiši nekaj programov (nalogo si izmisli sam ali
    poišči v Uvodu v računalništvo : naloge tako, da jo razumeš ,
    dokler se ti ne zdi, da knjigo v celoti razumeš.

Andrej Kmet

REŠITVE NALOG

"T E Ž K A" VPRAŠANJA – rešitev s strani 22.

Ko ste preleteli vprašanja, še ne iščite odgovorov. Pretehtajte svoje odgovore, šele potem jih primerjajte z našimi. Naši odgovori so takšnile.

1. Temperatura raste, ker dela motor hladilnika.
2. Balon se nagne v levo, torej proti središču krožnega ovinka.
3. Tehtanje ima tudi v vesolju smisel, saj nas zanima, kolikšna je masa človeka (kar je pomemben zdravstveni podatek o astronavtih). Tehtali so se tako, da so stopili na podstavek, ki je bil z vzmetjo povezan s kapsulo. Potem so se zanihali in merili frekvenco tega nihanja. Iz le-te so z znanim podatkom o koeficientu vzmeti določili maso.
4. Prav nič. Voda iz raztaljenega ledu ravno zapolni prostornino, ki jo je led izpodrival (Arhimedov zakon).
5. Tak način sploh ne deluje. V idealnem primeru (enaka tla, kotalke in enaka masa fantov) se oba ustavita enako daleč od začetne črte, pa čeprav potis ka le eden, drugi pa sploh ne (akcija – reakcija).
6. Zrak (plin) nad zaprtim pivom ima večji tlak od zunanjega. Ko zamašek na hitro odpremo, se zrak v steklenici na hitro razpne in zato ohladi pod rosišče; zato se naredi megla.
7. Ko zunanji zrak vdre v steklenico, se zrak v steklenici segreje. Voda se dviga v steklenico, ker se zrak ohlaja, tlak pa pada pod zunanji zračni tlak.
8. Pri ljudeh je mehanizem zaznave globine osnovan primarno na primerjavi slik, ki prideta v možgane iz obeh očes. Menili so, da je pri kameleonu podobno. Opazili pa so, da kameleon zelo natančno zadene žrtev z jezikom tudi, ko gle da le z enim očesom. Razdaljo do žrtve "izmeri" iz stopnje izbočenosti očesne leče, ko izostri sliko žrtve na mrežnici. To so preverili tako, da so dali kameleonu pred oko razpršilno lečo. Zaradi te leče mora kameleon bolj izbočiti svojo očesno lečo, če hoče izostriti sliko žrtve na mrežnici, kot če razpršilne leče

ni. Zato sklepa, da je žrtev bliže, kot je v resnici in premalo iztegne jezik. Natančnost, s katero kameleon zadeva svoje žrtve je prav presenetljiva, saj se bet jezika sunkovito ustavi morda desetinko milimetra pred žrtvijo. Zato se da izteg jezika zelo natančno meriti in primerjati z računi. Popolno ujemanje meritev z računi potrjuje, da je stopnja izbočenosti očesne leče (akomodacija) kameleonu dovolj dober podatek za "izračun" razdalje do žrtve.

9. Okna se lahko zarosijo le na tisti strani, kjer je topleje. V hišah, ki čez zimo niso bile kurjene, je lahko spomladi zunaj bolj toplo kot v hiši. Tedaj se okna orosijo na zunanji strani.

10. Vzemimo, da je pot dolga 100 km. S povprečno hitrostjo 100 km/h prevozimo to pot v eni uri. Ker je žena vozila pol poti s hitrostjo 50 km/h, je že vozila eno uro. Mož torej ne more nadomestiti zamujeno in ne more doseči povprečne hitrosti 100 km/h.

11. Tehtnica kaže enako v obeh primerih. Sicer je res, da del peska, ki pada, nič ne tehta, vendar je treba upoštevati, da je potrebna dodatna sila navzgor, ki padajoči pesek spet ustavi.

12. Ne, tehtnica ves čas kaže tudi težo muhe. Ko lebdi, se njena teža prenaša po zraku na kozarec.

13. Da. Ko se vrvica pretrga, prosto padajoča kroglica nič ne tehta. Ko prileti kroglica na dno kozarca, potisne skodelico navzdol. Pri padajočem pesku imamo podobne razmere, le da curek peščenih zrnc neopazno niha tehtnico.

14. Tok, ki teče skozi grelnik, je 3 1/3 A, pri dvakrat manjši napetosti pa je dvakrat manjši (Ohmov zakon).

Andrej Likar

NALOGE - REŠITVE S STR. 23.

1. Vsa taka števila imajo obliko

$$N = a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + (10-a).10^2 + (10-b).10 + (10-c) =$$
$$= a.10^2.(10^3-1) + b.10.(10^3-1) + c.(10^3-1) + 10.(10^2+10+1) =$$
$$= a.10^2.999 + b.10.999 + c.999 + 10.111 =$$
$$= 111 \,.\, (a.10^2.9 + b.10.9 + c.9 + 10)$$

Sledi: Število N je deljivo s 111.

