presek 7
x
1982-83

PAVLE ZAJC

TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA

Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome, 10. letnik, šolsko leto 1982/83, številka 7., str. 1-64 (321-384)
Glavni urednik Edvard Kramar, odgovorni urednik Andrej Likar

PRESEKOVA KNJIŽNICA ; 14. - Pavle Zajc s sodelavci: Marko Petkovšek, Mirko Dobovišek, Edvard Kramar, Vladimir Batagelj, Andrej Kmet: TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA : Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol. - Jezikovni pregled Ivanka Šircelj, Slike Slavko Lesnjak in Miha Štalec, rokopis je natipkala Sonja Laznik. - Urednik Ciril Velkovrh, Odgovorni urednik Andrej Kmet. - Natisnila Tiskarna ČGP "Delo" v nakladi 22 000 izvodov. - Subvencionirali RSS in ISS.

V S E B I N A

Z A U V O D

V Sloveniji stopamo že v drugo desetletje tekmovanj iz matematike za učence višjih razredov osnovnih šol, ki preizkušajo svoje znanje za pridobitev VEGOVIH PRIZNANJ: bronasta, srebrna in zlata.

Če si pripravljen izpopolnjevati svoje znanje, pobrskaj po nalogah, ki jih imaš pred seboj. Rešitve nalog naj ti bodo le v oporo za preverjanje samostojnega dela. Zagotovo boš vesel, če boš sam prišel do pravilnega rezultata ali našel izvirnejšo in preprostejšo pot do rešitve.

Torej, ne prepisuj slepo rešitev, ker tako zagotovo ne bo uspeha. če boš v zadregi, se posvetuj z učiteljem-mentorjem.

Veliko uspeha ti želijo avtorji.

Organizatorjem šolskih tekmovanj priporočamo, da vse udeležence stimulirajo v primerni obliki. V ta namen lahko naročite pri društvu bronasto Vegovo značko (cena 20.- din), boljšim tekmovalcem pa podelite bronasta Vegova priznanja (8.- din).

A. NALOGE ZA UČENCE VIII. RAZREDA

1. Izračunaj neznani člen v sorazmerjih:
   a) $x : (2 + x) = 10{,}5 : 21$
   b) $15 : (2x - 1) = \frac{5}{3} : (x - 4)$
   c) $(x + a) : (x + 6a) = (x - a) : (x + 2a) \quad , a \neq 0$
2. Iz $x : y : 6 = 2 : 5 : 3$ izračunaj x in y!
3. Razdeli razdaljo 912m na tri dele, ki so v razmerju $\frac{2}{3} : \frac{9}{8} : \frac{7}{12}$!
4. Zapiši razmerje merskih števil ploščine kolobarja in njegovega obsega!
5. Koliki so robovi kvadra, če so v razmerju 6 : 3 : 2 in je površina kvadra $648m^2$?
6. Prva delovna brigada opravi delo v 12 dneh, druga v 24 dneh, tretja v 8 dneh. Koliko delavcev je v vsaki brigadi, če je vseh delavcev 60 in če delajo vsi enako?
7. Dana je krožnica k.
   a) Izberi tri take točke na krožnici, da bodo dolžine lokov v razmerju 2 : 3 : 4 !
   b) Skozi te točke načrtaj tangente!
   c) Določi kote trikotnika, ki ga omejujejo odseki tangent!
8. Izračunaj razmerje stranic v trikotniku, če so koti v razmerju 3:4:5 !
9. Kvadratu $ABCD$ s stranico a je včrtan enakokrak trikotnik ABE tako, da je vrh E središče stranice CD. Če načrtamo iz oglišča B višino na krak tega trikotnika, dobimo trikotnik BEF. Dokaži, da je razmerje stranic trikotnika BEF 3 : 4 : 5 !
10. Pravilnemu šestkotniku včrtamo pravilni šestkotnik tako, da zapored zvežemo središča stranic. Napiši razmerja:
    a) ploščin, b) obsegov, c) diagonal!
11. Enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik imajo enako ploščino. Kateri od teh likov ima najmanjši obseg?
12. Dvojna ploščina pravilnega šestkotnika je enaka trikratni ploščini enakostraničnega trikotnika. Določi razmerje obsegov obeh likov!
13. Pravokotni trikotnik ABC ima kota $\alpha = 60°$ in $\beta = 30°$. Nožišče višine na hipotenuzo označimo z D. Trikotniki ABC, CAD in BCD so podobni. Izračunaj razmerje istoležnih stranic in razmerje ploščin teh trikotnikov!
14. Točka E je središče osnovnice AB kvadrata $ABCD$. Določi, v kakšnem razmerju deli daljica DE diagonalo AC!
15. V enakokrakem trapezu sta osnovnici v razmerju 3 : 4, srednjica in višina trapeza pa sta enaki 7. Koliko meri polmer trapezu očrtanega kroga?
16. V enakokrakem trapezu se diagonali sekata pravokotno in delita druga drugo v razmerju 2 : 1. Izračunaj polmer trapezu očrtanega kroga, če je daljša osnovnica trapeza enaka 4!
17. V pravokotnem trikotniku s katetama 18 in 24 narišemo simetralo hipotenuze. Kolika je dolžina dela simetrale, ki leži v notranjosti trikotnika?

18. Dolžini istoležnih stranic dveh podobnih trikotnikov sta v razmerju $3 : 4$, razlika ploščin trikotnikov pa je 70. Izračunaj ploščini!

19. V ostrokotnem trikotniku ABC se višini iz oglišč B in C z nožiščema D in E sekata v točki F. Dokaži, da je $\overline{CD} \cdot \overline{BF} = \overline{BE} \cdot \overline{CF}$!

20. Kakšen je trikotnik, če ga višina na osnovnico deli na dva podobna trikotnika?

21. Skozi točko v notranjosti trikotnika nariši vse premice, ki mu odrežejo podoben trikotnik!

22. Trapez s krakoma 10 in 15 ter osnovnicama 21 in 8 razdelimo z vzporednico z osnovnicama na dva trapeza. Določi njune krake, če je odsek vzporednice v notranjosti danega trapeza enak 14!

23. V trapezu $ABCD$ z osnovnicama AB in CD se diagonali sekata v točki E. Določi ploščino trapeza, če sta ploščini trikotnikov ABE in CDE enaki 98 oziroma 32!

24. Premica deli paralelogram z obsegom 32 na dva paralelograma z obsegom 20 in 30. Koliko merita stranici danega paralelograma?

25. V trapezu $ABCD$ z osnovnicama AB in CD je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB$. Poišči dolžino daljice $\overline{AC}$, če je srednjica trapeza enaka 13, dolžini osnovnic pa sta v razmerju $4 : 9$!

26. Dan je trapez z osnovnicama 5,1 in $4\frac{1}{4}$ ter krakom 4. Za koliko je treba podaljšati dani krak, da seče nosilko drugega kraka trapeza?

27. Osnovnica enakokrakega trikotnika ABC je 15cm, višina na osnovnico je 18cm. Kolik odsek odreže na kraku trikotnika premica p, ki je vzporedna z osnovnico in oddaljena od nje 6cm?

28. V enakokrak trikotnik z osnovnico c = 10cm in višino na osnovnico v_c = 12cm včrtaj največji kvadrat tako, da leži stranica kvadrata na osnovnici c. Kolika je ploščina kvadrata?

29. V enakostranični trikotnik s stranico a včrtaj kvadrat tako, da leži stranica kvadrata na stranici trikotnika. Izrazi ploščino kvadrata s stranico a trikotnika!

30. Osnovnica enakokrakega trikotnika je 30cm, polmer včrtanega kroga je 10cm. Koliko meri krak trikotnika?

31. Dan je pravokotni trikotnik ABC s katetama a in b. Načrtaj krog, ki se dotika hipotenuze in katete b in gre skozi vrh pravega kota! Izračunaj njegov polmer!

32. Odsek srednjice trapeza med diagonalama je enak polovici razlike osnovnic. Dokaži!

33. V krogu s središčem S sta narisana polmera SA in SB. Poišči tetivo, ki jo ta polmera delita na tri enake dele!

34. V trikotniku ABC merita stranici $a = 12$ in $b = 6$ ter kot $\gamma = 120°$. Kolik je odsek simetrale kota γ, ki leži v notranjosti trikotnika?

35. Enakostraničnemu trikotniku s stranico a včrtaj tri enake kroge, ki se dotikajo med seboj, vsak krog pa se dotika tudi dveh stranic trikotnika. Izračunaj polmer krogov in ploščino lika, ki ga omejujejo trije krožni loki s krajišči v medsebojnih dotikališčih krogov!

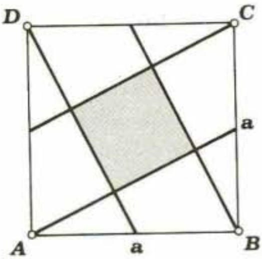
36. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico a. Stranica AB je premer polkroga, ki leži v notranjosti kvadrata. Središče polkroga in stranice AB označimo z S. Tangenta iz oglišča C se dotika polkroga v točki T ($T \neq B$). Podaljšek polmera ST seče stranico AD v točki E.
a) Poišči dolžino daljice $\overline{CT}$!
b) Pokaži, da je $\overline{ET} = \overline{ED}$, in izrazi $\overline{ET}$ z a!
c) Izračunaj stranice trikotnika CES, njegovo ploščino in višino iz točke E!

37. V pravokotnem trikotniku sta dani kateti $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Nariši simetralo pravega kota, ki seka hipotenuzo v D. Vzporednica s to simetralo skozi točko A seče podaljšek stranice $\overline{BC}$ v E.
a) Pokaži, da je $\overline{CE} = \overline{AC}$, in izračunaj $\overline{AE}$ in $\overline{CD}$!
b) Izračunaj ploščino trapeza $CDAE$!

38. Dani sta kateti a in b pravokotnega trikotnika ABC. Simetrala njegovega pravega kota seče hipotenuzo v točki M. Nariši krog, ki ima središče v M in se dotika katet a in b. Izračunaj polmer kroga!

39. V dani pravokotni trikotnik ABC včrtaj kvadrat, tako da bo stranica kvadrata DE na hipotenuzi AB, oglišči F in G pa na katetah. Pokaži, da je ploščina kvadrata enaka produktu odsekov $\overline{AD} = m$ in $\overline{EB} = n$ na hipotenuzi!

40. V kvadrat $ABCD$ s stranico a nariši 4 daljice, ki vežejo oglišča kvadrata s središči stranic. Kolika je ploščina štirikotnika, ki ga omejujejo odseki narisanih daljic? (Glej sliko!)



41. Enakokrakemu trikotniku ABC z osnovnico $c = 12\text{cm}$ in $v_c = 9\text{cm}$ včrtaj polkrog, tako da se dotika osnovnice. Kolik je polmer polkroga?

42. Krak enakokrakega trapeza je dolg 4cm. Diagonala deli srednjico trapeza na odseka, ki merita 3cm in 5cm. Izračunaj:
a) obseg trapeza, b) kote trapeza.

43. V pravokotni trikotnik s katetama a in b včrtaj kvadrat tako, da bo eno oglišče kvadrata v oglišču trikotnika s pravim kotom. Izračunaj stranico x včrtanega kvadrata!

44. Preoblikuj dane izraze v produkte:

a) $1/16 - a^4$	b) $50 - 8y^2$
c) $x^2 - 5$	č) $9/16\, m^2 + 4 + 3m$
d) $(x - 4/3)^2 - 1/9$	e) $(2p + 1)^2 - (2p - 1)^2$
f) $x^2 - xy - y - 1$	g) $1 - 4b^2 + a - 2ab$
h) $1 + x + x^2 + x^3$	i) $x^4 + 1$
j) $a^4 - a^2 + 2a - 1$	

45. Poišči vrednost izraza $I = \dfrac{x + y - 1}{x - y + 1}$ za $x = \dfrac{a + 1}{ab + 1}$ in $y = \dfrac{ab + a}{ab + 1}$, kjer je $ab + 1 \neq 0$!

46. Dana sta polinoma $p(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$ in $q(x) = (x - 2)^2 - (x - 4)^2$.
a) Razcepi števec in imenovalec ulomka $r(x) = p(x)/q(x)$ in ga okrajšaj!
b) Pokaži, da je $r(x)$ sodo število, če je x liho število!

47. Dana sta polinoma $p(x) = (9x^2 + 12x + 4) - 2x(3x + 2) + 4 - 9x^2$ in $q(x) = (2x + 3)^2 - (x + 5)^2$.
a) Razcepi števec in imenovalec ulomka $r(x) = p(x)/q(x)$ in ga okrajšaj!
b) Izračunaj $r(-2)$, $r(0)$, $r(-1/2)$!

48. Dan je izraz: $F(x) = \frac{x - x^2}{1 - x^2} + \frac{1 + x}{1 + 2x + x^2} - \frac{1 - 2x}{1 - x}$
Poenostavi ga in nato izračunaj $F(0)$, $F(1/2)$, $F(1)$!

49. Poenostavi izraz: $1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1 + x}$

50. Okrajšaj ulomke: a) $\frac{2a - 1}{1 - 2a}$ b) $\frac{25x^2 - 9}{2x - 1 - x/3}$
c) $\dfrac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^n}}$

51. Kvadrat $ABCD$ s stranico a leži v prvem kvadrantu tako, da leži oglišče A na osi x in oglišče D na osi y, stranica AB pa oklepa z abscisno osjo kot 45 .
a) Zapiši koordinate oglišč kvadrata!
b) Zapiši enačbi premic, na katerih ležita diagonali!
c) Zapiši enačbe premic, na katerih ležijo stranice kvadrata!
d) Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, če se kvadrat zavrti okoli diagonale AC!

52. Romb $ABCD$ s stranico $a = 4$ in kotom $\alpha = 45^\circ$ leži v I.kvadrantu tako, da je oglišče A v koordinatnem začetku in oglišče B na osi x.
a) Določi koordinate oglišč romba!
b) Napiši enačbe premic, na katerih ležijo stranice romba!
c) Koliki sta površina in prostornina vrtenine, ki nastane, če se romb zavrti okoli osi x?

53. Kvadrat $ABCD$ s stranico a leži v II. kvadrantu tako, da je oglišče A na osi x, oglišče B na osi y, stranica AB pa oklepa z osjo x kot 30°.
a) Določi koordinate oglišč kvadrata!
b) Napiši enačbe premic, na katerih ležijo stranice kvadrata!
c) Kolika je dolžina pravokotnih projekcij diagonal AC in BD na os x?

54. Stranica enakostraničnega trikotnika ABC je vzporedna z osjo x in leži v I. in II. kvadrantu. Njena dolžina je a. Središče trikotnika je v koordinatnem začetku.
a) Določi koordinate oglišč trikotnika!
b) Napiši enačbe premic, na katerih ležijo stranice trikotnika!
c) Napiši enačbe premic, na katerih ležijo težiščnice trikotnika!

55. Premice z enačbami $12x + 5y = 11$, $4x + 3y = 13$ in $y = -5$ oblikujejo trikotnik ABC. Izračunaj njegov obseg in ploščino!

56. Sečišče premice $4x + 3y = 12$ z osjo x označi z A, z osjo y pa z B. Sečišče premice $4x + 3y = -12$ z osjo x označi s C, z osjo y pa z D. Izračunaj polmer četverokotniku $ABCD$ včrtanega kroga!

57. Dana je funkcija $y = 3x/4 + k - 1$.
a) Določi k tako, da bo graf funkcije sekal os y v točki z ordinato 3!
b) Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga oblikuje graf funkcije s koordinatnima osema!

58. Načrtaj premici $x + 2y = 4$ in $x + 2y = 10$. Lik, ki ga omejujeta premici in koordinatni osi, rotira okoli osi x. Kolika je prostornina nastale vrtenine?

59. V pravokotniku je stranica a štirikrat daljša od druge stranice.
a) Izrazi obseg pravokotnika kot funkcijo daljše stranice!
b) Nariši graf te funkcije!
c) Določi obseg pravokotnika z daljšo stranico 4!

60. V trapezu s krakoma 2 in 3 je osnovnica a dvakrat daljša od druge osnovnice.
a) Izrazi obseg trapeza kot funkcijo daljše osnovnice!
b) Nariši graf te funkcije!
c) Določi obseg trapeza z daljšo osnovnico 6!

61. Določi ordinato točke z absciso 6, če veš, da leži na premici, ki jo določata točki $A(-1,4)$ in $B(4,-1)$!

62. Izračunaj ploščino trikotnika, katerega stranice ležijo na premicah $y = 0$, $7y - x - 3 = 0$ in $2y - x + 2 = 0$!

63. Izračunaj ploščino trikotnika, če leži ena njegova stranica na osi y, drugi dve pa na premicah $2y - 3x - 6 = 0$ oziroma $y - 5x + 4 = 0$!

64. Kolika je ploščina četverokotnika $ABCD$ z oglišči $B(1,0)$, $C(0,1)$, $D(-1,1)$, če leži stranica AB na premici $y = x - 1$, stranica AD pa na premici $x = -1$?

65. Pravokotnemu trikotniku ABC z oglišči $A(6,0)$, $B(0,9)$ in $C(0,0)$ včrtamo pravokotnik $CDEF$, tako da leži oglišče D na stranici CA, E na AB in F na BC. Določi koordinate oglišč D, E in F, če je obseg pravokotnika 14!

66. Določi enačbo premice, ki gre skozi točko $T(2,3)$ in odreže enaka odseka od pozitivnih poltrakov koordinatnih osi!

67. Koordinatni začetek ter točki $A(3,1)$ in $B(5,5)$ so oglišča paralelograma $OABC$. Poišči koordinate četrtega oglišča C!

68. Dana je funkcija $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 5x$. Izračunaj $f(\frac{1}{x})$!

69. Za katere vrednosti parametra p seče graf funkcije
a) $y = px + (p - 5)$ b) $y = 3x - (p - 2)$
c) $y = (p - 1)x - (2p + 6)$
os y nad koordinatnim začetkom?

70. Pri katerem m bosta premici $y = (2m - 5)x + 7$ in $y = (10 - m)x - 3$ vzporedni?

71. Dana je funkcija $y = x/(2k) - 1/(4k)$.
a) Določi odseka, ki ju na koordinatnih oseh odreže graf te funkcije!
b) Določi k tako, da bo vsota teh odsekov enaka 1!

72. a) Iz enačbe $(7y - 3x)/2 = 2 - 5x/6$ izrazi spremenljivko y kot funkcijo spremenljivke x!
b) Za katero vrednost spremenljivke x ima spremenljivka y vrednost 1/7?
c) Poišči vse cele vrednosti spremenljivke x, za katere je $1 < y < 2$!

73. Prepričaj se, da veljajo naslednje enakosti:

a) $ab + (\frac{a+b}{2} - b)^2 = (\frac{a+b}{2})^2$

b) $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$

c) $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$

č) $4(a + b)a + b^2 = [(a + b) + a]^2$

d) $(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$

e) $a^2 + b^2 = 2[(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a+b}{2} - b)^2]$

74. Reši enačbo $(x - m)(x - n) = x^2$ in ugotovi, kdaj ima eno samo rešitev, kdaj več rešitev in kdaj ni rešljiva!

75. Pri katerih vrednostih parametra k enačba $(kx - 5)/12 - (3k + 2x)/18 = k + x$ ni rešljiva?

76. Pri kateri vrednosti parametra a je $x = 2$ rešitev enačbe $x + a - (x + 4a)(x - 4a) = 16a^2$?

77. Določi a tako, da bo imela enačba $(5/(4x) - 8/9) : (7/8) = a : (3x)$ rešitev $x = 0{,}75$!

78. Reši enačbe:

a) $(a - x)/(a - b) - (x - b)/(a + b) = 2ab/(a^2 - b^2)$

b) $x/a + x/b + x/c = ab + ac + bc$

c) $(x + b)/(a + b) + (x - b)/(a - b) =$
$= (b + x)/(a^2 + 2ab + b^2) - (x - b)/(a^2 - b^2) + 2x/a$

79. a) Reši enačbo $(1/4)(7x + 3) : (2/3) = k : 2$!

b) Pri kateri vrednosti parametra k ima enačba rešitev $x = 1/7$?

c) Za katere cele vrednosti parametra k je $0 < x < 1$?

80. a) Reši enačbi
$(x - a)/b + (x - b)/a = 2$ in
$(y - a)/b + (y + b)/a = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$!

b) V kakšni zvezi morata biti števili a in b, da bo rešitev prve enačbe dvakrat večja od rešitve druge enačbe?

81. Pokaži, da enačba
$3/(x + 2) - (3x - 6)/(x^2 - 4) = 4/(x - 2)$ ni rešljiva!

82. Dana je enačba $(n^2 - x^2)/(nx) + (x - 2)/x = 1\frac{1}{2} - (x + 1)/n$

Pokaži: če je n celo število, različno od 0 in 2, je rešitev te enačbe sodo število.

83. Za katere vrednosti parametra m ima enačba
$(x - m + 1)/(x + m - 1) = 1/m \quad (m \neq 0)$
vsaj eno negativno rešitev?

84. Določi vse vrednosti parametra m, pri katerih je vsaka rešitev enačbe $m(x - 3) + 3 = m^2x$ večja od 2!

85. Pokaži, da rešitve enačbe $(bx - c)/(bc) - (bx - a)/(ab) = 1$, $(a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0)$ niso odvisne od b!

86. Reši enačbo $(x - 0{,}1)^2 - (0{,}2x + 1)^2 = 0$!

87. Polinom $P(x) = (4x + 3)(x + 1) + 16x^2 - 9 + (4x + 3)(2x + 1)$ zapiši kot produkt in reši enačbo $P(x) = 0$!

88. Levo stran enačbe $(3x - 2)(x - 4) + (9x^2 - 4) + (2 - 3x)(x + 5) = 0$

preoblikuj v produkt in enačbo reši!

89. Polinoma $p(x) = (x - 5)(3x - 1) - (x - 6)(x - 5)$
$q(x) = (2 - 3x)^2 - (1 + 2x)^2$
zapiši v obliki produkta in reši enačbi:
a) $p(x)/(x - 5) = -5$ b) $q(x)/(1 - 5x) = 3$

90. Polinom dveh spremenljivk $P(x,y) = (x - 2y)^2 - (4y^2 - x^2)$
zapiši v obliki produkta!
a) Kakšno vrednost ima polinom $P(x,y)$, če je $x = 2y$?
b) Pri kateri vrednosti spremenljivke x vrednost polinoma $P(x,y)$ ni odvisna od vrednosti spremenljivke y?

91. Reši enačbo: $(2x - 3)(x - 1)^2 - 4(2x - 3) = 0$

92. Reši enačbi: a) $(4x + 5)(2x - 1) = 4x^2 - 1$
b) $(11x - 7)^2 = 9(7 - 11x)$

93. Reši enačbi z dvema neznankama : a) $(x + y - 1)^2 + (x - y + 1)^2 = 0$
b) $x^2 + 2x + 9y^2 + 6y + 2 = 0$
Pomagaj si s tole resnico: če je $a^2 + b^2 = 0$, mora biti $a = b = 0$.

94. Reši enačbo s tremi neznankami :
$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0$

95. V množici naravnih števil reši enačbo z dvema neznankama
$x^2 - y^2 = 105$

96. Reši enačbo : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$!

97. Iz naslednjih formul izrazi krepko odtisnjene količine z drugimi nastopajočimi količinami:
a) $P = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)\boldsymbol{s})$ (površina prisekanega stožca)
b) $V = \pi \boldsymbol{H}(2D^2 + d^2)/12$ (prostornina soda)
c) $t = 2\pi\sqrt{\boldsymbol{l}/g}$ (lastni nihajni čas matematičnega nihala)

98. Kocko z robom a presekamo z ravnino skozi tri njena oglišča, ki tvorijo enakostranični trikotnik. Koliki sta površina in prostornina kocke, če je ploščina tega trikotnika enaka 1m^2 ?

99. Rob kocke je $a = \sqrt[4]{48}$. Izračunaj ploščino lika, ki nastane, če kocko presekamo s simetrijsko ravnino telesne diagonale!

100. Osnovna ploskev pokončne tristrane prizme je pravokotni trikotnik, pri katerem meri ena kateta 9cm, druga pa je za 3cm krajša od hipotenuze. Kolika je prostornina te prizme, če je njen plašč 1,4-krat večji od osnovne ploskve?

101. Pokončno enakorobo tristrano prizmo z robom a presekamo z ravnino, ki poteka skozi stranski rob in oklepa z eno izmed stranskih ploskev, ki se stikata v tem robu, kot $45°$. Koliki sta površina in prostornina večjega dela prizme?

102. Osnovna ploskev poševne prizme je romb s stranico a in kotom $\alpha = 60°$. Večji diagonalni presek prizme je romb s kotom $\beta = 60°$. Izračunaj: a) vsoto vseh robov,
b) ploščino diagonalnega preseka,
c) prostornino prizme!

103. Tristrana prizma ima za osnovno ploskev enakostranični trikotnik s stranico a. Pravokotni presek skozi višino osnovne ploskve je romb s

kotom $\alpha = 60°$. Izračunaj: a) prostornino prizme,
b) ploščino preseka prizme,
c) diagonali presečnega lika!

104. Leseno kocko s prostornino $1m^3$ popleskamo z rdečo barvo. Nato jo razrežemo na manjše kocke s prostornino $1dm^3$. Koliko manjših kock ima popleskane 3 ploskve (2 ploskvi, 1 ploskev, nobene ploskve) ?

105. Ploščina največjega diagonalnega preseka pravilne šeststrane prizme je enaka $4m^2$. Razdalja vzporednih stranskih ploskev prizme je 2m. Kolika je prostornina prizme?

106. Koliki sta površina in prostornina pravilne tristrane prizme, če je pravokotni presek skozi višino osnovne ploskve kvadrat s stranico k?

107. Osnovna ploskev prizme je enakokrak trikotnik s krakom b = 5cm in polmerom očrtanega kroga r = 25/8 cm. Telesna višina je enaka višini na osnovnico osnovne ploskve. Koliki sta površina in prostornina prizme?

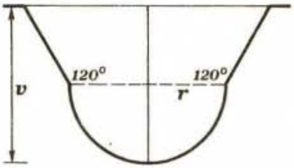
108. Osnovna ploskev pokončne prizme je romb s stranico a in s kotom $\alpha = 60°$. Koliki sta površina in prostornina prizme, če je telesna višina enaka daljši diagonali osnovne ploskve?

109. Iz kocke z robom a = 10cm izrežemo dva pokončna valja, tako da se dotikata prileżnih mejnih ploskev in diagonalnega preseka. Kolika je prostornina obeh valjev?

110. Koliki sta površina in prostornina valja, ki je očrtan kvadru z robovi a = 24cm, b = 18cm, c = 45cm, če je stranski rob valja vzporeden robu c ?

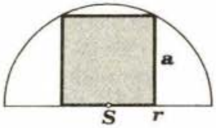
111. Iz pravilne enakorobe šeststranične prizme z robom a = 4dm izrežemo tri enake valje, tako da se dotikajo med seboj in s stranskimi mejnimi ploskvami prizme. Koliki sta površina in prostornina vseh treh valjev?

