presek 6

X

1982-83

PAVLE ZAJC

TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA

Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol

LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome, 10. letnik, šolsko leto 1982/83, številka 6., str. 1-64 (257-320)
Glavni urednik Edvard Kramar, odgovorni urednik Andrej Likar

PRESEKOVA KNJIŽNICA ; 13. - Pavle Zajc s sodelavci: Tomaž Pisanski, Karel Bajc, Andrej Kmet, Mirko Dobovišek, Edvard Kramar, Vladimir Batagelj, Gorazd Lešnjak: TEKMUJEMO ZA VEGOVA PRIZNANJA : Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol. - Jezikovni pregled Ivanka Šircelj, Slike Slavko Lesnjak in Miha Štalec, rokopis sta natipkali Metka Žitnik in Bernarda Šenk. - Urednik Ciril Velkovrh, Odgovorni urednik Andrej Kmet. - Natisnila Tiskarna ČGP "Delo" v nakladi 22 000 izvodov. - Subvencionirali RSS in ISS.

V S E B I N A

Z A U V O D

V Sloveniji stopamo že v drugo desetletje tekmovanj iz matematike za učence višjih razredov osnovnih šol, ki preizkušajo svoje znanje za pridobitev VEGOVIH PRIZNANJ: bronasta, srebrna in zlata.

Če si pripravljen izpopolnjevati svoje znanje, pobrskaj po nalogah, ki jih imaš pred seboj. Rešitve nalog naj ti bodo le v oporo za preverjanje samostojnega dela. Zagotovo boš vesel, če boš sam prišel do pravilnega rezultata ali našel izvirnejšo in preprostejšo pot do rešitve.

Torej, ne prepisuj slepo rešitev, ker tako zagotovo ne bo uspeha. Če boš v zadregi, se posvetuj z učiteljem-mentorjem.

Veliko uspeha ti želijo avtorji.

Organizatorjem šolskih tekmovanj priporočamo, da vse udeležence stimulirajo v primerni obliki. V ta namen lahko naročite pri društvu bronasto Vegovo značko (cena 20.- din), boljšim tekmovalcem pa podelite bronasta Vegova priznanja (8.- din).

A. NALOGE ZA UČENCE VII. RAZREDA

1. Kaj je večje, 31^{11} ali 17^{14} ?
2. Ugotovi, ali je enakost $3^{100} + 7^{100} = 8^{100}$ pravilna?
3. Naj bo p naravno število. Kdaj je $a = (p + 8)/p$ naravno število?
4. Pokaži, da je $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
5. Vsota treh zaporednih naravnih števil je vedno deljiva s 3. Dokaži!
6. Uredi po velikosti števila a, $-a$, $2a$, a^3, če je $-1 < a < 0$.
7. Za katere vrednost spremenljivke x je vrednost izraza $(2x - 1)/(x^2 + 1)$ negativna?
8. Za katere vrednosti spremenljivke a je vrednost izraza $1/(1 + a)$ večja od 1 ?
9. Naj bo $a > b$, $c > 0$, $d < 0$. Katero število je večje:
   a) a/c ali b/c
   b) a/d ali b/d
10. Ali je mogoče:
    a) $a - b > a + b$
    b) $a - b = a + b$
    c) $a + b + c < 0$
    č) $a + b + c = 0$
11. Katere izjave so pravilne:
    a) $a^3 < b^3 \Rightarrow a < b$
    b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
    c) $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$
    č) $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$
12. Za katera števila a so izjave pravilne:
    a) $a/(-1) < 0$
    b) $1/a > 0$
    c) $-1/a^2 < 0$
    č) $(-a^3)/(-1) < 0$
13. Primerjaj po velikosti izraza $a + b^3$ in $a^2 + b^3$!
14. Za katere vrednosti k $(k \geq 3)$ je izraz $(-5)^k.(-4)^{k-1}.(-3)^{k-2}$ pozitiven?
15. Za katere vrednosti k $(k \in N)$ je izraz $(-3)^{k+1}.(-4)^k:(-1)^{k+3}$ pozitiven?
16. Izračunaj vrednosti številskih izrazov:

    a) $(3m + 4n)(3m - 4n) + (m - n)(9m^2 + 16n^2)$ za $m = 1$ in $n = -1$
    b) $[a - a/3 + a:(a + a/3)].[a - a^2/3 - a:(2a + a^2)]$ za $a = -1$
    c) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} : \frac{a - b}{a + b}$ za $a = 0{,}5$ in $b = 0{,}4$
    č) $\frac{a^3 - b^3}{a - b} : \frac{a + b}{a^2 - b^2}$ za $a = 1{,}5$ in $b = 0{,}5$
    d) $-x(-x(-x(-x-x)-x)-x)-x$ za $x = 1$

e) $\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{c-a}+\frac{c-a}{a-b}$ za $a=1,\ b=2,\ c=3$

17. Izračunaj:
 a) $((a^8 : a^4) : a)^5$
 b) $((x^5 \cdot x^4 : x^3)^4)^2$
 c) $(x^{2a+1} \cdot x^{a-3})^4$
 č) $(r^2/36 - rs/9 + s^2/9):(r/6 - s/3)$

18. Izračunaj vrednost izraza $0{,}001a^3b^3$, če je a največje celo negativno dvoštevilčno število, b pa najmanjše celo število med $-2{,}5$ in $-5{,}2$!

19. Kvadratni koren negativnega števila ne obstaja (ni realno število). Tako na primer $\sqrt{-4}$ ne obstaja. Ugotovi, za katere vrednosti spremenljivk a,b,m,n,x in y obstajajo kvadratni koreni:

a) $\sqrt{a+3}$	b) $\sqrt{a-3}$
c) $\sqrt{3-a}$	č) $\sqrt{a^2-3}$
d) $\sqrt{3-a^2}$	e) $\sqrt{b}$
f) $\sqrt{-b}$	g) $\sqrt{b^2}$
h) $\sqrt{-b^2}$	i) $\sqrt{m^2-4m+4}$
j) $\sqrt{4+n^2}$	k) $\sqrt{x^3-125}$
l) $\sqrt{9/16-y^2}$	

20. Poenostavi izraz: $(\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}+\sqrt{a+1-2\sqrt{a}})^2$, $a \geq 0$.

21. Izračunaj:

 a) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

 b) $\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$

22. Izračunaj: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}}$

23. Določi tista cela števila a, ki zadoščajo neenačbama $\frac{2}{5} \leq \frac{a+7}{6} \leq \frac{5}{3}$

24. Dokaži, da sta A in B različna:
 $A = (a-1)(a+2) + a(a+3)(a-2) - (a-3)(a+1)$
 $B = (a+1)(a-2) + a(a-3)(a+2) - (a+3)(a-1)$

25. Zmnoži: $(a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)(a+3)$

26. Poenostavi številske izraze in napravi preizkus:
 a) $8a^4 - (-(a^2-1)^2 + a^4(4a^4 - (2a^2+1)(2a^2-1)))$. Preizkusi z $a = 1$.
 b) $((a-b)^2)^2 - (a^2+b^2)^2 + 4ab(a-b)^2$. Preizkusi z $a = 1$ in $b = 1$.
 c) $-(0{,}3a^2 - 0{,}2b^3)^2 - (-0{,}3a^2 + 0{,}2b^3)^2 - 2(0{,}3a^2 - 0{,}2b^3)(0{,}3a^2 + 0{,}2b^3)$. Preizkusi z $a = 2$ in $b = -1$.

27. Za koliko odstotkov se spremeni produkt števil m in n, če m zmanjšamo za 20%, n pa povečamo za 20% ?

28. Določi x tako, da se m/n zmanjša za 40%, če m zmanjšamo za x%, n pa povečamo za x% .

29. Med funkcijami izberi táko, da zanjo velja $f(0) = 1$ in $f(1) = 0$!

30. Izračunaj vrednost funkcije:
a) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 16$, za $x = -3$ in za $x = 0$
b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, za $x = 0{,}5$ in za $x = -3/4$

31. Naj bo $f(x,y) = -x^4 + 4x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$. Izračunaj $f(0,0)$, $f(0,1)$, $f(1,0)$ in $f(1,-2)$.

32. Dane so funkcije:
a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Izračunaj $f(2 + \sqrt{5})$.
b) $g(x) = x^2 - x + 1$. Izračunaj $g(a + 1)$ in $g(1/a)$.
c) $h(x) = x^2 - 3x - 5$. Izračunaj $h(\sqrt{2})$ in $h(h(\sqrt{2}))$.

33. Dokaži, da je veččlenik (polinom) $P(x) = x^2 + x + 1$ faktor polinoma $R(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

34. Dokaži, da za vsa realna števila a velja enakost
$a^{16} = (a^8 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) + 1$

35. Izraz $2a^2 + 2b^2$ preoblikuj v vsoto dveh kvadratov !

36. Izraz $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + a(a + x + y + z + u)$ preoblikuj v vsoto štirih kvadratov !

37. Vsota treh realnih števil je 0. Dokaži, da je vsota kubov teh treh števil enaka trikratnemu produktu teh treh števil.

38. Dokaži, da je za vsako celo število n izraz $(n^3 - n)/6$ celo število!

39. Dokaži, da je za vsako celo število n izraz $n/3 + n^2/2 + n^3/6$ celo število!

40. Dokaži, da je za vsako liho število n število $n^3 + 3n^2 - n - 3$ deljivo z 48.

41. Dokaži, da je za poljubna cela števila a, b in c izraz
$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$
vedno deljiv s 4 !

42. Dokaži, da je produkt štirih zaporednih celih števil, povečan za 1, kvadrat celega števila!

43. Za katere vrednosti spremenljivke x je izraz $1/x$ večji od izraza $1/(x + 1)$?

44. Če sta a in b naravni števili, dokaži, da je $ab(a + b)$ sodo število!

45. Dvomestnemu številu $\overline{ab}$ pripišemo njegovi cifri v nespremenjenem vrstnem redu in tako dobimo štirimestno število $\overline{abab}$. Kolikokrat je dobljeno število večje od prvotnega?

46. O izrazu $a(c - b)/b$ vemo, da je pozitiven. Nadalje vemo, da je med števili a, b in c eno pozitivno, drugo negativno in tretje nič. Katero je pozitivno, katero negativno in katero nič?

47. Dve števili a in $b \neq 0$ zmnoži (ab), nato isti števili deli (a/b) in končno odštej eno od drugega $(a - b)$. Se lahko zgodi, da dobiš pri vseh treh operacijah isti rezultat?

48. Dokaži, da je število oblike $\overline{abcabc}$ deljivo s 7, 11 in 13 !

49. Zmnoži tri zaporedna naravna števila in zmnožku dodaj srednje izmed treh. Kaj dobiš?

50. Dokaži: vsota treh zaporednih naravnih števil je vedno sestavljeno število! Kaj pa, če je sumandov več kot tri?

51. Je izraz $a^2 - b^2$, kjer sta a in b naravni števili, praštevilo ali sestavljeno število?

52. Razlika kvadratov dveh zaporednih števil je 173. Kateri števili sta to?

53. Dokaži, da je razlika kvadratov dveh zaporednih lihih števila deljiva z 8 !

54. Označimo z $\overline{abc}$ trimestno število ($c \neq 0$). Določi množico $M = \{\overline{abc}; \overline{abc} - \overline{cba} = 792\}$!

55. Če dvomestnemu številu prištejem število z obrnjenima ciframa, mora biti vsota deljiva z 11. Razlika obeh števil pa mora biti deljiva z 9 in z razliko cifer. Dokaži obe trditvi!

56. Posploši, če je mogoče, trditvi prejšnje naloge na trimestna števila!

57. Razlika kvadratov dveh zaporednih lihih števil je 48. Kateri sta ti dve števili?

58. Produkt dveh dvomestnih naravnih števil sestoji iz samih štiric (koliko, ne vemo). Kateri sta ti dve števili? Je takih dvojic več?

59. Poišči število z naslednjo lastnostjo: če ga povečamo za a in vsoto kvadriramo, dobimo za $8a$ več, kot če ga zmanjšamo za a in razliko kvadriramo; pri tem je a poljubno število.

60. Dokaži: če zmnožku štirih zaporednih sodih števil dodamo 16, dobimo vedno popoln kvadrat!

61. Med ciframi 1,2,3,4,5,6,7,8 in 9 izberi poljubne tri različne! Z njimi sestavi vsa možna trimestna števila! Ta števila seštej in dokaži, da je dobljena vsota deljiva s 37 in 6 !

62. Ali obstaja dvomestno število z lastnostjo: če kubu desetic prištejemo kvadrat enic, dobimo število samo ?

63. Dokaži, da količnik poljubnega trimestnega števila in vsote njegovih cifer ne more presegati 100 !

64. Dokaži: če so vse cifre trimestnega števila različne od 0, je količnik med številom in vsoto njegovih cifer manjši od 83 !

65. Poišči trimestno število z od 0 različnimi ciframi, pri katerem je količnik med številom in vsoto njegovih cifer večji od 82 !

66. Če med cifri dvomestnega števila vrinemo 0, dobimo trimestno število, ki je devetkrat večje od začetnega dvomestnega števila. Določi to dvomestno število!

67. Če neko število delimo z a, dobimo enako število, kot če iskano število zmanjšamo za a. Katero število je to? Če je a celo število, ali je iskano število celo ali ulomek?

68. Poišči naravni števili, katerih vsota je 168, največji skupni delitelj pa 24 !

69. Dokaži, da je vsota kvadratov petih zaporednih celih števil deljiva s 5, ne pa s 25 !

70. Neko trimestno število je 33-krat večje od vsote svojih cifer. Dokaži, da je to število deljivo z 9 ! Poišči vsa taka trimestna števila!

71. Če kvadrat poljubnega lihega števila zmanjšamo za 1, dobimo število, ki je deljivo z 8. Dokaži!

72. Iz treh cifer trimestnega števila sestavimo vsa mogoča dvomestna števila, ki jih nato seštejemo. Dobljena vsota je trikrat večja od prvotnega trimestnega števila. Katero število je to?

73. Če v nekem ulomku kubiramo števec, imenovalcu pa prištejemo 3, je tak ulomek trikrat večji od iskanega. Poišči ga!

74. Poišči dve taki naravni števili, da bo razlika njunih kvadratov enaka 133 !

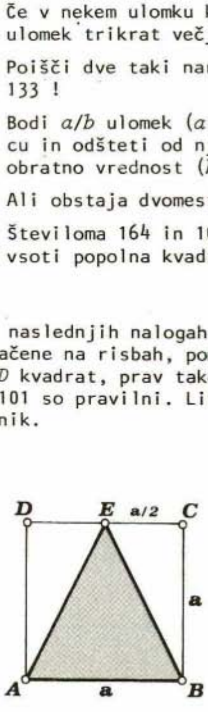
75. Bodi a/b ulomek $(a \neq 0)$. Katero število moramo prišteti njegovemu števcu in odšteti od njegovega imenovalca zato, da pri tem dobimo njegovo obratno vrednost (b/a) ?

76. Ali obstaja dvomestno število, ki je enako produktu svojih cifer?

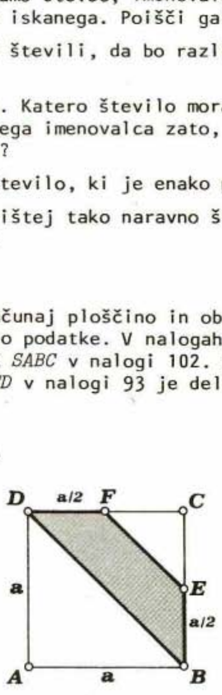
77. Številoma 164 in 100 prištej tako naravno število, da bosta dobljeni vsoti popolna kvadrata!

Pri naslednjih nalogah izračunaj ploščino in obseg narisanih likov! Črke, označene na risbah, pomenijo podatke. V nalogah 78-82 in 86, 94, 103 je lik *ABCD* kvadrat, prav tako lik *SABC* v nalogi 102. Šestkotniki v nalogah 88-90 in 101 so pravilni. Lik *ABCD* v nalogi 93 je deltoid, v nalogi 106 pa pravokotnik.

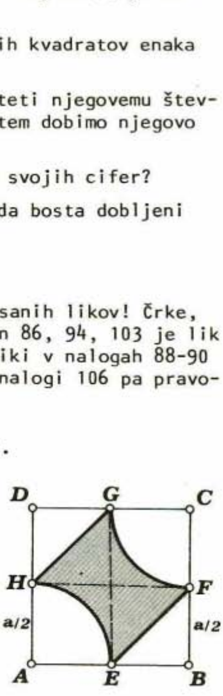
78.



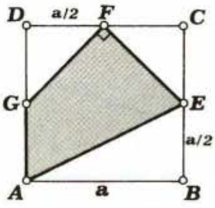
79.



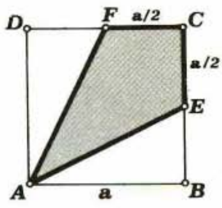
80.



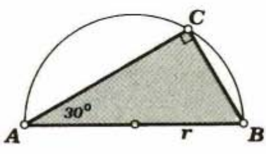
81.



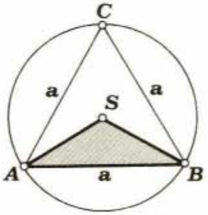
82.



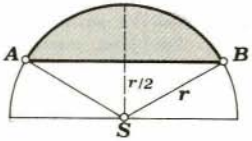
83.



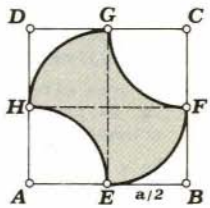
84.



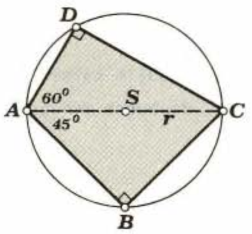
85.



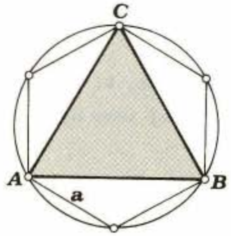
86.



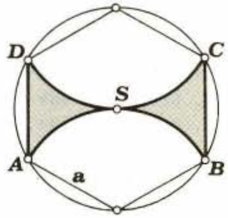
87.



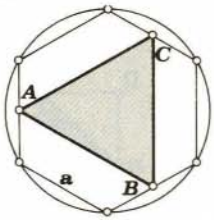
88.



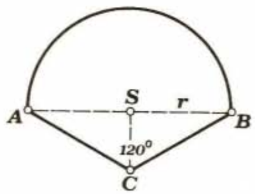
89.



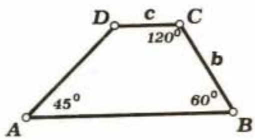
90.



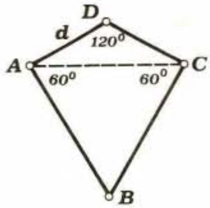
91.



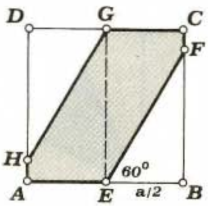
92.



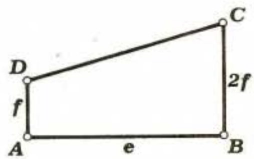
93.



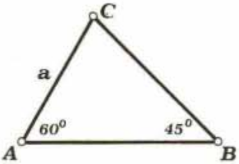
94.



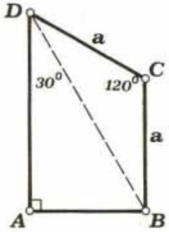
95.



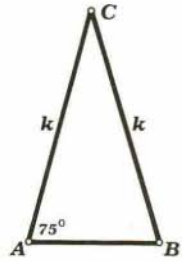
96.



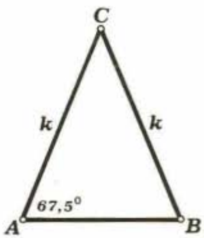
97.



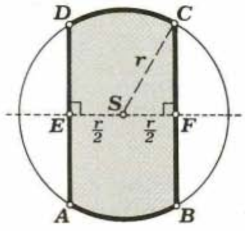
98.



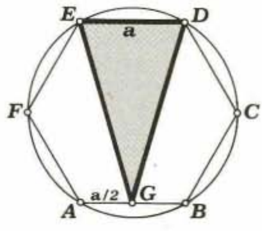
99.



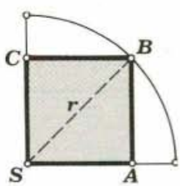
100.



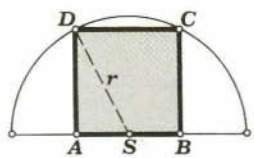
101.



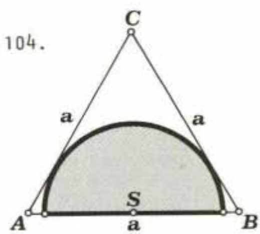
102.



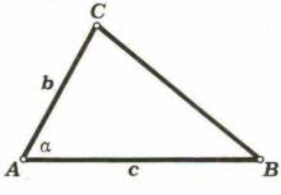
103.



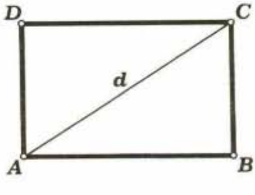
104.



105.

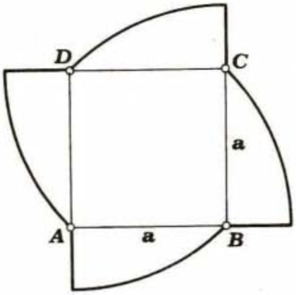


106.



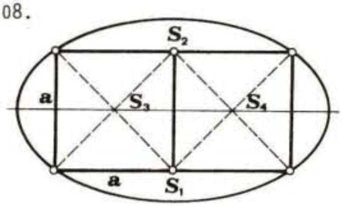
107. Izračunaj ploščino in obseg lika, ki ga sestavljajo kvadrat $ABCD$ s stranico a = 8cm in štirje enaki deli kroga. Polmer kroga je diagonala kvadrata!

107.



108. Izračunaj ploščino in obseg "elipse", očrtane pravokotniku s stranicama $2a$ in a. Središči daljših lokov sta v središčih daljših stranic, krajših lokov pa v sečiščih diagonal kvadratov. (Glej sliko!)

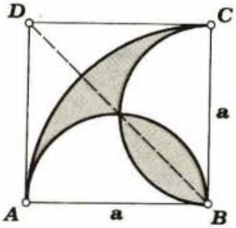
108.



109. Polkrogu s premerom $\overline{AB} = 2r$ izsekamo enakokrak trikotnik ABC s kotom ob vrhu $\sphericalangle C = 120^{\circ}$. Izračunaj obseg in ploščino preostalega dela polkroga!

110. V kvadrat $ABCD$ načrtamo lok AC s središčem v B in polkroga s premeroma AB in BC. Izračunaj obseg in ploščino črtkanega dela, če je stranica kvadrata a = 6cm. (Glej sliko!)

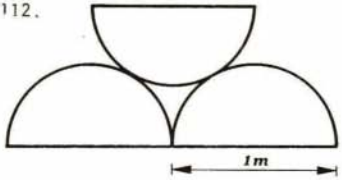
110.



111. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico a = 6cm. Nariši lok AC s središčem v B in lok BD s središčem v A. Kolika sta obseg in ploščina lika, ki ga omejujeta stranica a in dela lokov AC in BD ?

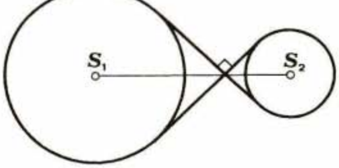
112. Žleb ima v pravokotnem prerezu obliko polkroga s premerom 1m. Kolika je višina skladovnice treh žlebov? (Glej sliko!)

112.



113. Prek dveh koles s polmeroma r_1 = 40cm in r_2 = 20cm teče jermen, tako kot kaže slika. (Jermena se navidezno sekata pod pravim kotom.) Izračunaj:
a) dolžino jermena
b) središčno razdaljo koles!

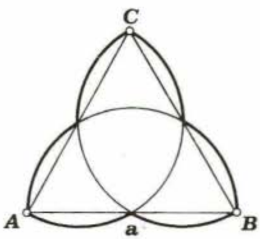
113.



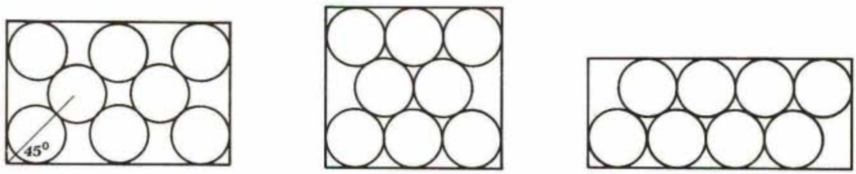
114. V sekstant (šestino kroga) s polmerom r = 9cm včrtaj krog. Izračunaj njegovo ploščino!

115. Vsako oglišče enakostraničnega trikotnika s stranico a naj bo središče krožnice, ki poteka skozi težišče trikotnika. Izračunaj ploščino trilistne rozete, ki jo oklepajo te krožnice!

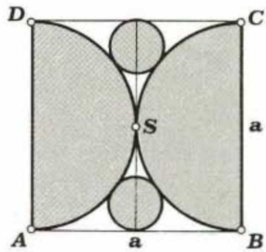
116. Enakostraničnemu trikotniku s stranico a = 4cm narišemo tri polkroge s premerom a in s središčem v središču stranic. Kolik je obseg in ploščina lika? (Glej sliko!)



117. Osem enakih krogov s polmerom 1 cm leži na tri različne načine v pravokotnikih. V katerem primeru je obseg pravokotnika največji in v katerem je najmanjši? (Glej sliko!)