2. Podobno dokažemo tudi drugo trditev.

Stanislav Horvat

REŠITVE NALOG Z REPUBLIŠKEGA PREDTEKMOVANJA IZ MATEMATIKE
(TEKSTI NALOG SO BILI OBJAVLJENI V PRESEKU 10 (1982/83) STR. 46)

1. razred

1. Najprej poiščimo ničle za izraze, ki leže med znaki za absolutno vrednost:

   1) za $|a|$ je ničla $a = 0$

   2) za $|2a - 4|$ pa $a = 2$.

   Celotno številsko premico sedaj razdelimo na tri intervale, katerih meje so najdene ničle. Te intervale bomo obravnavali ločeno.

   1) $a \leq 0$: V tem primeru dobimo iz dane enačbe enačbo:
   $a - 2a = -2a + 4$, ki nam da $a = 4$.
   Vendar to ni iskana rešitev, saj ne velja $a \leq 0$.

   2) $0 < a \leq 2$: Tokrat imamo srečo. Rešitev enačbe:
   $a + 2a = -2a + 4$ je $a = \frac{4}{5}$,
   kar odgovarja vsem pogojem.

   3) $2 < a$: Še enkrat ponovimo isti postopek in iz enačbe:
   $a + 2a = 2a - 4$ dobimo $a = -4$,
   kar zopet ne ustreza obravnavanemu intervalu.

   Tako lahko zaključimo:
   Rešitev enačbe je $a = \frac{4}{5}$.

2. Naloga zahteva, da seštejemo šest ulomkov, kar v splošnem pomeni le precej računanja. V danem primeru pa se celo vse poenostavi, če vsoti prvih dveh členov zaporedoma prištevamo še preostale. Torej: seštejemo prva dva člena:

   $$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

   prištejemo tretjega:

   $$\frac{2}{1-x} + \frac{2}{1+x} = \frac{4}{1-x}$$

nato še četrtega:

$$\frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$$

pa petega in šestega, da naposled dobimo:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}$$

3. Ker je število deljivo z 12, je deljivo tudi s 4 in 3. Kriterij deljivosti s tema dvema številoma nam da:

1) $10 + y = 4k$ (k je naravno število)

2) $3 + 2 + x + 1 + y = 3q$ (q je naravno število)

Rešitev enačbe nam da:

1) $y = 2$
2) $y = 6$

saj sta edini števili iz intervala (9, 19), ki sta deljivi s 4, 12 in 16. Obe rešitvi vnesemo v drugo enačbo in dobimo:

1) $8 + x = 3q$
2) $12 + x = 3q$

V prvem primeru vidimo, da mora dati x pri deljenju s 3 ostanek 1. Tako dobimo:

1) $x = 1$
2) $x = 4$
3) $x = 7$

V drugem primeru pa mora biti x deljiv s 3:

1) $x = 0$
2) $x = 3$
3) $x = 6$
4) $x = 9$

Vse rešitve so:
32112, 32412, 32712,
32016, 32316, 32616, 32916.

4. Zmogljivost vlečnice je

720 oseb na uro = 12 oseb na minuto,

torej se vseh 624 smučarjev zvrsti na vlečnici v

624/12 = 52 minutah

Ta čas porabijo za vožnjo z vlečnico, za spust in za čakanje.

Torej čakajo

$$52 - (10 + 15) = 27 \text{ minut}$$

V teh 27 minutah pride smučar z repa kolone čakajočih do vlečnice, ki v tem času prepelje

$$12 \cdot 27 = 324 \text{ smučarjev}$$

Torej čaka v vrsti pred vlečnico 324 smučarjev.

2. razred

1. Ker je trikotnik pravokoten, lahko zapišemo dve enakosti:

   1) Pitagorov izrek: $a^2 + b^2 = c^2$

   2) ploščina, izražena s katetama: $2p = ab$

   Če kvadriramo obe enakosti in nadomestimo a^2b^2 z izrazom $4p^2$, dobimo iskano enakost:

   $$c^4 = a^4 + 8p^2 + b^4$$

2. Najprej odpravimo zoprne decimalke na desni strani enakosti:

   $$0{,}001^{-2/3} = (10^{-3})^{-2/3} = 10^2$$

   Obe strani enakosti logaritmirajmo, tako da imamo:

   $$(1 + \log x) \cdot \log x = 2$$

   Iz kvadratne enačbe za $\log x$, ki jo dobimo, razberemo vrednosti za $\log x$, ki so:

   1) $\log x = 1$

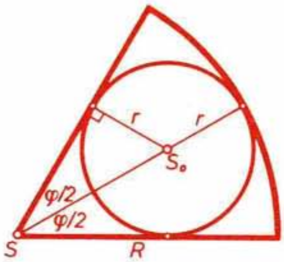
   2) $\log x = -2$

   Rešitve enačbe pa so:

   1) $x = 10$

   2) $x = 0{,}01$

3. Narišimo najprej sliko: (glej oznake na sliki)



$SS_o = R-r$

Velikost središčnega kota dobimo s pomočjo kotnih funkcij. Iz slike vidimo, da velja:

$$\sin(\tfrac{\phi}{2}) = \frac{r}{R-r}$$

Ker velja R = 3r, dobimo:

$$\sin(\tfrac{\phi}{2}) = 1/2, \text{ torej je } \phi = \pi/3$$

Razmerja ploščin obeh likov pa sedaj ni več težko izračunati:

$$P_{\text{izseka}} = \pi\ R^2/6$$

$$P_{\text{kroga}} = \pi\ r^2$$

tako je razmerje enako:

$$\frac{P_{\text{izseka}}}{P_{\text{kroga}}} = 3/2$$

4. Če pot merimo v decimetrih in označimo dolžino korakov mlajšega brata z x, naredi na poti mlajši brat $4000/x$ korakov, starejši brat pa $4000/(x+1)$ korakov. Zato je:

$$200 = \frac{4000}{x} - \frac{4000}{x+1}$$

Iz te enačbe po množenju dobimo kvadratno enačbo, ki ima le eno smiselno rešitev. Tako koraki mlajšega brata merijo 4 dm, starejšega pa 5 dm.

3. razred

1. Zaradi enostavnosti uvedimo novi spremenljivki

$$A = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} \qquad B = \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

Enačbo $A + B = a$ kubiramo in dobimo enakost

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = a^3$$

ali drugače

$$A^3 + B^3 + 3AB(A + B) = a^3$$

Zdaj uporabimo očitne enakosti $A^3 + B^3 = 2x$, $A.B = -1$, $A + B = a$ in dobimo enačbo

$$2x - 3a = a^3$$

ki nam da rešitev

$$x = \frac{a^3+3a}{2}$$

2. Uporabimo enakost $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ in zapišemo enačbo drugače:

$$4^{\sin^2 x} + 4.4^{-\sin^2 x} = 5$$

uvedemo novo spremenljivko

$$y = 4^{\sin^2 x}$$

in dobimo kvadratno enačbo

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

s korenoma $y = 4$ in $y = 1$. Temu ustrezata enakosti $\sin^2 x = 1$ in $\sin^2 x = 0$, ki sta izpolnjeni za $x = k\pi/2$ pri celem k.

3. Najprej poiščimo inverzno funkcijo veje, ki je del parabole! Dobimo

$$y^2 - 4y + 6 = x$$

oziroma

$$y = 2 \pm \sqrt{x - 2}$$

T(2,2) je teme parabole, zato dobimo pogoja $y \leq 2$ in $x > 2$. Obema ustreza funkcija

$$y = 2-\sqrt{x - 2}$$

Inverzna funkcija dela premice je funkcija

$$x = 4 - y$$

ki je kar premica sama, le na intervalu $x \leq 2$.

Inverzna funkcija je torej

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & , \text{ za } x \leq 2 \\ 2-\sqrt{x-2} & , \text{ za } x > 2 \end{cases}$$

4. razred

1. Če upoštevamo definicijo funkcije $F(x)$, dobimo zvezo

$$x = \frac{a+\frac{ax+b}{x+c}}{\frac{ax+b}{x+c}+c}$$

iz katere dobimo

$$(a+c)x^2 + (c^2-a^2)x - b(a+c) = 0$$

Enakost je izpolnjena za vsak x, torej morajo biti vsi koeficienti enaki 0. To je izpolnjeno takrat, ko velja $a = -c$. Vse funkcije z željeno lastnostjo so zato oblike

$$F(x) = \frac{ax+b}{x-a}.$$

2. Vrednost limite lahko izračunamo z uvedbo nove neznanko

$$m^3 = 1 - 1/n$$

oziroma

$$n = \frac{1}{1-m^3}$$

Če gre n preko vsake meje, se m približuje 1, zato lahko pišemo

$$\lim_{n\to\infty} (n(1 - \sqrt[3]{1-1/n})) = \lim_{m\to 1} \frac{1}{1-m^3}(1-m) =$$

$$\lim_{m\to 1} \frac{1}{1+m+m^2} = 1/3.$$

3. Pokazali bomo, da sta razliki

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} \text{ in } \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$

enaki. Izračunajmo ju!