112. Presek betonskega kanala je polkrog s premerom $2r$ = 12m. Koliko vode je v 100m dolgem kanalu, če je gladina vode na polovici globine kanala?



113. Na sliki je prečni prerez 4m globokega zbiralnika za vodo. Koliko litrov vode je v polnem zbiralniku, če je dolžina zbiralnika enaka 10m, premer polvalja pa $2r$ = 4m. (Glej sliko!)

114. Iz enakostraničnega valja s premerom $2r$ = 10cm izrežemo pravilno osemstranično prizmo. Kolika je prostornina prizme?



115. Iz polvalja s polmerom r = 10cm in višino v = 50cm izsekamo kvadratno prizmo. Koliki sta površina in prostornina prizme? (Glej sliko!)

116. Iz enakostraničnega valja ($2r$ = 20cm) izsekamo kvader. Diagonali osnovne ploskve kvadra se sekata pod kotom 120°. Koliki sta površina in prostornina kvadra? Določi razmerje prostornin valja in kvadra!

117. Značilni presek poševnega valja je romb s kotom $\alpha = 45°$. Kolika je prostornina valja, če je premer valja $2r = 12cm$?

118. V trikotniku ABC so dane vse tri stranice $a = 65$, $b = 61$, $c = 36$. Kolika sta površina in volumen vrtenine, ki nastane z rotacijo trikotnika okoli stranice c?

119. Silos za cement ima obliko pokončnega stožca s premerom 6m in višino 9m. Koliko m^3 cementa je v njem, če sega v silosu 7,5m visoko? (Stožec je obrnjen!)

120. Površina enakostraničnega stožca je πm^2. Kolika je njegova prostornina?

121. Posoda ima obliko enakostraničnega valja, ki se na dnu podaljšuje v enakostranični stožec. Koliko litrov drži posoda, če smo zanjo (vključno s pokrovom) porabili $28\pi\ m^2$ pločevine?

122. Enakokraki trapez $ABCD$ s kotom $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$, $a = 2c$ rotira okoli kraka. Koliki sta površina in prostornina vrtenine?

123. Pravokotni trikotnik ABC s hipotenuzo c in kotom $\alpha = 60°$ zavrtimo okoli vseh treh stranic. Določi razmerje površin in prostornin nastalih vrtenin!

124. Najdaljša stranica poševnega stožca $\overline{AC}$ meri 16cm, najkrajša stranica $\overline{BC}$ pa 10cm; stranici oklepata kot $60°$. Kolika je prostornina stožca?

125. V enakostranični stožec s polmerom r včrtaj enakostranični valj. Kolika je površina tega valja?

126. Pravilni enakorobi tristranični prizmi z robom a očrtaj enakostranični stožec. Kolika sta volumen in površina stožca?

127. Osnovna ploskev stožca ima ploščino $7\pi cm^2$. Plašč, razvit v ravnino, je enak osmini kroga. Izračunaj površino in prostornino stožca!

128. Kocka $ABCDEFGH$ ima rob a. Koliki sta površina in prostornina tetraedra z oglišči B, D, E in G?

129. V pravilno štiristranično piramido, ki ima osnovni rob a in stranski rob $\frac{3}{4}a$, je včrtana kocka tako, da so oglišča zgornje mejne ploskve kocke na stranskih robovih piramide. Kolika je prostornina kocke?

130. Od oktaedra z robom a odsekamo v vsakem oglu piramido, katere stranski robovi merijo $a/2$. Kolika je prostornina tako nastalega telesa?

131. Izračunaj površino in prostornino telesa, ki nastane, če kocki z robom a odsekamo v vsakem oglu piramido, katere stranski robovi merijo $a/2$!

132. Pokončni valj ima premer $2r = 12$ in diagonalo preseka $d = 13$. Izračunaj volumen včrtane tristranične pravilne piramide!

133. Osnovno ploskev pokončne štiristranične piramide tvorita dva enakostranična trikotnika s stranico a. Krajši stranski rob je enak osnovnemu robu. Koliki sta površina in prostornina piramide?

134. V tristranični piramidi merita dva nasprotna robova 4cm in 12cm, drugi robovi pa 7cm. Kolik je volumen piramide?

135. Izračunaj volumen pravilne tristranične piramide, če je telesna višina za tretjino večja od osnovnega roba in je dan polmer r osnovni ploskvi očrtanega kroga!

136. Osnovna ploskev piramide je enakokrak trapez z osnovnicama $2a$ in a, $\alpha = 60^\circ$. Telesna višina piramide je pravokotnica iz oglišča A in je enaka diagonali osnovne ploskve. Izračunaj:
a) vsoto stranskih robov, b) površino in prostornino piramide!

137. Na pravilno enakorobo šeststranično prizmo z robom a je postavljena (s skupno osnovno ploskvijo) pravilna šeststranična piramida. Plašč piramide je dvakrat večji od njene osnovne ploskve. Izračunaj površino, prostornino in višino sestavljenega telesa!

138. Dana je enakoroba tristranična piramida (tetraeder) z robom $a = 4\sqrt{2}$. Središča robov te piramide so oglišča novega telesa. Izračunaj površino in prostornino novega telesa!

139. Dan je enakokrak pravokoten trikotnik ABC s stranico $\overline{AC} = \overline{BC} = a$. Iz oglišča B načrtamo pravokotnico na ravnino trikotnika in na njej odmerimo razdaljo $\overline{BS} = a\sqrt{2}$. Tako dobimo tetraeder $SABC$.
a) Koliki sta površina in prostornina tetraedra?
b) Načrtaj s šestilom in ravnilom mrežo tetraedra $SABC$ (enoto za dolžino izberi sam)!

140. Telesna višina pravilne enakorobe štiristranične piramide je k. Izrazi s k površino in prostornino te piramide!

141. Iz kroga s polmerom $r = (1 + \sqrt{3})$ izrežemo mrežo pravilne štiristranične enakorobe piramide. Izračunaj prostornino piramide!

142. Osnovni rob tristranične piramide meri 16cm, njemu nasprotni stranski rob pa 18cm. Vsi ostali robovi piramide merijo po 17cm. Izračunaj prostornino piramide!

143. Osnovna ploskev pokončne piramide je kvadrat s stranico a. Stranska ploskev oklepa z osnovno ploskvijo kot 60°. Izračunaj:
a) razdaljo od težišča osnovne ploskve do stranske ploskve,
b) površino piramide,
c) prostornino piramide!

144. Prostornina pravilne 4-stranične piramide je $\frac{1}{6}a^3 \cdot \sqrt{15}$. Izračunaj površino te piramide!

145. Izračunaj površino in prostornino oktaedru očrtane in včrtane krogle, če je dan rob a oktaedra!

146. Teža krogelne lupine iz železa ($\sigma = 7{,}2$ p/cm²) je 2945,112p, zunanji polmer $R = 5$cm. Kolika je debelina lupine?

147. Krogla ima polmer 4dm. Izračunaj ploščino kroga, ki ga vidimo, če gledamo kroglo iz točke A, za 8dm oddaljene od središča krogle!

148. Iz pokončnega stožca s stranico s, ki oklepa z osnovno ploskvijo kot 30°, izsekamo največjo kroglo. Izračunaj njeno površino!

149. Posoda, ki ima obliko enakostraničnega valja s premerom 10cm, je napolnjena z vodo do 11/12 svoje višine. Kolik je polmer največje krogle, ki jo lahko potopimo v vodo, tako da voda ne izteka?

150. Osnovni rob pravilne štiristranične piramide je a, stranski rob pa $(3a\sqrt{2})/2$. Določi prostornino piramide in očrtane krogle!

151. Tetraedru z robom $a = 9$cm očrtaj in včrtaj kroglo. Izračunaj razliko prostornin teh dveh krogel in razmerje njunih polmerov!

152. Kocko z robom $a = 4$cm preoblikujemo v kvader z robovi, ki so v razmerju 1 : 2 : 4. Za koliko se spremenita površini teles?

153. Na kocko z robom a postavimo drugo kocko, tako da so oglišča osnovne ploskve v središču robov prve kocke. Nato postavimo na drugo kocko na enak način še tretjo kocko. Kolikšni sta površina in prostornina sestavljenega telesa?

154. Tristrana pokončna prizma ima za osnovno ploskev trikotnik s stranicama $a = 18$dm, $b = 14$dm in kot med njima je $30°$. Izračunaj prostornino prizme, če je njena višina $v = 10$dm !

155. Dana je vsota robov kvadra $a + b + c = s$ in diagonala kvadra d. Kolika ję površina kvadra, izražena z d in s?

156. Pravokotni trikotnik s katetama $a = 30$, $b = 40$ se zavrti okoli premice, ki gre skozi vrh pravega kota in je vzporedna hipotenuzi. Izračunaj površino in prostornino vrtenine!

157. Če je dolžina roba kocke enaka premeru krogle, sta prostornini kocke in krogle v enakem razmerju kot njuni površini. Dokaži!

158. Kot ob vrhu osnega preseka stožca je pravi. Določi razmerje prostornin stožca in krogle, katere polmer je enak polmeru osnovne ploskve stožca.

159. Dane so tri krogle s površinami 36π, 64π, 100π. Izračunaj polmer krogle, katere prostornina je enaka vsoti prostornin danih krogel.

160. Poišči površino pokončnega stožca, ki je očrtan krogli s premerom $2r$ in višino, ki je dvakrat daljša od premera krogle.

B. NALOGE IZ TEKMOVANJ ZA UČENCE VIII. RAZREDA

072.1 Enačbi $\frac{x - 5}{3} - \frac{x - 2}{2} = x - 3$ in $(a - 3)x + (a + 1)(3 - x) = a + x - 1$ sta ekvivalentni. Določi število a!

072.2 Veslač je veslal proti toku reke 75 minut in preveslal $2\frac{1}{2}$ km dolgo pot. Na povratku ni veslal, ampak ga je nesel vodni tok in je porabil za isto razdaljo 50 minut. Izračunaj:

a) hitrost vode v km/h,
b) hitrost veslača v mirni vodi v km/h,
c) čas, ki bi ga veslač porabil za povratek, če bi veslal z isto močjo proti toku!

072.3 Pravokotniku povečamo osnovnico za tretjino. Za koliko mu moramo hkrati zmanjšati višino, da se njegova ploščina ne bo spremenila?

072.4 V trikotniku je kot α za 20% manjši od kota β, a za $33\frac{1}{3}$% večji od kota γ. Koliko meri vsak kot?

072.5 Plašč pravilne šeststranične piramide je 7-krat večji od osnovne ploskve; osnovni rob piramide je a. Kolika je višina piramide?

073.1 Vsota štirih zaporednih števil je 230. Katera so ta števila?

073.2 V pravokotnem koordinatnem sistemu so oglišča štirikotnika $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(4,4)$, $C(0,3)$. Izračunaj ploščino štirikotnika!

073.3 Zlatar ima dve različni zlitini zlata in srebra. V eni sta zlato in srebro v razmerju 3:2, v drugi pa je v razmerju 3:5. Koliko kg vsake zlitine naj vzame, da bo dobil 9kg nove zlitine, v kateri bo enako zlata in srebra?

073.4 Na mizi sestavimo iz 55 kock z robom a stopničasto piramido; pobarvamo vidni del površja sestavljenega telesa.
a) Kolikšna je pobarvana površina?
b) Koliko kock sploh ni pobarvanih?

073.5 Padlo je 2,2mm dežja. Koliko kapljic je padlo na 1m površine, če je povprečna masa kapljice (1/12)g ?

074.1 Vrednosti izrazov $2n$, $n^2 + 1$, $n^2 - 1$ so dolžine trikotnikovih stranic. Dokaži, da je trikotnik pravokoten!

074.2 V nasadu je 2860 dreves. Na vsakih 10 jablan so 3 hruške in 2 slivi. Število češenj je $33\frac{1}{3}$% števila vseh jablan, hrušk in sliv. Koliko je v tem nasadu češenj?

074.3 Pri katerih številih a in b bo vrednost izraza $a(2x + 3y) + b(2x - 3y)$ enaka nič za $x = 1$ in $y = 1$? Navedi tri take dvojice števil a in b!

074.4 Imamo dva kvadra. Njuni dolžini sta v razmerju 1:2, širini v razmerju 2:3, višini pa v razmerju 3:4. V kakšnem razmerju sta njuni prostornini?

074.5 V pravokotniku $ABCD$ s stranicama $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 8$ označi z M središče stranice AB, z N središče stranice BC in s T sečišče premice skozi točki M in N s podaljškom stranice DA. Določi prostornino telesa, ki nastane pri vrtenju trikotnika CTN okrog osi skozi stranico CN!

075.1 Kraja A in B sta 200km narazen. V kraju A stane tona premoga 400 din, v kraju B pa 480 din. Prevoz stane 20 din za kilometer in tono.

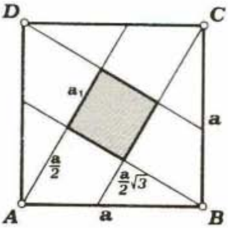
a) Za katere kraje med krajema A in B je ugodneje kupovati premog v kraju B?

b) Za kateri kraj med krajema A in B je vseeno, kje nabavimo premog?

075.2 V škatli so bele in črne kroglice. Njihovo skupno število je večje od 300 in manjše od 400. Če jemljemo iz škatle po 10 kroglic ali če jih jemljemo po 12, jih v škatli ostane vselej po 7. Črnih kroglic je za 25 več kot belih. Koliko je belih kroglic in koliko črnih?

075.3 Valju s prostornino 18π dm^3 je včrtana piramida, ki ima za osnovno ploskev enakokrak pravokotni trikotnik s hipotenuzo $3\sqrt{2}$dm. Izračunaj prostornino te piramide!

075.4 Iz kovinske plošče, ki ima obliko kvadratne prizme z osnovnim robom a = 1dm in debelino 5mm, izsekamo odprtino, kakor kaže slika. V kakšnem razmerju sta masa prvotne in masa sedanje plošče?



076.1 Vsota štirih naravnih števil je 324. Če k prvemu številu prištejemo 5, od drugega pa odštejemo 5, tretjega pomnožimo s 5, četrtega delimo s 5, dobimo vselej isti rezultat. Katera števila so to?

076.2 Avtomobilist je prevozil 3km poti s hitrostjo 30 km/h, nato 3km s hitrostjo 45 km/h in še 10km s hitrostjo 60 km/h. Kolika je bila njegova povprečna hitrost na vsej poti?

076.3 Trikotnik ABC ima oglišče A v tlorisni, oglišče B v narisni ravnini, oglišče C pa je v prostoru enako oddaljeno od obeh ravnin. Napiši koordinate oglišč trikotnika ABC in nariši obe pravokotni projekciji!

076.4 V krogu s polmerom r načrtaj na isti strani središča dve vzporedni tetivi. Prva pripada središčnemu kotu 60°, druga središčnemu kotu 120°. Zveži krajišča tetiv tako, da dobiš enakokrak trapez! Izračunaj ploščino trapeza!

076.5 Stranski robovi pravilne tristrane piramide so pravokotni drug na drugem in merijo po 3dm. Izračunaj površino in prostornino te piramide!

077.1 Vsota obratnih vrednosti treh naravnih števil je 1. Poišči vsa taka števila!

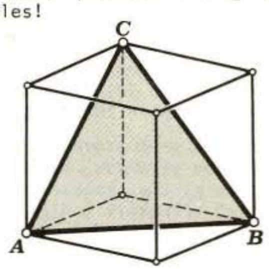
077.2 Trgovina je kupila dve vrsti čaja: enega po 320 din za kg, drugega po 400 din za kg. Obe vrsti čaja so zmešali. Za stroške in dobiček so dodali k ceni 25% in prodajali mešanico po 430 din za kg. V kakšnem razmerju sta obe vrsti čaja v 100kg mešanice?

077.3 Skupina tabornikov, ki je ob 8.uri odveslala po reki navzdol, se mora vrniti ob 12.uri. Hitrost reke je 2km/h, hitrost čolna zaradi veslanja pa 8km/h. Kako daleč smejo peljati po reki navzdol, če se nameravajo nazaj grede za 2 uri ustaviti na obrežju reke?

077.4 V pravokotnem trikotniku meri kateta 7cm. Poišči drugi dve stranici, če veš, da sta njuni dolžini naravni števili!

077.5 Skozi središče S enakostraničnega trikotnika ABC postavi pravokotnico na ravnino trikotnika. Na njej določi na nasprotnih straneh ravnine točki T_1 in T_2 tako, da predstavlja T_1 vrh pravilnega tetraedra z osnovno ploskvijo trikotnika ABC, T_2 pa vrh pravilne tristrane piramide z isto osnovno ploskvijo, pri kateri so stranski robovi pravokotni drug na drugem. Izračunaj razmerje prostornin obeh teles!

078.1 Ploščina trikotnika ABC meri $2\sqrt{3}$ dm^2. Izračunaj površino kocke! (Glej skico!)



078.2 Kroglica pri nitnem nihalu se v skrajni legi dvigne za 1cm nad mirovno lego. Razdalja med skrajnima legama je 14cm. Kolikšna je dolžina nihala?

078.3 V košari so jabolka. Odvzamemo jih polovico in še pol jabolka. Nato odvzamemo polovico ostanka in še pol jabolka. Končno odvzamemo polovico preostalih jabolk in še pol jabolka. V košari ostane 7 jabolk. Koliko jabolk je bilo v košari na začetku?

078.4 Dve različni krožnici se od zunaj dotikata v točki C. Skupna tangenta se dotika obeh krožnic v točkah A in B. Najmanjši kot v trikotniku ABC meri 30°, najkrajša stranica pa 15cm. Koliko meri najdaljša stranica v trikotniku ABC?

078.5 Dokaži, da je vsota kvadratov telesnih diagonal enaka vsoti kvadratov robov
   a) pri vsaki kocki,
   b) pri vsakem kvadru,
   c) Pri vsaki pokončni prizmi, ki ima za osnovno ploskev romb!

079.1 a, b, c, d, e, f so zaporedna naravna števila. Uredi po velikosti ulomke a/b, c/d, e/f. Utemelji odgovor!

079.2 Upodobi v koordinatni ravnini množico urejenih parov (x,y), za katere ima izraz $(\frac{2}{3}x - y - 3)^2 + 2$ najmanšo vrednost!

079.3 Dana je kocka $ABCDEFGH$ z robom a. Izrazi z a razdalje oglišč od izbrane telesne diagonale te kocke!

079.4 Rob kocke meri a cm. Vsak rob podaljšamo preko vsakega oglišča za $a/2$. Prosta krajišča podaljškov so oglišča novega telesa. Določi površino tega telesa!

079.5 Dan je pravilni šestkotnik. Z daljicama, ki imata skupno krajišče v izbranem oglišču, razdeli ta lik na tri ploščinsko enake dele!

080.1 Določi število a tako, da bo imela enačba $\frac{6a}{3x+1} - 1 = \frac{3a}{5}$ rešitev $x = -2$! Preveri rešitev!

080.2 Koncertna vstopnica je stala 120 din. Po znižanju cene so prodali za polovico več vstopnic, kot bi jih po prvotni ceni. Dohodek koncerta je bil s tem za četrtino večji od tistega, ki bi ga ustvarili po prvotni ceni. Za koliko je bila znižana cena vstopnice?

080.3 Če v ulomku a/b ($a \in N$, $b \in N$ in $a < b$) števec potenciramo s 3, imenovalec pa povečamo za 3, dobimo ulomek, ki je za trikrat večji od ulomka a/b. Določi ulomek a/b!

080.4 Ploščini dveh podobnih trikotnikov merita $36cm^2$ in $25cm^2$, obsega pa se razlikujeta za 24cm. Izračunaj obsega obeh trikotnikov!

080.5 Sod ima obliko pokončnega valja in je napolnjen z vodo (r = 10cm, v = 25cm). Koliko vode ostane v sodu, če ga nagnemo tako, da oklepa osnovna ploskev z vodoravno ravnino kot 45°?

081.1 Reši enačbo: $a(5x + 2b) - 5(x - 2a) = 5(x + 2a) + a(2b + 5)$ in ugotovi, za katere a je enačba rešljiva!

081.2 V trikotniku ABC je stranica $\overline{AB} = 6$, kot pri A meri 60° in kot pri B 75°. Izračunaj ploščino trikotnika!

081.3 Graf funkcije $y = (k - 2)x + 2x - 5$ poteka skozi $T(2,1)$.

a) Določi vrednost spremenljivke k!
b) Pri tej vrednosti k določi ploščino trikotnika, ki ga tvori graf funkcije s koordinatnima osema!

081.4 Skozi presečišče diagonal trapeza nariši vzporednico z osnovnicama. Dokaži, da presečišče diagonal razpolavlja odsek na vzporednici med krakoma!

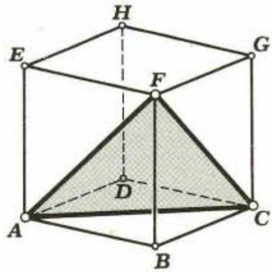
081.5 Oglišča kocke označimo z A, B, C, D na spodnji osnovni ploskvi in z E, F, G, H na zgornji osnovni ploskvi (E je nad A, ...). Razpolovišče roba EF označimo s P, razpolovišče roba FG s Q. Kocko presekamo z ravnino skozi nosilki daljic AC in PQ. Izračunaj ploščino preseka, če meri rob kocke 10!

082.1 V dveh istosrediščnih krogih je tetiva večjega kroga hkrati tangenta manjšega kroga. Dolžina tetive je 6m. Kolika je ploščina kolobarja?

082.2 Nariši graf funkcije $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$. Kolika odseka odreže premica na koordinatnih oseh in kolikšna je razdalja koordinatnega izhodišča od premice?

082.3 Nekdo je kupil poštne znamke v vrednosti 24 dinarjev. Trdi, da je dobil trikrat več znamk po 40 par in kar polovico manj znamk po 20 par kot pa znamk po 30 par. Preveri, ali je trditev pravilna!

082.4 Na sliki je narisana kocka $ABCDEFGH$. Ploščina trikotnika ACF je $2\sqrt{3}$ dm². Izračunaj površino in prostornino kocke!



082.5 Obseg enakokrakega trikotnika je 36cm. Skozi razpolovišče višine na osnovnico položimo vzporednico s krakom. Poišči obseg manjšega enakokrakega trikotnika!

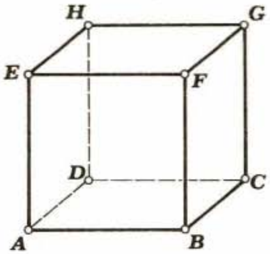
R72.1 Prvo število je 4/5 drugega. Drugo in tretje število sta v razmerju 0,5 : (9/20). Vsota prvega in tretjega števila je za 70 večja od drugega števila. Katera so ta tri števila?

R72.2 V pravokotniku meri ena stranica 75% druge. Če krajšo stranico povečaš za 3cm, daljšo pa zmanjšaš za 6cm, nastane pravokotnik z obsegom 50cm. Koliko merita stranici pravokotnika?

R72.3 Načrtaj graf funkcij $5x + 12y = 60$ in $3x + 4y = 12$. Izračunaj obseg in ploščino štirikotnika, katerega oglišča so presečišča premic s koordinatnima osema!

R72.4 Pravilni oktaeder sestavljata dve enakorobni štiristranični piramidi, ki se stikata z osnovnima ploskvama. Njegov rob meri 6cm. Izračunaj volumen oktaedra in volumen očrtane krogle!

R72.5 Ravnina seka kocko tako, da gre skozi središče robov: EF, FG, GC, CD, DA, AE. Presečni lik naj bo osnovna ploskev enakorobne pokončne prizme. Razlika med prostorninama prizme in kocke je $(3\sqrt{6})/8 - 1$. Izračunaj prostornini obeh teles!



R73.1 Nad severnim polom so v nekem trenutku sočasno trije zemeljski sateliti. Prvi obkroži Zemljo v 90 minutah, drugi v 105 minutah, tretji v dveh urah. Kolikokrat bo prvi satelit obkrožil Zemljo do trenutka, ko bodo prvič spet vsi trije sateliti nad severnim polom?

R73.2 Pet delavcev je opravilo delo za 10 500 din. Denar si razdelijo tako, da dobita prva dva skupaj 2/5 skupnega deleža ostalih treh. Prva dva si svoj delež razdelita v razmerju 2:3, drugi trije pa v razmerju 3:4:5. Koliko dobi vsak?

R73.3 V krogu s polmerom r nariši med seboj pravokotna premera AB in CD. Načrtaj krog s središčem A in polmerom AC. Primerjaj ploščini trikotnika ACD in lika, ki ga omejujeta krajša loka CD obeh krožnic!

R73.4 V koordinatnem sistemu konstruiraj točki $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ in $B(-\sqrt{5},\sqrt{5})$. Določi linearno funkcijo, katere graf gre skozi dani točki! ($\sqrt{2}$ in $\sqrt{5}$ konstruiraj z ravnilom in šestilom. Za dolžinsko enoto vzemi 3cm!)

R73.5 Na kvadratnem zemljišču s stranico 12m kopljejo okroglo jamo s premerom 8m. Izkopano zemljo enakomerno razsujejo po preostalem delu zemljišča in jo stlačijo. Kako globoko morajo kopati, da bo jama globoka 3m?

R74.1 Vlak pelje s hitrostjo 60km/h iz kraja A proti kraju B. Zaprt signal na progi ga zadrži 3 minute. Vožnjo nadaljuje s hitrostjo 75km/h in prispe v B po voznem redu. Koliko km pred krajem B stoji signal?

R74.2 Steber sestavljata polkrogla in pokončni stožec, ki imata skupni osnovni krog. Polmer polkrogle je 2dm, višina stožca pa je v cm izražena rešitev enačbe:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{2x + \frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{5}} + x + 10 = 0$$

Izračunaj površino in prostornino stebra!

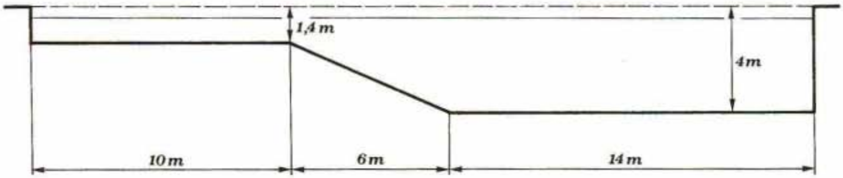
R74.3 Vrt ima obliko pravokotnika z oglišči A, B, C in D. V vrtu raste jablana, ki je oddaljena 7m od oglišča A, 2m od oglišča B in 6m od oglišča C. Koliko je oddaljena od oglišča D?

R74.5 Na sliki je prerez bazena. Njegova širina je 12m.

a) Koliko vode je v bazenu, če je gladina vode 2dm pod robom?

b) Za koliko se dvigne gladina vode v bazenu, če dotočimo še 10hl vode?

R74.4 Za katere vrednosti x je izraz $(2x + 1)(x - 5)$ enak nič in za katere je pozitiven?



R75.1 Razstavi izraz $(x - 0{,}1)^2 - (0{,}2x + 1)^2$ na produkt dveh faktorjev!