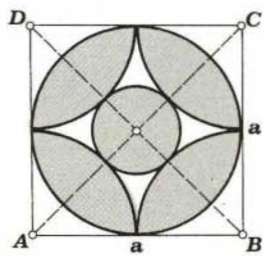
118. Kvadratu *ABCD* s stranico a včrtaj dva polkroga, ki se dotikata s temeni v središču kvadrata *S*. V ostali ploskvi *ABS* in *CDS* včrtaj kroga, ki se dotikata polkrogov in stranice kvadrata. Kolika je ploščina obeh polkrogov in krogov? (Glej sliko!)



119. Kvadratu *ABCD* s stranico a včrtaj lok *AC* s središčem v *B* in lok *BD* s središčem v *A*. Koliki sta ploščina in obseg ploskve med stranico *CD* in krajšima lokoma?

120. Nad nasprotnima stranicama kvadrata sta navzven načrtana polkrog in enakostranični trikotnik. Kolika je ploščina sestavljenega lika, če je razdalja temena polkroga in vrha trikotnika $v = (3 + \sqrt{3})$?

121. Izračunaj ploščino in obseg črtkanih ploskev. če meri stranica kvadrata a = 2dm! (Glej sliko!)



122. Načrtaj enakokrak trikotnik z osnovnico c = 6cm in kotom 120° ob vrhu. Oglišča trikotnika so središča treh krogov, ki se med seboj dotikajo od zunaj. Kolika je ploščina manjšega kroga?

123. Dve različni krožnici $k_1(O_1,R)$ in $k_2(O_2,r)$, kjer je $R > r$, se dotikata od zunaj. Iz središča O_1 krožnice k_1 nariši tangento na krožnico k_2; iz njenega dotikališča A krožnice k_2 pa nariši tangento na krožnico k_1, ki se dotika v točki B. Kolika je razdalja dotikališč tangent AB ?

124. V krog s polmerom R včrtaj tri enake kroge, tako da se med seboj dotikajo. Kolik je polmer r teh krogov?

125. Premici a in b se sekata v točki A pod kotom $30°$. Na premici b je točka B, ki je od točke A oddaljena 4cm. Načrtaj krog, ki se dotika premice a v točki A in gre skozi točko B. Izračunaj obseg in ploščino kroga!

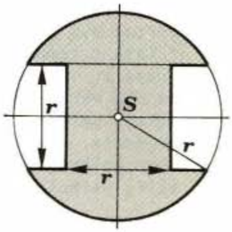
126. V krog s polmerom R včrtaj štiri enake kroge tako, da se zapored dotikajo in da se hkrati dotikajo danega kroga. Izračunaj ploščino včrtanih krogov!

127. Ploščina 7dm širokega kolobarja meri $4{,}18m^2$. Izračunaj notranji in zunanji premer! ($\pi = 22/7$)

128. V kvadrat s stranico a načrtaj štiri enake kroge, ki se dotikajo obeh diagonal in stranice. Izračunaj ploščino krogov!

129. Dan je krog s polmerom r. Kolika je ploščina lika, ki ga omejujeta vzporedni tetivi AB in CD s središčnima kotoma $120°$ in $60°$ ter loka AD in BC? Kolik je obseg tega lika?

130. Slika kaže prerez dvojne T kotve elektromotorja. Koliko cm^2 meri ta presek, če je polmer 10cm? (Glej sliko!)

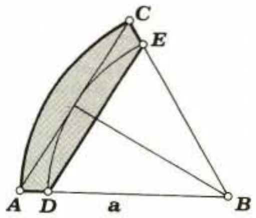


131. Na daljici AB dolžine $3a$ je točka T med točkama A in B, tako da je $\overline{AT} = 2a$. Nariši enakostranična trikotnika ATC in TBD ter zveži oglijšči C in D. Izračunaj ploščino štirikotnika $ABDC$!

132. Dan je pravokotni trikotnik ABC s hipotenuzo $\overline{AB} = 2a$ in $\alpha = 30°$. A je središče krožnega loka s polmerom $\overline{AC}$, ki seče stranico AB v točki E, B pa središče loka s polmerom $\overline{BC}$, ki seče stranico AB v točki D. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo: narisana loka CD in CE ter daljica ED

133. Krogu s polmerom r je včrtan in očrtan enakostranični trikotnik. Kolika je ploščina dela ravnine med trikotnikoma? (Poseben primer: r = 2cm!)

134. V enakostraničnem trikotniku ABC s stranico a narišemo iz oglišča B lok AC in lok DE, ki se dotika stranice AC. Kolika je ploščina lika, ki ga omejujejo lok AC, tetiva DE, odsek AD na stranici AB in odsek CE na stranici BC? (Glej sliko!)



135. V trikotniku ABC je dano: stranica b, kot $\alpha = 60^\circ$ in $\beta = 45^\circ$. Določi obseg in ploščino trikotnika!

136. Pravokotni trikotnik ABC ima stranico $\overline{AB} = c$, $\alpha = 2\beta$, C je vrh pravega kota. Nad katetama tega trikotnika načrtaj navzven enakostranična trikotnika CAE in CBF !
a) Koliko merita stranici AC in BC ?
b) Dokaži, da je $CE \perp BF$!
c) Dokaži, da imata trikotnika CEF in CEA enaki ploščini!
d) Kolika je ploščina štirikotnika $ABFE$?

137. V trikotniku je dana stranica $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = 2c$, $\overline{CA} = (\overline{AB} + \overline{BC})/2$. Kakšen je ta trikotnik (ostrokoten, pravokoten ali topokoten)? Kolika je višina na stranico AB v tem trikotniku?

138. V trikotniku ABC je dano: kot $\alpha = 45^\circ$, kot $\beta = 60^\circ$ in višina na stranico AB, ki je enaka $\overline{CD} = 6$cm. Kolik je obseg trikotnika?

139. V enakokrakem trikotniku ABC je $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\sphericalangle A = 120^\circ$ in $\overline{BC} = a$. Določi $\overline{AB}$ ter polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga!

140. V trikotniku ABC so dane stranice $a = 87$cm, $b = 65$cm, $c = 88$cm. Kolika je v_c in kolika ploščina trikotnika?

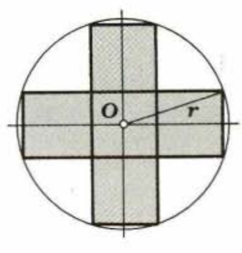
141. Stranici trikotnika sta 21 in $9\sqrt{2}$; kot med njima je 45°. Izračunaj obseg in ploščino trikotnika!

142. Iz vrha pravega kota se po krakih gibljeta dve telesi. Prvo se giblje s 3/4 hitrosti drugega. Po 10 minutah je razdalja med telesoma 100m. Izračunaj hitrost teh teles!

143. V pravokotnem trikotniku ABC, kjer je AB hipotenuza, narišemo iz središča D stranice BC pravokotnico na hipotenuzo, ki jo seka v točki E. Dokaži, da velja relacija $\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AC}^2$!

144. Izrazi polmer pravokotnemu trikotniku včrtanega kroga s stranicami trikotnika a, b in c!

145. V krog s polmerom r je včrtanih 5 enakih kvadratov, kot kaže slika. Kolika je stranica kvadrata?



146. Diagonali trapeza sta pravokotni na kraka trapeza. Kolika je ploščina trapeza, če meri diagonala 20 cm in krak 15 cm ?

147. Izračunaj ploščino štirikotnika $ABCD$, če je $\overline{AB} = 12$cm, $\overline{DA} = 5$cm, $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$.

148. V trapezu z osnovnicama a in c ter višino v zveži središče enega kraka s krajiščema drugega kraka. Izračunaj ploščino nastalega trikotnika ter utemelji rešitev!

149. V kvadrat $ABCD$ s stranico a narišemo loke s polmerom $a/2$ in središči v ogliščih A, B, C in D. V presečišču vsakega loka z diagonalo kvadrata narišemo tangento. Kolika sta obseg in ploščina kvadrata, ki ga omejujejo odseki na tangentah?

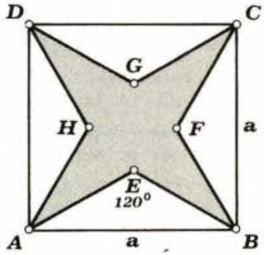
150. Dan je trapez s stranicami $\overline{AB} = 7$cm, $\overline{AD} = 5$cm, $\overline{DC} = 15$cm. Kota z vrhom A in vrhom D sta prava kota. Določi točko M na stranici AD tako, da je ploščina trikotnika MBC 23,5cm^2 !

151. V trapezu $ABCD$ s kotom $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ je diagonala AC pravokotna na stranico BC in razpolavlja kot DAB. Obseg trapeza je 10cm. Izračunaj:
a) dolžino stranice AB
b) ploščino trapeza!

152. Stranica kvadrata je 3cm. Točka T leži na diagonali kvadrata in je od oglišča A oddaljena 1cm. Izračunaj na dve decimalki razdalji $\overline{TB}$ in $\overline{TC}$!

153. V rombu s podatki $a = 4\sqrt{2}$ cm in $\alpha = 45^\circ$ načrtamo iz oglišč A in C loka s polmerom a. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta loka!

154. Iz kvadrata s stranico a izrežemo ob njegovih stranicah enakokrake trikotnike s kotom 120° ob vrhu. Kolika sta obseg in ploščina štirikrake zvezde in koliko merijo notranji koti? (Glej sliko!)



155. Nad stranicami kvadrata ($a = 3$cm) so navzven načrtani enakostranični trikotniki. Zveži zaporedna središča trikotnikov. Kolika je ploščina tako nastalega kvadrata?

156. Na premicah, ki se sekata pod kotom 60°, ležita srednjici paralelograma, katerega stranice so oddaljene od premic 4cm oziroma 3cm. Določi obseg in ploščino paralelograma!

157. V enakokrakem trapezu so dani: stranica c, kot $\alpha = 60^\circ$ in višina $v = 3c$. Določi ploščino, obseg in diagonalo trapeza!

158. V štirikotniku $ABCD$ je $\overline{AB} = 6$dm, $\overline{AD} = 4$dm, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 90^\circ$. Izračunaj diagonali in ploščino štirikotnika!

159. Okrog središča kvadrata s stranico a načrtaj krog tako, da odseka na stranicah kvadrata tetive, ki so enake polmeru kroga. Kolika sta obseg in ploščina lika, ki je skupen krogu in kvadratu?

160. V krog s polmerom r je včrtan enakokrak trapez tako, da je ena stranica premer, višina pa je enaka $r/2$. Dokaži, da je obseg trapeza $o = r(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}})$!

161. Osnovnici enakokrakega trapeza sta 8cm in 6cm, višina pa je 7cm. Kolik je polmer očrtane krožnice?

162. Dan je pravokotnik $ABCD$. Od dveh krogov z istim polmerom r se eden dotika poltraka AB in AD, drugi pa poltraka CD in CB. Določi polmer r teh krogov, če veš, da se dotikata med seboj!

163. Dan je kvadrat $EFGH$ z diagonalo h. Pokaži, da za poljuben enakokrak trapez $ABCD$, katerega središča stranic so oglišča kvadrata $EFGH$, velja
a) $b = d = \sqrt{(a^2 + c^2)/2}$ b) $p = h^2$

164. Izračunaj obseg in ploščino trikotnika ABC s podatki: $\sphericalangle A = 105^\circ$, $\sphericalangle B = 30^\circ$, $\overline{AB} = 20$cm .

165. V kvadrat s stranico a je včrtan kvadrat z oglišči na danih stranicah kvadrata. Kot med stranico danega kvadrata in včrtanega kvadrata je 30°. Kolika sta obseg in ploščina včrtanega kvadrata?

166. Nad stranicami enakostraničnega trikotnika ABC s stranico a nariši enakokrake pravokotne trikotnike. Kolika sta ploščina in obseg tako dobljenega šestkotnika?

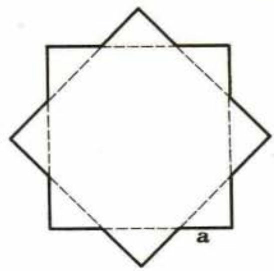
167. Pravilnemu osemkotniku s stranico a očrtamo kvadrat tako, da nasprotni stranici kvadrata vsebujeta vzporedni stranici osemkotnika. Določi stranico očrtanega kvadrata in ploščino osemkotnika!

168. Dan je krog s polmerom r. Kolika sta obseg in ploščina pravilnega osemkotnika, ki je včrtan danemu krogu?

169. Kolika sta obseg in ploščina pravilnega dvanajstkotnika, če je dan polmer očrtanega kroga r ?

170. Najkrajša diagonala pravilnega 12-kotnika je $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; kolika je njegova stranica?

171. Dva skladna kvadrata s stranico a postavimo tako, da se težišči ujemata, medtem ko je diagonala enega vzporedna s stranico drugega. Unija obeh kvadratov je "osemkraka zvezda" (glej sliko). Kolika sta njen obseg in njena ploščina?



172. Dan je romb $ABCD$ s podatki: $\sphericalangle BAD = 60^{\circ}$, $\overline{AB} = 8$cm. Skozi točko M, ki deli stranico AB v razmerju 1:3, nariši daljico MN vzporedno z diagonalo BD danega romba. (Točka N leži na stranici AD.) Kolika je ploščina petkotnika $MBCDN$?

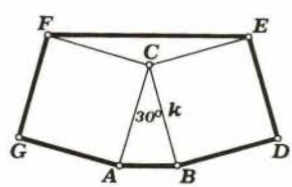
173. V krožni kvadrant (četrtina kroga) s polmerom $r = 25$ je včrtan pravokotnik tako, da je simetrala kvadranta tudi simetrala pravokotnika. Kolike so stranice pravokotnika, če je njihovo razmerje 1:6 ?

174. Dan je kvadrat s stranico a. V njem je včrtan kvadrat tako, da njegova oglišča delijo stranico a v razmerju 1:3. Kolika je ploščina včrtanega kvadrata?

175. Koti trapeza so v razmerju 1:2:4:5. Izračunaj obseg in ploščino trapeza, če je dan krajši krak $k = 2$cm in je enak krajši osnovnici!

176. Na simetrali enakokrakega trapeza določi točko M, iz katere se vidita oba kraka pod pravim kotom. Če leži točka M na srednjici trapeza, pokaži, da je krak trapeza enak njegovi srednjici!

177. Nad krakoma $\overline{AC} = \overline{BC} = k$ enakokrakega trikotnika ABC s kotom ob vrhu 30° načrtamo kvadrata $BDEC$ in $ACFG$. Izračunaj ploščino šestkotnika $ABDEFG$! (Glej sliko!)



178. V pravokotnem trikotniku ABC deli višina na hipotenuzo pravi kot v razmerju 1:2. Krajši odsek na hipotenuzi je dolg 3cm. Izračunaj obseg trikotnika!

179. V pravokotnem trikotniku meri ostri kot 15°. Pokaži, da je njegova hipotenuza štirikrat večja od višine na hipotenuzo!

180. Pravilnemu šestkotniku s stranico a očrtamo enakokrak trikotnik tako, da kraka trikotnika vsebujeta sosednji stranici šestkotnika. Izračunaj obseg in ploščino trikotnika!

181. Za pravokotni trikotnik ABC sta dani kateta a in razlika $d = c-b$ med hipotenuzo c in kateto b. Poišči stranici c in b trikotnika!

182. Dana je krožnica s polmerom r. Izračunaj ploščino v krožnico včrtane šestkrake zvezde!

183. V kvadratu $ABCD$ s stranico $a = \sqrt{3} + 1$ leži na diagonali AC točka T, da je kot $\sphericalangle BTD$ enak 150°. Izračunaj ploščino štirikotnika $ABTD$!

184. Skozi oglišča pravokotnika s stranicama a in b $(a > b)$ so narisane simetrale notranjih in simetrale zunanjih kotov pravokotnika.
   a) Kakšen lik oklepajo simetrale vseh notranjih kotov in kakšen lik oklepajo simetrale vseh zunanjih kotov?
   b) Izrazi ploščino dobljenih likov kot funkcijo stanic a in b !
   c) Kolikšno je razmerje ploščin manjšega in večjega lika, če je $a = 5$cm in $b = 3$cm ?
   č) Kolika je ploščina lika med obema likoma?

185. Premici p in q se sekata pod kotom 60°.
   a) Načrtaj krožnici k_1 in k_2 tako, da se dotikata premic in med seboj!
   b) Izračunaj ploščino trapeza $T_1T_2T_4T_3$, kjer so T_1, T_2, T_3 in T_4 dotikališča premic p in q in krožnic k_1 in k_2 !

186. Krogu s polmerom r očrtaj enakokraki trapez. Velikost kota ob osnovnici je 60°. Izračunaj obseg in ploščino tega trapeza!

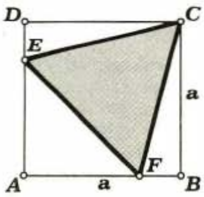
187. Dan je krog s polmerom r. Izberi točko A na krožnici in konstruiraj kot $\sphericalangle A = 30^{\circ}$ tako, da je središče kroga na simetrali kota. Kolika je ploščina lika, ki ga omejujeta krožnica in kot?

188. V krog s polmerom r je včrtan trikotnik s kotoma 15° in 60°. Izračunaj ploščino tega trikotnika!

189. Polkrogu očrtaj enakostranični trikotnik tako, da leži premer kroga na trikotnikovi stranici (načrtovalna naloga). Izračunaj obseg in ploščino trikotnika, če je dan polmer r kroga!

190. Dan je enakostranični trikotnik s stranico a. Načrtaj krog tako, da je stranica trikotnika premer kroga! Kolika je ploščina dela trikotnika, ki ne leži v krogu?

191. V kvadrat s stranico a včrtamo enakostranični trikotnik tako, da se eno oglišče ujema z ogliščem kvadrata, ostali dve oglišči trikotnika pa ležita na stranicah kvadrata (glej sliko). Izračunaj ploščino trikotnika!



192. Izračunaj višino trapeza s podatki: $a = 15$cm, $c = 11$cm, $b = 5$cm in $d = 7$cm !

193. Dan je enakostranični trikotnik s stranico a. Nad vsako stranico nariši enakokrak trikotnik z osnovnico na stranici enakostraničnega trikotnika, kraka pa naj oklepata kot 30°. Izračunaj ploščino te "trikrake zvezde" !

194. V enakostraničnem trikotniku je razlika med dolžino stranice in dolžino višine enaka d. Izrazi ploščino trikotnika z d.

195. Izračunaj ploščino trapeza, če sta dana kota $\alpha = 60^\circ$ in $\beta = 90^\circ$ ter obe osnovnici a in c !

196. V pravokotnem trikotniku je dana kateta a in polmer včrtanega kroga r. Koliki sta kateta b in hipotenuza c ?

197. Poišči vse pravokotnike, pri katerih so obsegi številčno enaki njihovim ploščinam in so dolžine stranic naravna števila!

198. Za enakokrak trapez veš, da se diagonali sekata pravokotno, poznaš polmer R očrtanega kroga in razdaljo d med središčem očrtanega kroga in sečiščem obeh diagonal. Izračunaj ploščino trapeza!

199. Obseg romba je $2k$, vsota njegovih diagonal je m. Kolika je ploščina romba?

200. Koliki sta osnovnica in krak enakokrakega trikotnika, če sta dani višina v in polmer r včrtanega kroga?

201. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico a. Vsako oglišče je središče kroga s polmerom a. Izračunaj ploščino preseka vseh štirih krogov!

202. Krogu s polmerom $r = 1$ je včrtan pravilni osemkotnik. Izračunaj produkt merskih števil vseh stranic in diagonal osemkotnika!

B. NALOGE S TEKMOVANJ ZA UČENCE VII. RAZREDA

071.1 Za koliko se razlikujeta vrednosti izrazov $1/(1 - x + x^2 - x^3)$ in $1/(1 + x + x^2 + x^3)$, če je $x = -1/2$?

071.2 Pri deblih izražamo delež skorje v procentih ploščine presečnega lika. Pri hrastu je delež 18% . Kako debela je skorja, če je premer debla (1/2)m ? (Na mm natančno.)

071.3 Dani so kvadrati s stranicami a_1 = 2cm, a_2 = 3cm, a_3 = 4cm. Načrtaj jih in konstruiraj kvadrat, katerega ploščina je enaka vsoti ploščin vseh treh kvadratov!

071.4 Iz kock z robom 1cm je sestavljena večja kocka z robom 3cm. Površje te kocke je rdeče popleskano. Koliko malih kock:je potrebnih za večjo

a) je potrebnih za večjo kocko?
b) ni popleskanih?
c) ima popleskano eno ploskev?
č) ima popleskani dve ploskvi?
d) ima popleskane tri ploskve?
e) ima popleskane 4 ploskve?

071.5 Izračunaj ploščino štirikotnika $ABCD$ s podatki:
$\overline{AB}$ = 30m, $\overline{BC}$ = 10m, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 120^\circ$!

072.1 V številskem izrazu $7 . 6 + 12 : 3 - 1$ postavi oklepaje tako, da bo vrednost izraza a) 17, b) 27, c) 45, d) 48, e) 69 !

072.2 Za koliko odstotkov se zveča ali zmanjša produkt števil a in b, če prvi faktor za 10% zvečamo, drugega pa za 10% zmanjšamo?

072.3 Vrednost izraza $(m - 3)/(m^2 + 1)$ je lahko pozitivno ali negativno število, pač glede na to, kakšno je število m. Za katera števila m je vrednost izraza pozitivna?

072.4 Notranji kot paralelograma meri 150°, višini paralelograma pa merita v_1 = 4cm in v_2 = 5cm. Izračunaj obseg in ploščino paralelograma!

072.5 Dan je krog s polmerom 1m in središčem S. Točki B in C izberemo na krožnici tako, da je kot $\sphericalangle BSC = 45^\circ$. Tangenta na krog v točki C seka podaljšek daljice SB v točki D. Izračunaj:
a) ploščino trikotnika SDC,
b) ploščino lika, ki ga omejujejo daljica $\overline{CD}$, daljica $\overline{BD}$ in lok $\overline{BC}$,
c) obseg tega lika !

073.1 Za koliko se razlikujeta vrednosti izrazov $1/(3a^2 - 2a + 1)$ in $1/(-a^2 + 2a - 3)$, če je $a = -2$?

073.2 V trikotniku merita stranici 17cm in 25cm, višina na tretjo stranico pa 15cm. Izračunaj obseg in ploščino trikotnika!

073.3 Veriga je sestavljena iz 100 krožnih obročkov. Vsak obroček je izdelan iz 15mm debele okrogle žice. Premer odprtine obročka meri 8cm. Izračunaj dolžino stegnjene verige!

073.4 Pravokotni trikotnik ima kateti a = 24cm in b = 32cm. Ob vsakem oglišču odrežemo od trikotnika izsek kroga s polmerom 10cm. Koliko merita obseg in ploščina dobljenega lika?

073.5 Enaki krožnici s polmerom r se sekata tako, da gre ena skozi središče druge. Izračunaj obseg in ploščino skupnega dela krogov, ki ju omejujeta dani krožnici!

074.1 V izrazu $a + b \cdot c^3$ so izpadli oklepaji. Postavi jih tako, da bo vrstni red operacij naslednji:
- seštevanje, potenciranje, množenje;
- množenje, potenciranje, seštevanje;
- seštevanje, množenje, potenciranje.

Izračunaj vsakič tudi vrednost izraza, če je $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$!

074.2 Števec ulomka je $2a$. Napiši ulomek, če je imenovalec:
- za 6 večji od števca,
- 6-krat večji od števca,
- za 6 manjši od števca,
- 6-krat manjši od števca.

Vsak ulomek okrajšaj!

074.3 Vrednosti izrazov $2n$, $n^2 + 1$, $n^2 - 1$ so dolžine trikotnikovih stranic. Dokaži, da je trikotnik pravokoten!

074.4 Diagonala, ki je hkrati simetrala deltoida, meri 13cm, ena stranica pa 12cm. Vsota kvadratov dveh različnih stranic je 169cm². Kolika je ploščina deltoida?

074.5 Polkrogu s polmerom $r = 1$ včrtamo enakostranični trikotnik, tako da leži ena stranica na premeru, višina pa je enaka polmeru. Koliko odstotkov ploščine polkroga predstavlja ploščina trikotnika?

075.1 Izračunaj: $((-\frac{4}{9})^2 : ((-\frac{2}{3})^3)^2) : (-\frac{3}{4})^2$

075.2 Poišči ulomke z enomestnim imenovalcem, ki so večji od 7/9, toda manjši od 8/9 !

075.3 V enakokrakem trapezu je krajša vzporednica za 12cm daljša od kraka, krak pa je za 22cm krajši od daljše vzporednice. Obseg trapeza meri 86cm. Izračunaj njegovo ploščino!

075.4 Na premici p so take točke A, B in C, ki si slede v napisanem vrstnem redu, da je $\overline{AB} = 2{,}5$cm, $\overline{BC} = 6$cm. V točki A postavi pravokotnico na premico p in določi na njej tako točko M, da je $\overline{AM} = 2$cm; na pravokotnici iz točke C na isti strani premice p določi tako točko N, da je $\overline{CN} = 7{,}5$cm. Pokaži, da je trikotnik MBN pravokoten!