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{b^2-a^2}{(a+c)(b+c)(b+a)}$$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)} = \frac{c^2-b^2}{(a+b)(a+c)(c+b)}$$

Števila a , b in c so zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, zato sta razliki $c-b$ in $b-a$ enaki. To pa pomeni, da sta razliki, ki smo ju računali, tudi enaki in so števila

$$\frac{1}{b+c}, \; \frac{1}{c+a} \text{ in } \frac{1}{a+b}$$

res zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

4. Največji koeficient v razvoju binoma $(a+b)^{2n}$ je koeficient C^n_{2n} . Uporabimo dve znani lastnosti binomnih koeficientov:

1) $C^k_{m+1} = C^{k-1}_m + C^k_m$, ki ima v tem primeru obliko

$$C^n_{2n} = C^{n-1}_{2n-1} + C^n_{2n-1}$$

2) $C^i_m = C^{m-i}_m$,ali v našem primeru

$$C^{n-1}_{2n-1} = C^n_{2n-1}$$

Oboje skupaj nam da

$$C^n_{2n} = 2\,C^n_{2n-1}$$

iz česar se vidi, da je C^n_{2n} res sodo število.

Miran Čerin, Igor Kukavica

ZBIRKA VAJ IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE

Učitelji matematike in dijaki srednjih šol lahko še vedno dobijo tudi pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije priročnike za pouk matematike, ki jih je že pred leti pripravil profesor Ivan Štalec s sodelavci. V mislih imamo ZBIRKA VAJ IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE za vse štiri razrede gimnazij. Kljub temu, da je učni načrt v zadnjih letih nekoliko spremenjen, bodo te zbirke vaj po mnenju mnogih kolegov v šoli še vedno dobrodošli. Zato smo pravkar ponatisnili Zbirko vaj iz aritmetike, algebre in analize za 1. razred gimnazije, prav pa bo prišla tudi učiteljem in učencem na drugih srednjih šolah.

Ciril Velkovrh

REŠITVE NALOG Z REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA IZ MATEMATIKE
(TEKSTI NALOG SO BILI OBJAVLJENI V PRESEKU 10 (1982/83) STR. 41)

1. razred

1. Pogoj, da mora biti željeno število racionalno, zapišemo tako:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = p$$

kjer je p racionalno število. Enačbo še pomnožimo s $cx + d$ in uredimo:

$$(a - pc)x = dp - b$$

Ker je na desni strani enačbe racionalno število, mora biti racionalno število tudi na levi. To pa je možno le takrat, ko velja

$$a - pc = 0$$

in zaradi tega tudi

$$dp - b = 0$$

Oboje skupaj nam da pogoj

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

2. Nalogo lahko rešimo tako, da uporabimo znano neenakost

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + b + c + d|$$

kjer znak enakosti velja, ko so a, b, c in d istega predznaka. Najprej zapišimo funkcijo malo drugače!

$$f(x) = |x - 1| + |9 - x| + |8 - x| + |x - 2|$$

Sedaj uporabimo omenjeno neenakost in dobimo

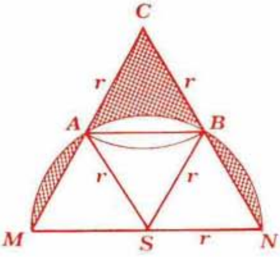
$$|x - 1| + |9 - x| + |8 - x| + |x - 2| \geq |(x - 1) + (9 - x) + (8 - x) + (x - 2)| = 14$$

kjer znak enakosti velja, ko so vsa štiri števila istega predznaka, tj. takrat, ko je

$$8 \geq x \geq 2.$$

Najmanjšo vrednost torej funkcija doseže na zaprtem intervalu $[2,8]$.

3. Krožna odseka nad tetivama AM in AB sta med seboj skladna. Ker sta $\triangle ABC$ in $\triangle ABS$ skladna, je krožni odsek kroga s središčem v C skladen s krožnim odsekom nad tetivo BN. Iskana ploščina je torej enaka krožnemu izseku ABC. Ker je ta ploščina enaka šestini kroga, je ploščina osenčenega dela $\frac{1}{6}r^2\pi$.



4. Količine raztopine bomo označili z indeksom c, količine topila z indeksom o in količine topljenca brez indeksa. Iščemo gostoto raztopine, za katero velja:

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_c}{m} \cdot \frac{m}{V_c}$$

Ker je $\frac{m}{m_c} = c$ in $V_c = V + V_o$ je

$$\rho_c = \frac{1}{c}\,\frac{m}{V + V_o} = \frac{1}{c}\,\frac{m/V}{1+V_o/V}$$

Zamenjamo $\frac{m}{V}$ z ρ in $\frac{V_o}{V}$ z $\frac{m}{\rho_o} : \frac{m}{\rho} = \frac{m_c - m}{\rho_o} : \frac{m}{\rho}$, kar nam da

$$\rho_c = \frac{\rho}{c}\,\frac{1}{1+\left(\frac{m_c - m}{m}\right)\frac{\phi}{\phi_o}} = \frac{\rho}{c}\,\frac{1}{1+\frac{\rho}{\rho_o}\left(\frac{m_c}{m} - 1\right)} = \frac{\rho}{c}\,\frac{1}{1+\frac{}{}\left(\frac{1}{c} - 1\right)}$$