R75.2 Načrtaj graf funkcije $y = f(x)$, ki je dana z enačbo:

$(4x - 8y)(-\frac{1}{2}) + 11 = (7x + 2)^2 - (7x + 3)^2$. Lik, ki ga omejujejo graf funkcije in koordinatni osi, se zavrti prvič okrog osi x in drugič okrog osi y. Izračunaj razmerje med plaščema nastalih vrtenin!

R75.3 Premer polkroga je $2r$. Iz krajišča premera sta narisani tetivi t_1 in t_2. Kota med premerom in tetivo t_1 ter med tetivama t_1 in t_2 merita po $30°$. Tetivi razdelita polkrog na 3 like. Izračunaj ploščino vsakega lika

R75.4 Krogli s polmerom r očrtaj pravilno tristranično prizmo. Določi razmerje prostornin obeh teles!

R75.5 Prva številka šestmestnega naravnega števila je 9. Če to številko prestavimo s prvega na zadnje mesto, dobimo število, ki je štirikrat manjše od prvotnega. Določi prvotno število!

R76.1 Obeska tehtata skupaj m gramov. Prvi obesek vsebuje p% zlata, drugi pa q%. V prvem obesku je r gramov zlata več kot v drugem. Koliko tehta vsak obesek?

R76.2 Okrog ekvatorja je koncentrično postavljen obroč, ki je 1m daljši od ekvatorja. Ali se lahko miš splazi pod tem obročem? (Vzemi, da je Zemlja popolna krogla!)

R76.3 V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom v C so dolžine težiščnic t_a, t_b in t_c. Dokaži, da velja enačba: $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$

R76.4 Iz kvadrata z diagonalo $(1 + \sqrt{3})$ dm izrežemo mrežo največje možne enakorobne štiristranične piramide. Izračunaj površino in prostornino te piramide!

R76.5 Višina pokončnega stožca je v dm. Dve med seboj pravokotni stranici stožca razdelita rob njegove osnovne ploskve na dva loka. Dolžini lokov sta v razmerju 1:2. Izračunaj prostornino stožca!

R77.1 a) Dokaži, da velja enakost: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, če je $(a+b)(b+c)=0$ in $abc \neq 0$!

b) Reši enačbo: $x^2+2x+9y^2+6y+2=0$

R77.2 Kraja A in B sta oddaljena a km. Kolesar je prvič prevozil pot iz A v B in nazaj s stalno hitrostjo. Drugič je iz A v B vozil za 6km/h hitreje, nazaj pa za 4km/h počasneje kot na prvi vožnji. Obakrat je za vso pot porabil enak čas. Izračunaj hitrost kolesarja na prvi vožnji! Ali je rezultat odvisen od razdalje a?

R77.3 V notranjosti kota 60° je točka T, ki je od enega kraka oddaljena za a, od drugega kraka za b. Izračunaj razdaljo točke T od vrha kota V!

R77.4 Dokaži, da se iz središča višine enakorobne tristrane piramide vidi osnovni rob pod pravim kotom!

R77.5 Nariši premici: $5x+12y-60=0$ in $5x+12y-120=0$. Izračunaj obseg in ploščino lika, ki ga omejujeta dani premici in odseka na koordinatnih oseh!

R78.1 Reši enačbo: $c(5x+7d)-5(x-2c)=5(x+2c)+c(7d+5)$
Ugotovi pod katerim pogojem

a) je rešitev enačbe pozitivno število (negativno število, 0),
b) rešitev enačbe ne obstaja.

R78.2 Razlika kvadratov dveh zaporednih lihih naravnih števil je 192. Izračunaj ti dve števili!

R78.3 Krogu s polmerom $r = 2$cm je očrtan enakokrak trapez s ploščino $p = 20\text{cm}^2$. Določi dolžine stranic trapeza!

R78.4 Pravokotni trikotnik z dano hipotenuzo c in notranjim kotom 30° se zavrti za 360° okrog hipotenuze. Izračunaj prostornino vrtenine!

R78.5 Poljubnemu paralelogramu nariši simetrale zunanjih kotov. Dokaži, da so sečišča teh simetral oglišča pravokotnika! (Skico nariši z ravnilom in šestilom.)

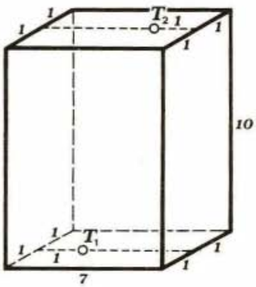
R79.1 Poenostavi izraz: $1-a+a^2-a^3+\ldots+a^{98}-a^{99}+\frac{a^{100}}{1+a}$ in izračunaj njegovo vrednost, če je $a=5$!

R79.2 Če seštejemo dvomestno naravno število in število, ki ima isti cifri v obratnem vrstnem redu, dobimo kvadrat naravnega števila. Poišči vsa taka naravna števila!

R79.3 Za pravokotnik $ABCD$ vemo:
$\overline{AB}=\frac{3}{4}\,\overline{BC}$, $\overline{AC}=\overline{BC}+7$
(v centimetrih)

a) Izračunaj stranici pravokotnika!
b) Nariši dani pravokotnik v merilu 1:5 in poišči točko T, iz katere vidimo stranici AB in BC pod kotoma 30°!

R79.4 Izračunaj dolžino najkrajše poti, ki gre po površju kvadra od točke T_1 do T_2! (Podatki so na skici.)



R79.5 Osnovna ploskev piramide je romb s stranico a in kotom $120°$. Presek skozi vrh piramide in daljšo diagonalo romba je pravokoten na osnovno ploskev piramide in je enakostranični trikotnik. Izračunaj prostornino in površino piramide!

R80.1 Kocka ima rob a. Vsako diagonalo kocke podaljšamo na vsako stran za $a/2$. Tako dobimo osem točk, ki so oglišča nove kocke. Izračunaj prostornino te kocke!

R80.2 Ko je množil dve naravni števili, od katerih je eno za 10 večje od drugega, se je učenec zmotil. Pri deseticah produkta je dobil za 4 premalo. Ko je za preskus delil produkt z manjšim številom, je dobil količnik 10 in ostanek 9. Kateri števili je množil?

R80.3 Uro, ki prehiteva v 1 dnevu za 4 minute, smo naravnali danes ob 6.uri. Kolik bo pravi čas, ko bo ta ura jutri kazala 20. uro?

R80.4 Funkcija $y = f(x)$ je dana z enačbo $3x - 4ay - 12a^2 = 0$. Določi a tako, da je ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije $y = f(x)$ in koordinatni osi, enaka 48.

R80.5 Na stranici AB enakostraničnega trikotnika ABC z dano stranico a določi točko D tako, da bo $\overline{BD} = (2/7)\overline{AB}$. Iz točke D nariši pravokotnico DE na stranico BC, iz točke E pravokotnico EF na stranico AC in iz točke F pravokotnico FG na stranico AB. Izračunaj ploščino štirikotnika $DEFG$, če poznaš stranico trikotnika!

R81.1 Poenostavi ulomek $\dfrac{(x - 3y)^2 - (x - 2y)^2}{x^2 - (x - y)^2}$ in ugotovi, pri katerih vrednostih spremenljivk x in y ulomek nima pomena!

R81.2 Pri katerih vrednostih spremenljivk a, b, c ima veččlenik $P = a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 14b + 75$ najmanjšo vrednost?

R81.3 Kvadratu s stranico a včrtamo krog K. Potem včrtamo v kvadrat štiri kroge, tako da se vsak od njih dotika kroga K in dveh stranic kvadrata. Izračunaj polmer krogov!

R81.4 V pravokotni trikotnik s katetama a in b včrtamo kvadrat, tako da sta njegovi stranici na katetah, eno oglišče pa na hipotenuzi trikotnika. Izračunaj razmerje ploščin trikotnika in kvadrata!

R81.5 Osnovna ploskev kvadra je kvadrat s stranico a. Če sečemo kvader z ravnino, ki gre skozi osnovni rob in oklepa z osnovno ploskvijo kot $30°$, dobimo telesi, katerih prostornini sta vrazmerju 1:2. Izračunaj prostornino kvadra!

R82.1 Določi število a tako, da imata enačbi $ax - 3x + 5 = 0$ in $ax + 2x + 4 = 0$ isto množico rešitev!

R82.2 Nad daljico AB ($\overline{AB}$ = 6cm) nariši polkrožnico, v krajiščih A in B pa pravokotnici. Tangenta v poljubni točki polkrožnice seka pravokotnici v točkah M in N. Odsek AM označi z x in odsek BN z y. Izrazi spremenljivko y z x!

R82.3 V enakokrakem trapezu s krakom d sta osnovnici v razmerju 2:1. Kot ob daljši osnovnici meri $75°$. Izračunaj ploščino trapeza!

R82.4 V pravilno štiristrano piramido, ki ima osnovni rob a in stranski rob $(3/4)a$, je včrtana kocka tako, da so oglišča zgornje osnovne ploskve na stranskih robovih piramide. Kolika je prostornina kocke?

R82.5 Anica, Branka, Vera, Gabrijela in Danica so ožje sorodnice. Brankina babica, ki je ena od njih, je Daničina sestra, a Danica je Gabrijelina teta. Aničina sestra, ki je ena od njih, je Brankina mati. V kakšnem sorodstvu sta Branka in Vera?

Z72.1 V prazna polja preglednice vpiši taka števila, da bo vsota treh sosednjih števil v isti vrsti in v istem stolpcu vedno enaka 12!

	5						
					1		
6							
			2				

Z72.2 Helikopter in letalo vzletita sočasno drug drugemu nasproti. Do srečanja je helikopter preletel 100 km manj kot letalo, a na vzletišče letala je priletel 3 ure po srečanju. Letalo je priletelo na vzletišče helikopterja 1 uro in 20 minut po srečanju. Izračunaj hitrosti letala in helikopterja ter razdaljo med vzletišči!

Z72.3 Izbočeni šestkotnik $ABCDEF$ sestavljajo enakokraki trapez $ACDF$ in dva enakokraka trikotnika ABC in FDE z enakima višinama v = 12cm. Stranice šestkotnika merijo: $\overline{AB}$ = 15cm, $\overline{AF}$ = 25cm, $\overline{EF}$ = 20cm. Konstruiraj šestkotnik in izračunaj njegovo ploščino v dm^2 (merilo 1:5)!

Z72.4 Brigada traktoristov je morala izorati dve njivi, od katerih je prva dvakrat večja od druge. Prvi dan so vsi orali prvo njivo. Drugi dan je polovica brigade končala oranje prve (večje) njive. Druga polovica brigade je orala drugo njivo, ni pa je do konca izorala in je zato moral en traktorist orati še dva dni. Koliko traktoristov je štela brigada? (Predpostavljamo, da so vsi traktoristi delali v enakih razmerah in z isto produktivnostjo.)

Z72.5 Pravilna enakorobna tristranična prizma ima osnovno ploskev $6{,}25\sqrt{3}cm^2$.

a) Izračunaj osnovni rob tega telesa!
b) Določi razmerje med prostornino tej prizmi očrtanega in včrtanega valja, ki ima isto višino kot prizma!
c) Ali to razmerje velja za vsako pravilno tristranično prizmo?

Z73.1 Vzemimo dve poljubni števili. Vsota, razlika in produkt teh dveh števil so tri nova števila. Dokaži, da je vsaj eno teh treh števil deljivo s 3!

Z73.2 Po znižanju cene blaga za 20% lahko kupimo za 240 din 1 m več blaga, kot smo ga pred znižanjem kupili za 270 din. Po čem je bilo blago pred znižanjem cene?

Z73.3 V ravninskem pravokotnem koordinatnem sistemu XY načrtaj pravokotnik $ABCD$, če so znane koordinate oglišč: $A(-3,-1)$, $B(5,-1)$, $C(5,3)$. Določi

a) koordinati točke D,
b) koordinati presečišča daljic AC in BD,
c) enačbe premic, na katerih leže stranice in diagonali pravokotnika.

Z73.4 Osnovnici AB in CD trapeza $ABCD$ podaljšamo na obe strani. Simetrali zunanjih kotov trapeza pri A in D se sečeta v točki M, simetrali zunanjih kotov pri B in C pa v točki N. Določi obseg trapeza $ABCD$, če je $\overline{MN} = 2k$!

Z73.5 Vrh enakostraničnega stožca leži v središču osnovne ploskve pokončnega valja, osnovna ploskev tega stožca pa je koncentrična z drugo osnovno ploskvijo valja. Polmer osnovne ploskve valja je r, višina pa h. Volumen stožca in valja sta enaka.

a) Kolik je polmer osnovne ploskve stožca (izraženo z r)?
b) Kolik je volumen tistega dela valja, ki je v notranjosti stožca (izražen z r in h)?

Z74.1 Osnovna ploskev pokončne štiristranične prizme je romb s ploščino $(2/3)k^2$. Manjši diagonalni presek je kvadrat s ploščino k^2.

a) Izrazi površino in prostornino prizme s k!
b) Kolikšen je k, če sta merski števili površine in prostornine enaki?

Z74.2 Krožnici je včrtan enakostranični trikotnik ABC. Poljubna točka M pripada loku BC, na katerem leži točka A; dokaži, da je $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$!

Z74.3 Na krožni stezi, dolgi 1650m, se gibljeta dva motociklista s konstantno hitrostjo. Če se motociklista gibljeta v nasprotni smeri, se srečata vsako minuto; če pa se gibljeta v isti smeri, dohiti hitrejši motociklist počasnejšega vsakih enajst minut. Določi hitrosti motociklistov!

Z74.4 Nariši v pravokotnem koordinatnem sistemu (enota = 1cm) premici p_1 in p_2, ki imata enačbi: p_1: $y = x - 4$ in p_2: $y = 2x - 2$. Izračunaj:

a) ploščino figure (lika), ki ga omejujeta premici in koordinatni osi,
b) volumen vrtenine, ki nastane, če trikotnik, omejen s premicama p_1, p_2 in ordinatno osjo, rotira okoli ordinatne osi!

Z74.5 Reši enačbo in opravi preizkus!
$(0{,}8x - 0{,}5)^2 + (0{,}6x - 1{,}3)^2 = 4(0{,}5x - 0{,}7)(0{,}5x + 0{,}7) - 6(0{,}15x + 0{,}$

Z75.1 Elementi tričlenske množice $A = \{a,b,c\}$ so katerekoli potence poljubnih dvoštevilčnih praštevil, manjših od 20. Dokaži, da obstajata med elementi množice A dve taki števili, da je njuna vsota ali razlika deljiva s 5!

Z75.2 Določi števila x, y, z, za katere velja enačba:
$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0$

Z75.3 Pri izdelavi kovinskega klina je 12,5% odpadkov od porabljenega materiala. Tako izdelajo iz enega kovinskega kosa 100 000 klinov. Dobljene odpadke spet vlivajo v en kos in iz tega na isti način naredijo prav take kline. Postopek ponavljajo, dokler je mogoče iz odpadkov napraviti vsaj še en klin. Koliko klinov dobimo v celoti, če računamo tudi prvih 100 000 klinov?

Z75.4 Opazovalec vidi steno (daljico) AB iz dveh točk C in D, ki sta med seboj oddaljeni za 300 metrov, pod kotom 30°. Daljici AD in BC sta druga na drugo pravokotni. Izračunaj dolžino stene AB!

Z75.5 Osnovnici kvadra sta v razmerju 4:3, diagonali stranskih ploskev sta med seboj v razmerju $\sqrt{20} : \sqrt{13}$, številčno razmerje ploščine diagonalnega preseka proti volumnu kvadra pa je 2:1. Izračunaj površino in volumen tega kvadra!

Z76.1 Vsoto kateregakoli naravnega števila n s štirikratnikom njegove obratne vrednosti kvadriramo. Če dobljeni rezultat zmanjšamo za kvadrat štirikratne obratne vrednosti danega naravnega števila n, dobimo naravno število, ki ni deljivo s 5. Dokaži to!

Z76.2 Letalo je preletelo prvih 385 km s hitrostjo 229km/h. Ostali del poti je preletelo s hitrostjo 330km/h. Povprečna hitrost letenja na celotni poti je bila 250km/h. Kako dolgo pot je preletelo letalo?

Z76.3 Ravnina preseka kocko tako, da seče robove izhajajoče iz skupnega vrha v točkah, ki delijo te robove v razmerju 2:1, 3:1 in 4:1 od skupnega vrha. V kakšnem razmerju sta prostornini teles, na kateri deli kocko ta ravnina?

Z76.4 Dan je pravokotni trikotnik ABC. Iz vrha A pravega kota narišemo težiščnico AM. Višina AD trikotnika ACM razpolavlja stranico CM.

a) Izračunaj kote trikotnika ABC!
b) Izračunaj površino in prostornino telesa, ki nastane z vrtenjem trikotnika ABC okoli stranice AB, če je dolžina daljice $\overline{AD} = k\sqrt{3}$cm!

Z76.5 V trapezu $ABCD$ seče vzporednica z osnovnico AB daljici AC in BC po vrsti v točkah M in N. Dokaži, da sta ploščini trikotnikov DAM in DBN enaki!

Z77.1 Ali je možno robove kocke oštevilčiti s številkami 1,2,3, ... ,11,12 tako, da je vsota števil, prirejenih trem robovom, ki "izhajajo" iz istega oglišča, za vsa oglišča enaka? Obrazloži odgovor!

Z77.2 Dano je 5 poljubnih celih števil. Dokaži:

a) da sta med njimi dve števili, katerih razlika je deljiva s 3!
b) da so med njimi tri števila, katerih vsota je deljiva s 3!

Z77.3 Premica $y = ax + b$ gre skozi točko $T(0,6)$. S koordinatnima osema določa trikotnik, katerega ploščina meri 24. Premica ne gre skozi tretji kvadrant.

a) Določi a in b!
b) Določi prostornino vrtenine, ki nastane z vrtenjem trikotnika okrog njegove najdaljše stranice!

Z77.4 Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Dolžina roba je a. Sečišče diagonal osnovne ploskve $ABCD$ je točka M. Daljici DB_1 in MD_1 se sekata v točki K. Izračunaj ploščini trikotnikov KDM in KB_1D_1!

Z77.5 Dan je pravokotnik $ABCD$, v katerem je dolžina stranice AB dvakrat večja od dolžine stranice BC. Na stranici CD je izbrana točka M tako, da je $\measuredangle AMD = \measuredangle AMB$.

a) Izračunaj velikost kota $\measuredangle AMB$!
b) Kolika je ploščina pravokotnika $ABCD$, če je dolžina daljice DM enaka 1?

Z78.1 Posoda je napolnjena s 100% alkoholom. Odlijemo 2 litra alkohola in dolijemo prav toliko destilirane vode. Postopek še enkrat ponovimo; odlijemo 2 litra mešanice in dolijemo 2 litra destilirane vode. Tako dobimo v posodi 36% alkohol. Koliko litrov drži posoda?

Z78.2 Neko troštevilčno število je 33-krat večje od vsote svojih cifer. Dokaži, da je to število deljivo z devet! Določi to število!

Z78.3 Iz kroga s polmerom r je izrezan največji možni enakostranični trikotnik. Izračunaj prostornino in površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem ostanka tega kroga okoli ene izmed njegovih osi simetrije!

Z78.4 Dve krožnici z enakima polmeroma r se dotikata od zunaj. Konstruiraj premico, ki seče obe krožnici tako, da so nastali trije odseki na tej premici po dolžini med seboj enaki! Utemelji konstrukcijo!

Z78.5 V kvadratni mreži 100 krat 100 je vpisanih 10 000 poljubnih števil. Označimo z a_1 vsoto števil v prvi vrsti, z a_2 vsoto števil v drugi vrsti, z a_3 vsoto števil v tretji vrsti, ... , z a_{100} vsoto števil v stoti vrsti. Nato označimo z b_1 vsoto števil v prvem stolpcu, z b_2 vsoto števil v drugem stolpcu, z b_3 vsoto števil v tretjem stolpcu, ... , z b_{100} vsoto števil v stotem stolpcu. Določi številčno vrednost izraza:

$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_{100} - b_{100})$

Z79.1 Na svečani večerji je bilo naročeno gostitelju, da razporedi ob okrogli mizi 4 moške in določeno število žensk tako, da nobena ženska ne sedi poleg druge ženske in da je nasproti (diametralno) vsake osebe oseba nasprotnega spola. Ali je mogel gostitelj napraviti tak razpored? Utemelji odgovor!

Z79.2 Na kolesarski dirki vozita vzporedno na čelu kolone Matjaž in Primož, ki sta se toliko odmaknila od ostalih tekmovalcev, da ju nihče več ne more dohiteti. 20km pred ciljem poči Matjažu zračnica, a Primož nadaljuje vožnjo do cilja s povprečno hitrostjo 40km/h. Matjaž je zaradi popravila zračnice izgubil 3 minute časa in je potem do cilja vozil s povprečno hitrostjo 45km/h. Kdo je zmagal na dirki in s koliko metri prednosti?

Z79.3 Dan je izraz: $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}$
Če je $x = 361979$, $z = 561980$, določi vse vrednosti za y, za katere ima dani izraz najmanjšo možno vrednost!

Z79.4 Premice: $x - y = -1$; $x + y = 8$; $x - 2y = 2$ in obe koordinatni osi oklepajo petkotnik. Določi prostornino vrtenine, ki nastane z vrtenjem tega petkotnika okrog abscisne osi!

Z79.5 Trapezova ploščina meri 80cm^2, dolžina višine pa 8cm. Središče srednjice je oddaljeno od enega kraka 3cm in od drugega 4cm. Izračunaj dolžino osnovnic tega trapeza!

Z80.1 Dokaži, da je v vsaki skupini 6 učencev vsaj ena trojica učencev, od katerih vsak pozna ostala dva ali vsaj ena trojica učencev, od katerih nobeden ne pozna nobenega od ostalih dveh!

Z80.2 Dolžine stranic pravokotnega trikotnika so cela števila. Ali moreta biti dolžini obeh katet neparni števili? Obrazloži odgovor!

Z80.3 Učenec je potrošil določen znesek za nakup torbe, knjige in peresa. Če bi bila torba 5-krat cenejša, pero 2-krat cenejše, a knjiga 2,5-krat cenejša od dejanske cene, bi bil strošek 160 din. Če bi bila torba 2-krat cenejša, pero 4-krat cenejše, a knjiga 3-krat cenejša, bi bil strošek 240 din. Koliko denarja skupno je potrošil učenec?

Z80.4 Pravokotni trikotnik ima kateti dolgi 60cm in 80cm. Naj bosta točki M in N razpolovišči katet. Krožnica s premerom MN seka hipotenuzo v točkah P in Q. Izračunaj dolžino daljice PQ!

Z80.5 Dan je stožec s polmerom osnovne ploskve 3dm. Nad isto osnovno ploskvijo je konstruiran na isti strani valj, ki ima enako površino in enako prostornino kot stožec. Izračunaj površino in prostornino telesa, ki je presek valja in stožca!

Z81.1 Osnovna ploskev pokončne prizme je kvadrat s stranico a. Dolžina stranice a je dvakrat večja od dolžine višine prizme. Merski števili površine in prostornine prizme sta enaki. Določi dolžino robov te prizme!

Z81.2 Števila od 1 do 10 so zapisana v poljubnem zaporedju drugo za drugim. Po tem zaporedju je vsakemu številu prirejena njegova zaporedna številka. Če seštejemo vsako število z njegovo zaporedno številko, dobimo 10 različnih vsot. Dokaži, da sta cifri enic vsaj pri dveh vsotah enaki!

Z81.3 Dva vlaka kreneta istočasno iz krajev A in B drug proti drugemu. Vsak vlak se takoj, ko pripelje v nasprotni kraj, vrne v izhodiščni kraj. Vlaka se srečata prvič v razdalji 50km od kraja A, drugič pa v razdalji 30km od kraja B. Kolika je razdalja med krajema A in B?

Z81.4 Na stranici AC trikotnika ABC leži točka K, ki deli stranico AC v razmerju 1:3, na stranici BC pa točka L, ki deli to stranico v razmerju 1:4. Naj bo točka M sečišče daljic AL in BK. Določi razmerje daljic KM in MB!

Z81.5 Diagonali poljubnega trapeza delita trapez na 4 trikotnike. Ploščini trikotnikov, ki ležita ob osnovnicah, merita p_1 in p_2. Izrazi ploščino trapeza s količinama p_1 in p_2!

Z82.1 Prednja guma motornega kolesa se izrabi po prevoženih 25000 km, a zadnja po prevoženih 15000 km. Po koliko prevoženih kilometrih je treba medsebojno zamenjati gumi, da bi se izrabili obe istočasno? Po koliko prevoženih kilometrih mora motorist namestiti novi gumi?

Z82.2 a) Izračunaj: $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = \ldots$
b) Izkoristi gornjo enakost a) in določi tako praštevilo p, da bo $2p^2 + 1 = k^5$, pri čemer je k naravno število!

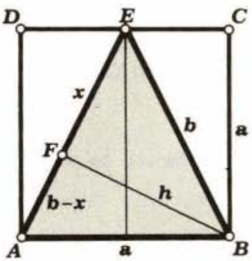
Z82.3 Dokaži, da je v vsakem trikotniku ABC razdalja presečišča višin (ortocenter) od oglišča A dvakrat večja od razdalje med središčem očrtane krožnice in stranico BC tega trikotnika!

Z82.4 V trapezu $ABCD$ je $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{CD} = 8$, $\sphericalangle ABC$ je pravi kot. Ali seka simetrala notranjega kota $\sphericalangle DAB$ krak BC ali osnovnico CD? Odgovor obrazloži!

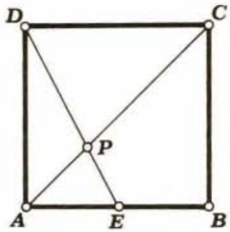
Z82.5 Dokaži, da velja za vsak trikotnik ABC formula:
$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{\rho}$, pri čemer so v_a, v_b in v_c višine, ρ pa polmer včrtane krožnice.