076.1 Poenostavi izraz: $3a^2 - 3b^2 - 6bc - 3c^2$, če je $b + c = a$!

076.2 Za koliko odstotkov se spremeni količnik števil a in b, če deljenec za 20% zvečamo, delitelj pa za 20% zmanjšamo?

076.3 Po načrtu naj bi v tovarni v 25 dneh izdelali 2400 televizorjev, na dan pa so jih naredili 24 več, kot so računali. V kolikšnem času so naredili 2400 televizorjev? Zapiši rešitev kot številski izraz in izračunaj njegovo vrednost!

076.4 Stranica kvadrata meri 1m. Krožnica se dotika dveh njegovih stranic in gre skozi eno njegovo oglišče. Kolik je polmer krožnice?

076.5 Dana sta dva istosrediščna kroga. Tetiva večjega kroga se dotika notranjega kroga in meri 8cm. Izračunaj ploščino kolobarja!

077.1 Dana sta izraza: $7x - 3(3x + y)$ in $11x - 5(3x - 2y)$. Kateri izraz moraš odšteti od drugega izraza, da dobiš razliko, ki je od prvega izraza manjša za izraz $x + y$?

077.2 Podjetje planira povečanje proizvodnje vsako leto za 8%. V prvem letu jim je uspelo povečati proizvodnjo le za 5%. Za koliko morajo povečati proizvodnjo v drugem letu, da dosežejo prvotno postavljeni plan?

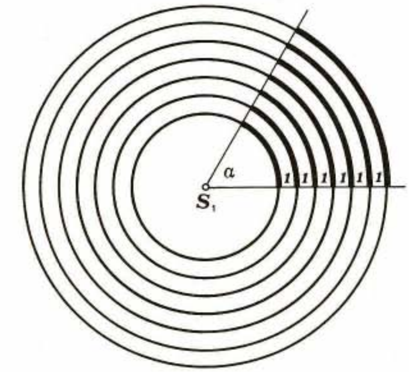
077.3 Iz krožne plošče s polmerom 6 izrežemo 7 največjih možnih skladnih krožnih ploščic. Kolikšen del plošče ostane pri tem neizkoriščen?

077.4 V krogu meri tetiva 2m in je enaka stranici krogu včrtanega kvadrata. Izračunaj ploščino manjšega odseka, ki ga tetiva odreže od kroga!

077.5 Dani sta krožnica k in premica p v isti ravnini, ki krožnice ne seka. Na krožnico k načrtaj tangento, ki tvori s premico p kot $\alpha = 75^\circ$. Postopek opiši!

078.1 Oglišča štirikotnika $ABCD$ so v koordinatni ravnini dana takole: $A(2,1)$, $B(4,1)$, $C(6,8)$, $D(2,8)$. Izračunaj ploščino tega štirikotnika!

078.2 Za katere vrednosti spremenljivke x ima izraz $(4x - 3)(4x + 3) - (3x - 5)^2 - 3(10x - 2)$ vrednost 0 ?



078.3 V trikotniku je prvi kot enak dvema sedminama drugega kota, tretji pa je enak vsoti prvih dveh. Kolikšni so koti tega trikotnika?

078.4 Danih je sedem krožnic s skupnim središčem S_1 in kot α z vrhom v S_1, ki meri 60°. Podatke o dolžini polmerov kaže slika. Vsota dolžin vseh lokov, ki pripadajo središčnemu kotu α, je enaka obsegu največjega kroga K. Določi polmer tega kroga!

078.5 Zapiši število 0,375 z ulomkom a/b tako, da bo vsota števca in imenovalca enaka 374 !

079.1 Uredi po velikosti števila a, $-a$, a^2, $2a$ in a^3, če je $-1 < a < 0$.

079.2 Dokaži: Šestmestno število, v katerem sta si enaki prva in četrta cifra, druga in peta cifra ter tretja in šesta cifra, je deljivo s 7, 11 in 13.

079.3 V paralelogramu $ABCD$ s stranicama 7 in 4 je notranji kot $\sphericalangle A$ manjši od pravega. Simetrala tega kota razdeli paralelogram na dva dela. V kakšnem razmerju sta njuni ploščini?

079.4 Dan je krožni kolobar, ki ga omejujeta krožnici $k_1(S,r)$ in $k_2(S,3r)$. Izračunaj polmer krožnice, ki ima središče S in razdeli ta kolobar na dva ploščinsko enaka dela.

079.5 Dan je pravilni šestkotnik. Z daljicama, ki imata skupno krajišče v izbranem oglišču, razdeli ta lik na tri ploščinsko enake dele!

080.1 V izrazu $a^2 + a + 1$ zamenjaj število a z nasprotnim številom.
a) Za koliko se dobljeni izraz razlikuje od danega?
b) Izračunaj vrednost prvega in drugega izraza, če je $a = -1/3$!

080.2 Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Označi $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$.

a) Nariši vektor $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$!
b) Nariši vektor $\vec{BE}$ in ga izrazi z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$!

080.3 Nariši deltoid $ABCD$ $(\overline{AB} = \overline{BC}, \overline{AD} = \overline{DC})$, ki je dan s podatki: $\overline{BD} = 7\text{cm}$, $\overline{AC} = 5\text{cm}$, $\alpha = 90^\circ$!

080.4 Ugotovi, za katera naravna števila je vrednost ulomka $(n^3 - n^2 + 3)/(n - 1)$ celo število!

080.5 V paralelogramu $ABCD$ je stranica AB dvakrat daljša od stranice BC. Točka R je središče stranice AB. Dokaži, da je daljica CR pravokotna na daljici DR !

081.1 Poišči najmanj tri take ulomke, katerih vrednost se ne spremeni, če števec povečamo za 27, imenovalec pa za 30 !

081.2 V enakokrakem trikotniku je vsota kota ob vrhu in kota ob osnovnici 111°. Izračunaj kota, ki ju oklepa simetrala kota ob osnovnici z višinama na kraka!

081.3 Določi faktorja in zmožek pri naslednjih pogojih:

- če prvemu faktorju dodaš 2/5, se zmnožek poveča za 1 ;
- če drugi faktor zmanjšaš za 1/2, se zmnožek zmanjša za 4/5 .

081.4 Paralelogram $ABCD$ je orientiran v smislu, kot so zapisana oglišča. Njegovi diagonali sta $\vec{e} = \vec{AC}$ in $\vec{f} = \vec{BD}$. Dokaži, da je $\vec{e} - \vec{f} = 2\vec{AB}$!

081.5 Imamo tri kvadrate. Stranica prvega kvadrata je a. Stranica drugega kvadrata je za petino daljša od stranice prvega kvadrata. Stranica tretjega kvadrata je za petino krajša od stranice drugega kvadrata. Koliko odstotkov ploščine prvega kvadrata je ploščina tretjega kvadrata?

082.1 Izračunaj: $$\frac{133\frac{1}{3} \cdot (-0{,}002)(-3)\cdot(-5000)}{-10\frac{33}{80} + (-\frac{1}{5} + (-\frac{1}{2}):0{,}8) : (-2)}$$

082.2 V Južni Afriki živi 4 milijone belcev in 17 milijonov črncev. Belci posedujejo 87% zemlje, črnci so lastniki preostale zemlje. Kolikokrat več zemljišča ima povprečno belec od črnca? (Odgovor zaokroži na celo število.)

082.3 S kombajni so poželi prvi dan $\frac{3}{16}$ polja, drugi dan $2\frac{2}{5}$ krat več kot prvi dan, tretji dan pa preostalih 87 ha. Koliko ha meri polje?

082.4 Dan je krog s središčem S, polmerom r in tetivo AB, ki ne gre skozi središče. Podaljšaj tetivo skozi B za polmer kroga, da dobiš točko C. Premica skozi C in S seka krožnico tudi v točki D, ki je na drugi strani središča kot C. Kolikokrat je $\sphericalangle ASD$ večji od $\sphericalangle ACD$?

082.5 Višina enakostraničnega trikotnika s stranico a je premer krožnice, ki seka dve trikotnikovi stranici. Dokaži, da je dolžina tetive na stranici enakostraničnega trikotnika enaka $(3/4)a$.

Z70.1 Dešifriraj enakost: $\overline{abcd} = (5c + 1)^2$, to je, poišči tako štirimestno število $\overline{abcd}$, ki je enako kvadratu števila $5c + 1$. Črke a, b, c, d so znaki za neznane cifre. Postopek razloži!

Z70.2 Letalo je letelo iz kraja A v kraj B najprej s hitrostjo 180km/h. Na preostali poti, ki je za 320km krajša od že preletene poti, je povečalo hitrost na 250km/h. Tako je bila povprečna hitrost letala na poti od A do B 200km/h. Določi dolžino poti od A do B !

Z70.3 Milan je narisal paralelogram $ABCD$ in označil s točko M središče stranice BC, s točko N središče stranice CD in nato odšel iz sobe. Sestra Nada je na risbi zbrisala vse točke, razen točk A, M in N. Pomagaj Milanu, da risbo obnovi, t.j. določi točke B, C in D !

Z70.4 Kraka trapeza sta 39mm in 45mm, diagonala, dolga 60mm, leži pravokotno na daljši krak. Nariši trapez in izračunaj obseg in ploščino!

Z70.5 Površina pravilne štiristrane piramide je $5a^2$, kjer je a dolžina osnovnega roba piramide.

a) Izrazi prostornino te piramide z a!
b) Izračunaj prostornino piramide za $a = 6$dm !

Z71.1 V sobi je več ljudi, ki znajo vsaj enega od treh tujih jezikov. Šest ljudi govori angleško, štirje nemško, sedem francosko, štirje znajo nemško in francosko, dva francosko in angleško. Eden obvlada vse tri jezike. Koliko ljudi je v sobi? Koliko ljudi zna samo angleški jezik?

Z71.2 Če dvomestnemu številu prištejemo število, ki je napisano z istimi ciframi v obratnem vrstnem redu, dobimo kvadrat nekega naravnega števila. Določi vsa taka dvomestna števila!

Z71.3 Učenec, ki mu je bilo naročeno, da poišče količnik dveh števil, je dobil količnik 74 in ostanek 22. Pri preizkusu je pomnožil količnik z deliteljem, prištel ostanek in dobil 30214. Pri tem se je zmotil in cifro 6 na mestu desetic v delitelju prebral in prepisal kot ničlo. Kolikšen je deljenec in kolikšen je delitelj?

Z71.4 Dan je štirikotnik $ABCD$. Nariši paralelogram $DBCM$! Dokaži, da je ploščina trikotnika ACM enaka ploščini danega štirikotnika $ABCD$!

Z71.5 Dan je trikotnik ABC. Nariši premico p vzporedno stranici AB tako, da je $\overline{AD} + \overline{EB} = \overline{DE}$, kjer je točka D presečišče premice p in stranice AC, točka E pa je presečišče premice p s stranico BC danega trikotnika! Obrazloži!

Z72.1 Člani matematičnega krožka so se dogovorili, da bo v počitnicah vsak napisal po eno razglednico vsem drugim članom. Koliko je bilo članov krožka, če je bilo napisanih 342 razglednic?

Z72.2 Pismene naloge iz matematike ni rešilo 12% učencev, delno je naloge rešilo 32% učencev, pravilne rešitve je imelo 14 učencev. Koliko učencev je bilo v razredu?

Z72.3 Poenostavi izraz $A = |(4a + 5b)^2|^2 - |(4a - 5b)^2|^2 - 160ab(4a - 5b)^2$. Rezultat preveri za $a = 1$ in $b = -2$!

Z72.4 Na isti strani premice $p = (M,N)$ ležita točki A in B. Določi točko P na dani premici tako, da bo kot MPA 2-krat večji od kota NPB !

Z72.5 V kvadrat s stranico a načrtaj drug kvadrat, katerega oglišča ležijo na stranicah danega kvadrata. Kot med stranicama je 30°. Koliki del ploščine danega kvadrata zajema včrtani kvadrat? Izrazi v odstotkih!

Z73.1 Določi najmanjše naravno število, katerega produkt s številom 8316 je kvadrat naravnega števila!

Z73.2 Ceno platna so znižali za 20%. Sedaj dobimo za 240 din 1m platna več, kot smo ga dobili za 270 din. Kolika je bila cena platna pred znižanjem?

Z73.3 Iz krajev A in B, ki sta med seboj oddaljena 250km, sočasno odpeljeta drug proti drugemu dva motociklista. Hitrost enega je za 10km/h večja od hitrosti drugega. Po dveh urah vožnje sta še 30km narazen. Kolika je hitrost vsakega motociklista?

Z73.4 Vsota dvomestnega števila in števila, ki ima isti cifri v obratnem redu, je kvadrat nekega naravnega števila. Poišči vsa taka dvomestna števila!

Z73.5 Dana je krožnica s središčem v O in premerom $\overline{AB} = 4$cm .

a) Nariši tri tangente, od teh dve v točkah A in B; tretjo tangento pa nariši tako, da prvi dve odrežeta na njej odsek $\overline{CD} = 5$cm .
b) Kolik je kot $\sphericalangle COD$?
c) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo odseki tangent in krožnica!

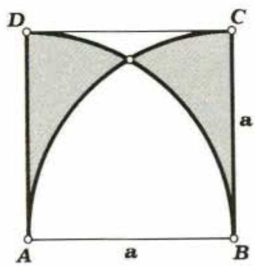
Z74.1 Če neko število delimo s številom 72, dobimo količnik n in ostanek 68. Kolika sta količnik in ostanek, če isto število delimo s 24 ?

Z74.2 Dano je trimestno število. S premeščanjem cifer dobimo različna števila: vsota vseh teh števil je 1998. S katerimi ciframi je zapisano dano trimestno število? Navedi vse primere!

Z74.3 Vsota dveh števil je 135. Kateri sta ti dve števili, če je 35% enega števila enako 28% drugega števila?

Z74.4 Dan je paralelogram $ABCD$. Točka M je središče stranice AB, točka N pa središče stranice CD. Dokaži, da daljici DM in BN delita diagonalo AC na tri enake dele!

Z74.5 Izračunaj ploščino osenčenega dela kvadrata $ABCD$ s stranico a! Središči lokov sta točki A in B .



Z75.1 Vsota šestih zaporednih naravnih števil, od katerih ni nobeno deljivo s 7, je deljiva z 21 in ni deljiva z 42. Dokaži! Določi šest takih števil, tako da bo njihova vsota štirimestno število, ki je kvadrat naravnega števila!

Z75.2 Določi dvomestno število, ki je enako vsoti kuba svojih desetic in kvadrata svojih enic. Drugače povedano: reši enačbo $\overline{ab} = a^3 + b^2$!

Z75.3 Pet poljubnih daljic, ki ne sovpadajo, ima skupno krajišče A. Iz nekega izmed prostih krajišč teh pet daljic (ne iz točke A) je narisanih še pet daljic, in to tako, da njihova prosta krajišča ne sovpadajo s krajišči ostalih daljic. Tako postopek ponavljamo. Nekdo je na koncu risanja naštel 700 prostih krajišč. Ali je pri preštevanju napravil napako?

Z75.4 Dan je romb $ABCD$ s kotom $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Simetrale kotov med diagonalama sekajo stranice romba v točkah M, N, P in Q.

a) Kakšen štirikotnik dobimo?
b) Poišči razmerje odsekov na diagonalah, ki ležijo izven štirikotnika $MNPQ$!

Z75.5 Točka B, ki leži med točkama A in C, razdeli daljico AC dolžine a v razmerju 3:2. Nad AB in BC nariši kvadrata $ABDE$ in $CBFG$ (z različne strani daljice AC). Označi z O in O_1 središči teh kvadratov. V kakšnem razmerju sta ploščina štirikotnika OO_1CD in ploščina kvadrata s stranico AC ?

Z76.1 Morska voda vsebuje 5% soli (glede na težo). Koliko kg destilirane vode je treba zmešati s 40 kg morske vode, da bo dobljena zmes vsebovala 2% soli?

Z76.2 Poišči tak najmanjši ulomek, s katerim je treba deliti ulomke 8/15, 12/35 in 20/21, da bo količnik v vseh treh primerih naravno število!

Z76.3 Krožnici k_1 in k_2 se dotikata zunej v točki A. Premica skozi točko A seče krožnico k_1 še v točki M in krožnico k_2 še v točki N. Dokaži, da sta tangenti t_1 in t_2 na krožnici k_1 in k_2 z dotikališči M in N vzporedni!

Z76.4 Dokaži, da imajo vsi kvadri, katerih površina (v cm^2) in prostornina (v cm^3) je izražena z istim številom, isto vsoto obratnih vrednosti dolžin treh robov, ki se stikajo v istem oglišču!

Z76.5 Izberimo katerokoli število z 2000 ciframi, ki je deljivo z 9. Vsoto cifer tega števila označimo z a, vsoto cifer števila a z b, vsoto cifer števila b pa s c. Določi ta c !

Z77.1 V vrsti stoji 1000 učencev. Dovoljeno je, da zamenjata svoji mesti učenca, ki imata istega soseda. Ali je možno, da s takimi zamenjavami mest pride učenec, ki je v začetku stal na enem koncu vrste, na drugi konec? Obrazloži odgovor!

Z77.2 Zmnožek štirih zaporednih sodih naravnih števil je 13440. Določi ta števila!

Z77.3 Delavci Andrej, Boris in Cene opravijo neko delo skupno v 1 uri. Znano je, da bi vsak izmed njih sam potreboval za to delo celo število ur. Vemo še tudi, da dela Boris hitreje od Andreja, toda počasneje od Ceneta. V kolikem času bi vsak delavec sam opravil to nalogo?

Z77.4 Višina trapeza meri 6cm, ena od osnovnic pa 4cm. Notranja kota ob tej osnovnici merita 120° in 135°.

a) Načrtaj ta trapez!
b) Izračunaj obseg in ploščino trapeza!

Z77.5 Dan je trikotnik, katerega stranice merijo 3cm, 4cm in 5cm. Ali obstaja v njegovi notranjosti točka, ki je od vsake stranice oddaljena manj kot 1cm ?

Z78.1 Dokaži, da je $7^{10000} - 1$ deljivo z 10 !

Z78.2 Nad stranicama AB in BC paralelograma $ABCD$ nariši kvadrata $AEFB$ in $BGHC$. Dokaži, da je daljica GF skladna z eno izmed diagonal paralelograma $ABCD$!

Z78.3 Dvojna ploščina pravilnega šestkotnika je enaka trikratni ploščini enakostraničnega trikotnika. Določi razmerje obsegov šestkotnika in trikotnika!

Z78.4 V raznostraničnem trikotniku ABC je višina iz vrha C na stranico AB enaka vsoti dolžin drugih dveh višin. Izrazi dolžino stranice AB kot funkcijo dolžin drugih dveh stranic! Nato dokaži, da ne obstaja trikotnik opisane vrste, v katerem je $\overline{BC} = 6$ in sta tudi dolžini drugih dveh stranic naravni števili!

Z78.5 V kvadratni mreži 100 krat 100 je bilo vpisanih deset tisoč števil. Označimo z a_1 vsoto števil iz prve vrste, z a_2 vsoto števil iz druge vrste itd., z a_{100} vsoto števil iz stote vrste. Podobno označimo vsote posameznih stolpcev z $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$. Določi številčno vrednost izraza:
$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_{100} - b_{100})$!

Z79.1 Strelec strelja v tarčo in dobi za vsak uspešen zadetek 5 točk, za vsak zgrešen strel pa se mu odbijejo 3 točke. Ker je imel strelec očitno slab dan, je dosegel po seriji strelov, ki jih je bilo več kot 10 in manj kot 20, natanko 0 (nič) točk. Koliko strelov je bilo v seriji in koliko je bilo uspešnih?

Z79.2 Naravno število a ni deljivo s številom 5. Dolči ostanek, ki ga dobimo pri deljenju števila a^4 s številom 5 (pet)!

Z79.3 Izračunaj vrednost izraza:

$$A = \frac{1.2.4 + 2.4.8 + 3.6.12 + \ldots + 100.200.400}{1.3.9 + 2.6.18 + 3.9.27 + \ldots + 100.300.900}$$

Z79.4 V raznostraničnem štirikotniku $ABCD$ se sekata diagonali AC in BD v točki O. Ploščini trikotnikov ADO in BCO sta enaki. Dokaži, da je dani štirikotnik trapez!

Z79.5 Nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika je načrtan kvadrat, ki ne vsebuje vrha pravega kota danega trikotnika. Dokaži, da poteka simetrala pravega kota danega trikotnika skozi središče kvadrata!

Z80.1 Mati je šla po nakupih in je vzela s seboj denarne bone v vrednosti po 15 in 20 din. Petino denarja je porabila za zajtrk, ki ga je plačala z 2 bonoma. Za polovico preostalega denarja je kupila živež in ga plačala s 3 boni. Kolika je skupna vrednost bonov. ki jih je vzela s seboj?

Z80.2 Števila a, b, c in d izpolnjujejo pogoj: $a^2 + d^2 - 2(ab + bc + cd - - b^2 - c^2) = 0$. Dokaži, da je $a = b = c = d$!

Z80.3 Dokaži, da je produkt dveh zaporednih naravnih števil deljiv z 12, če je večje izmed obeh števil kvadrat nekega naravnega števila!

Z80.4 Dan je poljuben štirikotnik $ABCD$. Naj bodo točke M, N, P, Q, R in S zaporedoma razpolovišča daljic AB, BC, CD, DA, AC in BD. Dokaži, da se premice (M,P), (N,Q) in (R,S) sekajo v isti točki!

Z80.5 Dana je premica p, izven nje na istem bregu premice točki A in B. Točka C je zrcalna slika točke A glede na premico p. Sečišče premic p in (B,C) je točka D. Naj bo E poljubna točka premice p, različna od točke D. Dokaži, da je obseg trikotnika ABD manjši od obsega trikotnika ABE !

Z81.1 Določi neznano cifro v zapisu števila $401512x$, tako da bosta ostanka pri deljenju tega števila s 3 in s 5 enaka!

Z81.2 V nepolni posodi je 85-odstotna raztopina alkohola. Če posodo napolnimo do vrha z 21-odstotno raztopino alkohola, vse to dobro premešamo, odlijemo toliko tekočine, kolikor smo je dolili, in posodo zopet napolnimo do vrha z 21-odstotno raztopino alkohola, dobimo raztopino, ki ima 70% alkohola. Koliki del posode je bil napolnjen pred dolivanjem?

Z81.3 Po najnovejšem popisu prebivalstva živi v 5990 naseljih SR Slovenije 1 883 746 prebivalcev. Dokaži, da sta v SR Sloveniji vsaj 2 naselji z enakim številom prebivalcev!

Z81.4 V trikotniku ABC je $v_a \cdot v_b / v_c = c$, pri čemer so v_a, v_b, v_c dolžine višin in c dolžina stranice trikotnika. Izračunaj enega izmed kotov tega trikotnika!

Z81.5 Naj bodo A, B in C takšne točke v ravnini, da je za vsako točko M te ravnine izpolnjen vsaj eden od naslednjih dveh pogojev: $d(A,M) \leq d(B,M)$ in $d(A,M) \leq d(C,M)$. (Z $d(A,M)$ je označena razdalja med točkama A in M.) Dokaži, da leži točka A na daljici BC !

Z82.1 Učenci A, B, C in D so tekmovali v teku. Vsak med njimi je napovedal vrstni red na cilju; učenec A: $ABCD$, učenec B: $BACD$, učenec C: $CBDA$ in učenec D: $DCBA$. Po tekmi se je izkazalo, da nihče ni napovedal pravega vrstnega reda. Le eden med njimi je uganil mesto enega samega tekmovalca. Kakšen je bil pravi vrstni red na cilju?

Z82.2 Določi ostanek pri deljenju števila 3^{100} s 13 !

Z82.3 Točke M, N in O ne ležijo na isti premici. Konstruiraj kvadrat $ABCD$ tako, da točka M leži na premici AB, točka N leži na premici CD in je točka O presek diagonal kvadrata!

Z82.4 V ostrokotnem trikotniku ABC so nožišča višin oglišča trikotnika DEF. Dokaži, da so višine trikotnika ABC hkrati simetrale kotov trikotnika DEF !

Z82.5 V danem četverokotniku so trije koti topi. Dokaži, da je med diagonalama večja tista, ki vsebuje oglišče z ostrim kotom!

R81.1 Peter naj bi prinesel iz trgovine za 50 din krompirja. Krompir pa se je podražil za 25%. Za koliko odstotkov manj krompirja je dobil Peter, kot je pričakoval?

R81.2 Dan je veččlenik: $P(x) = 4x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 4$. Pokaži, da je vrednost veččlenika za vsak $x \in N$ sodo število!

R81.3 Poišči najmanjše naravno število, s katerim moramo pomnožiti število 2520, da dobimo kvadrat nekega naravnega števila.

R81.4 Tangenti iz točke T, ki leži izven kroga, razdelita krožnico k na dva loka. Kolikšen kot oklepata tangenti, če je krajši od teh dveh lokov 3/10 krožnice k ?

R81.5 Točka O je središče trikotniku ABC včrtanega kroga. Premica skozi O, ki je vzporedna stranici BC, seče daljico AB v točki P in daljico AC v točki Q . Dokaži, da je: $\overline{PQ} = \overline{BP} + \overline{QC}$!

R82.1 Zjutraj je delavec odrezal 2/5 kabla. Ko je dopoldne od ostanka kabla odrezal še tretjino, mu je ostalo 8m kabla. Kolika je dolžina vsega kabla? (Reši z enačbo.)

R82.2 Trimestni števili sta zapisani s številkama abc in cba. Pokaži, da je njuna razlika deljiva z 11 !

R82.3 Jože in Boris sta ob istem času odšla v šolo. Jožetov korak je bil za 10% krajši od Borisovega, vendar je Jože v istem času napravil 10% več korakov kot Boris. Kateri od dečkov je prišel prej v šolo?