Končno dobimo

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{c}{\rho} + \frac{1}{\rho_o}(\ \ -c)} = \frac{\rho\rho_o}{\rho(1-c)+\rho_o}$$

2. *razred*

1. Nalogo lahko rešujemo s pomočjo vektorjev. Najprej izračunajmo koordinate vektorjev $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3+m,\ -3)$$
$$\overrightarrow{BC} = (-m-2,\ +1+m)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-5,\ -2+m)$$

Če je kot BAC pravi, mora biti skalarni produkt vektorjev $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$ enak nič:

$$\vec{AB}.\vec{AC} = 15 - 5m + 6 - 3m = 0 \qquad m = \frac{21}{8}.$$

V ostalih dveh primerih, ko je pravi kot v oglišču B ali pa v C, dobimo še dve rešitvi:

$$m = -3 \text{ in } m = 1.$$

2. Dokazati moramo, da velja

$$f(-x) = -f(x)$$

Izračunajmo $f(-x)$!

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Izraz, ki ga logaritmiramo, pomnožimo in delimo z $x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$f(-x) = \log \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Uporabimo znano lastnost logaritmov, pa vidimo

$$f(-x) = -\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

kar smo želeli dokazati.

3. Da se znebimo neprijetnih korenov, uvedemo novo neznanko

$$y = \sqrt{2x - 1}$$

oziroma

$$x = \frac{y^2 + 1}{2}$$

Očitno mora veljati $x \geq 1/2$. Če novo neznanko vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\sqrt{\frac{y^2 + 1}{2} + y} + \sqrt{\frac{y^2 + 1}{2} - y} = \sqrt{2}$$

To pa je kar

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(y + 1)^2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(y - 1)^2} = \sqrt{2}$$

oziroma

$$|y + 1| + |y - 1| = 2$$

katere rešitev so vsi $1 \geq y \geq -1$ ali po kratkem računu

$$1/2 \leq x \leq 1.$$

4. Zaradi izreka o potenci točke na krog velja

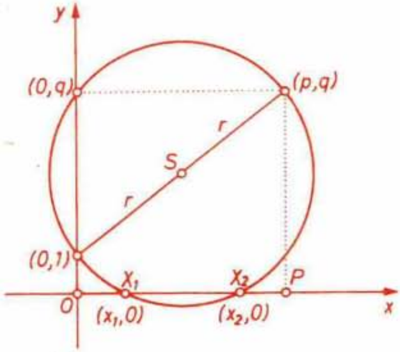
$$x_1 . x_2 = 1 . q = q$$

iz slike pa se vidi, da je $OX_1 = X_2P$ oziroma

$$x_1 + x_2 = p$$

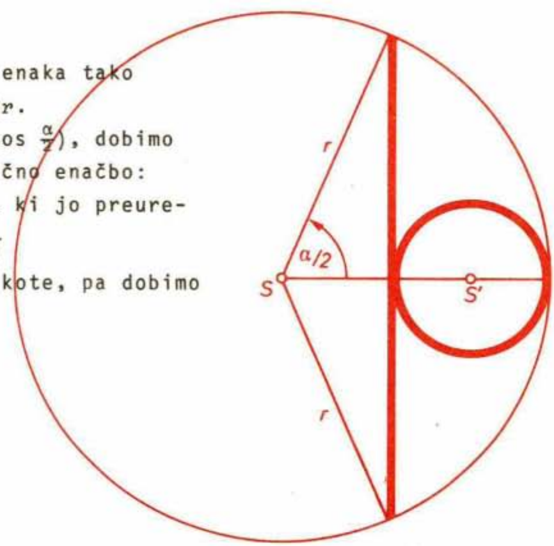
Ker smo dobili Vietovi pravili za kvadratno funkcijo $x^2 - px + q$, sta x_1 in x_2 res korena enačbe

$$x^2 - px + q = 0.$$



3. razred

1. Dolžina tetive je enaka tako $2R\sin\frac{\alpha}{2}$ kot tudi $2\pi r$.
   Ker je $r = \frac{1}{2}(R - R\cos\frac{\alpha}{2})$, dobimo odtod trigonometrično enačbo:
   $2\sin\frac{\alpha}{2} = \pi(1-\cos\frac{\alpha}{2})$, ki jo preuredimo: $\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\alpha/2}{1-\cos\alpha/2}$
   Uvedemo polovične kote, pa dobimo enačbo
   $\frac{\pi}{2} = \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{4}$
   ali
   $\frac{2}{\pi} = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{4}$
   z rešitvijo
   $\alpha = 4\ \mathrm{arc\ tg}\ (\frac{2}{\pi})$