C. NASVETI IN REŠITVE

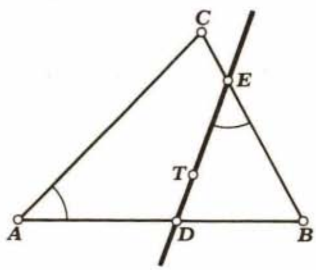
1. a) $x = 2$, b) $x = 5$, c) $x = 4a$
2. $x = 4$, $y = 10$
3. 256m, 432m, 224m
4. $\pi(R^2 - r^2) : 2\pi(R + r) =$
$= (R - r)/2$, kjer sta R oz. r polmera zunanje oziroma notranje krožnice.
5. 18m, 9m, 6m
6. 20, 10, 30
7. a) Loki pripadajo središčnim kotom 80°, 120° in 160°.
c) Koti trikotnika merijo 100°, 60° in 20°.
8. $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$
$\underline{\alpha = 45°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 75°}$
$\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{2} : (3+\sqrt{3})$
9. $b^2 = a^2 + a^2/4$, $b = a\sqrt{5}/2$
$2p = a^2 = bh$, $h = 2a/\sqrt{5}$
$x = 3a/(2\sqrt{5})$
$x : h : b = 3 : 4 : 5$



10. a) $p_1 : p_2 = 4 : 3$
b) $o_1 : o_2 = 2 : \sqrt{3}$
c) $d_1 : d_2 = 2 : \sqrt{3}$
11. $a_3{}^2 : a_4{}^2 : a_6{}^2 = 4/\sqrt{3} : 1 : 2/(3\sqrt{3})$
$o_3 : o_4 : o_6 = 3\sqrt{3} : 2\sqrt[4]{27} : 3\sqrt{2} =$
$= \sqrt[4]{27} : \sqrt[4]{16} : \sqrt[4]{12}$; najmanjši obseg ima pravilni šestkotnik.
12. Obsega likov sta enaka.
13. Istoležne stranice so v razmerju $2 : 1 : \sqrt{3}$, ploščine pa v razmerju $4:1:3$.
14. Trikotnika AEP in CDP sta podobna. $\overline{AP} : \overline{CP} = \overline{AE} : \overline{CD} = 1 : 2$

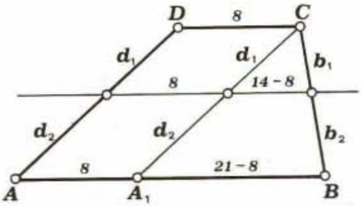


15. $r = 5$
16. $r = \sqrt{5}$
17. $d = 11\frac{1}{4}$
18. $p_1 = 90$, $p_2 = 160$
19. Trditev sledi iz podobnosti trikotnikov BFE in FCD.
20. Enakokrak ali pravokoten.
21. Trikotnika ABC in DBE morata biti podobna. Razlikujemo dva primera:
1) $\angle EDB = \angle CAB$ in $\angle DEB = \angle ACB$. Premica skozi T je vzporedna eni od stranic.
2) $\angle EDB = \angle ACB$ in $\angle DEB = \angle CAB$. Premica skozi T seka eno od stranic pod enakim kotom, kot ga oklepata drugi dve stranici.
Če je trikotnik ABC enakokrak, obstajata navidez še dva primera: če je $\angle DBE = \angle CAB$, mora biti

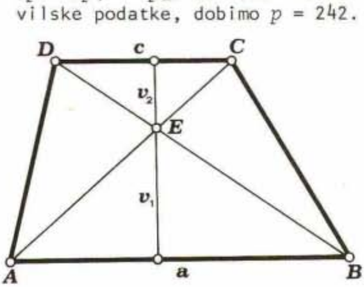


$\sphericalangle EDB = \sphericalangle DBE$ ali $\sphericalangle EDB = \sphericalangle ACB$; prvič gre za prvi primer, drugič za drugega. Če je $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ACB$, nam podoben razmislek spet pokaže, da gre v resnici za prvi ali drugi primer. Nalogo rešimo torej tako, da narišemo vse premice, opisane v prvem in drugem primeru. Dobimo vsaj 3, a največ 6 različnih premic.

22. Izrežimo iz trapeza pravokotnik D_1C_1CD in zlepimo trikotnika, ki ostaneta, vzdolž stranic C_1C in D_1D! V dobljenem trikotniku ugotovimo s pomočjo podobnosti, da merijo iskani kraki $4\frac{8}{13}$ in $6\frac{12}{13}$ oziroma $5\frac{5}{13}$ in $8\frac{1}{13}$.



23. $p_1 = p(\Delta ABE) = av_1/2$
$p_2 = p(\Delta CDE) = cv_2/2$
$p = p(ABCD) = (a + c)v/2 =$
$= (a + c)(v_1 + v_2)/2 =$
$= p_1 + p_2 + av_2/2 + cv_1/2$
Podobnost trikotnikov ABE in CDE nam da $av_2 = cv_1$. Ker pa je $p_1p_2 = acv_1v_2/4 = (av_2/2)(cv_1/2)$, je $av_2/2 = cv_1/2 = \sqrt{p_1p_2}$ in $p = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1p_2}$ oziroma $\sqrt{p} = \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$. Če vstavimo številske podatke, dobimo $p = 242$.



24. Stranici paralelograma merita 9 in 7.

25. Osnovnici merita 18 in 8. Trikotnika ABC in CAD sta podobna. Sledi $\overline{AC} = 12$.

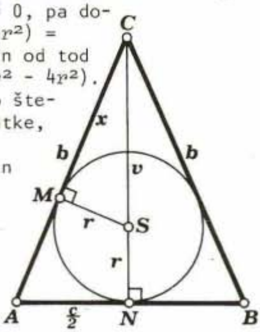
26. Za 20.

27. Odsek meri $6\frac{1}{2}$ cm.

28. $p = 29\frac{91}{121}$ cm²

29. $x = a\sqrt{3}/(2 + \sqrt{3}) = a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$
$p = 3(7 - 4\sqrt{3})a^2$

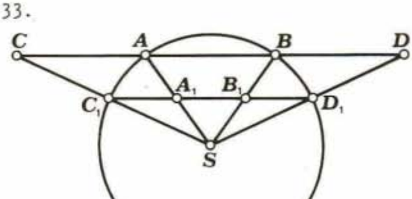
30. Zaradi podobnosti trikotnikov ANC in SMC velja $c/(2r) = v/x$. Ker je $\overline{AM} = \overline{AN} = c/2$, je $v^2 = (x + c/2)^2 - (c/2)^2 =$ $= x^2 + cx$. Prvo enačbo kvadriramo, vstavimo v^2 in na desni krajšamo z $x^2 \neq 0$, pa dobimo $c^2/(4r^2) =$ $= 1 + c/x$ in od tod $x = 4cr^2/(c^2 - 4r^2)$. Če vstavimo številske podatke, dobimo $x = 24$ cm in $b = 39$cm.



31. Središče kroga je v sečišču simetrale kota pri A s kateto a. Podobni trikotniki nam povedo, da je $r = ab/(b + c)$.

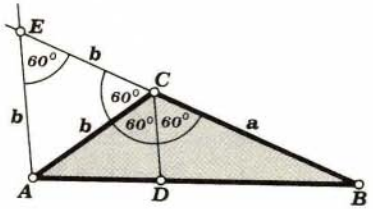
32. Poišči podobne trikotnike!

33.



Skozi A in B narišemo premico in na njej točki C in D, tako da je $\overline{CA} = \overline{AB} = \overline{BD}$. Presečišči C_1 in D_1 daljic SC in SD s krožnico sta krajišči iskane tetive, o čemer nas prepričajo podobni trikotniki SAC in SA_1C_1, SAB in SA_1B_1, SBD in SB_1D_1.

34. Drugo krajišče odseka kotne simetrale označimo z D. Vzporednica s kotno simetralo skozi A naj seka nosilko stranice BC v točki E. Zaradi vzporednih krakov je $\sphericalangle AEB = \sphericalangle DCB = 60°$, prav tako pa je $\sphericalangle ACE = 180° - \sphericalangle ACB = 60°$. Trikotnik ACE je enakostraničen. Iz podobnosti trikotnikov ABE in DBC sledi $\overline{CD} = ab/(a + b) = 4$.



35. $r = a/(2(\sqrt{3} + 1))$
$p = a^2(2\sqrt{3} - \pi)(2 - \sqrt{3})/16$

36. a) $\overline{CT} = \overline{CB} = a$
b) $\overline{ET} = \overline{ED} = a/3$
c) $\overline{SC} = a\sqrt{5}/2$, $\overline{CE} = a\sqrt{10}/3$,
$\overline{ES} = 5a/6$
$p = 5a^2/12$, $v = a\sqrt{5}/3$

37. a) $\overline{AE} = b\sqrt{2}$, $\overline{CD} = ab\sqrt{2}/(a + b)$
b) $p = b^2(2a + b)/(2(a + b))$

38. $r = ab/(a + b)$

39. Upoštevaj podobnost nastalih trikotnikov.

40. Dobljeni štirikotnik je kvadrat s stranico $a/\sqrt{5}$ in ploščino $a^2/5$.

41. $r = 3\frac{3}{5}$ cm

42. a) $c = 6$cm, $a = 10$cm, $o = 24$cm
b) $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = \delta = 120°$

43. $x = ab/(a + b)$

44. a) $(1/4 + a^2)(1/2 + a)(1/2 - a)$
b) $2(5 + 2y)(5 - 2y)$
c) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
č) $((3/4)m + 2)^2$
d) $(x - 1)(x - 5/3)$
e) $8p$
f) $(x + 1)(x - y - 1)$
g) $(1 - 2b)(1 + a + 2b)$
h) $(x + 1)(x^2 + 1)$
i) $(x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 =$
$= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 =$
$= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$
j) $(a^2 + a - 1)(a^2 - a + 1)$

45. $I = a$

46. a) $r(x) = (x + 1)(x + 3)/4$
b) Če je x liho število, sta $x+1$ in $x+3$ zaporedni sodi števili, torej je eno deljivo z 2 in drugo s 4.

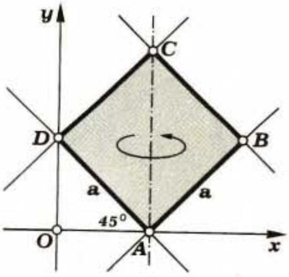
47. a) $r(x) = -2(3x + 2)/(3x + 8)$
b) $r(-2) = 4$, $r(0) = -1/2$,
$r(-1/2) = -2/13$

48. $F(x) = x/(1 - x)$
$F(0) = 0$, $F(1/2) = 1$, $F(1)$ nima pomena.

49. $1/(1 + x)$

50. a) -1, b) $3(5x + 3)$, c) x^{n+1}

51. a) $A(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(a\sqrt{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2})$
$C(\frac{a\sqrt{2}}{2}, a\sqrt{2})$, $D(0, \frac{a\sqrt{2}}{2})$
b) $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
c) p_{AB}: $y = x - \frac{a\sqrt{2}}{2}$
p_{BC}: $y = -x + \frac{3a\sqrt{2}}{2}$



p_{CD}: $y = x + \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

p_{DA}: $y = -x + \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

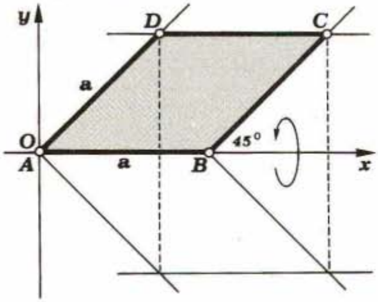
d) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$

52. a) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4 + 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $D(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

b) p_{AB}: $y = 0$, p_{CD}: $y = 2\sqrt{2}$

p_{AD}: $y = x$, p_{BC}: $y = x - 4$

c) $P = 32\pi\sqrt{2}$, $V = 32\pi$



53. a) $A(-a\sqrt{3}/2, 0)$, $B(0, a/2)$
$C(-a/2, (a/2)(1 + \sqrt{3}))$
$D(-(a/2)(1 + \sqrt{3}), a\sqrt{3}/2)$

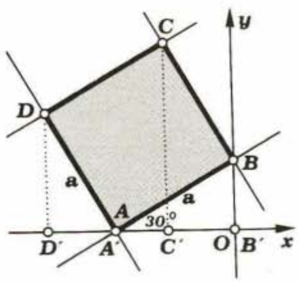
b) p_{AB}: $y = x/\sqrt{3} + a/2$

p_{BC}: $y = -\sqrt{3}x + a/2$

p_{CD}: $y = x/\sqrt{3} + a(1/2 + 2/\sqrt{3})$

p_{DA}: $y = -\sqrt{3}x - 3a/2$

c) $\overline{A'C'} = (a/2)(\sqrt{3} - 1)$
$\overline{B'D'} = (a/2)(\sqrt{3} + 1)$



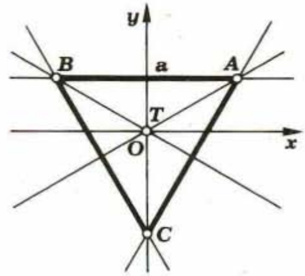
54. a) $A(a/2, a\sqrt{3}/6)$, $B(-a/2, a\sqrt{3}/6)$, $C(0, -a\sqrt{3}/3)$

b) p_{AB}: $y = a\sqrt{3}/6$

p_{AC}: $y = \sqrt{3}x - a\sqrt{3}/3$

p_{BC}: $y = -\sqrt{3}x - a\sqrt{3}/3$

c) $x = 0$, $y = x\sqrt{3}/3$, $y = -x\sqrt{3}/3$



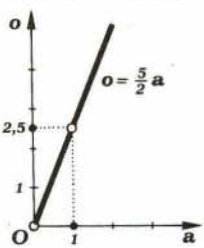
55. $o = 32$, $p = 24$

56. Četverokotnik $ABCD$ je romb z diagonalama 6 in 8 in stranico 5; $r = 2\frac{2}{5}$.

57. a) $k = 4$, b) $p = 6$

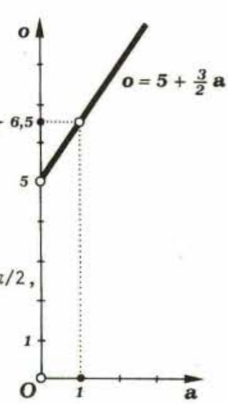
58. $V = 78\pi \doteq 245{,}0$

59. a) $o = 5a/2$, c) 10



60. a) $o = 5 + 3a/2$,

c) 14



61. $y = -3$

62. $p = 5/2$

63. $p = 7$

64. $p = 3\frac{1}{2}$

65. $D(4,0)$, $E(4,3)$, $F(0,3)$

66. $y = 5 - x$

67. $C(2,4)$

68. $f(\frac{1}{x}) = f(x)$

69. a) $p > 5$, b) $p < 2$, c) $p < -3$

70. $m = 5$

71. a) Odseka sta 1/2 (na osi x) in $-1/(4k)$ (na osi y).
b) $k = -1/2$

72. a) $y = 4(x + 3)/21$
b) za $x = -9/4$
c) 3, 4, 5, 6, 7

74. Če $m+n \neq 0$, ima enačba eno samo rešitev $x = mn/(m + n)$. Če je $m+n = 0$ in $m \neq 0$, enačba ni rešljiva. Če je $m = n = 0$, je enačba identiteta (tj. reši jo vsako število).

75. Če je $k = 40/3$, enačba nima rešitve.

76. $a = 2$

77. $a = 2$

78. a) Enačba ima pomen le, če $|a| \neq |b|$. Če $a \neq 0$, ima rešitev $x = (a^2 - b^2)/(2a)$; sicer ni rešljiva.
b) Enačba ima pomen le, če $a \neq 0$, $b \neq 0$ in $c \neq 0$. Če $ab + ac + bc \neq 0$, je rešitev $x = abc$; enačba je identična.
c) Enačba ima pomen le, če $|a| \neq |b|$ in $a \neq 0$. Če je $b \neq 0$ in $a + ab + b^2 \neq 0$, je rešitev $x = a$; sicer je identiteta.

79. a) $x = (4k - 9)/21$, b) $k = 3$
c) 3, 4, 5, 6, 7

80. a) Če $a + b \neq 0$, sta rešitvi $x = a + b$ in $y = a - b$; sicer sta enačbi identiteti.
b) $a = 3b$

82. Če je $n = 2$, je rešitev enačbe vsako število $x \neq 0$; sicer je rešitev $x = 2n$.

83. Če je $m = 1$, je rešitev enačbe vsako število $x \neq 0$; sicer je rešitev $x = m + 1$. Enačba ima negativno rešitev za $m = 1$ in za $m < -1$.

84. Če je $m = 1$, je enačba identiteta; če je $m = 0$, ni rešljiva; sicer je rešitev $x = -3/m$. Da bo vsaka rešitev enačbe večja od 2, mora biti $-3/2 < m < 0$.

85. Če je $a = c$, enačba ni rešljiva; sicer je rešitev $x = ac/(a - c)$.

86. Rešitvi sta -3/4 in 11/8.

87. $P(x) = (4x + 3)(7x - 1)$
Rešitvi sta -3/4 in 1/7.

88. Rešitvi sta 2/3 in 7/3.

89. $p(x) = (x - 5)(2x + 5)$
$q(x) = (3 - x)(1 - 5x)$
a) $x = -5$, b) $x = 0$

90. $P(x,y) = 2x(x - 2y)$
a) $P(2y,y) = 0$
b) Če vrednost $P(x,y)$ ni odvisna od y, lahko izberemo y poljubno. Če vzamemo $y = x/2$, vidimo, da je $P(x,y) = 0$. Če pa vzamemo $y \neq x/2$, lahko krajšamo z $2(x - 2y)$ in ugotovimo, da mora biti $x = 0$. Zares, $P(0,y) = 0$ ne glede na vrednost y.

91. Rešitve so: -1, 3/2, 3.

92. a) Rešitvi sta -2 in 1/2.
b) Rešitvi sta -2/11 in 7/11.

93. a) Upoštevaje nasvet dobimo $x+y-1 = 0$ in $x-y+1 = 0$, od tod pa $x = 0$, $y = 1$.
b) Enačbo prepišemo takole: $(x+1)^2 + (3y+1)^2 = 0$ in z enakim razmislekom kot pri a) pridemo do rešitve $x = -1$, $y = -1/3$.

94. Enačbo preoblikujemo takole
$(2x-1)^2 + (3y-1)^2 + (4z-1)^2 = 0$
in podobno kot v prejšnji nalogi najdemo rešitev $x = 1/2$, $y = 1/3$, $z = 1/4$.

95. Razcepimo levo stran:
$(x + y)(x - y) = 105$. Pregledati moramo vse razcepe števila 105 na dva faktorja. Število 105 razstavimo na prafaktorje: $105 = 3.5.7$. Ker sta faktor $x+y$ in produkt 105 pozitivna, pridejo v poštev le razcepi na dva pozitivna faktorja. Ker je y pozitiven, je $x+y > x-y$. Preostanejo torej le štiri možnosti:
1) $x+y = 105$, $x-y = 1$;
2) $x+y = 35$, $x-y = 3$;
3) $x+y = 21$, $x-y = 5$;
4) $x+y = 15$, $x-y = 7$.
Od tod dobimo štiri rešitve enačbe: 1) $x = 53$, $y = 52$;
2) $x = 19$, $y = 16$; 3) $x = 13$, $y = 8$; 4) $x = 11$, $y = 4$.

96. Razcepimo levo stran:
$(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$. Rešitve so $-3, -2, 2, 3$.

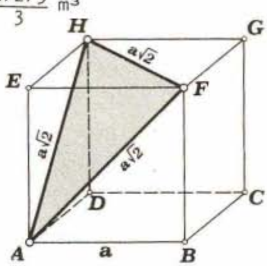
97. a) $s = \dfrac{P - \pi(R^2 + r^2)}{\pi(R + r)}$

b) $H = \dfrac{12V}{\pi(2D^2 + d^2)}$

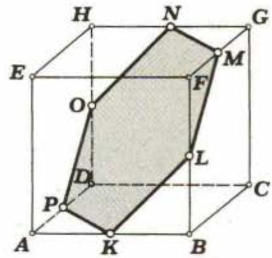
c) $l = \dfrac{gt^2}{4\pi^2}$

98. $a = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ m, $P = 4\sqrt{3}$ m^2

$V = \dfrac{2\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$ m^3



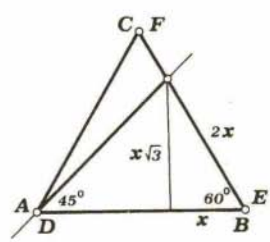
99. Zavrtimo kocko okrog simetrale robov AB in GH za 180°! Kocka preide sama vase, oglišča A in B, G in H, C in E ter D in F pa pa-



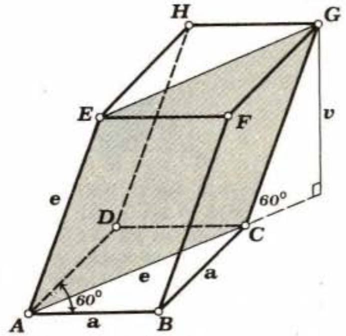
roma menjajo lego. Tudi diagonala EC in z njo simetrijska ravnina ter robova AB in GH preidejo sami vase. Torej se točki K in N (preseka robov AB oziroma GH s simetrijsko ravnino) ohranita, kar pomeni, da ležita na osi vrtenja. Sledi, da je K središče roba AB in N središče roba GH. Podobno ugotovimo za druga 4 oglišča presečnega lika, da razpolavlja vsako svoj rob. Torej so vse stranice lika enake $a\sqrt{2}/2$. Zasuk kocke okrog diagonale EC za 120° nam izda, da so med seboj enaki notranji koti pri K, M in O ter pri L, N in P. Če kocko prezrcalimo čez središče, ugotovimo, da sta enaka npr. kota pri K in N. Potemtakem so vsi notranji koti enaki. Presečni lik je pravilni šestkotnik s stranico $a\sqrt{2}/2$ in ploščino $p = 3a^2\sqrt{3}/4$ oziroma $p = 9$.

100. $c = 15$cm, $v = 2{,}1$cm, $V = 113{,}4$ cm^3

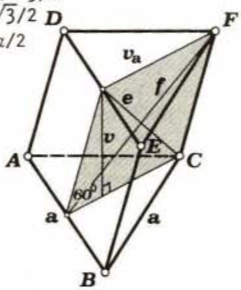
101. $a - x = x\sqrt{3}$
$x = a(\sqrt{3} - 1)/2$
$P = a^2(3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6})/2$
$V = a^3(3 - \sqrt{3})/4$



102. a) Vsota robov je $4a(2 + \sqrt{3})$.
b) $S = 3a^2\sqrt{3}/2$
c) $V = 3a^3\sqrt{3}/4$



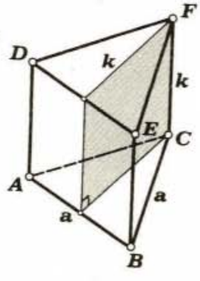
103. a) $V = 3a^3\sqrt{3}/16$
b) $S = 3a^2\sqrt{3}/8$
c) $e = a\sqrt{3}/2$
$f = 3a/2$



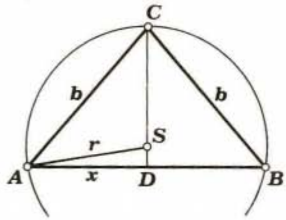
104. 3 rdeče ploskve - 8 kock
2 rdeči ploskvi - 96 kock
1 rdeča ploskev - 384 kock
brez rdečih ploskev - 512 kock

105. $V = 6\text{m}^3$

106. $P = 8k^2\sqrt{3}/3$, $V = k^3\sqrt{3}/3$

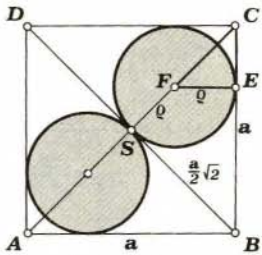


107. $v^2 = b^2 - x^2$
$r^2 = (v - r)^2 + x^2$
od tod: $v = b^2/(2r)$, $v = 4\text{cm}$,
$x = 3\text{cm}$, $P = 88\text{cm}^2$, $V = 48\text{cm}^3$



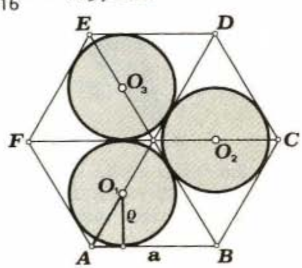
108. $P = 5a^2\sqrt{3}$, $V = 3a^3/2$

109. Iz podobnosti trikotnikov BSC in FEC sledi:
$$a : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \rho\right) : \rho$$
$$\rho = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$
$$V = \pi a^3(3 - 2\sqrt{2}) \doteq 539 \text{ cm}^3$$

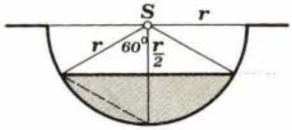


110. Če je višina valja c, je
$V = 31808{,}624\text{cm}^3$
$P = 5654{,}866\text{cm}^2$

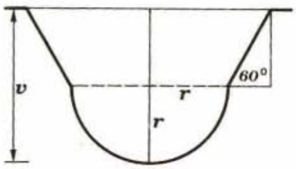
111. $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{4}$
$P = 6\pi\rho(\rho + a) \doteq 187{,}14 \text{ dm}^2$
$V = \frac{9\pi a^3}{16} \doteq 113{,}10\text{dm}^3$



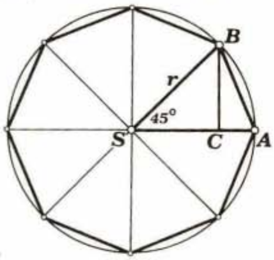
112. $V = \frac{r^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}l$, ($l$ je dolžina kanala) $V \doteq 2211\text{m}^3$



113. $V \doteq 165926$ litrov



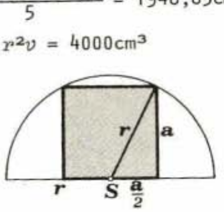
114. $\overline{BC} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, $V = 4r^3\sqrt{2}$
$V \doteq 707{,}11\text{cm}^3$



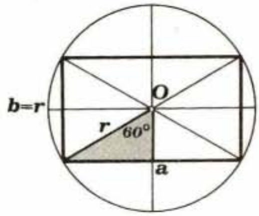
115. $a = \frac{2r\sqrt{5}}{5}$

$P = \frac{8r(r + v\sqrt{5})}{5} \doteq 1948{,}85\text{cm}^2$

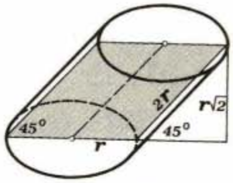
$V = \frac{4}{5} r^2 v = 4000\text{cm}^3$



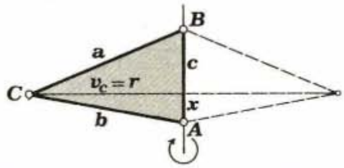
116. $b = r$, $a = r\sqrt{3}$
$P = r^2(6\sqrt{3} + 4) \doteq 1439\text{cm}^2$
$V = 2r^3\sqrt{3} \doteq 3464\text{cm}^3$
$V_v : V_k = \pi : \sqrt{3}$



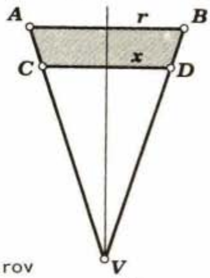
117. $v = r\sqrt{2}$, $V = \pi r^3\sqrt{2} \doteq 959{,}66\text{cm}^3$



118. $65^2 - (36 - x)^2 = 61^2 - x^2$
$x = 11$, $v_c = 60$, $P = 7560\pi$
$V = 43200\pi$



119. Iz podobnosti trikotnikov dobimo: $x = 2{,}5\text{m}$, $V \doteq 49{,}087\text{m}^3$



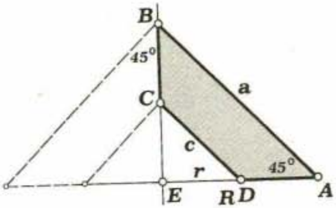
120. $V = \frac{\pi}{9}\ \text{m}^3$

121. $V \doteq 64776$ litrov

122. $\overline{AE} = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\overline{DE} = r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$V_1 - V_2 = \frac{7\pi a^3\sqrt{2}}{96}$