R82.4 Nariši krožnici k_1 (S_1,r) in k_2 (S_2,r). Središče S_2 leži na krožnici k_1 . Presečišče krožnic označi z A in B. Skozi točko A nariši premico p, ki seka krožnico v točkah C in D. Dokaži, da je trikotnik DBC enakostraničen!

R82.5 Anica, Branka, Vera, Gabrijela in Danica so ožje sorodnice. Brankina babica, ki je ena od njih, je Daničina sestra, a Danica je Gabrijelina teta. Aničina sestra, ki je ena od njih, je Brankina mati. V kakšnem sorodstvu sta Branka in Vera?

C. NASVETI IN REŠITVE

1. $31^{11} < 34^{11} - (2.17)^{11} = 2048.17^{11}$
$17^{14} = 17^{11}.17^{3} = 4913.17^{11}$
Torej je $31^{11} < 17^{14}$.

2. Če velja enakost, je $7^{100} = 8^{100} - 3^{100} = (8 - 3)(8^{99} + ... + 3^{99}) = 5.k$
Število 7^{100} pa ni deljivo s 5. Torej enakost ne velja.

3. $a = \frac{p + 8}{p} = 1 + \frac{8}{p}$ je naravno število natanko tedaj, ko p deli 8:
$p \in \{1,1,4,8\}$, $a \in \{9,5,3,2\}$.

4. $\frac{1}{1.2}$ $\frac{1}{2.3}$ $\frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots +$
$+ (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

5. Vsota $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$ je deljiva s 3.

6. Števila so urejena po velikosti takole $2a < a < a^3 < -a$.

7. Ker je $x^2 + 1$ vselej večje od 0, je to res natanko tedaj, ko je $2x - 1 < 0$, torej $x < \frac{1}{2}$.

8. $\frac{1}{1 + a} > 1 \iff 1 + a < 0$ in $1 + a > 0$, torej pri $-1 < a < 0$.

9. a) $a/c > b/c$ b) $a/d < b/d$

10. Je mogoče!
a) Če je $b < 0$. b) Če je $b = 0$.
c) Npr. če je $a = -1$, $b = -1$ in $c = -1$.
č) Npr. če je $a = 0$, $b = 0$ in $c = 0$.

117 Pravilni izjavi sta a) in č). Izjavi b) in c) nista pravilni, saj je npr. za $a = -2$ in $b = -4$ res $a^2 < b^2$, medtem ko ni res $a < b$ in je za $a = -4$ in $b = -2$ res $a < b$, medtem ko ni res $a^2 < b^2$.

12. a) Za $a > 0$, b) za $a > 0$,
c) za $a \neq 0$, c) za $a < 0$.

$a + b^3 = a^2 + b^3 \iff a = 0$ ali $a = 1$
$a + b^3 < b^2 + b^3 \iff a < 0$ ali $a > 1$
$a + b^3 > a^2 + b^3 \iff 0 < a$ in $a < 1$

14. Izraz je pozitiven, če je minusov sodo mnogo . Število $k + (k - 1) + (k - 2) = 3(k - 1)$ mora biti sodo. To pa bo res, če je k liho število. $k = 3, 5, 7, 9, ...$

15. Izraz je pozitiven, če je $k + 1 + k + k + 3 = 3k + 4$ sodo število. To je res le, če je k sodo število. $k = 2, 4, 6, ...$

16. a) 43, b) -7/36, c) 0,9, č) 13/4, d) 1, e) -3/2

17. a) a^{15}, b) x^{48}, c) x^{12a-8}, č) $(r - 2s)/6$.

18. $a = -10$, $b = -5$, $0{,}001a^3b^3 = 125$

19. a) $a \geq -3$, b) $a \geq 3$, c) $a \leq 3$, č) $a \geq \sqrt{3}$ ali $a \leq -\sqrt{3}$, d) $-\sqrt{3} \leq a \leq +\sqrt{3}$,
e) $b \geq 0$, f) $b \leq 0$, g) vsak b, h) $b = 0$, i) vsak m, j) vsak n,
k) $x \geq 5$, l) $-3/4 \leq y \leq 3/4$.

20. $\left(\sqrt{(1+\sqrt{a})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{a})^2}\right)^2 = \begin{cases} 4, & \text{če je } 0 \le a \le 1 \\ 4a, & \text{če je } 1 < a \end{cases}$

21. a) $2\sqrt{2}$ b) 0

22. 2

23. $a = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

24. Če vzamemo na primer za $a = 2$, postane $A = 7$, medtem ko postane $B = -13$. Izraza sta različna!

25. $a^7 - 14a^5 + 49a^3 - 36a$

26. a) $8a^4 - 2a^2 + 1$; preizkus: 7.
b) $-4a^2b^2$: preizkus: -4.
c) $-0{,}36a^4$; preizkus: $-5{,}76$

27. Zmanjša se za 4%.

28. $x = 25$. Če m zmanjšamo za 25% in n povečamo za 25%, se kvocient m/n zmanjša za 40%.

29. Na primer $f(x) = 1 - x$ ali pa $f(x) = 1 - x^2$.

30. a) $f(-3) = -47$, $f(0) = 16$.
b) $f(0{,}5) = 0$, $f(-3/4) = 35/8$.

31. $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = -1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,-2) = 51$.

32. a) $f(2 + \sqrt{5}) = 5 + \sqrt{5}$
b) $g(a + 1) = a^2 + a + 1$, $g(1/a) = 1 - 1/a + 1/a^2$
c) $h(\sqrt{2}) = -3(1 + \sqrt{2})$, $h(h(\sqrt{2})) = 31 + 27\sqrt{2}$

33. $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$
$x^6(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) =$
$(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)$

34. $(a^8 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) + 1 =$
$(a^8 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a^2 - 1) + 1 =$
$(a^8 + 1)(a^4 + 1)(a^4 - 1) + 1 =$
$(a^8 + 1)(a^8 - 1) + 1 = a^{16} - 1 + 1 = a^{16}$

35 $(a - b)^2 + (a + b)^2$

36. $(x + a/2)^2 + (y + a/2)^2 + (z + a/2)^2 + (u + a/2)^2$

37. Naj bo $x + y + z = 0$. Torej je $z = -(x + y)$ in $z^3 = -(x + y)^3 = -x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$ Od tod dobimo: $x^3 + y^3 + z^3 = -3x^2y - 3xy^2 = -3xy.(x + y) = -3xy(-z) = 3xyz$.

38. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$ je produkt treh zaporednih celih števil. Eno med temi tremi števili je gotovo deljivo s 3 in vsaj eno med njimi je sodo. Zato je število $n^3 - n$ deljivo s 6 in je $(n^3 - n)/6$ celo število.

39. Vsoto preoblikujemo $n/3 + n^2/2 + n^3/6 = n(n + 1)(n + 2)/6$. V števcu je produkt treh zaporednih celih števil, ki je vedno deljiv s 6. Izraz je celoštevilčen.

40. Če je n liho število, ga lahko zapišemo v obliki $n = 2k + 1$, kjer je k celo število. To upoštevamo v izrazu, ki ga preoblikujemo v $8k(k + 1)(k + 2)$. Ker je $k(k + 1)(k + 2)$ produkt treh zaporednih naravnih števil, je deljiv s 6. Celotni izraz je tedaj deljiv z $8 \cdot 6 = 48$.

41. Izraz poenostavimo v obliko: $4(ab + bc + ac)$.

42. $(n - 2)(n - 1)n(n + 1) + 1 = (n^2 - n - 1)^2$.

43. $\frac{1}{x} > \frac{1}{x + 1}$, če je $\frac{1}{x(x + 1)} > 0$, kar je isto kot $x(x + 1) > 0$. Obstajata dve možnosti:

a) $x > 0$. Takrat sta oba faktorja pozitivna in tak je tudi njun produkt.
b) $x < -1$. Takrat sta oba faktorja negativna in produkt je pozitiven.

44. Če je a sod ali b sod (ali oba), je zmnožek seveda sod. Preostane primer, ko sta a in b oba liha. Toda takrat je $(a + b)$ sodo število in prav tak je ves izraz.

45. $\overline{abab} = 10^3a + 10^2b + 10a + b = 10^2(10a + b) + 10a + b = (10a + b)(10 + = (10a + b)(10^2 + 1) = 101 \cdot \overline{ab}$. Odgovor je 101-krat.

46. a ne sme biti 0, ker bi sicer izraz sam bil 0. b tudi ne sme biti enak 0, saj bi bil v tem primeru izraz sam nesmiseln (deljenje z nič!). Sledi, da je $c = 0$. Toda takrat se izraz poenostavi v $-a$. Izraz je torej pozitiven za $a < 0$, $b > 0$ in $c = 0$.

47. Če naj bo $ab = a/b$, mora biti $b = +1$ ali $b = -1$ ali pa je $a = 0$. V prvem primeru je produkt enak a. Ta ne more biti enak razliki $a - 1$ za noben a. V drugem primeru ($b = -1$) je rezultat enak $-a$. Razlika $a - (-1) = a + 1$ je enaka $-a$, če je $a = -1/2$. Rešitev je torej $(-1/2, -1)$. V tretjem primeru ($a = 0$) je produkt enak 0. Zato je razlika $0 - b = 0$ in $b = 0$, kar ni res!

48. $\overline{abcabc} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10b + c = 10^3(10^2a + 10b + c) +$

$+ 10^2a + 10b + c = (10^3a + 10b + c)(10 + 1) = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

49. $(n - 1)n(n + 1) + n = n(n^2 - 1) + n = n^3 - n + n = n^3$
Odg.: kub srednjega izmed njih.

50. $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$, sestavljeno število, ker je vedno deljivo s 3. Tudi če je sumandov več kot tri, je vsota sestavljena. Če je število sumandov liho $(2s + 1)$, je vsota $(n - s) + (n - s + 1) + (n - s + 2) + \ldots + (n - 1) + n + (n + 1) + \ldots + (n + s - 2) + (n + s - 1) + (n + s) = n + n + n + \ldots + n + n + n + \ldots + n + n + n = (2s + 1)n$. Podoben je dokaz za primer, ko je število sumandov sodo.

51. Razstavimo: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Če je $a - b = 1$, je izraz enak $a + b$ oz. $2a - 1$, liho število, ki je lahko praštevilo ali ne. Če pa je $a - b \geq 2$, je izraz prav gotovo sestavljeno število.

52. $(n + 1)^2 - n^2 = 173$, od koder $2n + 1 = 173$ in $n = 86$, $n + 1 = 87$.

53. Po krajšanju dobimo $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$.

54. $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 792$, odkoder $99a - 99c = 792$ in $a - c = 8$. a je torej 9, c pa 1. Za b ni omejitev.
$M = \{901, 911, 921, 931, 941, 951, 961, 971, 981, 991\}$.

55. a) $10m + n + 10n + m = 11(m + n)$.
b) $10m + n - 10n - m = 9(m - n)$.

56. a) $100m + 10n + r + 100r + 10n + m = 101m + 20n + 101r$. To število pa ni splošno deljivo z 11.

b) $100m + 10n + r - 100r - 10n - m = 99m - 99r = 9\ 11\ (m - r)$. Tudi tukaj je torej razlika deljiva z 9 in z razliko cifer. Še več: deljiva je tudi z 11.

57. $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 48$, od koder $8n = 48$ ali $n = 6$. Števili sta 13 in 11.

58. Ker je $10 \leq \bar{ab} \leq 100$ in $10 \leq \bar{cd} < 1000$, je tudi $100 \leq \bar{ab}\cdot\bar{cd} < 10000$. Možnosti sta torej dve:
A) $\overline{ab}\cdot\overline{cd} = 444$. Ker je $444 = 2^2\cdot3\cdot37$, je edini možni razcep $12\cdot37$.
B) $\overline{ab}\cdot\overline{cd} = 4444$. Ker je $4444 = 2^2\cdot11\cdot101$, se 4444 ne da razstaviti v dva dvomestna faktorja.
Rešitev je torej ena sama: 12 37.

59. $(x + a)^2 - (x - a)^2 = 8a$, odkoder $4ax = 8a$ in $x = 2$.

60. $16(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 16 = 16(n^2 + 2n)(n^2 - 1) + 16 = (n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1)\cdot16 = [4(n^2 + n - 1)]^2$.

61. Naj bodo a, b in c izbrane cifre. Število, sestavljeno iz njih, je $100a + 10b + c$. Takih različnih števil je šest. Cifra a nastopa dvakrat na mestu stotic, dvakrat na mestu desetic in dvakrat na mestu enic. K vsoti torej prispeva $222a$. Isto velja za ostali cifri. Vsota je zato

$$S = 222(a + b + c) = 2\cdot3\cdot37\cdot(a + b + c)$$

in je deljiva s 6 in 37. S čim še?

62. Bodita m in n cifri iskanega števila.

$$10m + n = m^3 + n^2$$
$$m(10 - m^2) = n(n - 1)$$

Ker so vsi ostali faktorji nenegativni, mora tak biti tudi $(10 - m^2)$. To skrči vse možnosti na tri:
a) $m = 1$, $9 = n(n - 1)$
b) $m = 2$, $12 = n(n - 1)$
c) $m = 3$, $3 = n(n - 1)$

$n(n - 1)$ pomeni produkt dveh zaporednih naravnih števil. Tak produkt dobimo le v primeru b), od koder sledi $n = 4$. Število z zahtevanimi lastnostmi torej obstaja in je eno samo: 24.

63. Pa recimo, da je $100a + 10b + c > 100(a + b + c)$. Odtod bi sledilo $90b + 99c < 0$. Ker sta b in c obe nenegativni, je to nemogoče. Sledi trditev naloge.

64. Recimo, da obstajajo a, b in c, tako da je $100a + 10b + c \geq 83(a + b + c)$ oziroma da je $17a \geq 73b + 82c$. Leva stran je $\leq$ od $17\cdot9$, desna $\geq$ od $73 + 82$. Zato $17\cdot9 \geq 17a \geq 73b + 82c \geq 73 + 82$ ali $153 \geq 17a \geq 73b + 82c \geq 155$, kar je nesmisel.

65. Naj bo $\overline{abc}$ število z opisano lastnostjo. Tedaj velja $100a + 10b + c > 82(a + b + c)$, t.j. $18a > 72b + 81c$. To pa gre le, če je $a = 9$ in $b = c = 1$. Edino število z opisano lastnostjo je 911. Količnik je $911/11 = 82,\overline{81}$.

66. Iz pogoja naloge dobimo $100a + b = 9(10a + b)$ oziroma $5a = 4b$. Za števila med 1 in 9 je ta enačba rešljiva le, če je $a = 4$ in $b = 5$. Edino število z zahtevanimi lastnostmi je zato 45.

67. Ker z a delimo, mora biti $a \neq 0$. Velja $\frac{x}{a} = x - a$, torej $x(a - 1) = a^2$. Če je $a = 1$, se enačba glasi $x \cdot 0 = 1$ in ni rešljiva. Če pa $a \neq 1$, dobimo rešitev $x = \frac{a^2}{a - 1}$.
Pišimo $\frac{a^2}{a - 1} = \frac{(a^2 - 1) + 1}{a - 1} = a + 1 + \frac{1}{a - 1}$. To je celo število le, če je $a - 1 = 1$ ali -1. V drugem primeru bi bil $a = 0$, kar ni res. Torej je x celo število samo pri $a = 2$.

68. Iskani števili označimo s $24x$ in $24y$, kjer sta si števili x in y tuji. Iz pogoja $24x + 24y = 168$ dobimo $x + y = 7$. Če se ne oziramo na vrstni red seštevancev, lahko število 7 zapišemo kot vsoto dveh naravnih števil na tri načine: $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. V vseh treh vsotah sta si seštevanca tuja, tako da so rešitve tri: 24 in 1444, 48 in 120 ter 72 in 96.

69. Vsota S je enaka (tu je n celo število):
$(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5(n^2 + 2)$.
S je torej deljiva s 5. S 25 pa bo deljiva le, če bo $(n^2 + 2)$ deljivo s 5. To pa se zgodi le, če je zadnja cifra n^2 enaka 3 ali 8. Noben kvadrat celega števila pa se ne končuje s 3 ali 8. Sledi, da S ni deljiva s 25.

70. Bodi N iskano število: $N = 100a + 10b + c = 3 \cdot 11 \cdot (a + b + c)$. Od tod vidimo, da mora N biti deljiv s 3. Toda tedaj je tudi vsota cifer $a + b + c$ deljiva s 3. Sledi, da je N deljiv z 9 in vsota cifer tudi. Ta je zato 9, 18 ali 27. Ker pa je N deljiv z 11, mora biti $a + c = b$. (Lahko bi pokazali, da možnost $a + c = b + 11$ odpade). Zato je $a + b + c = 2$, sodo število. Sledi, da je $a + b + c$ lahko samo 18, N pa $33 \cdot 18 = 594$.

71. $(2n - 1)^2 - 1 = 4n(n - 1)$. Ker sta n in $n - 1$ dve zaporedni števili, je njun produkt vedno sodo število. Celoten izraz je tako deljiv z 8.

72. $(10a + a) + (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + b) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b) + (10c + c) = 3(100a + 10b + c)$ oziroma $10c + b = 89a$. Ker je leva stran neenačbe ≤ 99, sledi, da je $89a \leq 99$. To pa je možno le za $a = 1$. Sledi, da je $c = 8$ in $b = 9$. Število samo pa je 198.

73. $\frac{a^3}{b + 3} = 3\frac{a}{b}$, od koder sledi $b(a^2 - 3) = 9$. b mora biti delitelj števila 9 in je zato lahko -1, -3, -9, 1, 3 ali 9. Z vstavljanjem ugotovimo, da je samo za $b = 9a$ celo število, in sicer ± 2. Iskani ulomek je zato $\pm\frac{2}{9}$.

74. $x^2 - y^2 = 133$ oziroma $(x + y)(x - y) = 133$. To nam da dve možnosti:

a) $x + y = 19$
$x - y = 7$
Reš. (13, 6)

b) $x + y = 133$
$x - y = 1$
Reš. (67, 66).

75. $\frac{a + x}{b - x} = \frac{b}{a}$, odkoder $a^2 - b^2 = -x(a + b)$. Če je $a + b \neq 0$, lahko s tem izrazom delimo in dobimo $x = b-a$. Če pa je $a + b = 0$, je prvotni ulomek enak -1, njegova obratna vrednost prav tako -1 in je lahko x katerokoli celo število, različno od b.

76. $10a + b = ab$, odkoder $10a = b(a - 1)$. Ker je desna stran manjša od $9(a - 1)$, sledi $10a \leq 9(a - 1)$. Ker pa je $10 > 9$ in $a > a - 1$, to ne more biti res. Števila s predpisanimi lastnostmi torej ni.

77. $164 + x = a^2$
$100 + x = b^2$
Naravni števili a in b zadoščata pogojem: $a > b$, $a > 12$, $b > 10$ in $a + b > 22$. Če gornji enačbi odštejemo, dobimo $a^2 - b^2 = 64$, $(a + b)\cdot(a - b) = 64$. Od vseh možnih razcepov števila 64 prihajata zaradi gornjih pogojev v poštev le $64\cdot 1$ in $32\cdot 2$. Od teh samo drugi da za rešitev naravni števili, in sicer $a = 17$ in $b = 15$, tako da je $x = 125$.

78. $o = a(1 + \sqrt{5})$
$p = \frac{a^2}{2}$

79. $o = a(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2})$
$p = \frac{3}{8}a^2$

80. $o = a(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2})$
$p = \frac{a^2}{8}(6 - \pi)$

81. $o = \frac{a}{2}(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$
$p = \frac{a^2}{2}$

82. $o = a(1 + \sqrt{5})$
$p = \frac{a^2}{2}$

83. $o = r(3 + \sqrt{3})$
$p = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$

84. $o = a(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$
$p = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

85. $o = r(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3})$
$p = r^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$

86. $o = \pi a$
$p = \frac{a^2}{2}$

87. $o = r(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$
$p = r^2(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$

88. $o = 3a\sqrt{3}$
$p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

89. $o = 2a(\frac{2\pi}{3} + 1)$
$p = a(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3})$

90. $o = \frac{9}{2}a$
$p = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$

91. $o = r(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \pi)$
$p = r^2(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2})$

92. $o = \frac{b}{2}(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}) + 2c$
$p = \frac{b^2}{8}(3 + \sqrt{3}) + \frac{bc\sqrt{3}}{2}$

93. $o = 2d(1 + \sqrt{3})$
$p = d^2\sqrt{3}$

94. $o = a(5 - \sqrt{3})$
$p = a^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{4})$

95. $o = e + 3f + \sqrt{e^2 + f^2}$
$p = \frac{3ef}{2}$

96. $o = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$
$p = \frac{a^2}{8}(\sqrt{3} + 3)$

97. $o = \frac{a}{2}(7 + \sqrt{3})$
$p = \frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

98. $p = \frac{1}{4}k^2$

99. $p = \frac{1}{4}k^2 \cdot \sqrt{2}$

100. $o = 2r(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$

$p = r^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$

101. $p = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$

$o = a(1 + \sqrt{13})$

102. $o = 2r\sqrt{2}$

$p = \frac{r^2}{2}$

103. $o = \frac{8}{5}r\sqrt{5}$

$p = \frac{4}{5}r^2$

104. $o = \frac{a}{4}\sqrt{3}(\pi + 2)$

$p = \frac{3\pi a^2}{32}$

105. $p = \frac{bc}{4}$ (za 30° in 150°)

$p = \frac{bc\sqrt{2}}{4}$ (za 45° in 135°)

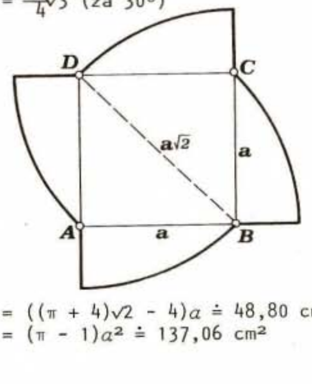
$p = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$ (za 60° in 120°)

106. $p = \frac{d^2}{4}\sqrt{2}$ (za $22{,}5^\circ$)

$p = \frac{d^2}{4}$ (za 15°)

$p = \frac{d^2}{4}\sqrt{3}$ (za 30°)

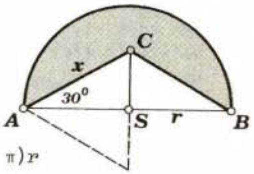
107.



$o = ((\pi + 4)\sqrt{2} - 4)a \doteq 48{,}80$ cm
$p = (\pi - 1)a^2 \doteq 137{,}06$ cm^2

108. $o = \frac{3\pi\sqrt{2}}{2}\,a \quad p = \frac{5\pi - 2}{4}\,a^2$

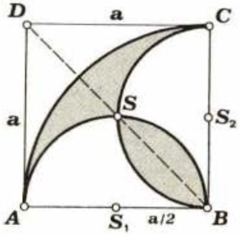
109.



$o = (\frac{4\sqrt{3}}{3} + \pi)r$

$p = \frac{3\pi - 2\sqrt{3}}{6}\,r^2$

110.

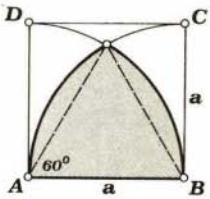


$o = \frac{3\pi a}{2} \doteq 28{,}27$ cm

$p = \frac{(\pi - 2)}{4}\,a^2 \doteq 10{,}27$ cm^2

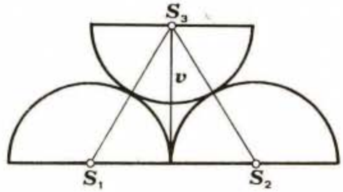
111. $o = (\frac{2\pi}{3} + 1)a \doteq 18{,}57$ cm

$p = (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})a^2 \doteq 22{,}11$ cm^2

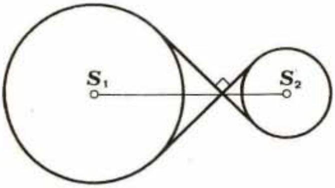


112.

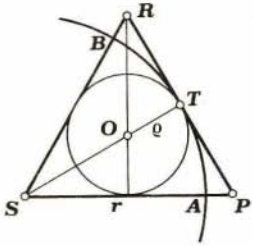
$v \doteq 0{,}87$ m



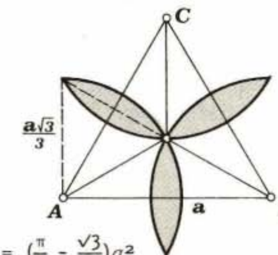
113.
$s = (\frac{3\pi}{2} + 2)(r_1 + r_2) \doteq 402.7$ cm
$c = \sqrt{2}(r_1 + r_2) \doteq 84,9$ cm



114.
$p = \frac{4\pi r^2}{9} \doteq 28,27$ cm

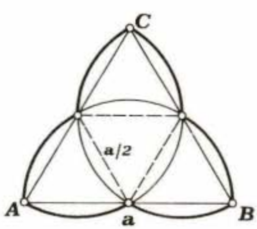


115.



$p = (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})a^2$

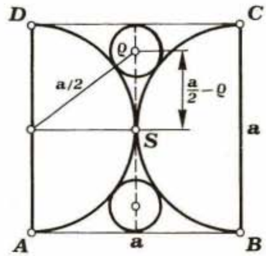
116.