2. Uporabimo Vietovo formulo

$$x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_1 . x_3 = p$$

in dobimo

$$x_1 . x_3 = \frac{4}{7} p$$

Sedaj uporabimo še

$$x_1 \, x_2 \, x_3 = -q$$

kar nam da

$$x_2 = -\frac{7}{4} \frac{q}{p}$$

če to uvrstimo v prvotno enačbo, dobimo zvezo med p in q:

$$343q^2 + 196qp + 48p^3 = 0.$$

3. Najprej faktorizirajmo prva dva sumanda:

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta = 2.\sin n(\alpha+\beta).\cos n(\alpha-\beta)$$

Za zadnji sumand velja

$$\sin 2n\gamma = \sin(2n\Pi - 2n(\alpha+\beta)) =$$

$$= -\sin[2n(\alpha+\beta)] = -2 \sin n(\alpha+\beta) \cos n(\alpha+\beta)$$

Dani izraz lahko torej pišemo v naslednji obliki

$$A = \sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma =$$

$$= 2 \sin n(\alpha+\beta).[\cos n(\alpha-\beta) - \cos n(\alpha+\beta)]$$

Izraz v oglatem oklepaju še enkrat faktoriziramo in dobimo

$$A = 4 \sin n(\alpha+\beta) \sin n\alpha \sin n\beta$$

$$= -4(-1)^n \sin n\alpha.\sin n\beta.\sin n\gamma$$

4. Očitno je funkcija definirana le za $0 \le x \le 1$. Za te x velja

$$0 \le \sqrt{x} \le 1$$
$$0 \le \sqrt{1-x} \le 1.$$

Ker pa velja tudi

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 1$$

lahko uvedemo zamenjavo

$$\sqrt{x} = \sin y$$

$$\cos y = \sqrt{1-x} = \sin (\frac{\Pi}{2} - y).$$

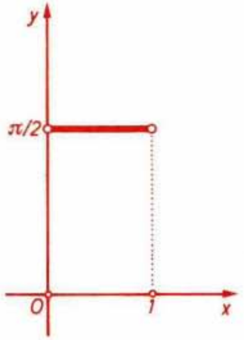
Funkcijo $f(x)$ lahko sedaj zapišemo drugače

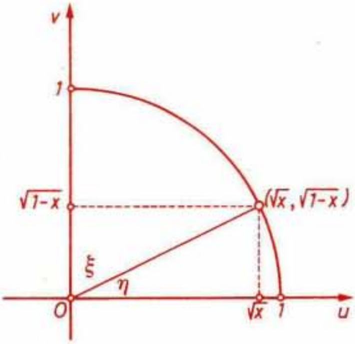
$$f(x) = \arcsin(\sin y) + \arcsin(\cos y) =$$
$$= y + (\tfrac{\pi}{2} - y)$$

Dobili smo torej

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ za } 0 \leq x \leq 1.$$

graf:





Enačbo $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 1$ lahko tolmačimo še takole:
Če v poljubnem pravokotnem koordinatnem sistemu nanašamo vrednosti $\sqrt{x}$ na abscisno, vrednost $\sqrt{1-x}$ pa na ordinatno os, leži točka s koordinatami $(\sqrt{x}, \sqrt{1-x})$ na enotski krožnici in v prvem kvadrantu. Daljica, ki povezuje izhodišča s točko, oklepa z osema kota η in ξ. Velja: $\sin\xi = x$, $\sin\eta = \sqrt{1-x}$ in $\pi/2 = \xi + \eta = \arcsin\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{1-x}$.

4. razred

1. Označimo 1000000 z m in z n število števil med 1 in m, ki so deljiva z vsaj enim od števil 6, 7 in 10. Števil med 1 in m, ki so deljiva s 6, je $[\frac{m}{6}]$, s 7 $[\frac{m}{7}]$ in z 10 $[\frac{m}{10}]$. Števila, ki so deljiva s 6 in 7, 7 in 10 ali 10 in 6 in jih je $[\frac{m}{42}]$, $[\frac{m}{70}]$ in $[\frac{m}{30}]$, smo šteli dvakrat, števila deljiva s 6, 7 in 10 in jih je $[\frac{m}{210}]$, pa smo šteli trikrat. Zato za n velja:

$$n = [\tfrac{m}{6}] + [\tfrac{m}{7}] + [\tfrac{m}{10}] - [\tfrac{m}{42}] - [\tfrac{m}{70}] - [\tfrac{m}{30}] + [\tfrac{m}{210}]$$

ali za $m = 1000000$:

$$n = 342857.$$

2. Če vse tri ulomke damo na skupni imenovalec, dobimo

$$f(x) = \frac{x^5(1+B+A)+x^4(b+c+aB+cB+aA+bA)+x^3(bc+acB+abA)}{(x+a)\ (x+b)\ (x+c)}.$$

Da bi limita obstajala, stopnja polinoma v števcu ne sme biti večja od stopnje polinoma v imenovalcu. Veljati torej mora:

$$1+B+A = 0$$

$$b + c + aB + cB + aA + bA = 0.$$

Iz teh dveh pogojev dobimo

$$A = \frac{b - a}{c - b}$$

$$B = \frac{a - c}{c - b}$$

Izračunaj še limito!