$P = \frac{\pi a^2}{8}\ (5\sqrt{2} + 3)$



123. $V_1 : V_2 : V_3 = 2\sqrt{3} : 6 : 3$

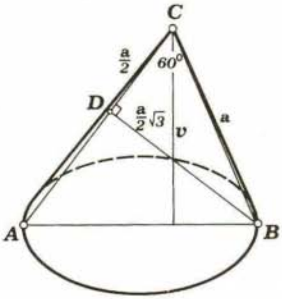
$P_1 : P_2 : P_3 =$

$= 2\sqrt{3} : 2(\sqrt{3} + 2) : (\sqrt{3} + 1)$

124. $\overline{BD} = 5\sqrt{3}$, $\overline{AB} = 2r = 14$

$\frac{16.5\sqrt{3}}{2} = \frac{14v}{2}$, $v = \frac{40\sqrt{3}}{7}$

$V = \frac{280\pi\sqrt{3}}{3} \doteq 507{,}86 \text{cm}^3$

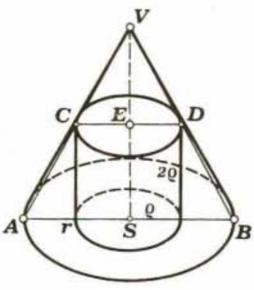


125. Iz podobnosti trikotnikov ASV in CEV sledi:

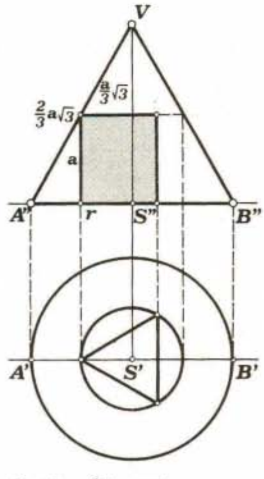
$r : r\sqrt{3} = \rho : (r\sqrt{3} - 2\rho)$

$\rho = r(2\sqrt{3} - 3)$

$P = 18\pi(7 - 4\sqrt{3})r^2$



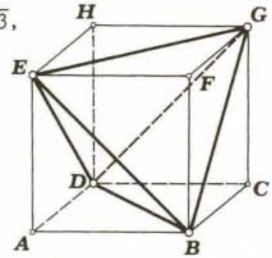
126. $r = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $P = 4\pi a^2$, $V = \frac{8\pi a^3}{9}$



127. $V = 49\pi \text{ cm}^3$, $P = 63\pi \text{ cm}^2$

128. $P = 2a^2\sqrt{3}$,

$V = \frac{a^3}{3}$

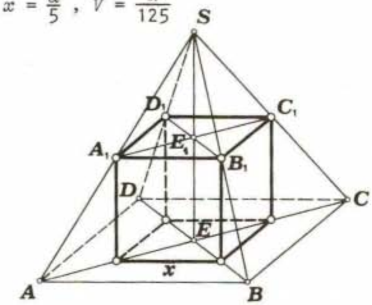


129. Iz ΔAES: $v = \frac{a}{4}$

ΔSAE in ΔSA_1E_1 sta podobna:

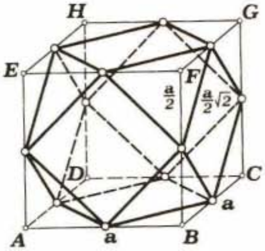
$\frac{a}{2}\sqrt{2} : \frac{x}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{4} : (\frac{a}{4} - x)$

$x = \frac{a}{5}$, $V = \frac{a^3}{125}$



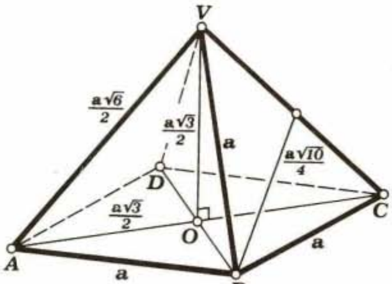
130. Volumen oktaedra je $\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$. Volumen šestih odsekanih piramid je $\frac{a^3}{8}\sqrt{2}$. $V = \frac{5a^3\sqrt{2}}{24}$

131. $P = a^2(3 + \sqrt{3})$, $V = \frac{5a^3}{6}$

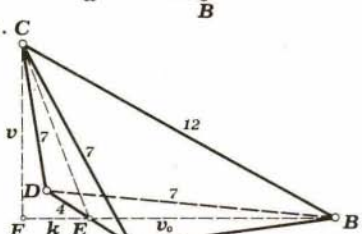


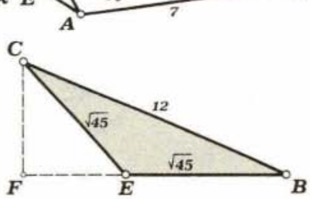
132. $V \doteq 77{,}94$

133. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{5})$, $V = \frac{a^3}{4}$



134.





$v_0 = 3\sqrt{5}$

Iz pravokotnih trikotnikov *CFB* in *CEF* dobimo enačbo:

$12^2 - (k+3\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{5})^2 - k^2$

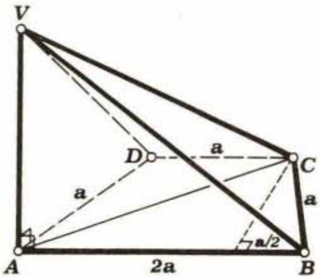
$k = \frac{9}{\sqrt{5}}$, $v = \frac{12}{\sqrt{5}}$, $V = 24\text{cm}^3$

135. $V = r^3$

136. a) $\overline{VD} + \overline{VA} + \overline{VC} + \overline{VB} =$
$= a(2 + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{7})$

b) $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(9 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2})$,

$V = \frac{3a^3}{4}$

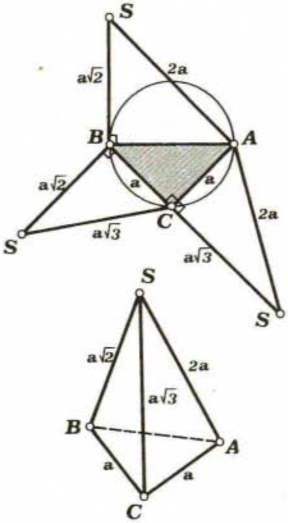


137. Višina stranske ploskve piramide $v_1 = a\sqrt{3}$, višina piramide $v_2 = 3a/2$, višina telesa $v = 5a/2$.

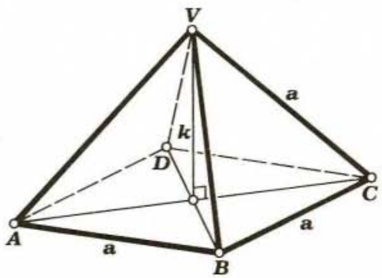
$P = 3a^2(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2)$, $V = \frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$

138. Novo telo je oktaeder z osnovno ploskvijo *MNPQ*, $\overline{MP} = 4$, $P = 16\sqrt{3}$
$V = 32/3$

139. $P = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

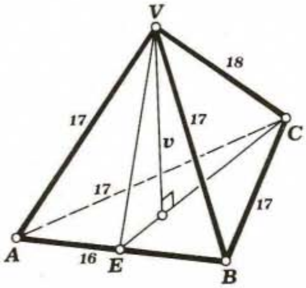


140. Iz trikotnika AVC dobimo
$a = k\sqrt{2}$.
$P = 2k^2(1 + \sqrt{3})$, $V = \frac{2}{3}k^3$

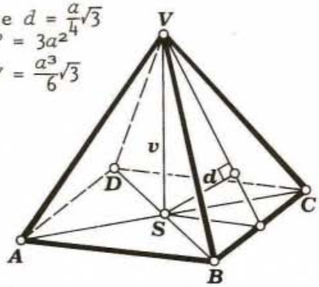


141. $a = 2$, $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

142. Po Pitagorovem izreku dobimo $\overline{EC} = \overline{EV} = 15$ in $v_{VC} = 12$. Telesno višino izračunamo s pomočjo trikotnika ECV.
$\frac{1}{2}\ \overline{VC}.v_{VC} = \frac{1}{2}\ \overline{EC}.v$, $v = \frac{72}{5}$,
$V = 576\text{cm}^3$



143. a) razdalja od težišča osnovne ploskve do stranske ploskve je $d = \frac{a}{4}\sqrt{3}$
b) $P = 3a^2$
c) $V = \frac{a^3}{6}\sqrt{3}$



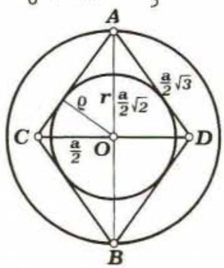
144. $v = \frac{a}{2}\sqrt{15}$, $v_1 = 2a$, $P = 5a^2$

145. Polmer očrtane krogle je $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

$P_1 = 2\pi a^2$, $V_1 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$

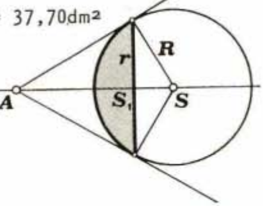
Presek skozi simetrijsko os oktaedra in središči dveh osnovnih robov je romb $ABCD$. Ploščina tega romba je $(a^2/2)\sqrt{2}$, je pa tudi enaka $\frac{a}{2}\sqrt{3}.2\rho$. Iz tega dobimo: $\rho = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $P_2 = \frac{2\pi a^2}{3}$

$V_2 = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$

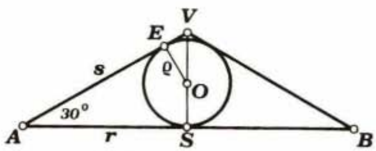


146. $R - r \doteq 2\text{cm}$

147. $P \doteq 37{,}70\text{dm}^2$

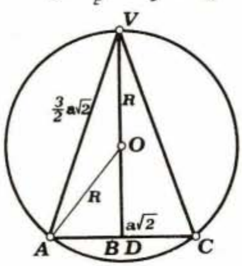


148. Iz podobnosti trikotnikov ASV in OEV sledi:
$\rho = s(2\sqrt{3} - 3)/2$
$P = 4\pi\rho^2 = 3\pi s^2(7 - 4\sqrt{3})$



149. $R = 2{,}5\text{cm}$

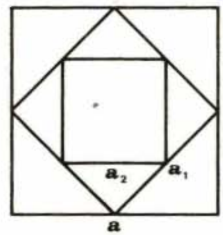
150. $R = \frac{9a}{8}$, $V_p = \frac{2a^3}{3}$, $V_k = \frac{243}{128}\pi a^3$



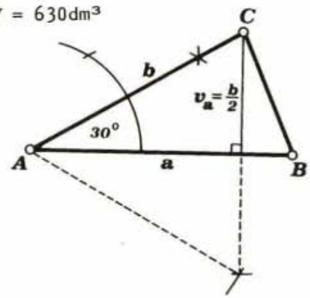
151. $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $\rho = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
$R : \rho = 3 : 1$
$V_1 - V_2 = 675{,}25\text{cm}^3$

152. Označimo robove kvadra z b, c, d
$b = t \qquad V_k = V_{kv}$
$c = 2t \qquad a^3 = 8t^3$
$d = 4t \qquad t = 2\text{cm}$
$P_{kv} = 112\text{cm}^2$, $P_k = 96\text{cm}^2$
Površini se razlikujeta za 16cm^2.

153. $V = V_1 + V_2 + V_3$
$a_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2} \qquad a_2 = \frac{a}{2}$
$V = \frac{9 + 2\sqrt{2}}{8}a^3$, $P = 9a^2$



154. $V = 630\text{dm}^3$



155. $P = 2ab + 2ac + 2bc$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$s^2 = a^2 + b^2 + c^2 +$
$+ 2ab + 2ac + 2bc$
$P = s^2 - d^2$

156. $c = 50$

$\frac{1}{2}\pi c r = \frac{1}{2}\pi ab$, $r = 24$

$P = pl_v + pl_1 + pl_2$

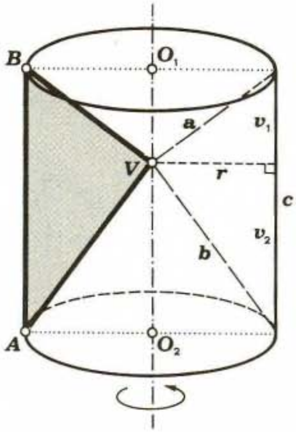
$P = 4080\pi$

$V = V_v - V_1 - V_2$

$V = \pi r^2 c - \frac{1}{3}\pi r^2 v_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 v_2$

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 c$

$V = 19200\pi$



157. $V_{kocke} : V_{krogle} =$

$= (2r)^3 : \frac{4\pi r^3}{3} = 6 : \pi$

$P_{kocke} : P_{krogle} =$

$= 6(2r)^2 : 4\pi r^2 = 6 : \pi$

158. $V_s : V_k = 1 : 4$

159. Polmeri krogel so zaporedno enaki 3, 4 in 5

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}.3^3\pi + \frac{4}{3}.4^3\pi + \frac{4}{3}.5^3\pi$

$r^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$

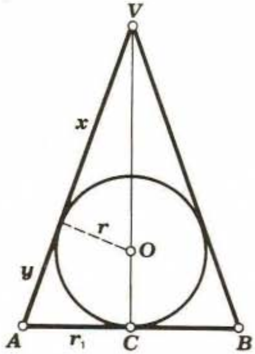
$r = 6$

160. $x^2 = (3r)^2 - r^2$

$x = r\sqrt{8}$, $y = r_1$

$r_1{}^2 = (x + y)^2 - (4r)^2$

$r_1 = r\sqrt{2}$, $P = 8\pi r^2$



072.1 $\frac{x-5}{3} - \frac{x-2}{2} = x - 3$
$x = 2$
$(a-3).2 + (a+1)(3-2) = $
$= a + 2 - 1$
$a = 3$

072.2 a) $v_v = 3\text{km/h}$ b) $v = 5\text{km/h}$
c) $t = (5/16)\text{h}$

072.3 $ab = (a + \frac{a}{3})x$, $x = \frac{3}{4}b$
Višino zmanjšamo za četrtino.

072.4 $\alpha = \frac{4\beta}{5}$, $\alpha = \frac{4\gamma}{3}$
$\frac{4\beta}{5} = \frac{4\gamma}{3}$, $\beta = \frac{5\gamma}{3}$
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\alpha = 60°$,
$\beta = 75°$, $\gamma = 45°$

072.5 $3av_1 = 7.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $v_1 = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$
$v = 6a$

073.1 $n + (n+1) + (n+2) +$
$+ (n+3) = 230$
Zaporedna števila so: 56, 57, 58, 59.

073.2 $p = 12$

073.3 $\frac{3}{5}x + \frac{3}{8}(9 - x) = \frac{2}{5}x + \frac{5}{8}(9 - x)$
$x = 5$
5kg prve in 4kg druge zlitine.

073.4 $p = 25a^2 + 15a^2.4 = 85a^2$
a) Pobarvana površina meri $85a^2$,
b) 14 kock ni pobarvanih.

073.5 26400 kapljic

074.1 $(n^2 + 1)^2 = (n^2 - 1)^2 + (2n)^2$

074.2 $n(10 + 3 + 2 + 5) = 2860$
$n = 143$
V vsaki skupini je $\frac{15}{3} = 5$ češenj,
skupaj $5n = 715$ češenj.

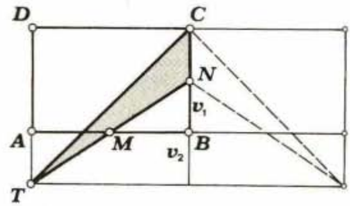
074.3 $a(2 + 3) + b(2 - 3) = 0$
$5a - b = 0$ $b = 5a$
npr.: $a = 0$, $b = 0$
$a = 1$, $b = 5$
$a = -\frac{1}{2}$, $b = -2{,}5$

074.4 Prvi kvader: Drugi kvader:

	Prvi kvader	Drugi kvader
dolžina	a	$2a$
širina	$2b$	$3b$
višina	$3c$	$4c$

$V_1 : V_2 = (6abc) : (24abc)$
$V_1 : V_2 = 1 : 4$

074.5 $V = \frac{\pi a^2}{3}(v_1 - v_2)$, kjer
$v_1 - v_2 = b/2$
$V = \frac{\pi a^2 b}{6}$, $V = 192\pi$

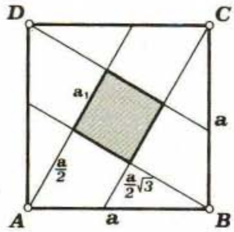


075.1 Naj a pomeni količino premoga v tonah in x razdaljo od A.
$400a + 20ax =$
$= 480a + 20a(200 - x)$
$x = 102$
a) Ugodneje je kupovati v kraju B za vse tiste kupce, ki so od B oddaljeni manj kot 98km.
b) V kraju, ki je od A oddaljen 102 km, je vseeno, kje nabavi kupec premog.
Poišči še drugo pot!

075.2 Skupni večkratnik števil 10 in 12 sta števili 300 in 360; odtod rešitvi: 141 belih in 166 črnih, (171 belih in 196 črnih).

075.3 $V = 6\text{dm}^3$

075.4 Izrez iz ploščice ima obliko kvadratne prizme z osnovnim robom a_1
$a_1 = (\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2})$
Masi sta v razmerju ploščin osnovnih ploskev.
$m_1 : m_2 = 2 : \sqrt{3}$

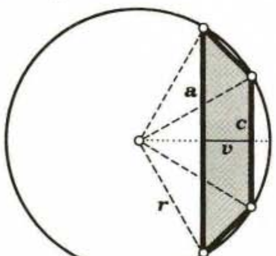


076.1 Velja $a + b + c + d = 324$ in $a + 5 = x$, $b - 5 = x$, $c.5 = x$ in $d/5 = x$. Če v prvi enačbi a, b,c in d izrazimo z x, dobimo $x = 45$ in odtod $a = 40$, $b = 50$, $c = 9$ in $d = 225$.

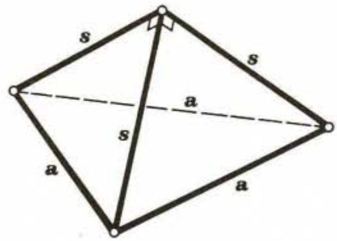
076.2 3km s hitrostjo 30km/h prevozi v 6 min, 3km s hitrostjo 45 km/h v 4 min, 10km s hitrostjo 60km/h prevozi v 10 min; skupno torej prevozi 16km s hitrostjo x km/h v 20 min; dobimo x = 48km/h.

076.3 $A(x_1,y_1,0)$, $B(x_2,0,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, kjer $z_3 = y_3$. Na sliki je naris točke A in tloris točke B na osi x, projekciji točke C pa sta na isti ordinati in enako oddaljeni od osi x.

076.4 Osnovnici trapeza sta a in c. Pri tem je $a = 2r\sqrt{3}/2 = r\sqrt{3}$ in $c = r$. Višina trapeza je $v = r\sqrt{3}/2 - r/2$, srednjica pa $s = (a + c)/2 = r(\sqrt{3} + 1)/2$. Dobimo: $p = s\ .\ v = r^2/2$.



076.5 $a = 3\sqrt{2}$, $P = O + Pl =$ $= a^2\sqrt{3}/4 + 3.s^2/2$. Sledi $P = 9(\sqrt{3} + 3)/2 \doteq 21{,}29$ dm². Za računanje prostornine je najugodneje prevrniti piramido na stransko ploskev, nakar sledi: $V = O.v/3 = s^3/6 = 4{,}5$dm³.



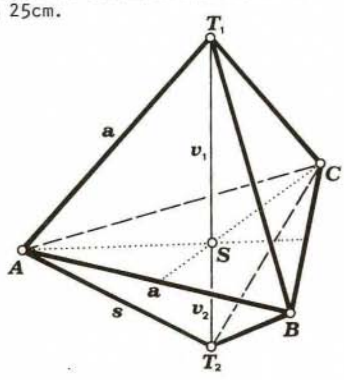
077.1 Dobimo tri trojke: 3,3,3; 2,3,6; 2,4,4.

077.2 Po 320 din : x kg čaja, po 400 din : $(100 - x)$ kg čaja, $320x + 400(100 - x) +$ $+ (320x + 400(100 - x))/4 =$ $= 430.100$. Od tod $x = 70$, $100 - x = 30$. Obe vrsti čaja so zmešali v razmerju 7:3.

077.3 $s_1 = s_2$, zato $10t = (2 - t).6$, kjer t pomeni čas potovanja po reki navzdol. Dobimo $t = 3/4$ ure in ustrezna pot je $s_1 =$ $10.3/4 = 7{,}5$km. Taborniki smejo 7,5km daleč po reki navzdol.

077.4 $c^2 - b^2 = 49$
$(c + b)(c - b) = 49.1$
$c + b = 49$, $c - b = 1$
$b = 24$, $c = 25$.
Drugi dve stranici merita 24cm in 25cm.

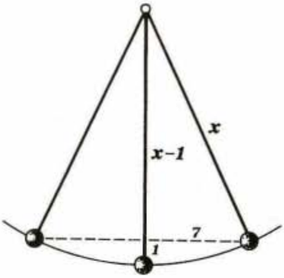
077.5



Ker je $v_1 = a\sqrt{6}/3$, $s = a\sqrt{2}/2$, $v_2 = a\sqrt{6}/6$ dobimo
$V_1 : V_2 = O.v_1/3 : O.v_2/3 =$
$= v_1 : v_2 = 2 : 1$

078.1 $p = 2\sqrt{3}\text{dm}^2$; $\frac{d^2}{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
$d = 2\sqrt{2}\text{dm}$; $a = 2\text{dm}$; $P = 24\text{dm}^2$

078.2 $(x - 1)^2 + 7^2 = x^2$, $x = 25$
Nitno nihalo je dolgo 25cm.



078.3 V košari je x jabolk.
Ostanki:

$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2}$

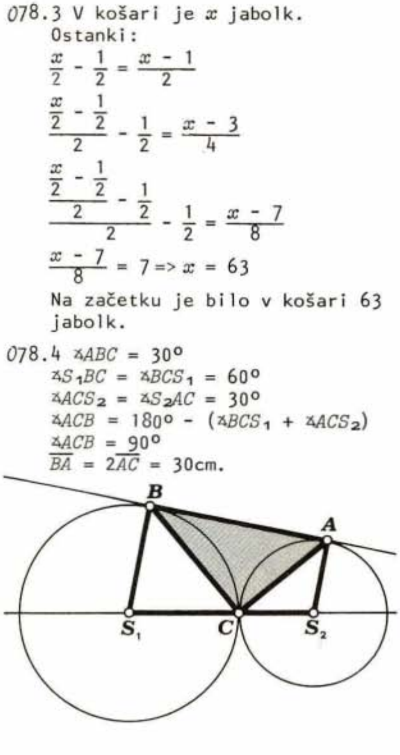
$\frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x - 3}{4}$

$\frac{\frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x - 7}{8}$

$\frac{x - 7}{8} = 7 \Rightarrow x = 63$

Na začetku je bilo v košari 63 jabolk.

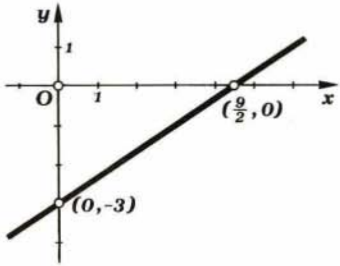
078.4 $\sphericalangle ABC = 30^\circ$
$\sphericalangle S_1BC = \sphericalangle BCS_1 = 60^\circ$
$\sphericalangle ACS_2 = \sphericalangle S_2AC = 30^\circ$
$\sphericalangle ACB = 180^\circ - (\sphericalangle BCS_1 + \sphericalangle ACS_2)$
$\sphericalangle ACB = 90^\circ$
$\overline{BA} = 2\overline{AC} = 30\text{cm}$.



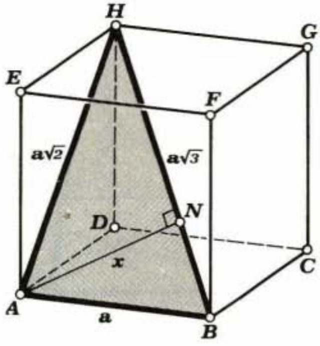
078.5 a) $4(a\sqrt{3})^2 = 12a^2$
b) $4(a^2 + b^2 + c^2) =$
$= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$
c) Velja: $e^2 + f^2 = 4a^2$, kjer sta e in f diagonali romba.
$2(e^2 + c^2) + 2(f^2 + c^2) =$
$= 2(e^2 + f^2) + 4c^2 = 8a^2 + 4c^2$

079.1 Če vsa števila izrazimo z a, dobimo ulomke: $\frac{a}{a + 1}$, $\frac{a + 2}{a + 3}$, $\frac{a + 4}{a + 5}$, velja
$\frac{a}{a + 1} < \frac{a + 2}{a + 3} < \frac{a + 4}{a + 5}$ kajti:
$a(a + 3) < (a + 1)(a + 2)$ in
$(a + 2)(a + 5) < (a + 3)(a + 4)$.
Torej: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$.

079.2 Izraz ima najmanjšo vrednost, če $\frac{2}{3}x - y - 3 = 0$. Množica iskanih parov leži na premici:
$y = \frac{2}{3}x - 3$

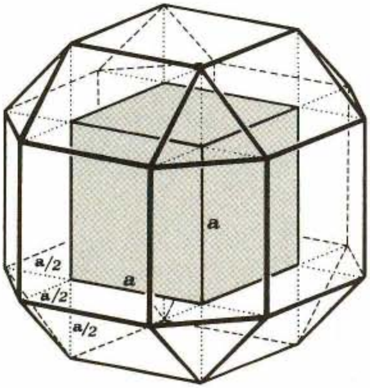


079.3

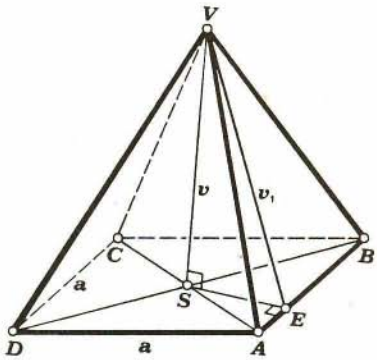


Ploščino pravokotnega trikotnika ABH izrazimo na dva načina:
$\frac{a.a\sqrt{2}}{2} = \frac{x.a\sqrt{3}}{2}$, $x = a\sqrt{2/3} = a\frac{\sqrt{2}}{3}$
Do rešitve pridemo lahko tudi drugače, npr. upoštevajoč podobnost pravokotnih trikotnikov ABN in ANH.

079.4 Površino sestavljajo ploščine šestih kvadratov, dvanajstih pravokotnikov in osmih trikotnikov:
$P = 6a^2 + 12a\,\frac{a\sqrt{2}}{2} + 8\,\frac{a^2\sqrt{3}}{8} =$
$= a^2(6 + 6\sqrt{2} + \sqrt{3})$



079.5



Iskani daljici sta AM in AN, kjer je M središče stranice CD in N središče stranice DE.
Utemeljitev: Naj bo $p(ABCDEF) = 6$. Potem je $p(AEF) = 1$, $p(DEA) = 2$ in $p(DNA) = p(NEA) = 1$, ker imata trikotnika DNA in NEA skladni osnovnici in enaki višini. Enako velja: $p(MDA) = p(CMA) =$ $= p(BCA) = 1$ odkoder sledi končni sklep.