$p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6((\frac{a}{2})^2\frac{\pi}{6} - (\frac{a}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{4})$
$p = \frac{2\pi - \sqrt{3}}{8}a^2 \doteq 9,1$ cm²
$o = \pi a \doteq 12,6$ cm

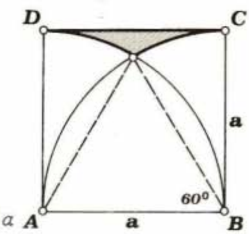
117. Na vsaki risbi poišči enakostranični (enakokraki) trikotnik, ki ga dobiš, če zvežeš nekatera središča krogov. Iz trikotnikovih stranic izračunaj obsege posameznih pravokotnikov in jih primerjaj!

118.



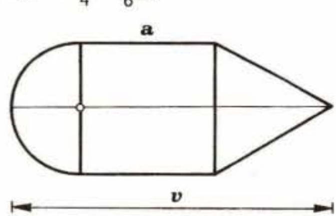
$(\frac{a}{2} + \rho)^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2} - \rho)^2$
$\rho = \frac{a}{8}$
$p = \frac{a^2\pi}{4} + 2\pi(\frac{a}{8})^2 = \frac{9a^2\pi}{32}$

119.



$o = (\frac{\pi}{3} + 1)a$
$p = (1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6})a^2$

120.



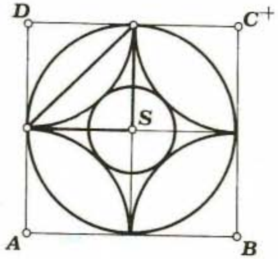
$$a = \frac{2v}{3 + \sqrt{3}} = 2$$

$$p = (1 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{8})a^2 \doteq 7,3$$

121.

$$p = ((\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2})\pi - 1)a^2 \doteq$$
$$\doteq 2,82\ \mathrm{dm}^2$$

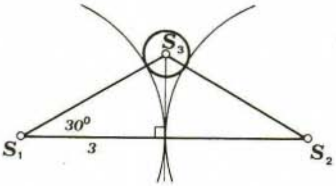
$$o = (1 + \sqrt{2})\pi a \doteq 15,17\ \mathrm{dm}$$



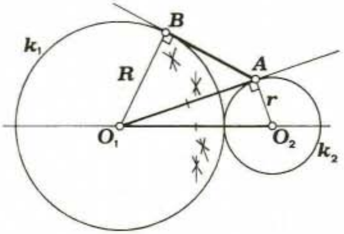
122.

$r = (2\sqrt{3} - 3)$ cm

$p = \pi(21 - 12\sqrt{3})$ cm²



123.



Iz trikotnika O_1O_2A dobimo:

$$\overline{O_1A}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_2A}^2 =$$
$$= (R + r)^2 - r^2 = R^2 + 2Rr$$

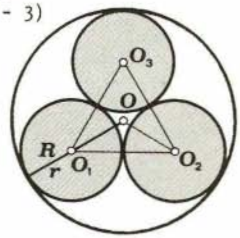
Iz pravokotnega trikotnika dobimo

$$AB = \sqrt{R^2 + 2Rr - r^2} = 2Rr$$

$$R = r + \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

$$r = R(2\sqrt{3} - 3)$$

124.

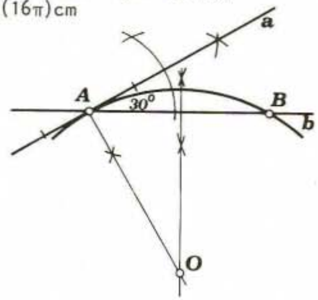


125.

A je dotikališče tangente a kroga, AB pa tetiva kroga. Sečišče pravokotnice na a v točki A in simetrale tetive AB je središče kroga.

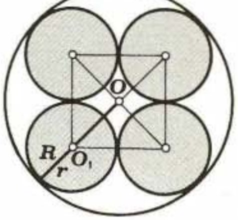
$r = AB = 4$cm $o = (8\pi)$cm²

$p = (16\pi)$cm



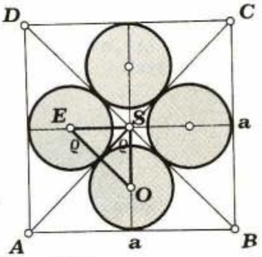
126.

$$p = (12 - 8\sqrt{2})\pi R^2$$



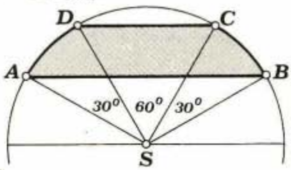
127. 12 dm; 26 dm

128.



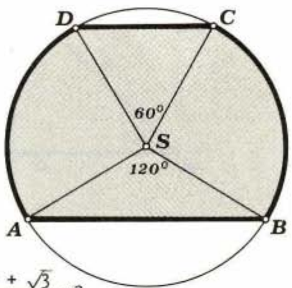
$p = (3 - 2\sqrt{2})\pi a^2$

129.



$p = \frac{\pi r^2}{6}$

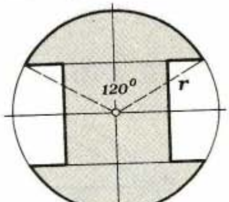
$o = (\frac{\pi}{3} + 1 + \sqrt{3})r$



$p = \frac{\pi + \sqrt{3}}{2}\, r^2$

$o = (\pi + 1 + \sqrt{3})r$

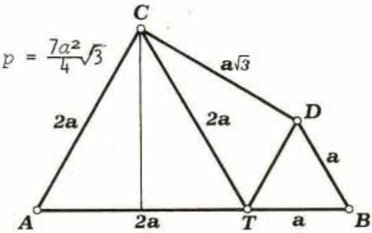
130.



$p = r^2(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) \doteq 223$ cm

131.

$p = \frac{7a^2}{4}\sqrt{3}$

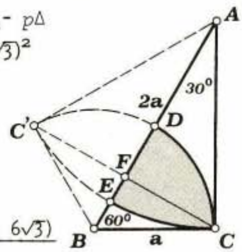


132. Ploščino iskanega lika CDE dobimo tako, da od vsote ploščin izsekov AEC in BCD odštejemo ploščino $\Delta\ ABC$.

$p = p_1 + p_2 - p\Delta$

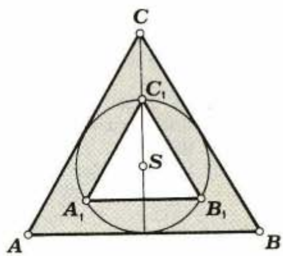
$p_1 = \frac{1}{12}\,\pi(a\sqrt{3})^2$

$p_2 = \frac{1}{6}\,\pi a^2$



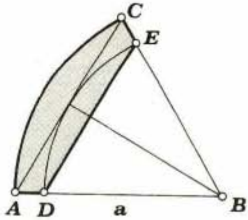
$p = \frac{a^2(5\pi - 6\sqrt{3})}{12}$

133.



$p = \frac{9r^2\sqrt{3}}{4} = (9\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2 \doteq 15{,}6\ \mathrm{cm}^2$

134.



Določiti je treba razliko ploščin krožnega izseka in enakostraničnega trikotnika, katerega stranica je višina prvotnega trikotnika.

$$p = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$$

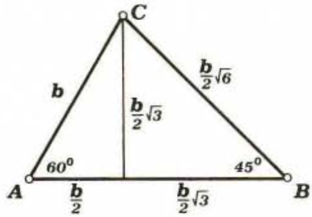
135.

$$a = \frac{b}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} = \frac{b\sqrt{6}}{2}$$

$$c = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$o = \frac{b}{2}(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

$$p = \frac{b}{8}\ (\sqrt{3} + 3)$$



136. a) $\overline{AC} = \frac{c}{2}$, $\overline{BC} = \frac{c}{2}\sqrt{3}$

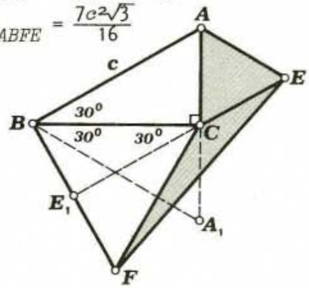
($\alpha = 60°$, $\beta = 30°$)

b) $CE \perp BF$, ker je kot ECA enak kotu CBF in je $AC \perp BC$

c) Višina tikotnika CEF na osnovnico CE je enaka $\frac{c\sqrt{3}}{4}$.

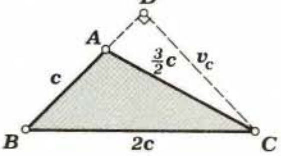
$$p_{CEF} = p_{CEA} = \frac{c^2\sqrt{3}}{16}$$

d) $p_{ABFE} = \frac{7c^2\sqrt{3}}{16}$



137.

Kvadrat največje stranice je večji od vsote kvadratov drugih dveh stranic. Trikotnik je topokoten.



$\overline{AD} = x$

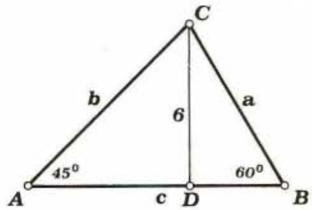
$\overline{CD} = \sqrt{\frac{9}{4}c^2 - x^2}$ in

$\overline{CD} = \sqrt{4c^2 - (c + x)^2}$

$$\frac{9}{4}c^2 - x^2 = 4c^2 - (c + x)^2$$

$$x = \frac{3}{8}c, \quad \overline{CD} = \frac{3c}{8}\sqrt{15}$$

138. $o = 6(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$ cm



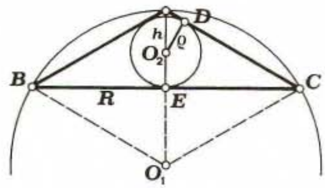
139.

$R = \overline{AB} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $h = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

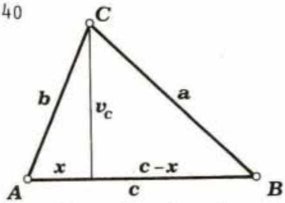
Trikotnik AO_2D je polovica enakostraničnega trikotnika s stranico $\overline{AO_2} = h - \rho$

$$\overline{O_2D} = \rho = \frac{(h - \rho)\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho = \frac{a}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{3})$$

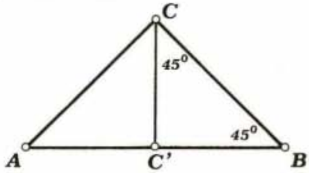


140



$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$
$x = 25$ cm
$v_c = 60$ cm
$p = 2640$ cm²

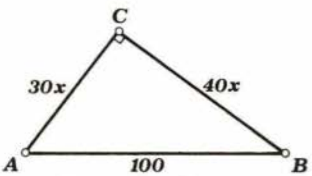
141.



Naj bo: $\overline{AB} = 21$, $\overline{BC} = 9\sqrt{2}$ in
$\measuredangle B = 45^\circ$. Potem je:
$\overline{CC'} = \overline{BC'} = 9$
$\overline{AC'} = 12$, $\overline{AC} = 15$

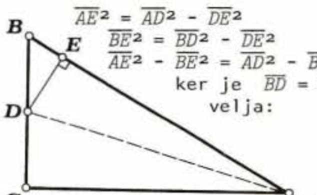
$o = 9(4 + \sqrt{2})$, $p = 94{,}5$

142.



$v_1 = 3x, \quad v_2 = 4x$
$s_1 = 3x \cdot 10 = 30x$
$s_2 = 4x \cdot 10 = 40x$
$(30x)^2 + (40x)^2 = 100^2$
$v_1 = 6$m/min, $v_2 = 8$m/min

143.

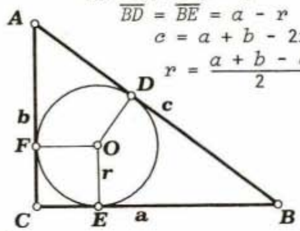


$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DE}^2$
$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DE}^2$
$\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$
ker je $\overline{BD} = \overline{CD}$,
velja:

$\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$

144.

$\overline{AD} = \overline{AF} = b - r$
$\overline{BD} = \overline{BE} = a - r$
$c = a + b - 2r$
$r = \dfrac{a + b - c}{2}$

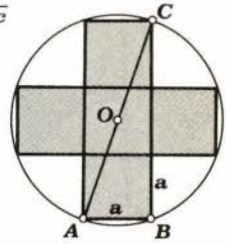


ali

$2p = ar + br + cr = ab$
$r = \dfrac{ab}{a + b + c}$

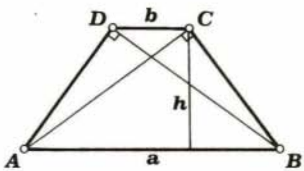
145.

$a = \dfrac{r\sqrt{10}}{5}$

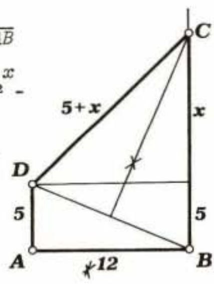


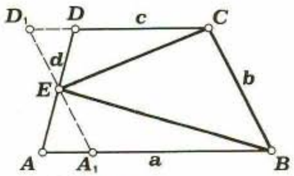
146.

$a = 25$ cm $\qquad p_{ABC} = 150$ cm²
$h = 12$ cm $\qquad b = 7$ cm
$p = \dfrac{(a + b) \cdot h}{2} = 192$ cm²



147. $p = \dfrac{\overline{BC} + \overline{DA}}{2} \cdot \overline{AB}$
$\overline{BC} = \overline{CD} = 5 + x$
$12^2 = (5 + x)^2 -$
$- x^2$
$x = 11{,}9$ cm
$p = 131{,}4$ cm²

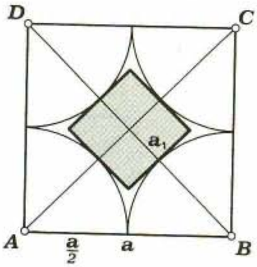


148. 

$p_{ABCD} = p_{A_1BCD_1}$

(trapez, paralelogram)

$p_{BCE} = \frac{1}{2}p_{ABCD} = \frac{(a + c)v}{4}$

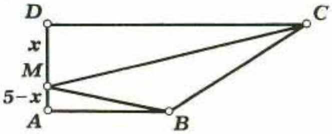
149. 

a_1 je stranica kvadrata

$a_1 = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$

$o \ = 4a(\sqrt{2} - 1)$

$p \ = a^2(3 - 2\sqrt{2})$

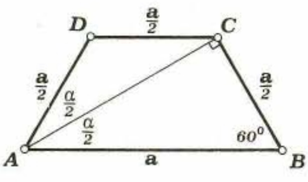
150. 

$$\frac{(5 - x)\cdot 7}{2} + 23{,}5 + \frac{15}{2}x = $$
$$= \frac{7 + 15}{2}\cdot 5$$

$x = 3{,}5$

$\overline{MD} = 3{,}5$ cm, $\overline{MA} = 1{,}5$ cm

151.



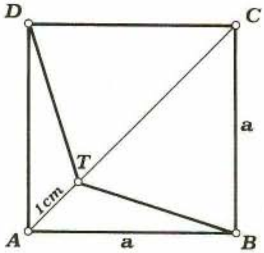
$\overline{AB} = a = 4$ cm

$p = 3\sqrt{3}$ cm²

152.

$\overline{TC} = (3\sqrt{2} - 1)$ cm $\doteq 3{,}24$ cm

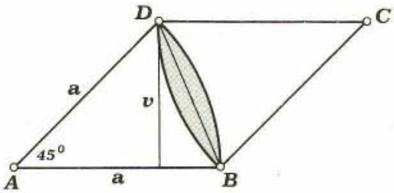
$\overline{TB} = (\sqrt{10} - 3\sqrt{2})$ cm $\doteq 2{,}40$ cm



153.

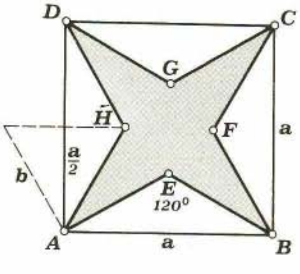
$p = 2\cdot\left(\frac{a^2\pi\alpha}{360°} - \frac{av}{2}\right) \quad v = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$p = 8(\pi - 2\sqrt{2})$ cm²

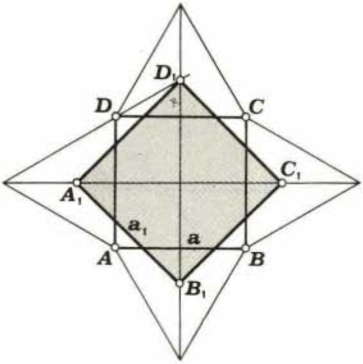


154.

$o = \frac{8a\sqrt{3}}{3}$, $p = a^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$



155.

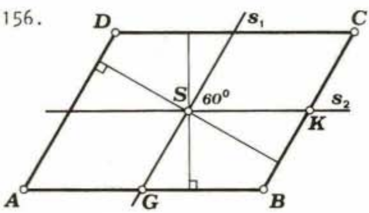


$d = \overline{A_1C_1} = a + 2\cdot \frac{a}{6}\sqrt{3} =$

$= a(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$

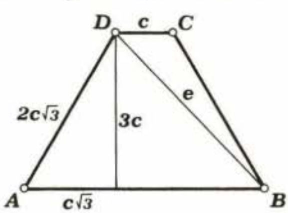
$p = \frac{d^2}{2} = \frac{a^2(2 + \sqrt{3})}{3} \doteq 11{,}20\ \text{cm}^2$

156.



$o = \frac{56\sqrt{3}}{3}$ cm, $p = 32\sqrt{3}$ cm²

157.



$a = 2c\sqrt{3} + c \quad b = d = 2c\sqrt{3}$

$v = 3c$

$p = \frac{2c\sqrt{3} + 2c}{2} \cdot 3c$

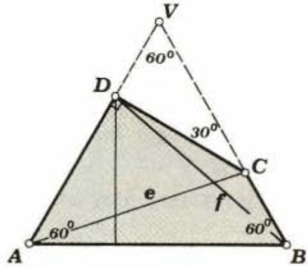
$p = 3c^2(\sqrt{3} + 1)$

$o = 2c(3\sqrt{3} + 1) \qquad e = f$

$e^2 = (3c)^2 + (c\sqrt{3} + c)^2$

$e = c\sqrt{13 + 2\sqrt{3}}$

158.

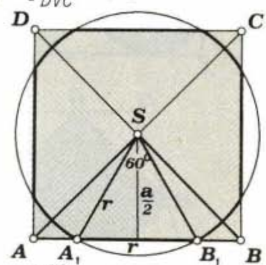


$\overline{BD} = 2\sqrt{7}$ dm

$\overline{AC} = 2\sqrt{7}$ dm

$p = p_{ABV} - p_{DVC} = 7\sqrt{3}$ dm

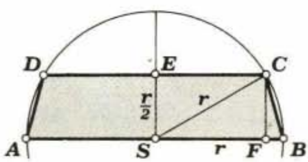
159.



$p = \frac{a^2}{9}(\pi + 3\sqrt{3})$

$o = \frac{a\sqrt{3}}{9}(2\pi + 12)$

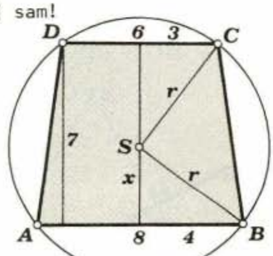
160.



$\overline{CE} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, $\overline{BC} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Nadaljuj sam!

161.



$\overline{SB} = \overline{SC}$

$(7 - x)^2 + 3^2 = r^2 = x^2 + 4^2$

$x = 3, \quad r = 5$

162.

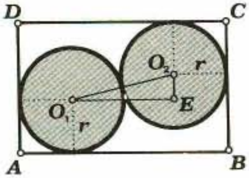
Po Pitagorovem izreku dobimo:

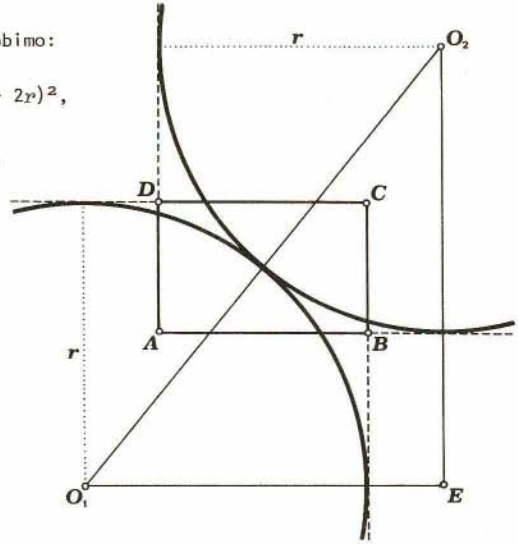
$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1E}^2 + \overline{O_2E}^2$ ali

$(2r)^2 = (a - 2r)^2 + (b - 2r)^2$,

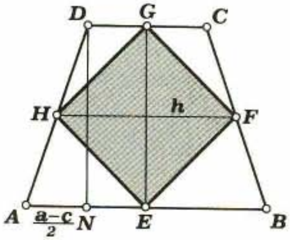
odtod $r = \dfrac{a + b \pm \sqrt{2ab}}{2}$

(2 rešitvi; glej sliko!)





163.



$h = \dfrac{a + c}{2}$ (h je srednjica in hkrati višina trapeza)

Iz trikotnika AND dobimo:

$b^2 = \left(\dfrac{a + c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a - c}{2}\right)^2$

a) $b = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{2}}$ b) $p = h^2$

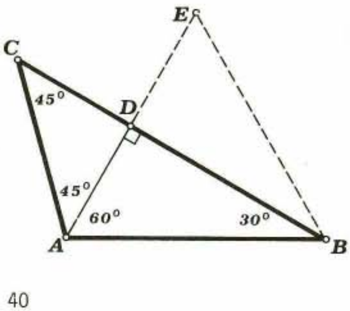
164. $\overline{BD} = 10\sqrt{3}$

$\overline{DC} = 10$

$\overline{AC} = 10\sqrt{2}$

$o = 10(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$

$p = 50(1 + \sqrt{3})$

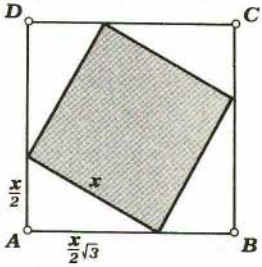


165.

$x = \dfrac{2a}{\sqrt{3} + 1} = a(\sqrt{3} - 1)$

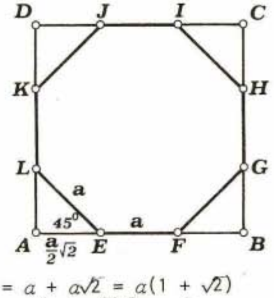
$o = 4a(\sqrt{3} - 1)$

$p = a^2(\sqrt{3} - 1)^2 = a^2(4 - 2\sqrt{3})$

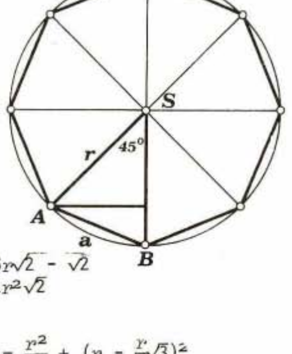


166. $p = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3a^2}{4}$

$p = \dfrac{a^2}{4}(\sqrt{3} + 3)$, $o = 3a\sqrt{2}$

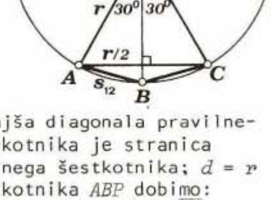
167. 

$a_1 = a + a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2})$
$p = a^2(1 + \sqrt{2})^2 - a^2 =$
$= 2a^2(1 + \sqrt{2})$

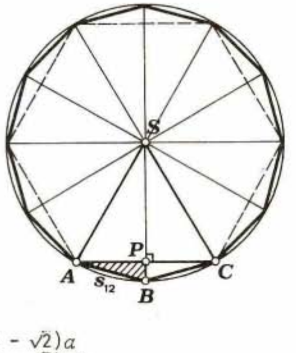
168. 

$o = 8r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
$p = 2r^2\sqrt{2}$

169.
$s_{12}{}^2 = \frac{r^2}{4} + (r - \frac{r}{2}\sqrt{3})^2$
$s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
$o = 12r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
$p_{12} = 12 \cdot \frac{r \cdot \frac{r}{2}}{2} = 3r^2$

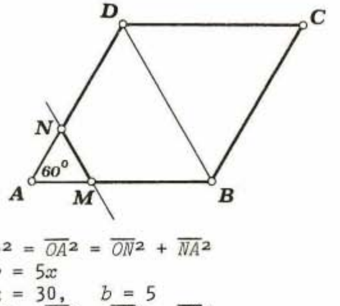


170. Najkrajša diagonala pravilnega 12-kotnika je stranica pravilnega šestkotnika; $d = r$
Iz trikotnika ABP dobimo:
$s_{12} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$
$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1$

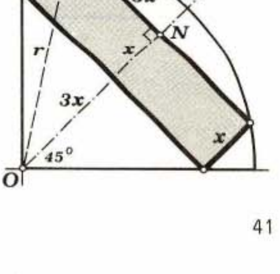


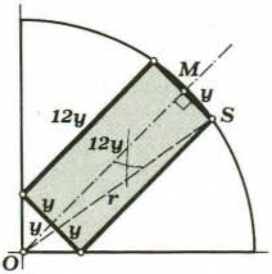
171. $o = 8(2 - \sqrt{2})a$
$p = 2(2 - \sqrt{2})a^2$

172.
$p = p_{ABCD} - p_{AMN}$
$p = \frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\overline{AM}^2\sqrt{3}}{4}$
$p = 31\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



173. a) $r^2 = \overline{OA}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NA}^2$
$r = 5x$
$a = 30, \quad b = 5$
b) $r^2 = \overline{OS}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MS}^2$
$r = y\sqrt{170}$
$a = \frac{300}{\sqrt{170}}, \ b = \frac{50}{\sqrt{170}}$

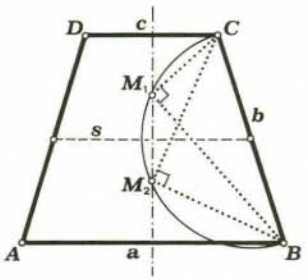


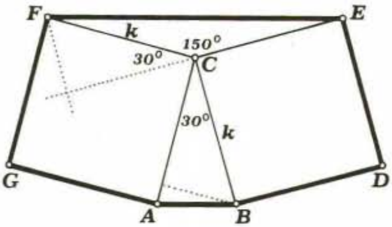


174. $h = \frac{5}{8}a^2$

175. $o = 2(5 + \sqrt{3})$ cm
$p = 4\sqrt{3}$ cm^2

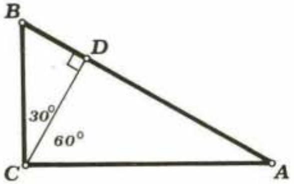
176. Točko M moramo določiti tako, da bo kot $\measuredangle BMC = 90°$. Točka M je sečišče simetrale trapeza in krožnice, ki ima krak BC za premer. Tako dobimo dve točki M_1 in M_2 , iz katere vidimo oba kraka pod pravim kotom.
- Naloga ima dve rešitvi, če je $\frac{s}{2} < r$, t.j. $s < b$.
- Naloga ima eno rešitev, če je $\frac{s}{2} = r$, t. j. $s = b$.
- Naloga nima rešitve, če je krak manjši od srednjice.