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = bc + ac\frac{a - c}{c - b} + ab\frac{b - a}{c - b}$$

Če damo zadnja dva člena na skupni imenovalec in izpostavimo $c - b$, je limita izračunana:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = bc + a^2 - ac - ab = (a - b)(a - c)$$

3. Če bi bila števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ hkrati členi nekega geometrijskega zaporedja, bi veljalo

$$\sqrt{2} = q^n\ \sqrt{3} = q^m\sqrt{5}$$

kjer je q kvocient tega zaporedja. Od tod bi sledilo

$$q = (\tfrac{2}{3})^{m/2} = (\tfrac{2}{5})^{n/2}$$

oziroma

$$2^m.5^n = 2^n.3^m$$

Ker leva stran enačbe ni deljiva s 3, mora biti $m = 0$ in prav tako mora biti $n = 0$, ker desna stran enačbe ni deljiva s 5. Iz tega pa sledi, da so števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ enaka, kar je protislovje.

4. Vsaka dvojica krogov določa 4 tangente, zato je vseh tangent

$$4\binom{n}{2} = 2n(n-1)$$

Če bi se vse premice sekale, bi imeli

$$\binom{2n(n-1)}{2}$$

presečišč. Ker pa se $\binom{n}{2}$ parov premic ne seka, je $\binom{n}{2}$ presečišč manj:

$$N = \binom{2n(n-1)}{2} - \binom{n}{2} =$$

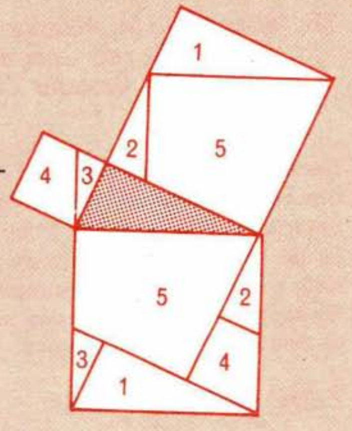
$$= \frac{2n(n-1)(2n(n-1)-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= n(n-1)(2n-3)(2n+1)/2$$

Aleksandar Jurišić

Rešitve nalog iz prispevka Oslovski most:

1. Kvadrat nad hipotenuzo sestavimo tako, kot kaže slika 1.
2. Stranico iskanega kvadrata dobimo tako, da v prvem primeru narišemo pravokotni trikotnik, katerega kateti sta stranici obeh kvadratov. Hipotenuza je stranica iskanega kvadrata. V drugi nalogi pa je daljša stranica kvadrata v pravokotnem trikotniku hipotenuza, krajša pa kateta. Druga kateta je iskana stranica kvadrata.



Danijel Bezek

NOVE KNJIGE

KRATKE ZGODOVINE ZNANOSTI

Ljubitelje matematike, fizike in astronomije bi še enkrat radi seznanili z izdajami Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije v knjižni zbirki Sigma. Danes imamo v mislih zgodovinske preglede teh treh strok:

27. Struik D.J., Kratka zgodovina matematike (prevedla Tamara Bohte), 256 str. Cena 100. - din.

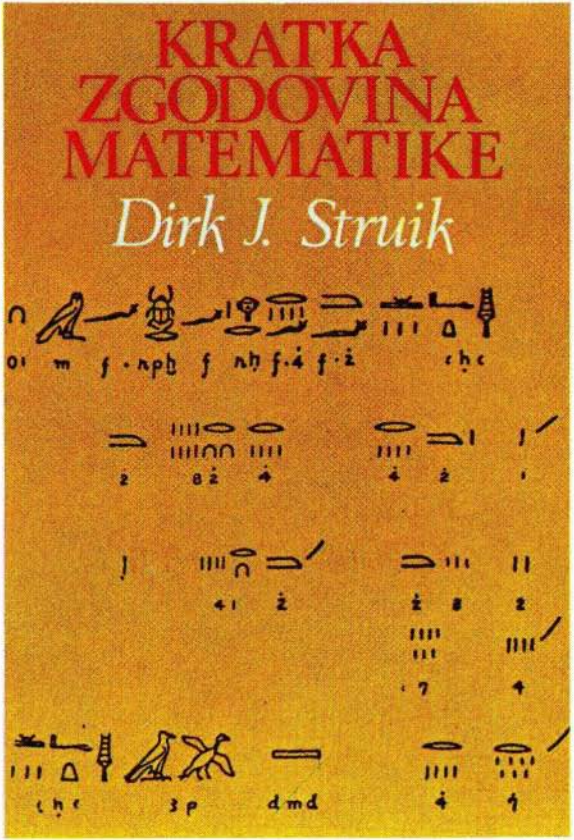
34. Laue Max von, Kratka zgodovina fizike (prevedel Janez Strnad 148 str. Cena 240. - din.