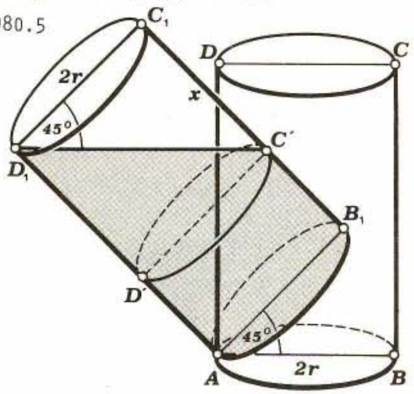
080.1 $\frac{6a}{-5} - 1 = \frac{3a}{5}$, sledi $a = -\frac{5}{9}$

080.2 Prodanih vstopnic: N
znižanje cene: x
znižana cena: $120 - x$
Za dohodek koncerta potem velja:
$\frac{3N}{2}(120 - x) = \frac{5}{4}\,N.\,120$, od tod dobimo $x = 20$. Cena vstopnic je bila znižana za 20 din.

080.3 Velja $\frac{a^3}{b + 3} = \frac{3a}{b}$, sledi
$b = \frac{9}{a^2 - 3}$. Ker mora biti $b \in N$, je imenovalec lahko le 9, 3 ali 1, vendar je le v zadnjem primeru tudi $a \in N$. Iskani ulomek je tako 2/9.

080.4 Če $o_1/o = k$, je $p_1/p = k^2$. Pri tem $k^2 = 36/25$, torej $k = 6/5$. Upoštevajmo še $o_1 - o = 24$, pa dobimo: $o = 120$cm, $o_1 = 144$cm.

080.5



Trikotnik $D_1C'C_1$ je enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $x = 2r$; $V_{D'C'C_1D_1} = \pi r^2 x$,

$V_{AB_1C'D_1} = V - \frac{1}{2} V_{D'C'C_1D_1}$

$V_{D'C'C_1D_1} = 2\pi r^3$,

$V_{AB_1C'D_1} = \pi r^2 v - \pi r^3$

$V_{AB_1C'D_1} = \pi r^2 (v - r)$

$V_{AB_1C'D_1} \doteq 4710\,\text{cm}^3$

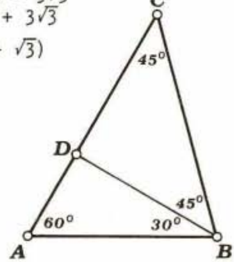
081.1 $x = a/(a - 2)$

Enačba je rešljiva za vsak $a \neq 2$.

081.2 $\overline{CD} = \overline{BD} = 3\sqrt{3}$

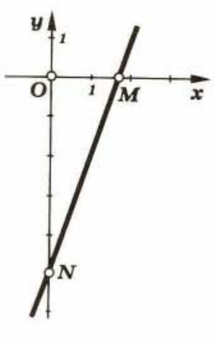
$\overline{AC} = 3 + 3\sqrt{3}$

$p = \frac{9}{2}(3 + \sqrt{3})$

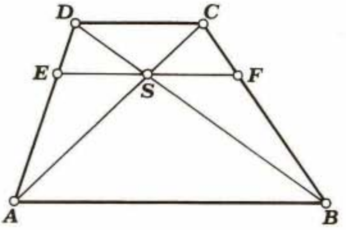


081.3 $k = 3$, $y = 3x - 5$

Presečišči grafa s koordinatnima osema sta $M(5/3,0)$, $N(0,-5)$ in $p = 25/6$.



081.4



$\Delta ABD \approx \Delta ESD \Rightarrow \overline{AB}:\overline{ES} = \overline{AD}:\overline{ED}$

$\Delta BDC \approx \Delta SFC \Rightarrow \overline{AB}:\overline{SF} = \overline{BC}:\overline{FC}$

$\overline{AD} : \overline{ED} = \overline{BC} : \overline{FC}$

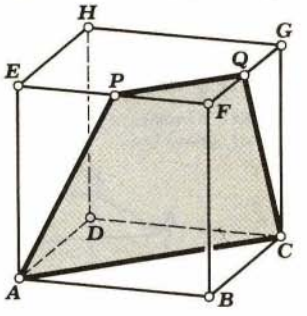
$\overline{AB} : \overline{ES} = \overline{AB} : \overline{SF} \Rightarrow \overline{ES} = \overline{SF}$

081.5 $ACQP$ je enakokrak trapez

$\overline{AC} = 10\sqrt{2}$, $\overline{PQ} = 5\sqrt{2}$

$\overline{AP}^2 = a^2 + (a/2)^2 = (5a^2)/4$

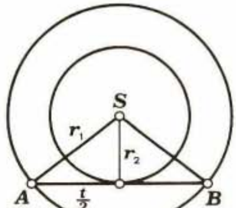
$\overline{AP} = 5\sqrt{5}$, $v = (15\sqrt{2})/2$, $p = 112{,}5$



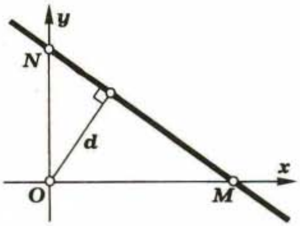
082.1 $\overline{AB} = t = 6\text{m}$

$r_1^2 - r_2^2 = (t/2)^2$

$p = \pi(r_1^2 - r_2^2)$, $p = 9\pi\text{m}^2$



082.2



$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

$\overline{OM} = \frac{10}{3}$, $\overline{ON} = \frac{5}{2}$

$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2$, $\overline{MN} = 25/6$

$d.\overline{MN} = \overline{OM}.\overline{ON}$, $d = 2$

082.3 x = število znamk po 30 par

$30.x + 3x.40 + (x/2).20 = 2400$

$x = 15$

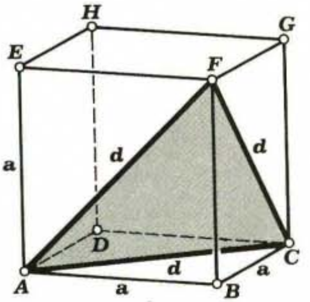
Dobil naj bi torej:

15 znamk po 30 par,

45 znamk po 40 par,

$7\frac{1}{2}$ znamk po 20 par.

Ker slednje ni mogoče, trditev ni pravilna.



082.4 ACF je enakostraničen trikotnik

$p = (d^2\sqrt{3})/4$, $a\sqrt{2} = d$, $d = 2\sqrt{2}$

$P = 6a^2$ $V = a^3$

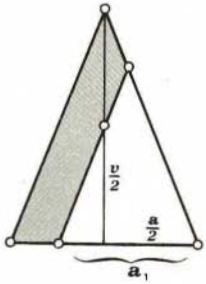
$P = 24\text{dm}^2$ $V = 8\text{dm}^3$

082.5 $v : \frac{v}{2} = \frac{a}{2} : x$ $o_1 = \frac{3}{4}o$

$x = a_1 - \frac{a}{2}$ $o_1 = 27\text{cm}$

$1 : \frac{1}{2} = \frac{a}{2} : (a_1 - \frac{a}{2})$

$a_1 - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$, $a_1 = \frac{3}{4}a$

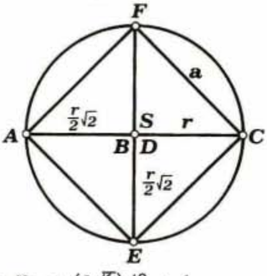


R72.1 Drugo število $10x$; prvo število $(4/5).10x = 8x$
$0{,}5 : (9/20) = 10 : 9$
tretje število $9x$
$8x + 9x - 10x = 70$, $x = 10$
Števila so 80, 100, 90.

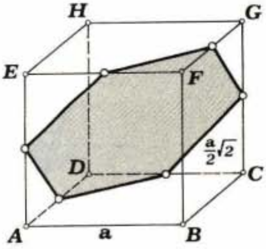
R72.2 $a = 4x$, $b = 3x$
$2(4x - 6) + 2(3x + 3) = 50$
$x = 4$; Stranici pravokotnika merita 16cm in 12cm.

R72.3 $5x + 12y = 60$
$x = 0 \Rightarrow y = 5$
$y = 0 \Rightarrow x = 12$
$3x + 4y = 12$
$x = 0 \Rightarrow y = 3$
$y = 0 \Rightarrow x = 4$
$A(0,5)$, $B(12,0)$, $C(0,3)$, $D(4,0)$
$p = 24$, $o = 28$

R72.4 $V_o = 2a^2v/3$, $v = a\sqrt{2}/2$
$V_o = 72\sqrt{2}\ \text{cm}^3$, $V_k = 4\pi r^3/3$
$r = a\sqrt{2}/2$, $V_k = 72\pi\sqrt{2}\ \text{cm}^3$



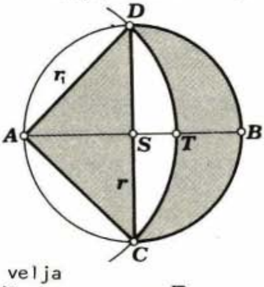
R72.5 $V_p - V_k = (3\sqrt{6})/8 - 1$,
$a_p = (a\sqrt{2})/2$
$a^3(\frac{3\sqrt{6}}{8} - 1) = \frac{3\sqrt{6}}{8} - 1$
$a^3 = 1$, $a = 1$
$V_p = \frac{3\sqrt{6}}{8}$, $V_k = 1$



R73.1 $v(90,105,120) = 2520$
$2520 : 90 = 28$
Prvi satelit bo obkrožil Zemljo 28-krat.

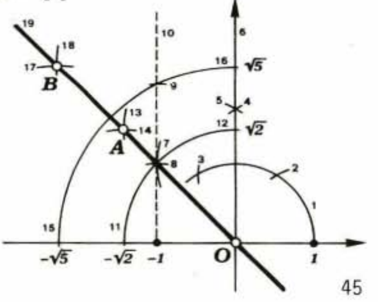
R73.2 $A + B = \frac{2}{5}(C + D + E)$
$C + D + E = x$
$A + B = \frac{2}{5}x$
$x + \frac{2}{5}x = 10500$, $x = 7500$
$\frac{2}{5}x = 3000$
$A : B = 2 : 3$
$2y + 3y = 3000$, $y = 600$
$C : D : E = 3 : 4 : 5$
$3z + 4z + 5z = 7500$, $z = 625$
A......$2y$ = 1200 din
B......$3y$ = 1800 din
C......$3z$ = 1875 din
D......$4z$ = 2500 din
E......$5z$ = 3125 din

R73.3 Označimo s p_1 ploščino lika, ki ga določata loka, s p_t ploščino trikotnika, s p_o ploščino lika DCT in s p_k ploščino kroga.



cem velja
$p_1 = p_k/2 - p_o$, $r_1 = r\sqrt{2}$
$p_1 = (\pi r^2)/2 - p_o$, $p_t = \frac{\pi r^2}{2} - p_o$
$p_1 = p_t$

R73.4

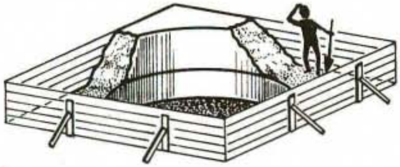


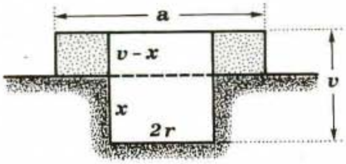
R73.5 $\pi r^2 x = a^2(v - x) - \pi r^2(v - x)$

$$x = \frac{a^2 v - \pi r^2 v}{a^2} = \frac{v(a^2 - \pi r^2)}{a^2}$$

$\doteq 1{,}95\text{m}$

Kopati morajo 1,95 m globoko.





R74.1 $v_1 = 60\text{km/h},\ t_1 = x/60$

$v_2 = 75\text{km/h},\ t_2 = x/75 + 1/20$

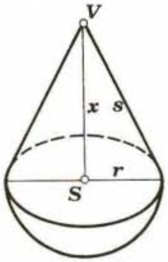
(3min = 1/20 h)

$$\frac{x}{60} = \frac{x}{75} + \frac{1}{20},\ x = 15\text{km}$$

Vlak stoji 15km pred krajem B.

R74.2 $x = 50\text{cm} = 5\text{dm} = v$

$s = \sqrt{4 + 25} \doteq 5{,}39$



$$P = 2\pi r^2 + \pi r s = \pi r(2r + s) \doteq 58{,}97\text{dm}^2$$

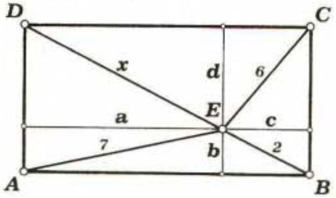
$$V = \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{\pi v r^2}{3} = 12\pi\ \text{dm}^3$$

R74.3 $\underline{x^2 = a^2 + d^2}$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 49 \\ b^2 + c^2 = 4\ /.(-1) \\ \underline{c^2 + d^2 = 36} \end{array}\right\}\ +$$

$a^2 + d^2 = 49 + 36 - 4$

$x^2 = 81,\ x = 9$



R74.4 $V = (14.3{,}8 + 16.1{,}2 + 3.2{,}6).$
$.12 = 962{,}4\ \text{m}^3$

$V = 9624$ hl

(10 hl = 1000 l = 1 m^3)

Gladina vode se dvigne za x m;

$30.12.x = 1,\ x = 1/360\ \text{m} \doteq 3\ \text{mm}$

Gladina vode se dvigne za 3 mm.

R74.5 Produkt dveh števil je enak 0, če je vsaj en faktor enak 0:

$2x + 1 = 0,\quad x - 5 = 0$

$x = -(1/2),\ x = 5$

Produkt je pozitiven, če imata oba faktorja enak predznak

a) $2x + 1 > 0,\ x - 5 > 0$

$x > -(1/2),\ x > 5$

Oba pogoja izpolnjuje $x > 5$

b) $2x + 1 < 0, x - 5 < 0$

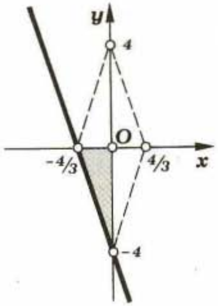
$x < -(1/2),\ x < 5$

Oba pogoja izpolnjuje

$x < -(1/2)$

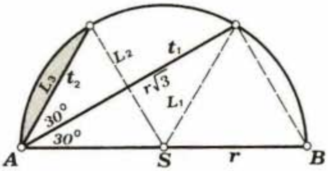
R75.1 $(x - 0{,}1)^2 - (0{,}2x + 1)^2 =$
$= [(x - 0{,}1) + (0{,}2x + 1)].$
$.[(x - 0{,}1 - (0{,}2x + 1)] =$
$= (1{,}2x + 0{,}9)(0{,}8x - 1{,}1)$

R75.2

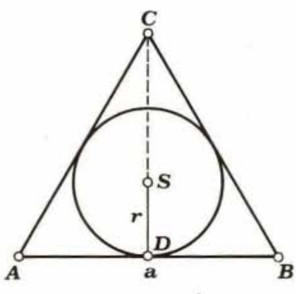


Funkcija je premica
$y = -3x - 4$
Vrtenini sta stožca
$s_1 = s_2 = s$
$r_1 = \frac{3}{4}\, r_2 = 4$
$pl_1 : pl_2 = \pi r_1 s : \pi r_2 s$
$pl_1 : pl_2 = 1 : 3$

R75.3 $P_{L_1} = r^2(2\pi + 3\sqrt{3})/12$
$P_{L_3} = r^2(2\pi - 3\sqrt{3})/12$
$P_{L_2} = \pi r^2/2 - P_{L_1} - P_{L_3} =$
$= \pi r^2/6$



R75.4 $r = a\sqrt{3}/6$, $v = 2r$, zato
$V_p : V_k = 9\sqrt{3} : 2\pi$

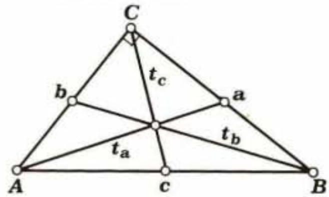


R75.5 Prvotno število: $900000 + x$
Novo število: $10x + 9$
$900000 + x = 4(10x + 9)$
Sledi $x = 23076$
Iskano število je 923076.

R76.1 Naj bosta teži obeskov x oziroma $m - x$ gramov. Zlata imata: $px/100$ oziroma $q(m - x)/100$ gramov. Iz enačbe
$px/100 = q(m - x)/100 + r$
potem dobimo
$x = (mq + 100r)/(p + q)$
$m - x = (mp - 100r)/(p + q)$

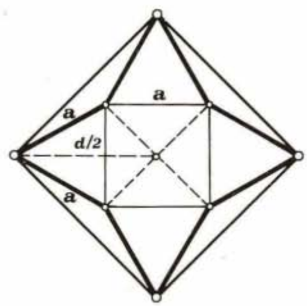
R76.2 $2\pi r + 1 = 2\pi(r + h)$, od tod
$h = 1/(2\pi)$. $h \doteq 16$cm.

R76.3 Upoštevajmo zveze:
$t_a{}^2 = b^2 + (a/2)^2$, $a^2 + b^2 = c^2$
$t_b{}^2 = a^2 + (b/2)^2$ in $t_c = c/2$
iz katerih dobimo

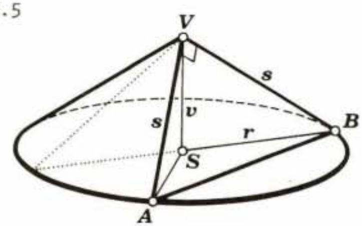


$t_a{}^2 + t_b{}^2 =$
$= a^2 + (a/2)^2 + b^2 + (b/2)^2 =$
$= \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}\, c^2 = 5t_c{}^2$

R76.4 Naj bo d diagonala kvadrata in stranica piramide.
$d/2 = a/2 + a\sqrt{3}/2$
$a = d/(1 + \sqrt{3}) = 1$
Višina piramide je $v = a\sqrt{2}/2$
Zato $V = a^3\sqrt{2}/6 = \sqrt{2}/6\text{dm}^3$
$P = a^2 + a^2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})\ \text{dm}^2$



R76.5

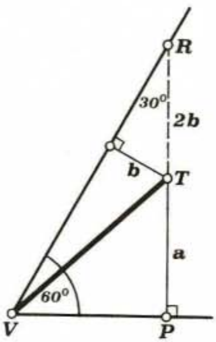


Kot $\sphericalangle BSA$ je 120°, zato
$\overline{AB}/2 = r\sqrt{3}/2$
Po drugi strani pa je
$\overline{AB} = s\sqrt{2}$ in $s^2 = r^2 + v^2$
Od tod $r\sqrt{3} = s\sqrt{2}$
$3r^2 = 2s^2 = 2(r^2 + v^2)$, $r^2 = 2v^2$
Nazadnje $V = \pi r^2 v/3 = 2\pi v^3/3$dm³

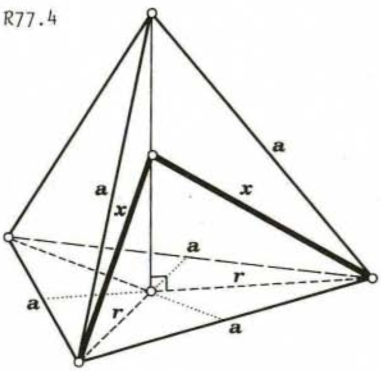
R77.1 a) Namig:
$(a + b)(b + c) = 0 \Rightarrow b = -a$ ali $b = -c$
b) $(x + 1)^2 + (3y + 1)^2 = 0$,
$x = -1$, $y = -1/3$

R77.2 $\dfrac{2a}{v} = \dfrac{a}{v + 6} + \dfrac{a}{v - 4}$,
$v = 24$ km/h. Rezultat je neodvisen od razdalje a.

R77.3 $\overline{PR} = a + 2b$, $\overline{PR} = \overline{VP}\sqrt{3}$
$\overline{VP} = (a + 2b)/\sqrt{3}$, $\overline{VT}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PT}^2$
$\overline{VT} = 2\sqrt{(a^2 + ab + b^2)/3}$

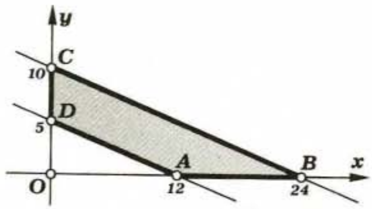


R77.4



Pokazati moramo, da je
$x^2 + x^2 = a^2$ (glej sliko). Iz slike vidimo tudi:
$v^2 = a^2 - r^2$ in $r^2 = (a^2)/3$ kar da $v^2 = (2a^2)/3$, ter dalje
$x^2 = r^2 + (v/2)^2$ oziroma
$x^2 = (a^2)/2$. Torej je res
$x^2 + x^2 = a^2$.

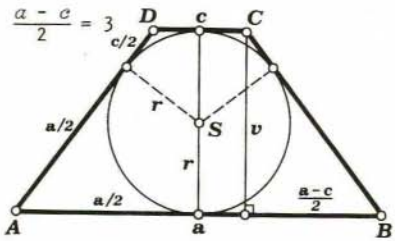
R77.5 $\overline{AD}^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$
$\overline{BC}^2 = 10^2 + 24^2 = 26^2$
$o(ABCD) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 56$
$p(ABCD) = p(OBC) - p(OAD) = 90$



R78.1 Rešitev enačbe: $x = c/(c - 2)$
a) $x > 0$, če je $c > 2$ ali $c < 0$
$x < 0$, če je $0 < c < 2$
$x = 0$, če je $c = 0$
b) rešitev ne obstaja, če je $c - 2 = 0$, torej $c = 2$.

R78.2 Števili: $2n - 1$, $2n + 1$
$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 192$
$n = 24$
$2n - 1 = 2.24 - 1 = 47$
$2n + 1 = 2.24 + 1 = 49$

R78.3 $v = 2r \Rightarrow v = 4$
$p = \dfrac{a + c}{2} .v$, $b = \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2}$
$a + c = \dfrac{2p}{v}$, $b = \dfrac{a + c}{2}$
$a + c = 10$, $b = 5$
$\dfrac{a - c}{2} = \sqrt{b^2 - v^2}$
$\dfrac{a - c}{2} = 3$



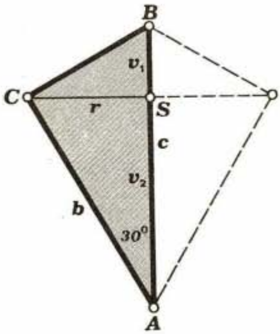
$a + c = 10,\ a - c = 6$
$a = 8,\ c = 2$

R78.4 $V = (\pi r^2 v_1)/3 + (\pi r^2 v_2)/3$

$$V = \frac{\pi r^2}{3}\,(v_1 + v_2)$$

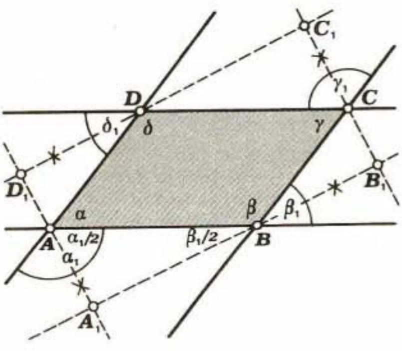
Trikotnika ABC in ASC sta polovici enakostraničnih trikotnikov, zato je $b = (a\sqrt{3})/2$ in $r = b/2$ $\Rightarrow r = (c\sqrt{3})/4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{c\sqrt{3}}{4}\right)^2 . c = \frac{\pi c^3}{16}$$



R78.5 $\alpha + \beta = 180^\circ$

$\alpha = \beta_1$, ker sta obe dvojici krakov vzporedni v isto smer.
$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ = \alpha_1/2 + \beta_1/2 = 90^\circ \Rightarrow \measuredangle AA_1B = 90^\circ$. Podoben sklep velja za kote z vrhovi B_1, C_1 in D_1.



R79.1 $\dfrac{(1-a+a^2-a^3+\ldots+a^{98}-a^{99})(1+a)}{1+a} +$

$$+ \frac{a^{100}}{1+a} =$$

$$= \frac{1+a-a-a^2+a^2+\ldots+a^{99}-a^{99}-a^{100}+a^{100}}{1+a}$$

$$= \frac{1}{1+a}$$

Vrednost izraza je za $a = 5$ enaka 1/6.

R79.2 Iz besedila naloge izhaja enačba:
$(10a + b) + (10b + a) = c^2$
iz katere dobimo naprej:
$11(a + b) = c^2$
Ker sta a in b naravni števili, manjši od 10, je to mogoče le, če je $a + b = 11$. Iz te zveze med a in b dobimo naslednje rešitve:

a	b	število
2	9	29
3	8	38
4	7	47
5	6	56
6	5	65
7	4	74
8	3	83
9	2	92

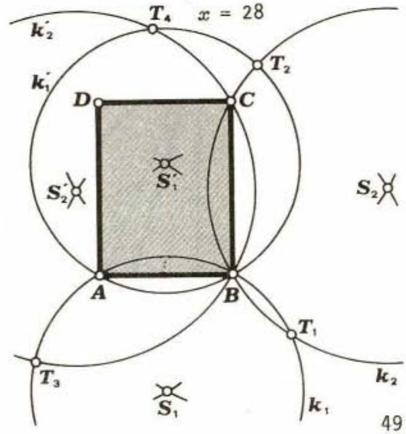
R79.3 a) $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2,\ \overline{BC} = x$

$$\left(\frac{3}{4}\,x\right)^2 + x^2 = (x + 7)^2$$

$$\left(\frac{5}{4}\,x\right)^2 = (x + 7)^2$$

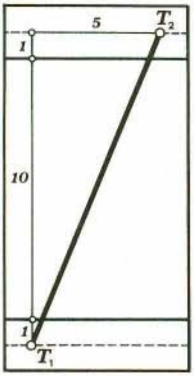
$$\frac{5}{4}\,x = x + 7$$

$$x = 28$$

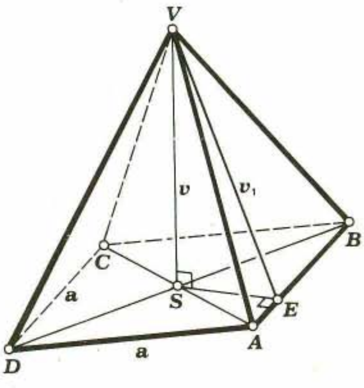


$\overline{BC} = 28$cm, $\overline{AB} = 21$cm
b) Narišemo pravokotnik $ABCD$ z dolžinama stranic 4,2cm in 5,6 cm (glej sliko). Nato nad stranicama AB in BC narišemo, zunaj pravokotnika, enakostranična trikotnika ABS_1 in BCS_2. Iskana točka T_1 je presek krožnic $k_1(S_1, \overline{AB})$ in $k_2(S_2, \overline{BC})$. Nalogi zadoščajo še točke T_2, T_3 in T_4.