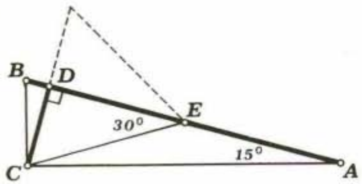


177. $p = \frac{5}{2}k^2$

178.
$o = 6(\sqrt{3} + 3)$ cm



179.



Točka E je središče hipotenuze in zato središče očrtanega kroga. Ker je $\measuredangle CEB = 30°$, je $\overline{CD} = \frac{\overline{CE}}{2}$ in zato $\overline{AB} = 4 \cdot \overline{CD}$.

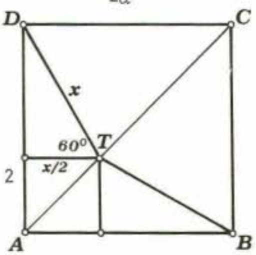
180. $o = 4a(2 + \sqrt{3})$
$p = 4a^2\sqrt{3}$

181. $a^2 + b^2 = (b + d)^2$
$b = \frac{a^2 - d^2}{2d}$, $c = \frac{a^2 + d^2}{2d}$

182. $p = r^2\sqrt{3}$

183.

$x = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3} + 1} = 2$
$p = \sqrt{3} + 1$



184. a) Oba lika sta kvadrata. Dokaži sam!

b) Diagonala manjšega kvadrata: $d_1 = a - b$

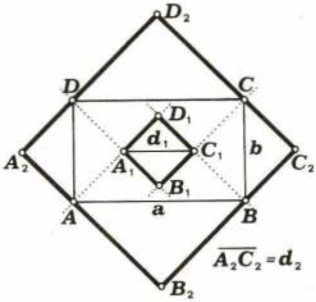
$p_1 = \frac{1}{2}(a - b)^2$

Diagonala večjega kvadrata: $d_2 = a + b$

$p_2 = \frac{1}{2}(a + b)^2$

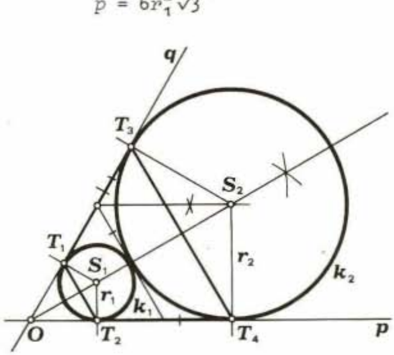
c) $p_1 : p_2 = 1 : 16$

č) $p = p_2 - p_1 = 2ab$



185.

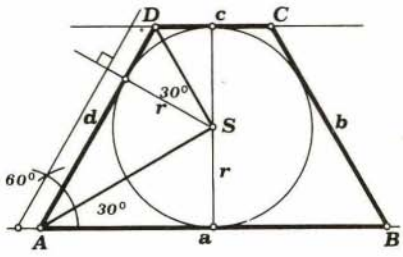
$r_2 = 3r_1$
$p = 6r_1^2\sqrt{3}$



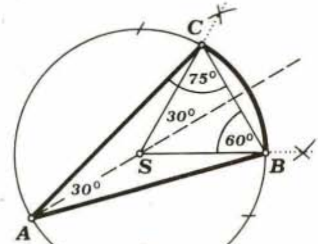
186.

$o = \frac{16r\sqrt{3}}{3}$

$p = \frac{8r^2\sqrt{3}}{3}$



187.
$p = \frac{r^2}{6}(3 + \pi)$

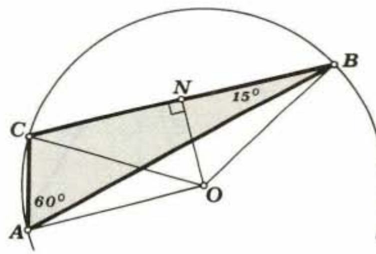


188. $\sphericalangle BOC = 120°$. $\sphericalangle AOC = 30°$ (odnos med središčnim in obodnim kotom); $\sphericalangle CON = 60°$

$\overline{ON} = \frac{r}{2}$, $\overline{BN} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

$\sphericalangle AON = \sphericalangle AOC + \sphericalangle CON = 90°$, torej $BC \parallel AO$ in zato

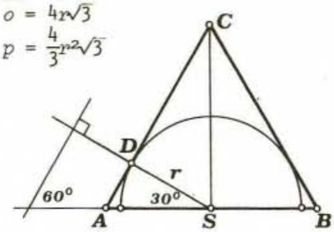
$p_{ABC} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{ON} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$



189. $\overline{SD} = r$

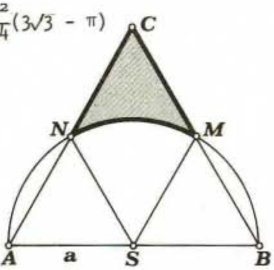
$o = 4r\sqrt{3}$

$p = \frac{4}{3}r^2\sqrt{3}$



190.

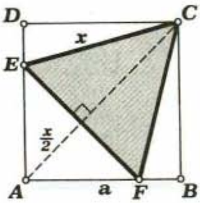
$p = \frac{a^2}{24}(3\sqrt{3} - \pi)$



191. $\overline{AC} = d = \frac{x}{2}(1 + \sqrt{3})$

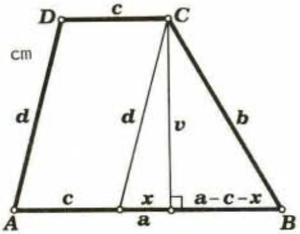
$x = a\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

$p = a^2(2\sqrt{3} - 3)$



192.

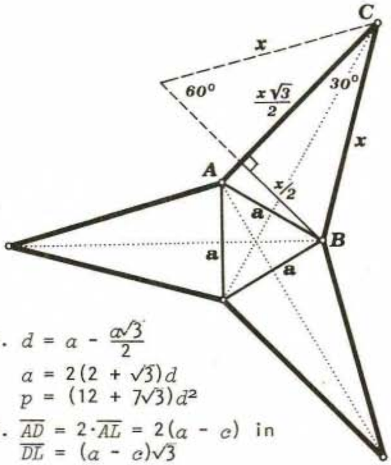
$v = 2\sqrt{6}$ cm



193. $a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$x^2 = \frac{a^2}{2 - \sqrt{3}} = a^2(2 + \sqrt{3})$

$p = 3\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}a^2$



194. $d = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$

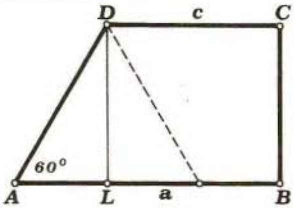
$a = 2(2 + \sqrt{3})d$

$p = (12 + 7\sqrt{3})d^2$

195. $\overline{AD} = 2\cdot\overline{AL} = 2(a - c)$ in

$\overline{DL} = (a - c)\sqrt{3}$

$p = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)\sqrt{3}$



196. $b + c = \overline{CL} + \overline{LA} + \overline{AM} + \overline{MB}$

$\overline{CL} = \overline{NC} = r$

$\overline{LA} = \overline{AM} = b - r$

$\overline{MB} = \overline{NB} = a - r$

$b + c = 2b - 2r + a$ ali

$c - b = a - 2r$ (1)

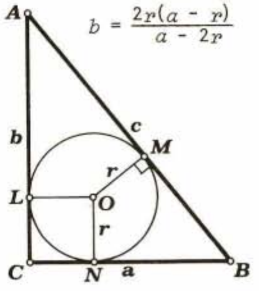
$c^2 - b^2 = a^2$ ali

$(c - b)(c + b) = a^2$

$c + b = \frac{a^2}{a - 2r}$ (2)

Rešitev sistema enačb (1) in (2): $c = \dfrac{a^2 - 2r(a - r)}{a - 2r}$

$b = \dfrac{2r(a - r)}{a - 2r}$



197. $ab = 2a + 2b \Rightarrow a = \dfrac{2b}{b - 2}$

Desno stran enačbe lahko preoblikujemo:

$a = \dfrac{2b - 4 + 4}{b - 2} = 2 + \dfrac{4}{b - 2}$

Ker morata biti a in b naravni števili, velja $(b - 2) \in \{1,2,4\}$

Dobimo: $b = 3$, $a = 6$; $b = 4$, $a = 4$; $b = 6$, $a = 3$, to je en pravokotnik s stranicama 3 in 6 ter kvadrat s stranico 4.

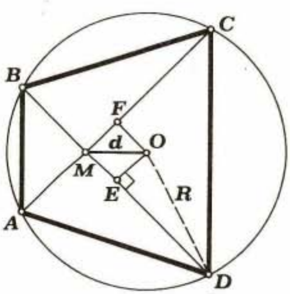
198. $p = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \frac{1}{2}\,\overline{BD}^2$

$\overline{DE}^2 = R^2 - \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\overline{DE} = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{2}}$

$\overline{BD} = 2\overline{DE}$

$p = 2R^2 - d^2$



199. $d_1 + d_2 = m \quad 2a = k$

$d_1 \cdot d_2 = 2p$

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow d_1{}^2 + {}$

$+ d_2{}^2 = 4a^2 = k^2$

Iz $m^2 = (d_1 + d_2)^2 =$

$= d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2$ dobimo

$m^2 = k^2 + 4p$

$p = \dfrac{m^2 - k^2}{4}$

200. $\overline{CD} = v \quad \overline{OL} = r$

$\overline{CL} = \sqrt{(v - r)^2 - r^2} = \sqrt{v(v - 2r)}$

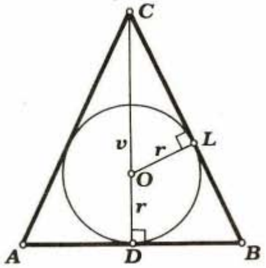
označimo: $\overline{DB} = \overline{BL} = x$

$(\overline{CL} + x)^2 = v^2 + x^2$

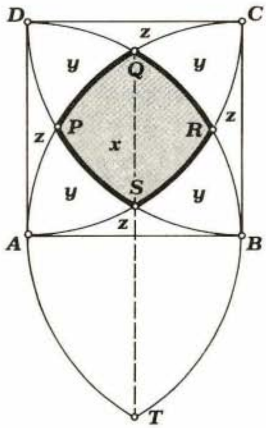
$x = \dfrac{rv}{\sqrt{v(v - 2r)}}$

$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CL} + x = \dfrac{v(v - r)}{\sqrt{v(v - 2r)}}$

$\overline{AB} = 2x = \dfrac{2rv}{\sqrt{v(v - 2r)}}$



201.



Iskano ploščino označimo z x, ostale dele z y in z.

(1) $x + 4y + 4z = a^2$

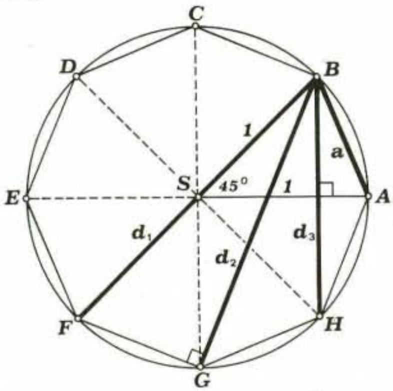
(2) $x + 3y + 2z = \frac{1}{4}\pi a^2$

(3) $x + 2y + z = \frac{1}{3}\pi a^2 -$

$- \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, ker je ploščina krivočrtnega trikotnika $APQRB$ enaka ploščini segmenta QAT. Če enačbe (1), (2), (3) zaporedoma pomnožimo z 1, -4, 4 in jih nato seštejemo, dobimo:

$\underline{x = \frac{a^2}{3}(\pi + 3 - 3\sqrt{3})}$

202.



Iz skice ugotovimo po Pitagorovem izreku, da so dolžine stranic in diagonal

$a = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $d_1 = 2$,

$d_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ $d_3 = \sqrt{2}$

Potem je $a^8 \cdot d_1^4 \cdot d_2^8 \cdot d_3^8 =$

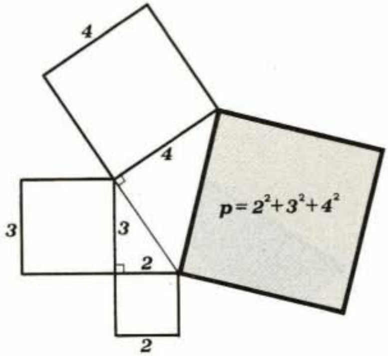
$= (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^8 \cdot 2^4 \cdot (\sqrt{2})^8 \cdot$

$\cdot (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^8 = 4096.$

0.71.1 Izraza se razlikujeta za $-16/15$.

0.71.2 Debelina skorje je 24 mm.

0.71.3 Uporabimo Pitagorov izrek



0.71.4 a) 27, b) 1, c) 6, č) 12, d) 8, e) 0

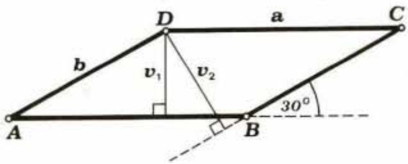
0.71.5 $p \doteq 216{,}5\ \mathrm{m}^2$

0.72.1 a) $(7.6 + 12) : 3 - 1 = 17$
b) $(7.6 + 12) : (3 - 1) = 27$
c) $7.6 + (12:3) - 1 = 45$
d) $7.6 + 12:(3 - 1) = 48$
e) $7.(6 + 12 : 3) - 1 = 69$

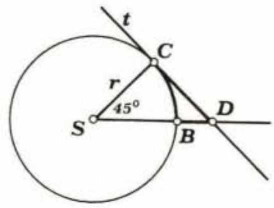
0.72.2 $\frac{11}{10}a \,.\, \frac{9}{10}b = \frac{99}{100}\,ab$
Produkt se zmanjša za 1 %.

0.72.3 $m < 3$

0.72.4 $a = 2\cdot v_2 = 10$ cm
$b = 2\cdot v_1 = 8$ cm
$p = 40\ \mathrm{cm}^2$
$o = 36$ cm



0.72.5 a) $\overline{SD} = \overline{SC}\sqrt{2} = \sqrt{2}$ m
$p = \frac{1}{2}\ \mathrm{m}^2$
b) $p = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2\pi}{8} =$
$= \frac{r^2}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = 0{,}11\ \mathrm{m}^2$
c) $o = (\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})r \doteq 2{,}20$ m



0.73.1 $\frac{28}{187}$

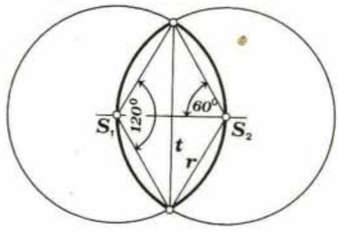
0.73.2 $p = 210\ \mathrm{cm}^2 \quad o = 70$ cm

0.73.3 Veriga je dolga 803 cm.

0.73.4 $o = 67{,}4$ cm $\quad p = 226{,}9\ \mathrm{cm}^2$

0.73.5

$$p = 2\cdot\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$
$$= 2r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$o = \frac{4\pi r}{3}$$



0.74.1 a) $(a + b)\cdot c^3$ a) -2
b) $a + (b\cdot c)^3$ b) 0
c) $[(a + b)\cdot c]^3$ c) -8

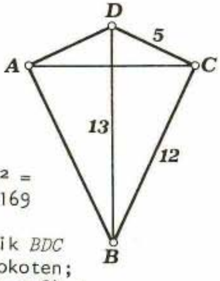
0.74.2 a) $\frac{2a}{2a + 6} = \frac{2a}{2(a + 3)} = \frac{a}{a + 3}$
b) $\frac{2a}{12a} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{2a}{2a-6} = \frac{2a}{2(a-3)} = \frac{a}{a-3}$

d) $\frac{2a}{\frac{2a}{6}} = 6$

0.74.3 $(n^2+1)^2 = (n^2-1)^2 +$
$+ (2n)^2$

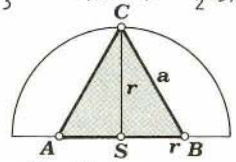
0.74.4



$12^2 + x^2 =$
$= 169$
$x = 5$
Trikotnik BDC
je pravokoten;
$(5^2+12^2 = 13^2)$!
$p = 60\ \text{cm}^2$

0.74.5 $p_1 = \frac{\pi r^2}{2} \doteq 1{,}57$ $\qquad \frac{p_2}{p_1} \doteq 37\%$

$p_2 = \frac{r^2\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}58 \quad (r = \frac{a}{2}\sqrt{3})$



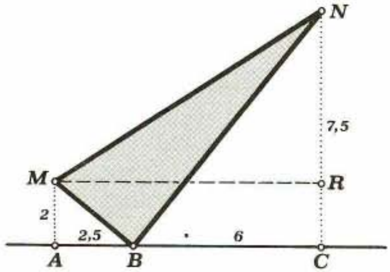
0.75.1 Vrednost številskega izraza je 4.

0.75.2 Iz pogoja $\frac{7}{9} < \frac{m}{n} < \frac{8}{9}$ sledi $7n < 9m < 8n$, kjer sta m, $n \in N$ in manjša od 10. Dobimo 4 take ulomke: $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ in $\frac{7}{8}$. Nalogo lahko rešiš tudi tako, da oba ulomka spremeniš v decimalno število.

0.75.3 $c = b + 12$, $\quad a = b + 22$
od tod: $a - c = 10$
$a + c - 2b = 34$
$a + c + 2b = 86$
$b = 13$, $\quad a + c = 60$

$v = \sqrt{(b^2 - (\frac{a-c}{2})^2)} = 12$
$p = 360\ \text{cm}^2$

0.75.4 $\overline{BM}^2 = 2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25$
$\overline{BN}^2 = 6^2 + 7{,}5^2 = 92{,}25$
$\overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 = \underline{102{,}50}$
$\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{RN}^2$
$\overline{MN}^2 = 8{,}5^2 + 5{,}5^2 = 102{,}50$

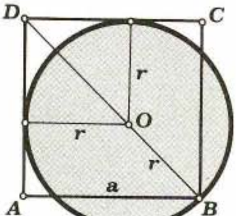


0.76.1 $3a^2 - 3b^2 - 6bc - 3c^2 =$
$= 3(a^2 - (b+c)^2) =$
$= 3(a^2 - a^2) = 0$

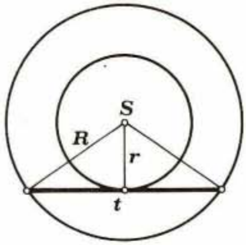
0.76.2 Količnik se poveča za 50 %.

0.76.3 2400 : ((2400 : 25) + 24) = = 20 ; 2400 televizorjev so naredili v 20 dneh.

0.76.4 $\overline{BD} = r + r\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ kjer $a = 1$ m. Od tod
$r = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$
$\underline{r \doteq 0{,}59\ \text{m}}$



0.76.5 $(\frac{t}{2})^2 = R^2 - r^2$
$p = \pi(R^2 - r^2)$
$16 = R^2 - r^2$
$p = 16\pi\ \text{cm}^2 \doteq 50{,}27\ \text{cm}^2$



0.77.1 Odšteti je treba izraz $-x + 14y$.

0.77.2

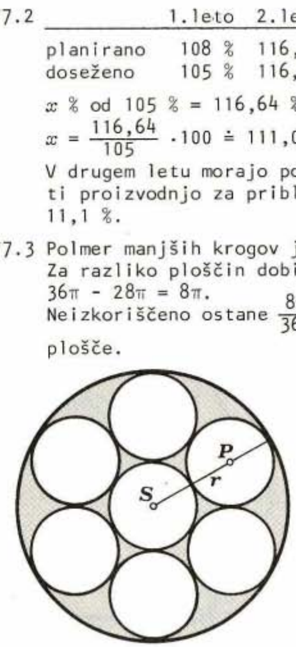
	1.leto	2.leto
planirano	108 %	116,64 %
doseženo	105 %	116,64 %

x % od 105 % = 116,64 %

$x = \frac{116,64}{105} \cdot 100 \doteq 111,09$

V drugem letu morajo povečati proizvodnjo za približno 11,1 %.

0.77.3 Polmer manjših krogov je 2. Za razliko ploščin dobimo $36\pi - 28\pi = 8\pi$. Neizkoriščeno ostane $\frac{8\pi}{36\pi} = \frac{2}{9}$ plošče.



0.77.4 $p = 0,57$ m

0.77.5 Narišemo:

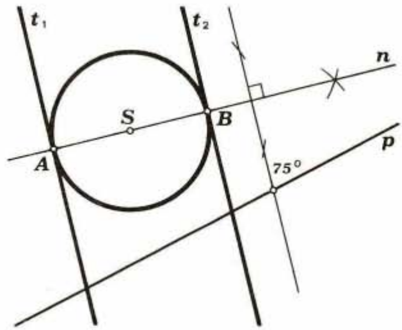
a) k; $k(S,r)$

b) p; $p \cap k = \emptyset$

c) q; $q \cap k = \emptyset$, ki tvori s p kot 75°

d) n; $n \perp q$ in $S \in n$; $n \cap k = \{A, B\}$

e) t_1, t_2; $t_1 \parallel q$ in $t_2 \parallel q$. $A \in t_1$ in $B \in t_2$ (dve rešitvi t_1 in t_2)



0.78.1 Štirikotnik $ABCD$ je trapez z osnovnicama AB in CD in z višino v:
$\overline{AB} = 2$, $\overline{CD} = 4$, $v = 7$
Zato $p(ABCD) = \underline{21}$

0.78.2 Dani izraz lahko pišemo v obliki $7(x^2 - 4)$ in ima vrednost nič za $x = 2$ in za $x = -2$.

0.78.3 Enačba $\frac{2}{7}x + x + (\frac{2}{7}x + x) = 180$ ima rešitev $x = 70$. Koti trikotnika merijo 20°, 70°, 90°.

0.78.3 $2\pi r = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 = \frac{1}{6}(2\pi r_1 + 2\pi(r_1 + 1) + 2\pi(r_1 + 2) + \ldots + 2\pi(r_1 + 6)) = \frac{2\pi}{6}(7r_1 + 21)$, od tod

$r = \frac{7}{6} r_1 + \frac{21}{6}$. Iz slike pa razberemo $r = r_1 + 6$. Iz obeh zvez dobimo $r = 21$.

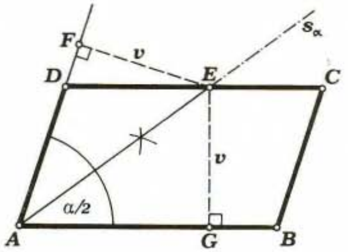
0.78.5 $\frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$; $a + b = 374 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 374 - a$

$\dfrac{a}{374 - a} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow 8a = 3.374 -$
$- 3a$; $a = 3 \cdot 34$;
$a = 102, \quad b = 272$
Iskani ulomek je $\dfrac{102}{272}$.

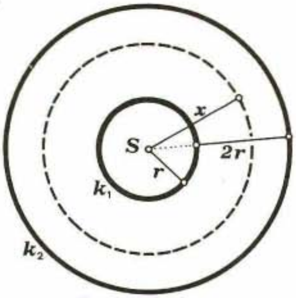
0.79.1 $2a < a < a^3 < a^2 < -a$

0.79.2 Zapis števila x je $abcabc$.
Sledi:
$x = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 +$
$+ a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$
$= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b +$
$+ 1001 \cdot c$
$= 1001(100a + 10b + c)$
$x = 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 10b + c)$
Število x je večkratnik števil 7, 11 in 13, torej je deljivo s 7, 11 in 13.