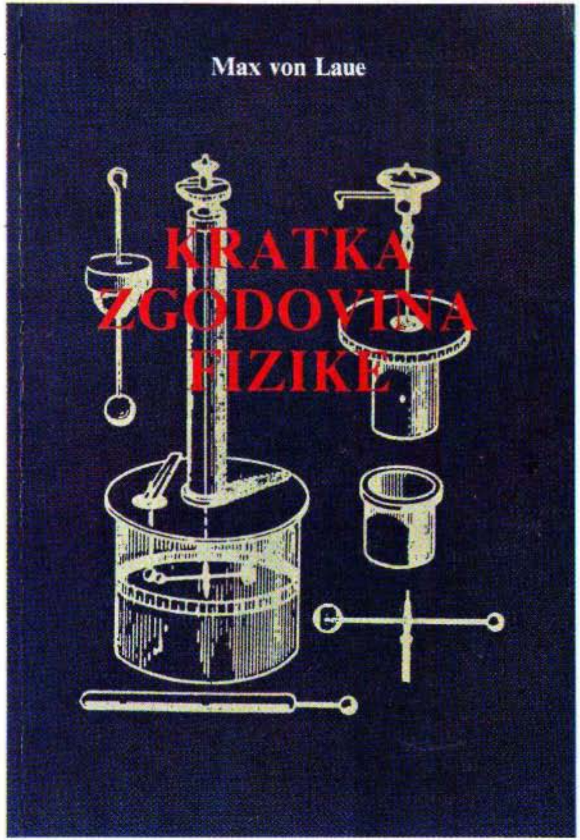
35. Milanković M., Kratka zgodovina astronomije, 1. del, Od njenih prvih začetkov do leta 1727, ko je umrl Isac Newton (prevedel Črtomir Zupančič), 180 str. Cena 240. - din.

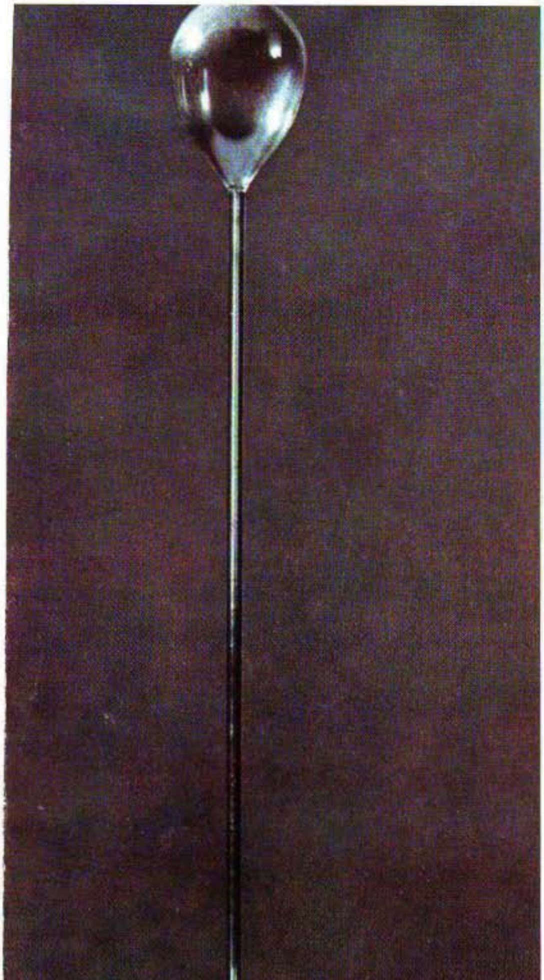
Danes bi radi napovedali tudi drugi del Kratke zgodovine astronomije, ki bo obsegala obdobje od 1727 do današnjih dni. To delo je pripravil prof. dr. B. Ševarlić, učenec prof. dr. M.Milankovića. Zaradi zahtevnega prevajalskega dela, pa tudi zaradi predloga po priredbi, knjiga ne bo mogla iziti v letošnjem letu, pač pa v prvih mesecih prihodnjega leta. To obvestilo objavljamo na željo mnogih ljubiteljev astronomije, ki so po telefonu spraševali po izidu drugega dela zgodovine astronomije.

Želimo vam prijetno branje!

Ciril Velkovrh


KRATKA
ZGODOVINA
MATEMATIKE
Dirk J. Struik


Max von Laue
KRATKA
ZGODOVINA
FIZIKE



F
I
Z
I
K
A

Slika 3. k članku na str. 34