R79.4 $\overline{T_1T_2}^2 = 12^2 + 5^2$, $\overline{T_1T_2} = 13$



R79.5 Romb sestavljata dva enakostranična trikotnika s stranico a. Določimo višino v piramide:
$v = \overline{BD}\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}.\sqrt{3}/2 = 3a/2$
Torej je:
$V = \frac{1}{3}Ov = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{1}{4}a^3\sqrt{3}$



Določimo še površino:
$P = O + pl = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + 4.\frac{a}{2}\,v_1$
kjer je v_1 višina trikotnikov ABV, BCV, CDV in DAV. Dobimo jo po Pitagorovem izreku iz pravokotnega trikotnika SEV:
$v_1^2 = v^2 + \overline{SE}^2 = (\frac{3}{2}a)^2 + (\frac{a}{4}\sqrt{3})^2$
($\overline{SE} = 1/2$ višine trikotnika ABC)
oziroma $v = a\sqrt{39}/4$ in dalje
$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{13})$

R80.1 Označimo rob nove kocke z x, potem velja za njeno diagonalo
$d_1 = x\sqrt{3} = a/2 + a/2 + a\sqrt{3} =$
$= a(1 + \sqrt{3})$, odkoder izhaja
$x = \frac{a(1 + \sqrt{3})}{3}$ in
$V = \frac{a^3(1 + \sqrt{3})^3}{3\sqrt{3}} \doteq 3{,}92a^3$

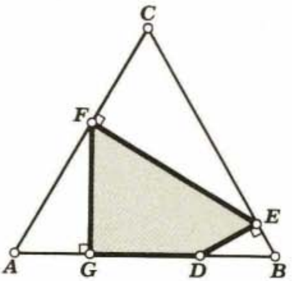
R80.2 Označimo manjše število z x, potem je večje število $x + 10$ in dobljeni produkt
$P = x(x + 10) - 40 = 10x + 9$
Poenostavimo enačbo in dobimo $x^2 = 49$ oziroma $x = 7$. Manjše število je 7 in večje 17.

R80.3 Sklepamo takole: v 1 dnevu prehiti ura za 4 min, v 1 uri prehiti ura za 4/24 min = 1/360 ure, v x urah prehiti ura za $x/360$ ure. Od 6. ure danes do 20. ure jutri je 38 ur. Naj bo x število ur pravega časa od 6. ure danes pa do trenutka jutrišnjega dne, ko bo ura kazala 20. uro. Potem velja enačba:
$x + x/360 = 38$ iz katere dobimo
$x = 720/19 \doteq 37$ h 53 min 41 sek
Pravi čas je 19 h 53 min 41 sek.

R80.4 Funkcija $y = f(x) =$
$= (3x - 12a^2)/4a$ je premica, ki seče koordinatni osi v točkah:
$T_1(x_1,0) = T_1(4a^2,0)$ in $T_2(0,y_2) =$
$= T_2(0,-3a)$. Torej je ploščina pravokotnega trikotnika OT_1T_2 enaka $p = |x_1y_2|/2 = 6|a|^3$
odkoder dobimo enačbo za a
$p = 6|a|^3 = 48$ oziroma
$|a|^3 = 8$, ki ima rešitvi $a = 2$ in $a = -2$.

R80.5 $\overline{DB} = 2a/7$, $\overline{BE} = a/7$, $\overline{EC} = 6a/7$, $\overline{CF} = 3a/7$, $\overline{FA} = 4a/7$

$p(DEFG) = p(ABC) - p(DBE) -$
$- p(ECF) - p(AFG) = (3\sqrt{3}a^2)/28$



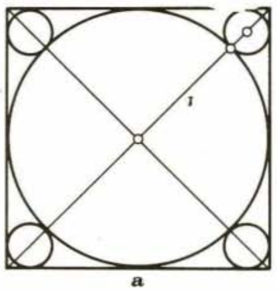
R81.1 Ulomek $\dfrac{-2x + 5y}{2x - y}$ nima pomena pri $y = 2x$, dani ulomek pa nima pomena tudi pri $y = 0$.

R81.2 Ker je
$P = (a - 5)^2 + (b - 7)^2 + c^2 + 1$, ima najmanjšo vrednost pri $a = 5$, $b = 7$, $c = 0$.

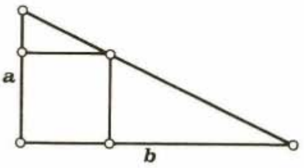
R81.3 $r = a/2$

$x + x\sqrt{2} = a\sqrt{2}/2 - a/2$

$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 \doteq$
$\doteq 0{,}086a$



R81.4



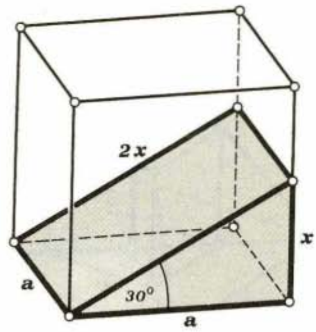
$a/b = x/(b - x)$

$ab - ax = bx$, $x = (ab)/(a + b)$

$p_t/p_k = (a + b)^2/(2ab)^2$

R81.5 $x = a\sqrt{3}/3$, $V_1 = a^3\sqrt{3}/6$

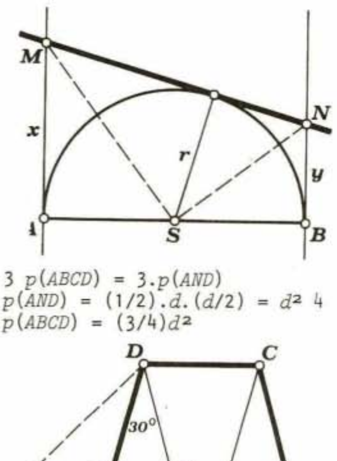
$V_2 = 2V_1$, $V = a^3\sqrt{3}/2$



R82.1 $a = -22$

R82.2 $\measuredangle NSM$ je pravi kot, $\overline{AB} = 2r$

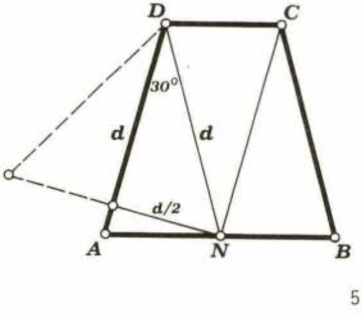
$x^2 + r^2 + y^2 + r^2 =$
$= (x - y)^2 + (2r)^2$, $y = r^2/x$



R82.3 $p(ABCD) = 3.p(AND)$

$p(AND) = (1/2).d.(d/2) = d^2\ 4$

$p(ABCD) = (3/4)d^2$

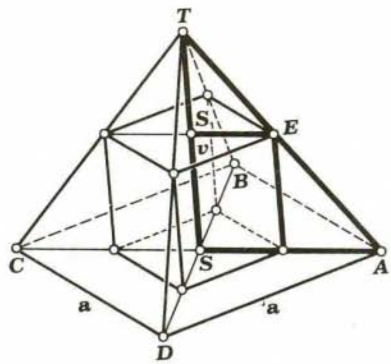


R82.4 $v^2 = (\frac{3}{4}a)^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$

$v = a/4$, $\Delta ASV \sim \Delta ES_1V$

$a\sqrt{2}/2 : x\sqrt{2}/2 = a/4 : (a/4 - x)$

$x = a/5$, $V = a^3/125$



R82.5 Vera je Brankina babica.

Z72.1

	5			5			5
		1			1		
6			6			6	
2			2			2	

2	5		2	5		2	5
		1			1		
6			6			6	
2	5		2	5		2	5

Naj bodo a, b, c in d štiri sosednja števila v isti vrsti (istem stolpcu). Iz pogoja $a + b + c = b + c + d = 12$ sledi, da je $a = d$. To pomeni, da se števila v isti vrsti (stolpcu) ponavljajo po vsakih dveh preskočenih poljih. Tabelo dopolnimo po vrstah (sl.1) in nato še po stolpcih (sl.2). Ostala števila dobimo iz pogoja, da je vsota treh zaporednih števil v vsaki vrsti (stolpcu) enaka 12 (sl.3).

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

Z72.2 Oddaljenost vzletišč je 500km, hitrost helikopterja je 100km/h letala pa 150km/h. Rešitev: Naj bo pot helikopterja do srečanja x km, tedaj je letalo do srečanja preletelo $(x + 100)$km. Hitrost helikopterja je $(x + 100)/3$ km/h, hitrost letala pa

$\dfrac{x}{1\frac{1}{3}}$ km/h. Od svojega vzletišča

do mesta srečanja je helikopter letel

$x : (x+100)/3 = (3x) : (x+100)$ur letalo je letelo od svojega vzletišča do srečanja:

$(1\frac{1}{3}(x + 100))/x$ ur.

Oboje združimo v enačbo:

$(3x)/(x+100) = (\frac{4}{3}(x+100))/x$

$(\frac{x}{x + 100})^2 = \frac{4}{9}$, od tod dobimo

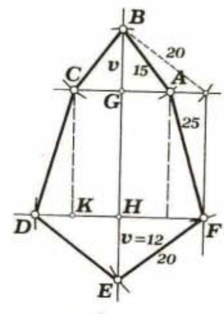
$\frac{x}{x + 100} = \pm \frac{2}{3}$, ker je $(2/3)^2 = (-2/3)^2 = 4/9$. Števili x in $x + 100$ pa sta pozitivni, zato ustrezata samo enačbi $x/(x + 100) = 2/3$, iz katere dobimo rešitev $x = 200$km itd.

Z72.3 Geometrijsko konstrukcijo izdelaj sam!

Ploščina šesterokotnika $ABCDEF$ v pravi velikosti je 900cm². Rešitev: Po Pitagorovem izreku dobimo: $\overline{CG} = 9$cm, $\overline{AC} = 18$cm, $\overline{DH} = 16$cm, $\overline{DF} = 32$cm, $\overline{CK} = 24$cm

Iskana ploščina je

$P = P_{ABC} + P_{ACDF} + P_{FDE} = 9\text{dm}^2$



Z72.4 Brigada je štela 8 traktoristov. Rešitev: Brigada naj šteje x traktoristov. Če merimo delo z enoto "traktor na dan" (delo traktorja v enem dnevu), dobimo

$x.1 + \frac{x}{2}.1$ - delo za oranje prve njive

$\frac{x}{2}.1 + 2$ - delo za oranje druge njive

Prva njiva je dvakrat večja od druge njive, zato velja enačba:

$x + \frac{x}{2} = 2.(\frac{x}{2} + 2)$, z rešitvijo

$x = 8$

Z72.5 a) Iz $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6{,}25\sqrt{3}$, dobimo

$a = 5$

b) Polmer včrtanega valja je $r = (1/3)h$, polmer očrtanega valja je $R = (2/3)h = 2r$. (h je višina osnovne ploskve).
$V_1 : V_2 = \pi R^2 a : \pi r^2 a = R^2 : r^2 =$
$= 4r^2 : r^2 = 4 : 1$
Za vse take prizme je razmerje vedno isto.

Z73.1 Vsako naravno število lahko zapišemo v eni izmed oblik: $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, ($k = 1,2,3, \ldots$). Če je vsaj eno od števil a in b oblike $3k$, je tudi njun produkt deljiv s 3. Če imata a in b obliko $3k + 2$, je njuna razlika deljiva s 3, če pa ima eno število $3k + 1$, drugo pa $3k + 2$, je njuna vsota deljiva s 3.

Z73.2 Blago je bilo pred znižanjem po 30 din. Rešitev:
Pred znižanjem:
količina blaga (m): x
vrednost blaga (din): 270
cena blaga (din): $270/x$
Po znižanju:
količina blaga (m): $x + 1$
vrednost blaga (din): 240
cena blaga (din): $240/(x + 1)$
Pri sestavljanju enačbe upoštevamo, da je cena po znižanju 20% manjša, torej 80% cene pred znižanjem:
$\frac{240}{x+1} = \frac{270}{x} \cdot \frac{4}{5}$, kar da $x = 9$
in ceno $270/x = 270/9 = 30$

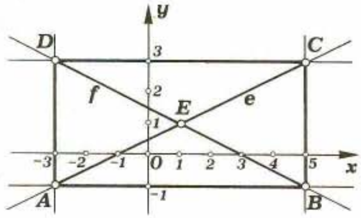
Z73.3 a) Koordinati četrtega oglišča sta $D(-3,3)$.

b) Koordinati presečišča diagonal AC in BD sta:

$$x_S = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

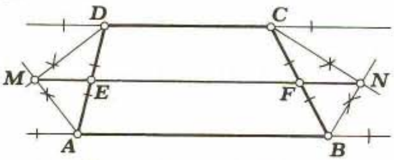
$$y_S = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

c) Enačbe premic, na katerih leže stranice pravokotnika, so:
AB: $y = -1$ BC: $x = 5$
CD: $y = 3$ DA: $x = -3$



Enačbi premic, na katerih ležita diagonali AC in BD, določimo tako, da koordinate (A in B ter C in D) vstavimo v enačbo $y = ax + b$ ter določimo koeficienta a in b. Iskani premici sta:
diagonala e: $x - 2y + 1 = 0$
diagonala f: $x + 2y - 3 = 0$

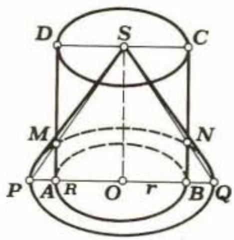
Z73.4



Ker leži točka M hkrati na simetrali zunanjega kota z vrhom A in na simetrali zunanjega kota z vrhom D, je enako oddaljena od premic CD in AB. Na enak način ugotovimo, da je točka N enako oddaljena od premic AB in CD. Zato ležita točki M in N na srednjici trapeza. Dolžina daljice $\overline{MN}$ je enaka polovici obsega trapeza. Trikotnika NAE in BMF sta namreč enakokraka in je $\overline{NE} = d/2$, $\overline{FN} = b/2$. Torej je $o = 2.2k = 4k$

Z73.5 a) Polmer osnovne ploskve stožca označimo z R. Ker je $V_s = V_v$, velja $(\pi R^2 h)/3 = \pi r^2 h$, od koder izhaja $R = r\sqrt{3}$

b) Iz podobnosti trikotnikov BQN in OQS dobimo $h_1/h = (R - r)/R$ in od tu $h_1 = h.(3 - \sqrt{3})/3$
Prostornina dela valja, ki je v stožcu, je:
$V = \pi r^2 h_1 + \pi r^2(h - h_1)/3 =$
$= \pi r^2 h(9 - 2\sqrt{3})/9$



kar nam ob upoštevanju podatka, da je stožec enakostraničen ($h = R\sqrt{3} = 3r$), da rezultat $V = \pi r^3(9 - 2\sqrt{3})/3$.

Z74.1 Iz ploščine diagonalnega preseka ugotovimo, da sta krajša diagonala romba in višina prizme enaki k. Iz ploščine romba dobimo daljšo diagonalo

$$\frac{d.k}{2} = \frac{2}{3}k^2 \Rightarrow d = \frac{4}{3}k$$

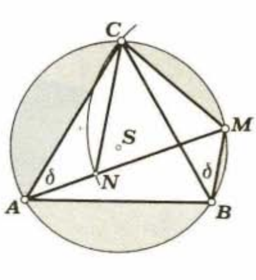
Stranico romba a dobimo iz pravokotnega trikotnika v rombu $a = (5/6)k$

Odgovorimo še na vprašanji:

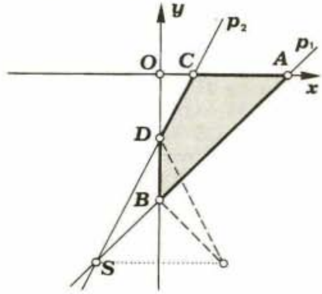
a) $V = (2/3)k^3$, $P = (14/3)k^2$

b) $V = P \Rightarrow (2/3)k^3 = (14/3)k^2 =$
$\Rightarrow k = 7$

Z74.2 Na daljici AM konstruiraj točko N tako, da je $\overline{MN} = \overline{CM}$. Kota $\sphericalangle ABC$ in $\sphericalangle AMC$ sta obodna kota nad isto tetivo AC. Zato je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ABC = 60°$, torej je trikotnik CMN enakostraničen in zato $\overline{CN} = \overline{CM}$. Iz skladnosti trikotnikov ACN in BCM sledi, da je $\overline{AN} = \overline{BM}$. Po konstrukciji je $\overline{MN} = \overline{CM}$, zato je $\overline{AM} = \overline{AN} + \overline{NM} = \overline{BM} + \overline{CM}$



Z74.3 Naj prevozi prvi motociklist x metrov v eni minuti in drugi y metrov v eni minuti. Iz prvega pogoja sledi: $x + y = 1650$, iz drugega: $x - y = 1650/11 = 150$ Rešitev sistema enačb je: $x = 900$m v minuti in $y = 750$ m v minuti ali 54km/h in 45km/h.



Z74.4 a) $P_{ABCD} = P_{OAB} - P_{OCD} = 7\text{cm}^2$

b) Iskana prostornina vrtenine, ki nastane z vrtenjem trikotnika BDS okoli ordinatne osi, je enaka razliki prostornin dveh stožcev.

$V = V_1 - V_2 = 2^2\pi 4/3 - 2^2\pi 2/3 =$
$= 8\pi/3$

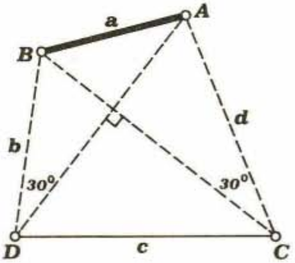
Z74.5 Rešitev enačbe je $x = 3$.
Preuzkus: $3.86 = 3.86$.

Z75.1 Dvoštevilčna praštevila, manjša od 20, so 11, 13, 17 in 19. Cifra enic poljubne potence
števila 11 je 1,
števila 13 je 1, 3, 7 ali 9,
števila 17 je 1, 3, 7 ali 9,
števila 19 je 1 ali 9.
Torej so cifre enic elementov množice A 1, 3, 7 ali 9. Če imata dva elementa isto cifro enic, je njuna razlika deljiva s 5 (oz. 10). Če pa imajo vsi elementi različne cifre enic, potem sta dva elementa s ciframi enic 1 in 9 ali pa 3 in 7. Tedaj je vsota teh števil deljiva s 5 (oz. 10).

Z75.2 $x = 1/2$, $y = 1/3$, $z = 1/4$

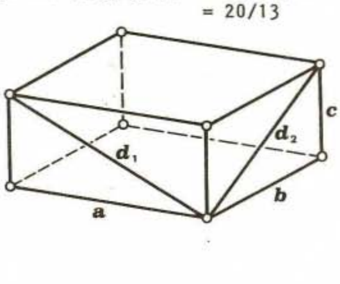
Z75.3 Iz enega kovinskega kosa izdelamo določeno število klinov, ostane pa 1/8 porabljenega materiala. Iz tega izdelamo 8-krat manj klinov itd.
od 100 000 klinov je ostalo materiala za 12 500 klinov;
od 12 500 klinov je ostalo materiala za 1 562,5 klinov;
od 1 562 klinov je ostalo materiala za 195,25 klinov in 0,5;
od 195 klinov je ostalo materiala za 24,375 klinov in 0,75;
od 25 klinov je ostalo materiala za 3,125 klinov in 1,125;
od 3 klinov je ostalo materiala za 0,375 klinov in 0,25;
skupno: 114 285 klinov

Z75.4



$c^2 = 3b^2/4 + 3d^2/4 = 300^2$
$a^2 = b^2/4 + d^2/4 = 300^2/3$
$a = 100\sqrt{3}$ m

Z75.5 $a/b = 4/3$
$\sqrt{(a^2 + c^2)/(b^2 + c^2)} = \sqrt{20/13}$
$d_2b/abc = 2$ ali $a^2 + c^2 = 4a^2c^2$
$(d_1a/abc = 2$ ali $b^2 + c^2 = 4b^2c^2$
Iz druge enačbe dobimo:
$(1 + c^2/a^2)/(b^2/a^2 + c^2/a^2) = 20/13$

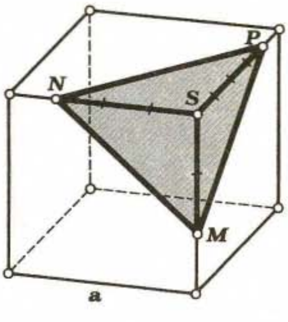


iz tretje pa $1 + c^2/a^2 = 4c^2$
Iz teh enačb dobimo $c = \sqrt{5}/4$ in nato $a = \sqrt{5}/2$, $b = 3\sqrt{5}/8$
$P = 65/16$, $V = 15\sqrt{5}/64$
$(P = 169/36$, $V = 13\sqrt{13}/72)$

Z76.1 Z besedilom naloge določeno število je enako $n^2 + 8$. Dobljeno število je naravno število. Da bi bilo število deljivo s 5, morajo biti njegove enice deljive s 5. Število n^2 se končuje samo s ciframi, ki pripadajo množici $\{1,4,5,6,9\}$, to pomeni, da zadnja cifra števila $n^2 + 8$ pripada množici $\{2,3,4,7,9\}$ in potemtakem ne more biti deljiva s 5.

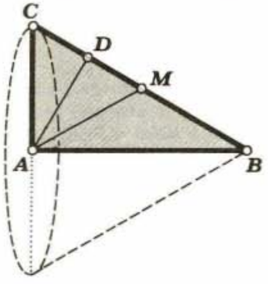
Z76.2 Označimo ostali del poti z x. Čas letenja je $385/220 + x/330$ ur in torej $385 + x = 250(1,75 + x/330)$. Enačbo rešimo in dobimo $x = 216,5625$. Letalo je preletelo 601,5625km poti.

Z76.3 Rob kocke označimo z a. Odsekani rob kocke je piramida s prostornino V_1. Prostornino preostalega dela kocke označimo z V_2. Iz besedila naloge izhaja:
$\overline{SM}/a = 2/3$, $\overline{SN}/a = 3/4$, $\overline{SP}/a = 4/5$
Torej je
$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{SM}.\overline{SN}}{2} \cdot \overline{SP} = \frac{a^3}{15}$ in
$V_2 = \frac{14}{15}a^3$ od koder dobimo iskano razmerje $V_2 : V_1 = 14 : 1$.



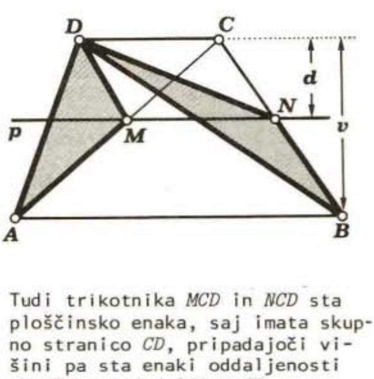
Z76.4 a) Ker je $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{DM} = \overline{CD}$ in $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ADC$, sta trikotnika AMD in ACD skladna. Torej je tudi $\overline{AM} = \overline{AC} = \overline{CM}$, kar pomeni, da je trikotnik AMC enakostraničen. Od tu pa izhaja $\sphericalangle ACB = 60^o$ in $\sphericalangle ABC = 30^o$

b) $P = 12k^2\pi$, $V = (8k^3\pi\sqrt{3})/3$



Z76.5 Trikotnika ACD in BCD imata skupno stranico CD. Njuna višina v na to stranico je enaka višini trapeza (glej sliko). Zato imata tudi enaki ploščini.

$p(ACD) = p(BCD) = \overline{CD}.v/2$



Tudi trikotnika MCD in NCD sta ploščinsko enaka, saj imata skupno stranico CD, pripadajoči višini pa sta enaki oddaljenosti premice p od daljice CD:

$p(MCD) = p(NCD) = \overline{CD}.d/2$

Ker je $p(AMD) = p(ACD) - p(MCD)$ in $p(BND) = p(BCD) - p(NCD)$, izhaja iz prejšnjih ugotovitev $p(AMD) = p(BND)$, kar je bilo treba dokazati.

Z77.1 Če bi bilo mogoče robove kocke oštevilčiti na zahtevani način, bi bila vsota vseh osmih ogliščnih vsot enaka:

$2.(1+2+3+ \dots +11+12) = 2.78 =$
$= 156$

saj se vsako število pojavi dvakrat v skupni vsoti - v ogliščnih vsotah obeh krajišč pripadajočega roba. Torej bi bila posamezna ogliščna vsota enaka $156/8 = 39/2$. To pa je v protislovju s celoštevilčnostjo ogliščnih vsot. Zato robov kocke ne moremo oštevilčiti na zahtevani način.

Z77.2 Množico celih števil Z lahko razbijemo na tri paroma ločene množice. imanujemo jih razrede:

$Z_0 = \{k \mid k = 3m$ (k je deljivo s 3)$\}$
$Z_1 = \{k \mid k = 3m + 1$ (pri deljenju s 3 dobimo ostanek 1)$\}$
$Z_2 = \{k \mid k = 3m + 2$ (pri deljenju s 3 dobimo ostanek 2)$\}$

Vsako celo število pripada natanko enemu od teh razredov.

a) Izmed petih števil morata vsaj dve pripadati istemu razredu in je zato njuna razlika deljiva s 3:

$3m_1 - 3m_2 = 3(m_1 - m_2)$
$(3m_1 + 1) - (3m_2 + 1) = 3(m_1 - m_2)$
$(3m_1 + 2) - (3m_2 + 2) = 3(m_1 - m_2)$

b) Če tri od danih petih števil pripadajo istemu razredu, je njihova vsota deljiva s 3. Na Primer, če so tri števila v Z_2, je njihova vsota:

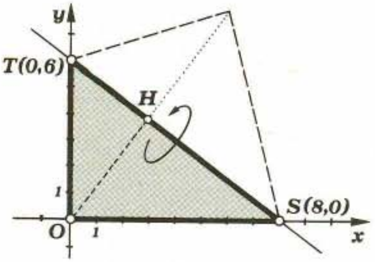
$(3m_1+2) + (3m_2+2) + (3m_3+2) =$
$= 3(m_1 + m_2 + m_3 + 2)$

V nasprotnem primeru, ko ne obstajajo tri števila iz istega razreda, pa mora biti v vsakem razredu vsaj eno izmed števil. Vsota po enega predstavnika iz vsakega razreda pa je enaka:

$3m_1 + (3m_2+1) + (3m_3+2) =$
$= 3(m_1 + m_2 + m_3 + 1)$

in potemtakem spet deljiva s 3.

Z77.3 a) Označimo s S presečišče premice in abscisne osi. Trikotnik OST je pravokotni s ploščino:



$p = (1/2)\overline{OT}\cdot\overline{OS}$

Za $p = 24$ in $\overline{OT} = 6$ je $\overline{OS} = 8$. Torej gre premica skozi točki $T(0,6)$ in $S(8,0)$. Vstavimo njune koordinate v enačbo premice $y = ax + b$. Tako dobimo enačbi:

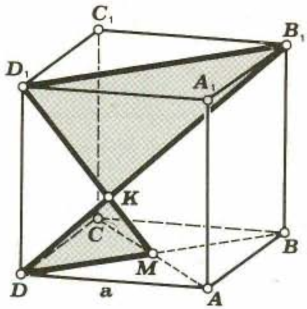
$6 = b$ in $0 = 8a + b$

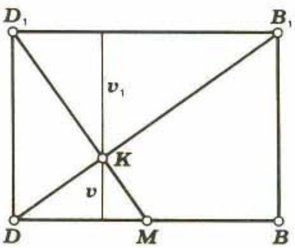
z rešitvijo $a = -3/4$ in $b = 6$.

b) $\overline{ST} = 10$, $\overline{OH} = 4{,}8$

$V = \frac{\pi}{3}\,\overline{OH}^2\cdot\overline{ST} = 76{,}8\pi = 241{,}27$

Z77.4 Trikotnika KDM in B_1D_1K pripadata pravokotniku DBB_1D_1 (glej sliko) in velja: $\overline{BB_1} = a$, $\overline{BD} = a\sqrt{2}$, $DM \parallel B_1D_1$.