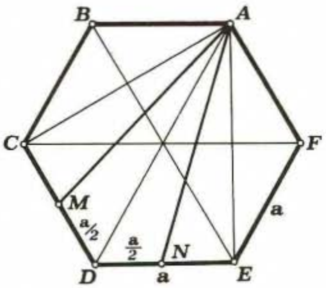
0.79.3 Rešitev: $p_1 : p_2 = 2 : 5$
Ena izmed možnih poti reševanja:
1. $\overline{EF} = \overline{EG} = v$ (lastnost s_α)
2. $p(ABCD) = 7v$
3. $p(\Delta AED) = \frac{1}{2} \cdot 4v = 2v$
4. $p(ABCE) = 7v - 2v = 5v$
Razmerje ploščin je
$2v : 5v = 2 : 5$



0.79.4 $p_1 = \pi r^2$; $p_2 = \pi(3r)^2$
$p_2 - p_1 = 8\pi r^2$
$\dfrac{p_2 - p_1}{2} = \pi x^2 - \pi r^2$
$4\pi r^2 = \pi x^2 - \pi r^2$
$x^2 = 5r^2$; $x = r\sqrt{5}$
Polmer krožnice je $r\sqrt{5}$.



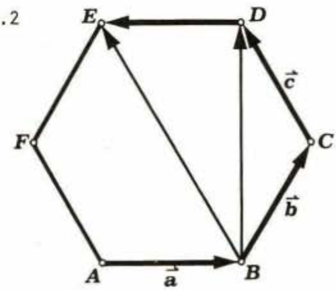
0.79.5 Rešitev:
Iskani daljici sta AM in AN, kjer M središče stranice CD in N središče stranice DE.
Utemeljitev:
Naj bo $p(ABCDEF) = 6p$.
Potem je $p(AEF) = p$
$p(DEA) = 2p \Rightarrow p(ADN) =$
$= p(ANE) = p$, ker imata ΔADN in ΔANE enaki osnovnici in skupno višino.
Enako velja: $p(MDA) =$
$= p(CMA) = p(BCA) = p$
Končno sklepamo: $p(ANEF) =$
$p(AMDN) = p(ABCM)$

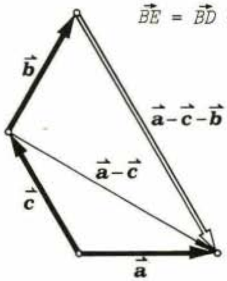


0.80.1 $(-a)^2 + (-a) + 1 = a^2 - a + 1$
a) $(a^2+a+1) - (a^2-a+1) = 2a$
b) $a^2 + a + 1 =$
$= (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3}) + 1 = \frac{7}{9}$

$a^2 - a + 1 =$
$= (-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{1}{3}) + 1 = \frac{13}{9}$

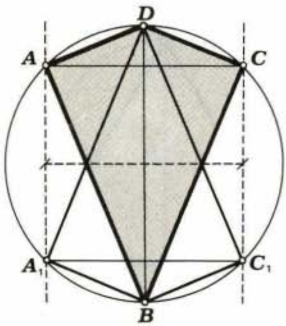
0.80.2





$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

0.80.3 Narišemo krog s premerom $\overline{BD} = 7$ cm in potegnemo vzporednici k BD na razdalji 2,5 cm. Imamo dve rešitvi: deltoid $ABCD$ in deltoid A_1BC_1D.



0.80.4 $\dfrac{n^3 - n^2 + 3}{n - 1} = \dfrac{n^2(n - 1) + 3}{n - 1}$

$= n^2 + \dfrac{3}{n - 1}$

Dani ulomek je celo število samo za naravni števili $n = 2$ in $n = 4$.

0.80.5 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$; $\overline{AR} = \overline{RB}$

Narišemo $RS \parallel AD$

1. $\overline{DS} = \overline{SC} = \overline{SR}$

   ∢ DRC je obodni kot nad premerom kroga $K(S,\overline{SR})$, zato je pravi kot.
2. Trditev lahko dokažemo tudi z izreki v kotih, kot je razvidno iz skice desno.

0.81.1 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a + 27}{b + 30}$

$a(b + 30) = b(a + 27)$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{10}$

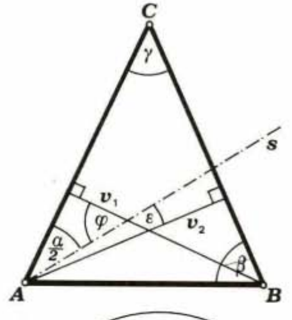
Ulomki so naprimer

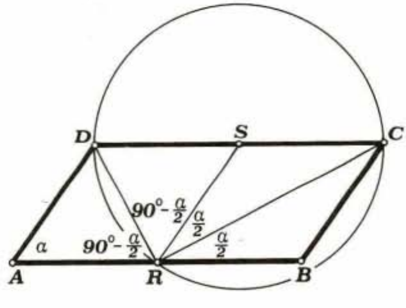
$\dfrac{9}{10}, \dfrac{18}{20}, \dfrac{27}{30}$.

0.81.2 $\alpha = \beta \quad \alpha = 69^\circ \quad \gamma = 42^\circ$

$\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2} - (90^\circ - \alpha) = 13\frac{1}{2}^\circ$

$\phi = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = 55\frac{1}{2}^\circ$





0.81.3 $(a + \frac{2}{5})b = ab + 1 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

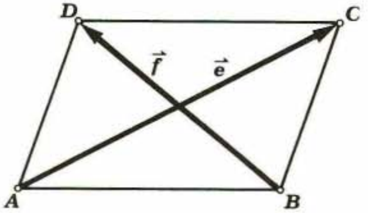
$a(b - \frac{1}{2}) = ab - \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{8}{5}$

$c = ab = 4$

0.81.4 $\vec{e} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$\vec{f} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{BC}$

$\vec{e} - \vec{f} = 2\vec{AB}$



0.81.5 Dolžina stranice prvega kvadrata je a, drugega $\frac{6a}{5}$, tretjega pa $\frac{4}{5}\,\frac{6a}{5} = \frac{24a}{25}$. Ploščina tretjega kvadrata je $(\frac{24}{25})^2 = 92{,}16$ % ploščine prvega kvadrata.

0.82.1 400

0.82.2 $\frac{87}{4} : \frac{13}{17} \doteq 28$

Belec ima povprečno 28-krat več zemlje kot črnec.

0.82.3 Polje meri x hektarov.

1. dan: $\frac{3x}{16}$

2. dan: $2\frac{2}{5} \cdot \frac{3x}{16} = \frac{9x}{20}$

$\frac{3x}{16} + \frac{9x}{20} + 87 = x, \quad x = 240$

Polje meri 240 hektarov.

0.82.4 1. $(\sphericalangle ACD) = \alpha$

BSC je enakokrak

$(\sphericalangle BSC) = \alpha$

2. $\sphericalangle SBA$ je zunanji kot v ΔSCB

$(\sphericalangle SBA) = 2\alpha$

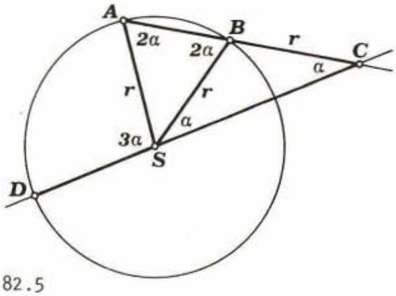
3. ΔSBA je enakokrak

$(\sphericalangle BAS) = 2\alpha$

4. $\sphericalangle ASD$ je zunanji kot v ΔASC

$(\sphericalangle ASD) = (\sphericalangle BAS) + (\sphericalangle ACD) =$

$= 2\alpha + \alpha = 3\alpha$



0.82.5

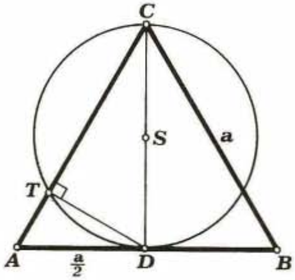
$(\sphericalangle DTC) = 90°$, zato je

$(\sphericalangle DTA) = 90°$, $(\sphericalangle TAD) = 60°$,

$(\sphericalangle ADT) = 30°$

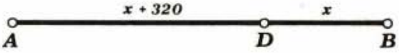
ΔADT je polovica enakostraničnega trikotnika

$\overline{AT} = \frac{a}{4}$, $\overline{TC} = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$



Z.70.1 Iz pogoja naloge izhaja:
$1000a + 100b + 10c + d =$
$= 25c^2 + 10c + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25(40a + 4b - c^2) = 1 - d$
Ker je leva stran enakosti deljiva s 25, mora biti tudi $(1 - d)$ deljiv s 25. To pa je mogoče le tedaj, ko je $1 - d = 0$. Torej je $d = 1$ in $40a + 4b - c^2 = 0$ oziroma $4(10a + b) = c^2$. To pomeni, da je $(10a + b)$ kvadrat, ki je manjši od 25, saj je c cifra, in večji ali enak 10, saj je $a \neq 0$. Torej je $10a + b = 16$ in je iskano število $\overline{abcd} = 1681$.

Z.70.2 Označimo z D točko, v kateri je začelo letalo leteti hitreje. Čas preleta poti AD je $\frac{x + 320}{180}$, kjer je $x = \overline{AC} = \overline{DB}$. Za pot DB je letalo potrebovalo $\frac{x}{250}$ ur.

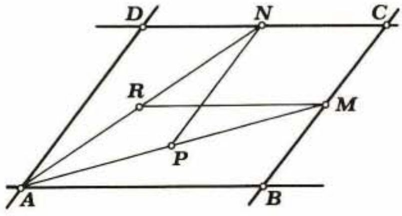


Ker je povprečna hitrost letala od A do B 200 km/h, dobimo enačbo $2x + 320 =$
$= 200\left(\frac{x + 320}{180} + \frac{x}{250}\right)$
in iz nje $x = 400$.
Dolžina poti AB je 1120 km.

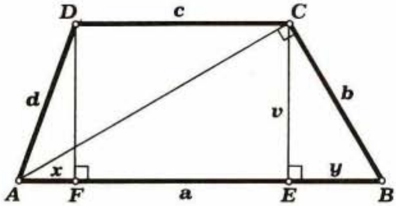
Z.70.3 Milan lahko risbo obnovi na primer takole (glej sliko): Najprej določi središči P in R daljic AM in AN. Nato načrta:

1. skozi točko A vzporednico z daljico MR;
2. skozi točko M vzporednico z daljico NP;
3. skozi točko N vzporednico z daljico MR;
4. skozi točko A vzporednico z daljico NP.

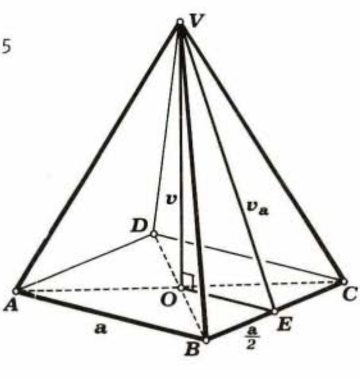
Načrtane vzporednice so nosilke stranic paralelograma, oglišča paralelograma so torej njihova presečišča (B prvih dveh, C srednjih dveh in D zadnjih dveh).



Z.70.4 Iz trikotnika ABC dobimo $\overline{AB} = 75$ mm. Ker je višina trapeza hkrati višina trikotnika ABC, jo izračunamo iz ploščine tega trikotnika.
$\frac{75 \cdot v}{2} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 45$, $v = 36$ mm
Iz trikotnikov AFD in EBC dobimo: $x = 15$ mm in $y = 27$ mm in nato $c = 33$ mm.
$o = 192$ mm
$p = 1944$ mm^2



Z.70.5

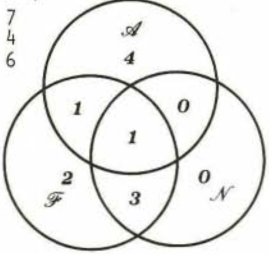


Z.70.5 Iz besedila naloge izhaja naslednja enačba
$P = a^2 + 2v_a a = 5a^2$
iz katere dobimo $v_a = 2a$.
Telesna višina v je enaka

$v = \frac{a}{2}\sqrt{15}$ in torej

$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{15} \doteq 139{,}427\ \text{dm}^3$

Z.71.1 Označimo množico ljudi, ki znajo angleški jezik z A,
nemški jezik z N,
francoski jezik z F,
narišemo ustrezni Vennov diagram ter ga dopolnimo s številom ljudi v posameznih množicah:
$m(A \cap N \cap F) = 1$
$m(A \cap F) = 2$
$m(N \cap F) = 4$
$m(F) = 7$
$m(N) = 4$
$m(A) = 6$



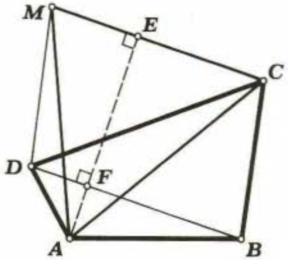
Vseh ljudi je 11. Samo angleško znajo štirje.

Z.71.2 Naj bosta x in y cifri iskanega števila. Potem velja $(10x + y) + (10y + x) = k^2$, $k \in N$ oziroma $11(x + y) = k^2$. To je mogoče samo, če je $x + y = 11n^2$. Ker je $x + y \leq 18$, je $n = 1$. Iskana števila so: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Z.71.3 Učenec je delil dve naravni števili a in b. Pri preizkusu bi dobil $a = 74b + 22$. Ker je učenec naredil napako, je namesto a dobil 30214, ki je za $60 \cdot 74$ manjše od a. Torej je $a = 34654$ in $b = 468$.

Drugačna rešitev. Pri preizkusu je množil z
$b = (30214 - 22):74 = 408$,
torej je $b = 468$ in
$a = 34654$.

Z.71.4 Naj bo F presečišče višine AE trikotnika ACM in diagonale BD štirikotnika $ABCD$

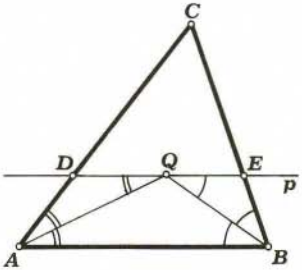


($AE \perp CM$ in $AE \perp BD$). Dolžina daljice EF je enaka dolžini višine na stranico BD v trikotniku BCD. Tako dobimo:

$p(ABCD) = p(ABD) + p(BCD) =$
$= \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{AE} =$
$= p(ACM)$

Z.71.5 Recimo, da smo premico p uspeli načrtati (glej sliko):

Označimo s Q točko na premici p, za katero velja $\overline{DA} = \overline{DQ}$ in $\overline{BE} = \overline{QE}$. Torej



sta trikotnika ΔAQD in ΔQBE enakokraka. Ker je premica p vzporedna daljici AB, potemtakem velja:
$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle DQA = \sphericalangle QAB$ in
$\sphericalangle EBQ = \sphericalangle EQB = \sphericalangle QBA$
Torej je Q središče trikotniku ΔABC včrtanega kroga. Povzemimo: naloga je vedno rešljiva. Rešimo jo tako, da najprej načrtamo središče trikotniku včrtanega kroga in nato skozenj potegnemo vzporednico daljici AB. Ta je iskana premica p.

Z.72.1 n je število članov krožka, vsak član krožka je napisal $(n - 1)$ razglednic.
$n(n - 1) = 342$, (produkt dveh zaporednih naravnih števil)
$342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 = 18 \cdot 19$
V krožku je bilo 19 članov.

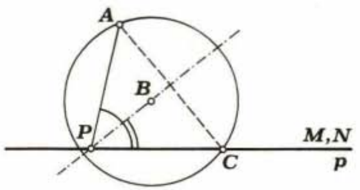
Z.72.2 Odstotek učencev, ki so pravilno rešili nalogo, je:
$100\ \% - (32\ \% + 12\ \%) = 56\ \%$,
to je 14 učencev.
V razredu je 25 učencev.

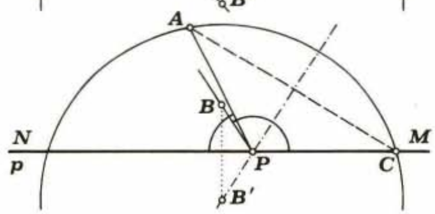
Z.72.3 $A = 6400a^2b^2$,
preizkus: 25600

Z.72.4 1) Načrtaj krožnico s središčem v točki B in polmerom AB. Presečišče te krožnice s premico $p = (M,N)$ označi s C (če je $\overline{AB} > d(B,p)$, potem obstajata dve taki točki, če je $\overline{AB} < d(B,p)$, potem take točke ni). Označi presečišče premice p s simetralo daljice AC s P. Tako dobiš deltoid $APCB$.

Če vsebuje poltrak $[P,C)$ točki M in N, potem je točka P rešitev.

2) Nariši točko B', ki je simetrična točki B glede na premico p in ponovi konstrukcijo (1) s točkama A, B'. Če je $M \in [P,C)$ in $N \notin [P,C)$, potem je točka P rešitev.





Z.72.5 Trikotnik LMA je polovica enakostraničnega trikotnika s stranico LM.

$LM = x,\ AL = \frac{x}{2},\ AM = \frac{x}{2}\sqrt{3}$

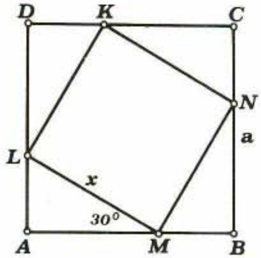
$a = \frac{x}{2}\sqrt{3} + \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{3} + 1}$

$p_1 = a^2$

$p_2 = x^2 = \frac{4a^2}{(\sqrt{3} + 1)^2}$

$p_2 : p_1 = 2(2 - \sqrt{3})$

$p_2 = 2(2 - \sqrt{3})\cdot p_1 \doteq$
$\doteq 0{,}54 \cdot p_1 = 54\% \cdot p_1$



Z.73.1 $8316 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 11 =$
$= 2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11$

Najmanjše naravno število, s katerim moramo pomnožiti 8316, da dobimo kvadrat naravnega števila, je
$3\cdot 7\cdot 11 = 231$

$8316\cdot 3\cdot 7\cdot 11 = 2^2\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot 11^2 =$
$= (2\cdot 9\cdot 7\cdot 11)^2 = 1386^2$

Z.73.2 Naj bo c cena platna pred znižanjem. Potem velja

$\frac{240}{c\cdot 0{,}8} = \frac{270}{c} + 1$

in od tod $c = 30$ din za meter.

Z.73.3 Hitrost prvega: v km/h
Hitrost drugega:
$(v - 10)$ km/h
Čas: $t = 2$h
Pot: $s = v\cdot t$
Pot po 2h:
$2\cdot v + 2\cdot(v - 10) = 220$
$v = 60$
Hitrosti motociklistov sta 60 km/h in 50 km/h.

Z.73.4 Glej nalogo Z.71.2!

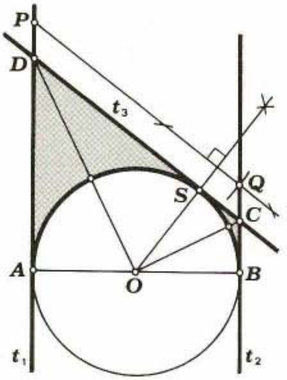
Z.73.5 a) Narišemo tangenti (t_1 in t_2) skozi točki A in B. Na tangenti t_1 izberemo poljubno točko P. Narišemo lok s polmerom 5 cm, ki seče tangento t_2 v točki Q. Skozi središče O danega kroga narišemo pravokotnico na daljico PQ.
Sečišče pravokotnice s krožnico je dotikališče tangente t_3 ($t_3 \parallel PQ$). Naloga ima še "zrcalno" rešitev.

b) $\measuredangle COD = \measuredangle COS + \measuredangle SOD =$
$= \frac{1}{2}(\measuredangle AOS + \measuredangle BOS) =$
$= \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$

c) $p_1 = p(ABCD) = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\cdot\overline{AB}$
$= \frac{\overline{DS} + \overline{SC}}{2}\cdot\overline{AB} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{2} =$
$= 10$

$p_2 = p(\frown AB) = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

$p = p_1 - p_2 = 10 - 2\pi$



Z.74.1 Dano število zapišemo v obliki: $72n + 68$
$(72n + 68) : 24 = 3n + 2$ in ostanek 20.

Z.74.2 a) Če so vse cifre različne: a, b in c, dobimo 6 števil:

$100a + 10b + c$
$100a + 10c + b$
$100b + 10a + c$
$100b + 10c + a$
$100c + 10a + b$
$100c + 10b + a$

z vsoto:

$222a + 222b + 222c = 1998$

Torej je: $a + b + c = 9$

Dano število je zapisano s ciframi:

0, 1 in 8
0, 2 in 7
0, 3 in 6
0, 4 in 5
1, 2 in 6
1, 3 in 5
2, 3 in 4

b) Če sta le dve cifri različni: x in y, dobimo 3 števila:

$100x + 10x + y$
$100x + 10y + x$
$100y + 10x + x$

z vsoto:

$222x + 111y = 1998$, kar da $2x + y = 18$

Dano število je zapisano s ciframi:

5, 5 in 8
7, 7 in 4
8, 8 in 2
9, 9 in 0

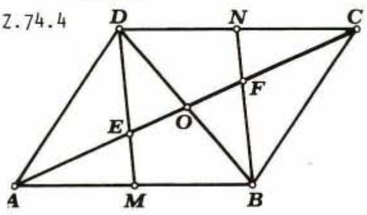
Z.74.3 Naj bo prvo število a. Drugo število je $(135 - a)$.

$$\frac{35 \cdot a}{100} = \frac{28 \cdot (135 - a)}{100} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 60$

Prvo število je 60, drugo pa 75!

Z.74.4



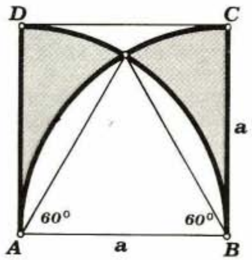
Težišče trikotnika ABD je točka E. Težišče trikotnika BCD je točka F. Na osnovi lastnosti težišča trikotnika je:

$\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AO}$ in $\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{OC}$, zato je $\overline{AE} = \overline{CF}$

$\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{AE}$ in $\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{FC}$, zato je $\overline{OE} + \overline{OF} = \overline{AE} = \overline{FC}$

Z.74.5

$$p = 2\left[\frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{6} - \left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\right] = a^2\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$



Z.75.1 Iskana števila so:

$7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 3$, $7n + 4$, $7n + 5$, $7n + 6$

in njihova vsota

$S = 42n + 21 = 21(2n + 1)$.

Vsota je torej deljiva z 21. Pri deljenju z 42 pa ostane 21, tj. ni deljiva z 42. Da bi bila vsota S kvadrat naravnega števila, mora biti $2n + 1 = 21k^2$, kjer je k liho število. Ker naj bo vsota štirimestno število, mora biti k^2 večji od 2 in manjši od 23. To je mogoče samo, če je $k^2 = 9$. Tako dobimo: $2n + 1 = 21k^2 = 189$ oziroma $n = 94$.

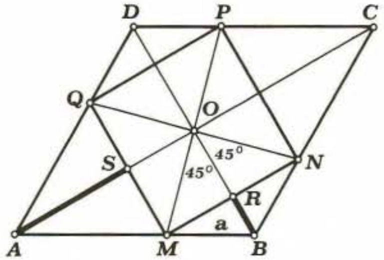
Iskana števila so: 659, 660, 661, 662, 663 in 664.

Z.75.2 Enačbo zapišemo v obliki:
$10a + b = a^3 + b^2$
oziroma $10a - a^3 = b^2 - b$
in dalje
$a(10 - a^2) = b(b - 1)$.
Torej je $a \in \{1, 2, 3\}$.
Za $a = 1$ dobimo $b(b - 1) = 9$
za $a = 2$ dobimo $b(b - 1) = 12$
za $a = 3$ dobimo $b(b - 1) = 3$
Ker je $b(b - 1)$ produkt dveh zaporednih naravnih števil, je lahko le $a = 2$ in $b = 4$.
Iskano število je 24.

Z.75.3 Če iz prostega krajišča narišemo še pet daljic, dobimo namesto prostega krajišča 5 novih prostih krajišč - število prostih krajišč se poveča za 4. Z nadaljnjim risanjem dobimo število prostih krajišč $4n + 5$. To pa ne more biti 700 za nobeno naravno število. Pri štetju je bila storjena napaka.

Z.75.4 a) Diagonali romba sta pravokotni ena na drugo. Iz skladnosti trikotnikov ΔOBM in ΔOBN sledi $\overline{OM} = \overline{ON}$. Iz skladnosti trikotnikov ΔOAM in ΔOAQ sledi $\overline{OM} = \overline{OQ}$. Na podoben način dobimo, da je $\overline{OQ} = \overline{OP}$. Torej so trikotniki ΔQOP, ΔMOQ, ΔNOM in ΔPON enakokraki pravokotni trikotniki in je potemtakem štirikotnik $MNPQ$ kvadrat.

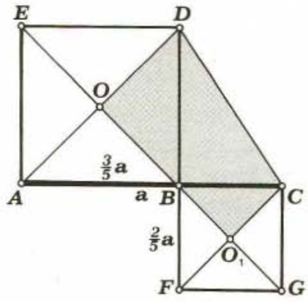
b) Iz podobnih trikotnikov ΔAMS in ΔMBR dobimo razmerje $\overline{AS} : \overline{SM} =$



$= \overline{MR} : \overline{RB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}$

Upoštevajmo še, da je $\overline{SM} = \overline{MR}$, pa imamo $AS =$ $\overline{AS} = \overline{SM}\cdot\sqrt{3}$ in $\overline{RB} = \overline{SM}/\sqrt{3}$ in od tu iskano razmerje $\overline{AS} : \overline{RB} = 3 : 1$

Z.75.5 Štirikotnik OO_1CD sestavljajo trije pravokotni trikotniki in ima ploščino
$$p = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}a\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}a\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{5}\cdot\frac{2a}{5} = \frac{1}{4}a^2$$
To je četrtina ploščine kvadrata s stranico $\overline{AC} = a$.
Iskano razmerje je $1 : 4$.