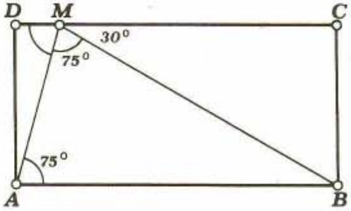


Iz podobnih trikotnikov KDM in B_1D_1K dobimo: $v : v_1 = \overline{DM} : \overline{D_1B_1} = 1 : 2$ (ker je $\overline{DM} = (1/2)\,\overline{D_1B_1}$). Torej je $v = v_1/2$; po drugi strani pa je $v + v_1 = \overline{BB_1} = a$, iz česar dobimo $v = a/3$ in $v_1 = 2a/3$. Sedaj ni več težko določiti ploščin obeh trikotnikov:

$p(KDM) = a^2\sqrt{2}/12$ in

$p(B_1D_1K_1) = a^2\sqrt{2}/3$

Z77.5 a) Ker je $AB \parallel CD$, je $\measuredangle BAM = \measuredangle AMD$ (izmenična kota). Združimo to z enakostjo iz besedila naloge $\measuredangle AMD = \measuredangle AMB$, pa dobimo $\measuredangle BAM = \measuredangle AMB$. Trikotnik ABM je potemtakem enakokrak in $\overline{BM} = \overline{AB}$.



V pravokotnem trikotniku BCM je hipotenuza BM dvakrat daljša od katete $\overline{BC}$: $\overline{BM} = \overline{AB} = 2\overline{BC}$. Torej je trikotnik BCM enak polovici enakostraničnega trikotnika s kotom $\measuredangle BMC = 30°$. Od tu pa dobimo naprej:

$\measuredangle AMB + \measuredangle AMD = 150°$ oziroma

$\measuredangle AMB = \measuredangle AMD = 75°$.

b) Označimo $\overline{BC} = b$, potem je $\overline{CD} = 2b$ in iz $\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{DM}$, $\overline{DM} = 1$ ter $\overline{CM} = b\sqrt{3}$ še $2b = b\sqrt{3} + 1$. Iz zadnje zveze lahko izračunamo $b = 2 + \sqrt{3}$ in nato še ploščino $p = 2b^2 = 2(7 + 4\sqrt{3})$.

Z78.1 V posodi je x litrov 100% alkohola. Če odlijemo 2 l alkohola in dolijemo 2 l vode, dobimo p% mešanico, ki vsebuje $(x - 2)$ litrov alkohola in 2 l vode.

x 100%

$x - 2$ .... p %

$p : 100 = (x - 2) : x$;

$p = 100(x - 2)/x$

Mešanica vsebuje $p\%$ čistega alkohola.
V posodi je x litrov $p\%$ mešanice. Če odlijemo 2 l mešanice in dolijemo 2 l vode, dobimo novo mešanico, ki vsebuje 36% alkohola.

x .... $p\%$
$x - 2$ 36%

$36 : p = (x - 2) : x$;
$p(x - 2)/x = 36$
Upoštevajoč dobljeni izraz za p, dobimo:
$100|(x - 2)/x|^2 = 36 = 6^2$;
$10(x - 2)/x = 6$
Sledi $x = 5$. V posodi je bilo 5 litrov 100% alkohola.

Z78.2 Iskano trošteviIčno število $M = 100x + 10y + z$ lahko zapišemo takole:
$M = 33(x + y + z) = 3.11(x+y+z)$
Ker je M deljivo s 3, mora biti vsota njegovih cifer prav tako deljiva s 3.
$x + y + z = 3m$; $m \geq 1$
Pri tem je m naravno število. Dobimo
$M = 11.3(x + y + z) = 11.3.3m =$
$= 11.9m = 99m$

S tem smo dokazali, da je M deljivo z 9. To pa pomeni, da je tudi vsota njegovih cifer deljiva z 9:
$x + y + z = 9n$; $n \geq 1$
Pri tem je n naravno število. Ker so x,y in z manjši ali kvečjemu enaki 9, velja
$x + y + z \leq 27$. Zato mora biti $n \leq 3$, torej je lahko n enak 1, 2 ali 3. Pri tem ima število M obliko:
$M = 33(x + y + z) = 33.9n = 297n$
Oglejmo si vse tri možnosti!

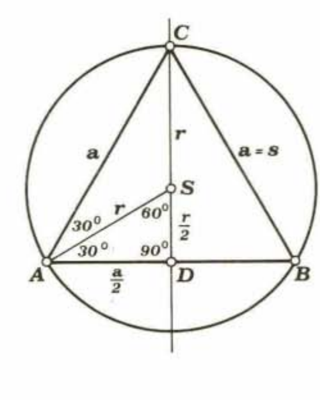
n	$M = 297n$	$x + y + z = 9n$
1	297	$2 + 9 + 7 \neq 9$
2	594	$5 + 9 + 4 = 18$
3	891	$8 + 9 + 1 \neq 27$

Iskano število je torej enako 594. Ko pridemo do sklepa, da je M deljivo z 99, lahko reševanje naloge nadaljujemo še nekoliko drugače. Pišimo:

$(100x + 10y + z) : 99 =$
$= x + (x + 10y + z)/99$
Od tod sledi:
$x + 10y + z = 99p$; $p = 1,2,3,\ldots$
Ker so x,y in z manjši ali kvečjemu enaki 9, velja
$x + 10y + z \leq 9 + 10.9 + 9 = 108$
oziroma $99p \leq 108$ in končno $p = 1$. Sedaj lahko pišemo:
$x + 10y + z = 99$ oziroma
$10y + (x + z) = 10.9 + 9$
Ker mora biti $x + z \leq 18$ in ker ima število 99 na mestu enic število 9, sledi, da $x + z$ ne more biti dvoštevilčno število. Zaradi tega lahko sklepamo iz zadnje enačbe, da mora biti $x + z = 9$ in $y = 9$, torej: $M = 33(x + y + z) =$
$= 33.18 = 594$

Z78.3 AS je simetrala $\measuredangle BAC$. Zato je $\measuredangle DAS = 30^\circ$ in ker je $\measuredangle ADS = 90^\circ$, sledi, da je $\measuredangle DSA = 60^\circ$. Trikotnik ADS je polovica enakostraničnega trikotnika s stranico r in je zato $\overline{SD} = r/2$. Iz pravokotnega trikotnika ADS sledi $a/2 = r\sqrt{3}/2$ oziroma $a = r\sqrt{3}$. Vrtenina je določena s kroglo polmera r in z včrtanim pravokotnim stožcem višine $v = 3r/2$ in polmera $R = a/2 =$
$= r\sqrt{3}/2$. Za kroglo velja:

$V_k = (4/3)\pi r^3$; $P_k = 4\pi r^2$

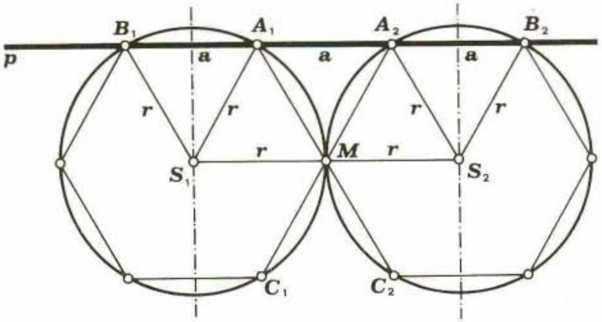


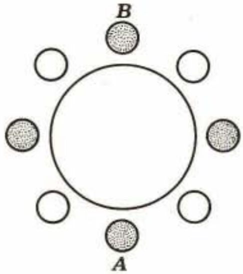
za stožec pa:
$V_s = (1/3)\pi R^2 v = (3/8)\pi r^3$
$P_s = \pi R^2 + \pi R s = (9/4)\pi r^2$
Tako dobimo za prostornino in površino vrtenine:
$V = V_k - V_s = (23/24)\pi r^3$
$P = P_k + P_s = (25/4)\pi r^2$

Z78.4 Da bomo lahko konstruirali zahtevano premico, moramo ugotoviti razmerje med neznano dolžino treh enakih odsekov in danim polmerom r obeh krožnic. Narišimo premico p in označimo na njej tri enake odseke poljubne dolžine $a = \overline{B_1A_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2B_2}$. Odseka A_1B_1 in A_2B_2 predstavljata tetivi dveh krožnic enakih polmerov $r_1 = r_2 = r$ s središči S_1 in S_2. Ker je $\overline{A_1S_1} = \overline{B_1S_1} = r$ in $\overline{A_2S_2} = \overline{B_2S_2} = r$, sledi, da sta S_1 in S_2 na simetralah tetiv A_1B_1 in A_2B_2 in sicer z iste strani premice p, sicer se krožnici ne bi dotikali. Razdalja simetral je enaka $\overline{S_1S_2} = 2r = 2a$, ker se krožnici dotikata in ker je tudi $\overline{A_1A_2} = a$. Od tod sledi, da je $a = r$. Trikotnika $A_1B_1S_1$ in $A_2B_2S_2$ sta torej enakostranična. To pomeni, da predstavljata tetivi $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = r$ stranici krožnicama včrtanih šestkotnikov, ki se stikata v dotikališču M obeh krožnic. Zato velja $\overline{A_1M} = \overline{A_2M} = r$. Zdaj lahko konstruiramo zahtevano premico. Načrtamo daljico $\overline{S_1S_2} = 2r$ in jo razdelimo na dva enaka dela s točko M. Nato načrtamo dve od zunaj se dotikajoči krožnici s polmerom r in središči v S_1 in S_2. S šestilom določimo na obeh krožnicah točke, ki so za r oddaljene od dotikališča M. Tako dobimo dva para točk A_1 in A_2 ter C_1 in C_2, skozi katera načrtamo premici, ki sta vzporedni z daljico S_1S_2. Obe premici zadoščata pogojem v nalogi.

Z78.5 V vsoti
$a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}$
so zajeta vsa števila, vpisana v kvadratni mreži. Prav tako so v vsoti
$b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{100}$
zajeta vsa števila kvadratne mreže, zato je $a = b$. Izraz $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_{100}-b_{100})$ lahko izpišemo, potem ko razrešimo oklepaje, tudi v obliki $(a - b)$. Upoštevajoč, da je a enako b, sledi, da je vrednost podanega izraza enaka nič.

Z79.1 Da bo nasproti vsakega od 4 moških sedela ženska, mora gostitelj za mizo razporediti 4 ženske tako, da bo med dvema ženskama en moški. Naj bo AB premer okrogle mize in naj bo A moški in B ženska. Levo in desno od premera AB morajo sesedeti po 3 osebe. To pa pomeni, da mora biti B moški, kar ni v skladu s pogojem, da na-



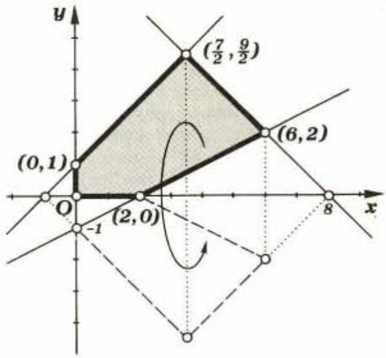


sproti moškega sedi ženska. Torej gostitelj ni mogel razporediti gostov tako, kot so želeli.

Z79.2 Primož je vozil do cilja $20/40 = 0{,}5$ ure ali 30 minut. Matjaž pa je potreboval $20/45$ ur in 3 minute, skupaj $89/3$ minut. Torej je zmagovalec Matjaž, ker je pripeljal na cilj $1/3$ minute, tj. 20 sekund pred Primožem. V teh 20 sekundah je Primož prevozil še $(1/180)\cdot 40$ km $= 2/9$ km. Matjaž je zmagal s prednostjo 222,2 m.

Z79.3 Izraz pod kvadratnim korenom preoblikujemo:
$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy =$
$= (x + y)^2 - z^2 =$
$= (x + y + z)(x + y - z)$
in upoštevamo, da je vrednost kvadratnega korena najmanjša, ko je izraz pod korenom enak 0, odkoder dobimo: $x + y = \pm z$
oziroma $y = \pm z - x$
Iskani vrednosti y sta 200 001 in -923 959.

Z79.4 Na sliki je petkotnik iz besedila naloge osenčen. Koordinate oglišč dobimo kot presečišča odgovarjajočih premic.
Npr.: točka $(0,1)$ je presek y osi $(x = 0)$ in premice $x - y = -1$. Koordinati točke $(7/2, 9/2)$ dobimo z rešitvijo sistema enačb
$x - y = -1$ in
$x + y = 8$ itd.
Iskano prostornino dobimo, če od dvojnega stožca s polmerom $9/2$ in višino 9, odštejemo dvojni stožec s polmerom 2 in



višino 6 in stožec s polmerom 1 in višino 1: $V = (629/12)\pi$

Z79.5 Dolžino s srednjice trapeza določimo iz zveze
$s = p/h = 80/8 = 10$
kar nam da prvo zvezo med osnovnicama trapeza:
$2s = a + c = 20$ (1)
Trikotnika NSQ in SMP sta skladna. Iz podobnih trikotnikov SMP in BCF pa dobimo $\overline{SP} : \overline{MP} = \overline{CF} : \overline{BF}$ oziroma $3:4 = 8:x$; kar da $x = 32/3$. Tudi trikot-

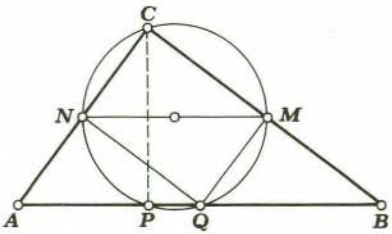
nika NSQ in AED sta podobna: $\overline{SQ} : \overline{QN} = \overline{DE} : \overline{AE}$ oziroma $4:3 = 8:y$; kar da $y = 6$. Štirikotnik $EFCD$ je pravokotnik. Zato je $x + y = a - c$, od koder dobimo še drugo zvezo med osnovnicama:
$a - c = 32/3 + 6$ (2)
Rešimo sistem enačb (1) in (2) in dobimo iskano rešitev:
$a = 55/3$ in $c = 5/3$.

Z80.1 Denimo, da učenec A pozna vsaj tri učence. Če se vsaj dva od teh poznata med seboj, potem tvorita z A-jem trojico znancev. Če pa se nobena dva od teh treh ne poznata, potem tvorijo ti trije učenci trojico neznancev. Če pa učenec A pozna največ dva učenca, potem ostalih treh ne pozna in lahko ponovimo zgornji sklep, pri čemer zamenjamo "pozna", "ne pozna".

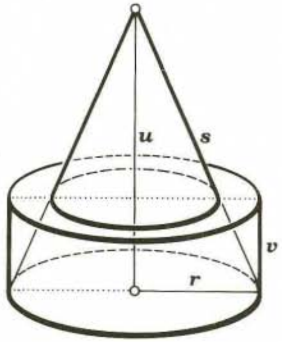
Z80.2 Ne. Če bi bili dolžini obeh katet lihi naravni števili, denimo $2n+1$ in $2m+1$, bi bil kvadrat hipotenuze enak
$4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$
in deljiv le z 2, s 4 pa ne. Torej ne more biti kvadrat naravnega števila.

Z80.3 Označimo ceno torbe s t, ceno knjige s k in ceno peresa s p. Potem je
$t/5 + p/2 + k/(2.5) = 160$
$t/2 + p/4 + k/3 = 240$
oziroma
$2t + 5p + 4k = 1600$
$6t + 3p + 4k = 2880$
Če seštejemo obe enačbi, dobimo
$8(t + p + k) = 4480$ in
$t + p + k = 560$
Torej je učenec potrošil skupno 560 din.

Z80.4 Točka Q je središče hipotenuze AB trikotnika ABC. Trikotnik BCP je podoben trikotniku ABC in zato $\overline{BC} : \overline{PB} = \overline{AB} : \overline{BC}$ oziroma $\overline{PB} = \overline{BC}^2/\overline{AB}$ in
$\overline{PQ} = \overline{BC}^2/\overline{AB} - \overline{BQ} = 14$ cm



Z80.5 Označimo višino valja z v, višino stožca z u in stranico stožca s s. Ker sta prostornini enaki, je $v = u/3$. Ker sta površini enaki, je
$\pi r(r + s) = 2\pi r(r + v)$
oziroma
$\sqrt{u^2 + r^2} = s = r + 2v$
Odtod dobimo
$u = (12r)/5 = 7{,}2$ dm
$v = (4r)/5 = 2{,}4$ dm
$s = (13r)/5 = 7{,}8$ dm



Presek stožca in valja je prisekan stožec z višino v, polmeroma osnovnih ploskev r in $2r/3$ in stranico $s/3$. Torej je njegova prostornina
$V = (76\pi r^3)/135 \doteq 47{,}75$ dm^3
in površina
$P = (26\pi r^2)/9 \doteq 81{,}68$ dm^2

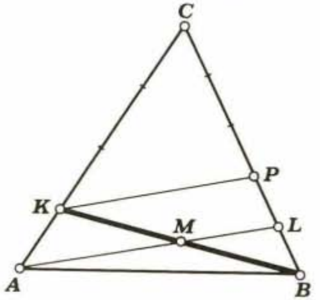
Z81.1 $a = 8$, $b = 4$

Z81.2 Seštevek teh desetih vsot je sodo število, saj je enak dvakratniku vsote vseh naravnih števil od 1 do 10. Torej mora biti med temi desetimi vsotami sodo mnogo lihih. Če bi bile cifre enic pri vseh desetih vsotah različne, bi bilo med njimi pet lihih, za kar pa smo ugotovili, da ni mogoče.

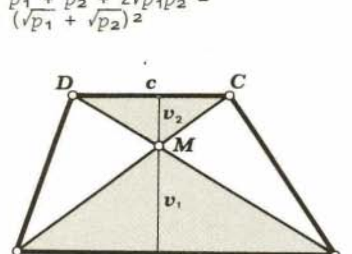
Z81.3 Prvi vlak, ki krene iz kraja A, vozi s hitrostjo v_1 in drugi vlak s hitrostjo v_2. Označimo razdaljo med krajema A in B z x.

Ko se vlaka prvič srečata, velja $50/v_1 = (x - 50)/v_2$ ali $v_2/v_1 = (x - 50)/50$ in ko se srečata drugič $(x + 30)/v_1 =$ $= (2x - 30)/v_2$ ali $v_2/v_1 =$ $= (2x - 30)/(x + 30)$
Iz tega dobimo $x = 120\text{km}$.

Z81.4 Vzporednica premice (A,L) skozi točko K seka stranico BC v točki P. Ker deli točka K stranico AC v razmerju 1:3, deli točka P daljico LC v razmerju 1:3. Ker je $BL : LC = 1:4$, deli točka L daljico BP v razmerju 1:1. Zato deli točka M daljico BK v razmerju 1:1.



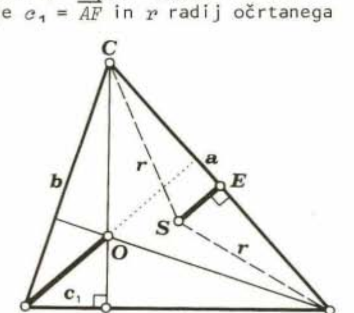
Z81.5 $p = (a + c)(v_1 + v_2)/2 =$
$= p_1 + p_2 + av_2/2 + cv_1/2$
Trikotnika ABM in CDM sta podobna. Zato je $v_1/v_2 = a/c$
Obenem je $p_1/p_2 = (av_1)/(cv_2) =$ $= v_1^2/v_2^2$. Zato je $av_2/2 =$ $= cv_1/2 = cv_1v_2/(2v_2) =$ $= p_2\sqrt{p_1/p_2}$ in
$p = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1p_2} =$
$= (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2$



Z82.1 Po x km se izrabi $x/25000$ prve gume in $x/15000$ zadnje gume. Preostanek prve gume $1 - x/25000$ se izrabi po y km, ampak sedaj kot zadnja guma, torej velja
$1 - x/25000 = y/15000$
Enak sklep velja za preostanek zadnje gume, kar nam da še eno enačbo
$1 - x/15000 = y/25000$
Iz obeh enačb potem izluščimo $x = y = 9375$. Torej motorist mora zamenjati gumi po prevoženih 9375km in po skupno prevoženih 18750km sta obe gumi izrabljeni.

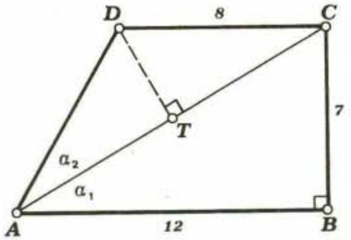
Z82.2 Dobimo
$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) =$ $= a^5 - b^5$. V tej zvezi izberimo $a = k$ in $b = 1$; sledi
$(k-1)(k^4+k^3+k^2+k+1) = k^5-1$
Izraz na levi mora biti enak $2p^2$, kjer je p praštevilo. Ker je p praštevilo, mora biti p^2 enak enemu od izrazov na levi, vendar očitno večjemu, torej dobimo $k - 1 = 2$ in
$p^2 = k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$. Sledi $k = 3$ in $p = 11$.

Z82.3 V trikotniku BSC je kot ob S enak $2.\sphericalangle CAB$, ker je $\sphericalangle CAB$ njegov pripadajoči obodni kot, sledi $\sphericalangle BSE = \sphericalangle CAB$ in pravokotna trikotnika BSE in AFC sta si podobna. Sledi razmerje (glej sliko) $c_1/b = \overline{SE}/r$. Pri tem je $c_1 = \overline{AF}$ in r radij očrtanega

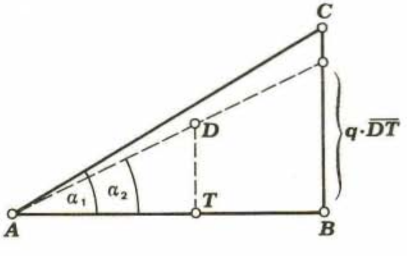


kroga. Kot $\measuredangle FOA$ je enak kotu $\measuredangle ABC$ (pravokotnost krakov), zato sta si pravokotna trikotnika FOA in FBC podobna. Sledi razmerje $\overline{OA}/c_1 = a/v_c$, kjer je $v_c = \overline{CF}$. Sedaj obe enačbi združimo in upoštevamo zvezi za ploščino trikotnika
$p = c.v_c/2 = abc/(4r)$. Dobimo
$\overline{OA} = ac_1/v_c = a.\overline{SE}.bc/(v_c rc) =$
$= 4rp.\overline{SE}/(2pr) = 2.\overline{SE}$

Z82.4 Diagonala AC razdeli kot ob oglišču A na dva dela, ki ju pznačimo z α_1 in α_2. Določili bomo, kateri od teh kotov je večji. Takoj dobimo $\overline{AD} = \sqrt{65}$ in $\overline{AC} = \sqrt{193}$. Ploščina trapeza je 70, ploščina trikotnika ABC je 42, torej je ploščina trikotnika ACD enaka 28. Za višino

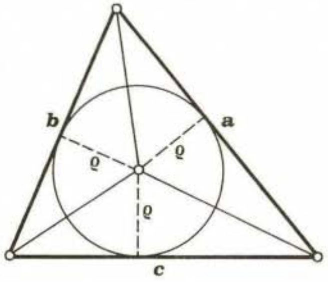


$\overline{DT}$ tega trikotnika dobimo
$\overline{DT} = 2.28/\sqrt{193} = 56/\sqrt{193}$. Sledi
$\overline{AT} = \sqrt{65 - 56^2/193} = 97/\sqrt{193}$.
Če sedaj vse stranice v trikotniku ATD pomnožimo s številom $q = 12.\sqrt{193}/97$, se ena kateta dobljenega trikotnika ujema s kateto AB v trikotniku ABC. Oglejmo si razmerje drugih katet:



$q.\overline{DT}/\overline{BC} = 12.\sqrt{193}.56/(97.\sqrt{193}.7) =$
$= 96/97 < 1$; to pa za ustrezna kota pomeni $\alpha_2 < \alpha_1$, iz česar sledi, da simetrala kota trapeza pri A seka krak BC.

Z82.5 Zapišimo zveze
$av_a = bv_b = cv_c = 2p$, kjer so oznake standardne. Poleg tega velja še
$a\rho/2 + b\rho/2 + c\rho/2 = p$. Izpo-



stavimo v zadnji zvezi ρ, količine a, b, in c pa izrazimo s ploščino in ustrezno višino iz prvih zvez
$\rho(p/v_a + p/v_b + p/v_c) = p$, odkoder že sledi dokaz zapisane zveze.

DRUŠTVO MATEMATIKOV,
FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

ZAVOD ZA ŠOLSTVO
SOCIALISTIČNE REPUBLIKE SLOVENIJE

učenec ______________________________ ________ *razreda*

osnovne šole ______________________________

je prejel

SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

za uspeh na republiškem tekmovanju iz matematike v šolskem letu 19__/__

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije
in Zavod za šolstvo SR Slovenije
predlagata srednjim šolam, da učenca oprostijo preizkusa znanja iz matematike;
družbeno-političnim skupnostim, izobraževalnim skupnostim in delovnim organizacijam
pa priporočata, naj učenčev uspeh upoštevajo pri podeljevanju štipendij
in drugih oblik pomoči za šolanje.

V ____________________ , ____________ *19*__

Predsednik občinske tekmovalne komisije :

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Založila Državna založba Slovenije

PRESEKOVA KNJIŽNICA

1. Vidav I., JOSIP PLEMELJ - Ob stoletnici rojstva, 1975
2. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešnih nalog iz matematike s tekmovanj učencev šestih, sedmih in osmih razredov osnovnih šol SRS, 1977
3. Prosen M., ASTRONOMSKA OPAZOVANJA - Kako v astronomiji s preprostimi sredstvi opazujemo in merimo, 1978
4. Strnad J., ZAČETKI SODOBNE FIZIKE - Od elektrona do jedrske cepitve, 1979
5. Strnad J., RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE - Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce, 1979
6. Landau L.D., Rumer J.B., KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI - Nobelov nagrajenec predstavi spremenjene poglede na prostor, čas in maso, 1979
7. Križanič F., UKROČENA MATEMATIKA - Zapoznelo opozorilo na računske zakone ali fižol namesto množic, 1981
8. Ranzinger P., PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA - Fotografije Bojan Dintinjana, 1981
9. Strnad J., ZAČETKI KVANTNE FIZIKE - Od kvanta do snovnega valovanja, 1982
10. Kuščer I., ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE - Čuda se kažejo ob vsakem koraku, 1982
11. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol SR Slovenije, 1982
12. Ranzinger P., NAŠE NEBO - Astronomske efemeride 1983, 1982
13. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol, 1983
14. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol, 1983.