Z.76.1 V 40 kg morske vode je $40 \cdot 0{,}05$ kg = 2 kg soli. Če dolijemo 60 kg čiste vode, imamo mešanico 100 kg z dvema kilogramoma oziroma 2 % soli.

Z.76.2 Označimo iskani ulomek z $\frac{a}{b}$.

Naloga zahteva, da morajo biti naslednji produkti cela števila:

$\frac{8}{15}\cdot\frac{b}{a}$, $\frac{12}{25}\cdot\frac{b}{a}$ in $\frac{20}{21}\cdot\frac{b}{a}$

Ulomek $\frac{a}{b}$ zadošča tej zahtevi, če je $b = 105n$, kjer je 105 najmanjši skupni imenovalec števil 15, 35 in 21. Da bo ulomek najmanjši, mora biti $a = 1$, b pa mora biti čimvečje naravno število. Ker največjega naravnega števila ni, ne obstaja najmanjši ulomek oblike $\frac{a}{b} = \frac{1}{105n}$.

Z.76.3 Trikotnika ΔO_1AM in ΔO_2AN sta enakokraka. Zato je

$\sphericalangle AMO_1 = \sphericalangle MAO_1$

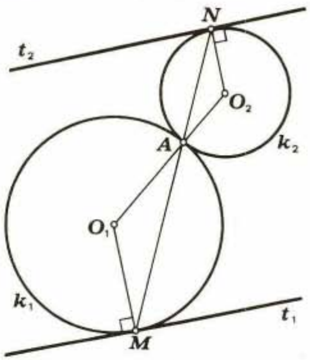
$\sphericalangle ANO_2 = \sphericalangle NAO_2$

$\sphericalangle MAO_1 = \sphericalangle NAO_2$ (sovršna kota)

in od tu

$\sphericalangle AMO_1 = \sphericalangle ANO_2$

iz česar sledi, da je $O_1M \parallel O_2N$. Ker sta tangenti $t_1 \perp O_1M$ in $t_2 \perp O_2N$, sta tudi vzporedni: $t_1 \parallel t_2$.



Z.76.4 Iz obrazcev za površino in prostornino kvadra dobimo

$2ab + 2ac + 2bc = abc$

Delimo to enakost z $2abc$, pa imamo iskani rezultat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

Z.76.5 Vsota cifer danega števila je deljiva z 9 in ni večja od $2000\cdot 9 = 18000$, tj. $a \leq 18000$. Vsota cifer števila a je deljiva z 9 in ni večja od 36, tj. $b \leq 36$. Vsota cifer števila b ni večja od 11 in je deljiva z 9. Zato je $c = 9$.

Z.77.1 S številkami od 1 do 1000 označimo vsa mesta, na katerih stojijo učenci. Iz pogoja sledi, da lahko mesta zamenjajo samo učenci, katerih številke mest se razlikujejo za 2. Ker ima prvi učenec liho številko, zadnji pa sodo, prvi ne more nikoli doseči mesta zadnjega učenca.

Z.77.2 Zaporedna števila so

$2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$

Besedilo naloge prevedemo v enačbo

$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6) = 13440$

katere levo stran lahko takole preoblikujemo

$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6) =$
$= (2n+3-3)(2n+3-1)(2n+3+1)\cdot$
$\cdot(2n+3+3) =$
$= ((2n+3)^2-1)((2n+3)^2 - 9) =$
$= ((2n+3)^2-5)^2 - 16$

Torej je $((2n+3)^2-5)^2 =$
$= 13440 + 16 = 13456$ oziroma
$(2n+3)^2 - 5 = 116$,
$(2n+3)^2 = 121$, $2n+3 = 11$,
kar da končno $n = 4$.

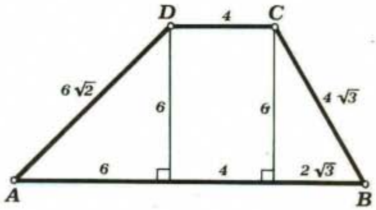
Iskana zaporedna soda števila so: 8, 10, 12, 14.

Z.77.3 Predpostavimo, da bi Andrej sam opravil delo v a urah, Boris v b urah in Cene v c urah. Tako bi v eni uri opravili $\frac{1}{a}$-ti del dela, $\frac{1}{b}$-ti del dela in $\frac{1}{c}$-ti del dela. Iz $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ $(a, b, c \in N$ in $c < b < a)$ dobimo $a = 6$ ur, $b = 3$ ure in $c = 2$ uri.

Z.77.4 a) trapez nariši sam!

b) $o = 14 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} \doteq$
$\doteq 32,88$ cm

$p = 42 + 6\sqrt{3} \doteq 52,39$ cm^2

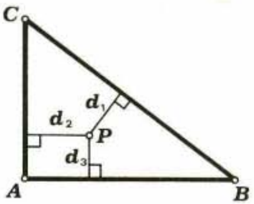


Z.77.5 Iz $3^2 + 4^2 = 5^2$ sledi, da je trikotnik ΔABC pravokotni s ploščino $p = 6$. Predpostavimo, da v trikotniku obstaja taka točka P, da za razdalje od stranic AB, BC in AC, ki jih označimo z d_1, d_2 in d_3, velja
$d_1 < 1$, $d_2 < 1$, $d_3 < 1$.
Iz slike vidimo, da velja še $p(BCP) + p(ACP) + p(ABP) = p(ABC)$. Torej je

$$6 = p(ABC) = \frac{1}{2}\cdot 3d_1 + \frac{1}{2}\cdot 4d_2 + \frac{1}{2}\cdot 5d_3 < \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = 6$$

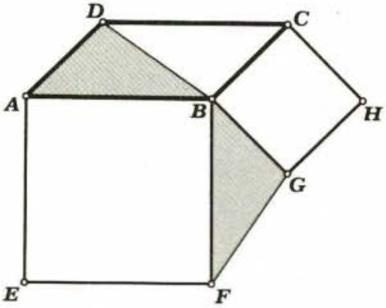
(d_1, d_2 in d_3 smo nadomestili z 1)

Predpostavka, da v trikotniku obstaja točka P z zahtevanimi lastnostmi, nas je privedla do protislovja $6<6$. Zato se moramo predpostavki odpovedati in velja njeno zanikanje (negacija): Točka z zahtevanimi lastnostmi ne obstaja.



Z.78.1 Produkt dveh števil, ki se končujeta s cifro 1, je število, ki se končuje z 1. Ker je $7^4 = 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 2401$, se $7^{10000} = (7^4)^{2500} = 2401^{2500}$ končuje z 1. Zato se $7^{10000} - 1$ končuje z ničlo in je deljivo z 10.

Z.78.2 Pokažimo, da sta trikotnika ΔBFG in ΔABD skladna:
$\overline{AB} = \overline{BF}$; $\overline{BG} = \overline{AD}$
Ker sta $\sphericalangle ABF$ in $\sphericalangle CBG$ prava kota, je
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle FBG = 180°$ in zato
$\sphericalangle FBG = \sphericalangle BAD$.
Torej sta trikotnika ΔABD in ΔBFG res skladna in je zato $\overline{GF} = \overline{BD}$.



Z.87.3 Označimo stranico šestkotnika z a in stranico trikotnika z b. Iz besedila naloge izhaja enakost
$2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ oziroma
$4a^2 = b^2$.
Ker sta a in b pozitivni števili, je $2a = b$ ali $6a = 3b$, kar pomeni, da sta obsega pravilnega šestkotnika in enakostraničnega trikotnika enaka.

Z.78.4 Označimo dolžine stranic z $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ in pripadajoče višine z v_a, v_b in v_c. Upoštevajmo

$v_a = \frac{2p}{a}$, $v_b = \frac{2p}{b}$, $v_c = \frac{2p}{c}$

Iz pogoja $v_c = v_a + v_b$

dobimo $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

in od tod $c = \frac{ab}{a + b}$.

V primeru, ko je $\overline{BC} = a = 6$, dobimo $c = \frac{6b}{6 + b} =$

$= \frac{6b + 36 - 36}{6 + b} = \frac{6(b + 6)}{6 + b} -$

$- \frac{36}{6 + b} = 6 - \frac{36}{6 + b}$

Ker morata biti tudi b in c naravni števili, nastopijo naslednje možnosti:

$b = 6$, $c = 3$ ali

$b = 3$, $c = 2$ ali

$b = 12$, $c = 4$ ali

$b = 30$, $c = 5$

Prva možnost odpade, ker mora biti trikotnik raznostraničen (ne more biti $a = 6$ in $b = 6$). Ostale možnosti odpadejo, ker ne zadoščajo trikotniški neenakosti.

Z.78.5 Dani izraz lahko zapišemo v obliki

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}) -$
$- (b_1 + b_2 + \ldots + b_{100})$

Njegova vrednost je enaka nič, ker je vsota v prvem oklepaju (vsota vseh vrst) enaka vsoti vseh 10000 vpisanih števil, prav tolikšna je vsota v drugem oklepaju (vsota vseh stolpcev).

Z.79.1 Če je strelec imel m uspešnih zadetkov in n neuspešnih zadetkov, velja $5m = 3n$ in $10 < m + n < 20$. Število n mora biti deljivo s 5, torej $n = 5k$. Potem je $m = 3k$. Ker mora biti $10 < 8k < 20$, je $k = 2$ in $m = 6$, $n = 10$. V seriji je bilo 16 strelov, od teh 6 uspešnih.

Z.79.2 Število a, ki ni deljivo s 5, lahko predstavimo kot $5k \pm 1$ ali $5k \pm 2$. Kvadrat tega števila je

$a^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k +$
$+ 1 = 5m + 1$ ali

$a^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k +$
$+ 4 = 5m - 1$

Če kvadriramo še enkrat, dobimo tako kot v prvem primeru

$a^4 = (5m \pm 1)^2 = 5n + 1$

Torej, če a^4 delimo s 5, dobimo vedno ostanek 1.

Z.79.3 $A = \frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 12 + \ldots + 100\cdot 200\cdot 300}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + 3\cdot 9\cdot 27 + \ldots + 100\cdot 300\cdot 900}$

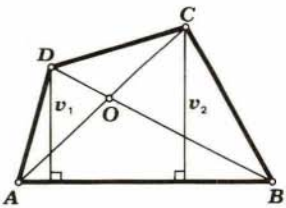
Vsi seštevanci v števcu so deljivi z $1\cdot 2\cdot 4$, vsi seštevanci v imenovalcu pa so deljivi z $1\cdot 3\cdot 9$:

$$A = \frac{1\cdot 2\cdot 4(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3)}{1\cdot 3\cdot 9(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3)} = \frac{8}{27}$$

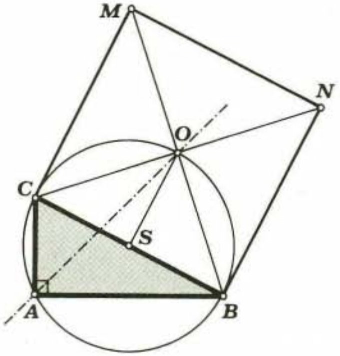
Z.79.4 Ker je $p(AOD) = p(BOC)$, je $p(ABD) = p(ABC)$. Torej je

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot v_1 = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot v_2$

oziroma $v_1 = v_2$, kar pomeni, da je $DC \parallel AB$. Štirikotnik $ABCD$ je trapez.



Z.79.5 Naj bo A vrh pravega kota, $BCMN$ kvadrat in O središče kvadrata. Trikotniku ABC očrtana krožnica ima središče v točki S (središče stranice BC) in vsebuje točko O. Ker sta središčna kota $\sphericalangle BSO$ in $\sphericalangle CSO$ prava kota, sta pripadajoča obodna kota $\sphericalangle BAO$ in $\sphericalangle CAO$ enaka. Zato je premica (A,O) simetrala kota $\sphericalangle BAC$.



Z.80.1 Označimo skupno vrednost bonov z x. Ker je za zajtrk porabila $\frac{x}{5}$, za živež pa $\frac{2x}{5}$, t. j. dvakrat toliko kot za zajtrk, je plačala za zajtrk z 2 bonoma po 15 din (30 din), živež pa s 3 boni po 20 din (60 din). Skupna vrednost bonov, ki jih je imela s seboj, je 150 din.

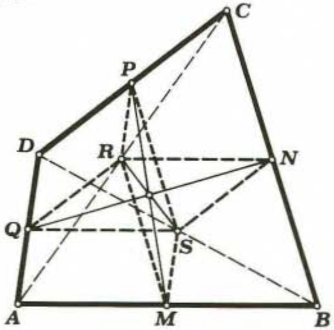
Z.80.2 Pogoj, ki ga izpolnjujejo števila a, b, c in d, lahko zapišemo v obliki

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 = 0$$

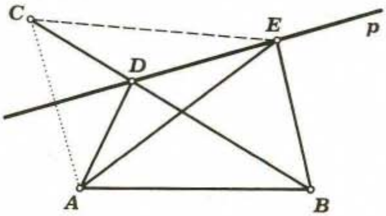
iz česar sledi $a = b$, $b = c$ in $c = d$ in zato $a = b = c = d$.

Z.80.3 Produkt $n^2(n^2 - 1)$ lahko zapišemo v obliki $n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$ in zanj vemo, da je deljiv s tri, saj so v njem kot faktorji tri zaporedna naravna števila. Če je n sodo število, je $n \cdot n$ deljivo s 4, če pa je n liho število, sta $n - 1$ in $n + 1$ sodi števili in je njun produkt deljiv s 4. Zato je število $n^2(n^2 - 1)$ vedno deljivo z 12.

Z.80.4 Štirikotnika $QSNR$ in $MSPR$ sta paralelograma. Ker se diagonali paralelograma razpolavljata in imata oba paralelograma skupno diagonalo RS, se sekajo premice (Q,N), (M,P) in (R,S) v isti točki (središče diagonale RS).



Z.80.5 Obseg trikotnika ABD je enak $\overline{AB} + \overline{BC}$, trikotnika ABE pa $\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{CE}$. Ker za trikotnik CBE velja $\overline{CB} < \overline{BE} + \overline{CE}$, če je le E različna od D (trikotniška neenakost), smo pokazali, da je obseg trikotnika ABD manjši od obsega trikotnika ABE.



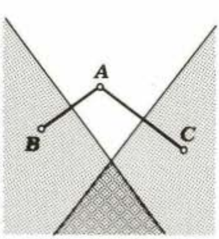
Z.81.1 Označimo število $401512x$ z a. Ostanek pri deljenju števila a s 3 je enak ostanku pri deljenju številske vsote $13 + x$ oziroma $1 + x$ s 3. Ostanek pri deljenju števila a s 5 pa je ostanek pri deljenju števila x s 5. Torej bosta ostanka pri deljenju števila a s 3 in 5 enaka za $x = 5$ (ostanek 0)
za $x = 6$ (ostanek 1)
za $x = 7$ (ostanek 2)

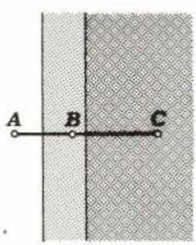
Z.81.2 Označimo z x del posode pred dolivanjem. Po prvem mešanju je v posodi
$0{,}85x + 0{,}21(1 - x) =$
$= 0{,}64x + 0{,}21$ delov čistega alkohola.
Po drugem mešanju pa
$(0{,}64x + 0{,}21)x +$
$+ 0{,}21(1 - x) = 0{,}70$
odkoder dobimo
$x = \frac{7}{8} = 0{,}875$

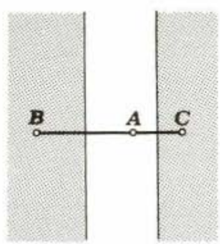
Z.81.3 Denimo, da bi bilo v vsakem naselju različno število prebivalcev. Potem bi bil v prvem naselju vsaj en prebivalec, v drugem naselju vsaj dva prebivalca itn., v 5990. naselju pa vsaj 5990 prebivalcev. Torej bi bilo v SR Sloveniji vsaj
$1 + 2 + \ldots + 5990 =$
$= 17\,943\,045$
prebivalcev, kar pa je v nasprotju s popisom. S tem smo pokazali, da sta v SR Sloveniji vsaj dve naselji z enakim številom prebivalcev.

Z.81.4 Ker je $v_a \cdot v_b = v_c \cdot c = 2p = v_b \cdot b = v_a \cdot a$, je $v_b = a$ in $v_a = b$ in je trikotnik ABC pravokoten.

Z.81.5 Simetrala daljice AB (AC) razdeli ravnino na dve polravnini, tako da za vse točke M polravnine, ki ne vsebuje točke A, velja $d(M,A) > d(M,B)$ ($d(M,A) > d(M,C)$). Če je presek teh dveh polravnin neprazen, obstajajo točke, ki ne zadoščajo pogoju v nalogi. Če točka A ne leži na premici (B,C), sta simetrali nekolinearni in je presek teh dveh polravnin neprazen. Če pa je A na premici (B,C), lahko že iz skice razberemo, da je presek prazen le tedaj, ko leži točka A na daljici BC.





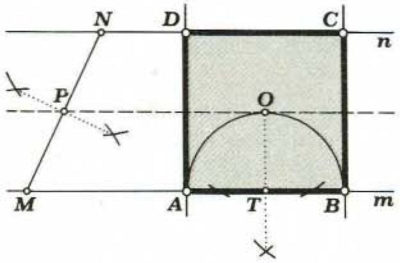


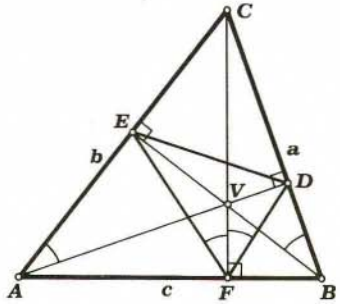
Z.82.1 Ker je nekdo moral zmagati in ker je vsak postavil sebe na prvo mesto, je jasno, da je nekdo pravilno zadel prvouvrščenca. Ker so vse druge napovedi napačne, ne more biti na drugem mestu niti tekmovalec B niti A niti C. Zato je drugi D. Podobno ugotovimo, da je na tretjem mestu tekač A. Na zadnjem mestu sta lahko le B ali C. Imamo torej dve možnosti: $BDAC$ ali pa $CDAB$. Obe rešitvi ustrezata pogojem naloge. Pravi vrstni red na cilju je bodisi $BDAC$, bodisi $CDAB$.

Z.82.2 Opazujemo ostanek pri deljenju števil 3^n s 13, za $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dobimo zaporedje ostankov 3, 9, 1, 3, 9, 1, ... ki se ponavlja. Od tod sklepamo, da dajejo vsa števila oblike 3^{3k} ostanek 1, števila oblike 3^{3k+1} ostanek 3 in števila oblike 3^{3k+2} ostanek 9. Ker je 100 oblike $3k + 1$, saj je $100 = 3\cdot 33 + 1$, je ostanek pri deljenju števila 3^{100} s 13 enak 3. Do istega sklepa pridemo z naslednjim razmislekom.
$3^{100} = 3\cdot 27\cdot 27\cdot 27\cdot \ldots \cdot 27$. Ker daje 27 ostanek 1 pri deljenju s 13 in ker je ostanek produkta enak ostanku produkta ostankov, je ostanek pri deljenju števila 3^{100} s 13 enak $3\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1 = 3$.

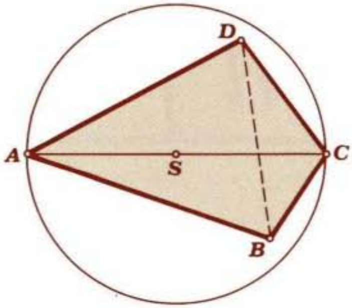
Z.82.3 Naj bo P razpolovišče daljice MN. Skozi točko M potegnemo premico m, vzporedno premici OP. Vzporednico k njej (n) potegnemo tudi skozi točko N. Premici m in n sta nosilki stranic AB oziroma CD kvadrata, saj leži na eni točka M, na drugi pa točka N in je točka O od obeh premic enako oddaljena. Skozi točko O potegnemo pravokotnico na premico m, tako da jo seka v točki T. Z A in B označimo presečišči kroga s središčem v T in polmerom OT s premico m. Skozi A potegnemo vzporednico z OT in označimo z D njeno presečišče s premico n. Vzporednica skozi B naj seka premico n v točki C. Kvadrat $ABCD$ je tako konstruiran.

Z.82.4 Ker je trikotnik ABC ostrokoten, leži višinska točka V v njegovi notranjosti. Označimo nožišča višin na stranice a, b in c zapored z D, E in F. (Glej sliko!) Kota AEV in AFV sta prava, zato ležijo oglišča četverokotnika $AFVE$ na skupni krožnici. Podobno ugotovimo, da je mogoče očrtati krožnico četverokotnikoma $BDVF$ in $CEVD$. Ker sta potemtakem kota EAV in EFV obodna kota nad istim lokom, sta skladna. Iz istega razloga sta skladna kota VBD in VFD. Ker sta skladna tudi kota EAV in VBD, saj sta oba ostra in imata pravokotne krake, lahko sklenemo, da sta prav tako skladna kota EFV in VFD. Torej je višina na stranico c simetrala kota EFD. - Na enak način sklepamo za kota FDE in DEF. (Naloga je bila l. 1950 na republiškem tekmovanju za 1. in 2. razred srednjih šol!)





Z.82.5 Naj bo kot pri oglišči A edini ostri kot četverokotnika $ABCD$. Glej sliko! Nad premerom AC konstruiramo krožnico. Ker sta kota pri D in B topa, ležita točki B in D znotraj te krožnice. Razdalja poljubnih dveh točk v notranjosti krožnice pa je krajša od premera krožnice. Zato je diagonala BD krajša od diagonale AC.

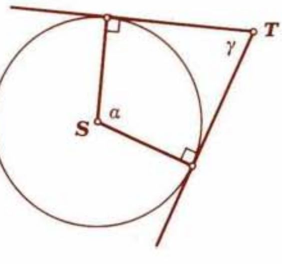


R.81.1 Peter je dobil za 20 % manj krompirja, kot je pričakoval.

R.81.2 Očitno so $4x^4$, $8x^2$ in 4 soda števila za vsako naravno število x.
Če je x sodo število, je $x^3 + x$ tudi sodo število in zato je tudi vrednost veččlenika $P(x)$ sodo število.
Če pa je x liho število, je $x^3 + x$ sodo število (vsota dveh lihih števil) in zato vrednost veččlenika $P(x)$ sodo število.

R.81.3 Razcep števila:
$2520 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$
Najmanjše naravno število je $2\cdot 5\cdot 7 = 70$.

R.81.4 $\alpha = \frac{3}{10}\cdot 360^\circ = 108^\circ$
$\gamma = 180^\circ - \alpha = 72^\circ$



R.81.5 Glej rešitev naloge Z.71.5!

R.82.1 Iz besedila sledi enačba:
$$x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}(x - \frac{2}{5}x) = 8.$$
Njena rešitev je: $x = 20$
Dolžina vsega kabla je 20 m.

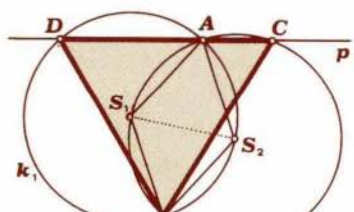
R.82.2 $100a + 10b + c$;
$100c + 10b + a$
$(100a + 10b + c) - (100c +$
$+ 10b + a) = 99a - 99c =$
$= 99(a - c) = 9\cdot 11(a - c)$;
$11\ 9\cdot 11\cdot(a - c)$

R.82.3

R.82.3	Jože	Boris
dolžina koraka	$0{,}9\,x$	x
število korakov	1, $1\cdot n$	n
pot	1, $1\cdot n\cdot 0{,}9\cdot x = 0{,}99\,nx$	$n\,x$

Boris je prišel prej v šolo.

R.82.4 $\sphericalangle AS_1B = \sphericalangle AS_2B = 120^\circ$
$\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\sphericalangle AS_1B = 60^\circ$
$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AS_2B = 60^\circ$
(odnos med obodnim in središčnim kotom nad istim lokom) Torej je ΔABC enakostraničen.



R.82.5 Branka je Verina vnukunja ali Vera je Brankina babica.

PRESEKOVA KNJIŽNICA

1. Vidav I., JOSIP PLEMELJ - Ob stoletnici rojstva, 1975
2. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešnih nalog iz matematike s tekmovanj učencev šestih, sedmih in osmih razredov osnovnih šol SRS, 1977
3. Prosen M., ASTRONOMSKA OPAZOVANJA - Kako v astronomiji s preprostimi sredstvi opazujemo in merimo, 1978
4. Strnad J., ZAČETKI SODOBNE FIZIKE - Od elektrona do jedrske cepitve, 1979
5. Strnad J., RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE - Odlomki iz posebne in splošne teorije relativnosti za srednješolce, 1979
6. Landau L.D., Rumer J.B., KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI - Nobelov nagrajenec predstavi spremenjene poglede na prostor, čas in maso, 1979
7. Križanič F., UKROČENA MATEMATIKA - Zapoznelo opozorilo na računske zakone ali fižol namesto množic, 1981
8. Ranzinger P., PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA - Fotografije Bojan Dintinjana, 1981
9. Strnad J., ZAČETKI KVANTNE FIZIKE - Od kvanta do snovnega valovanja, 1982
10. Kuščer I., ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE - Čuda se kažejo ob vsakem koraku, 1982
11. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol SR Slovenije, 1982
12. Ranzinger P., NAŠE NEBO - Astronomske efemeride 1983, 1982
13. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol, 1983
14. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol, 1983.