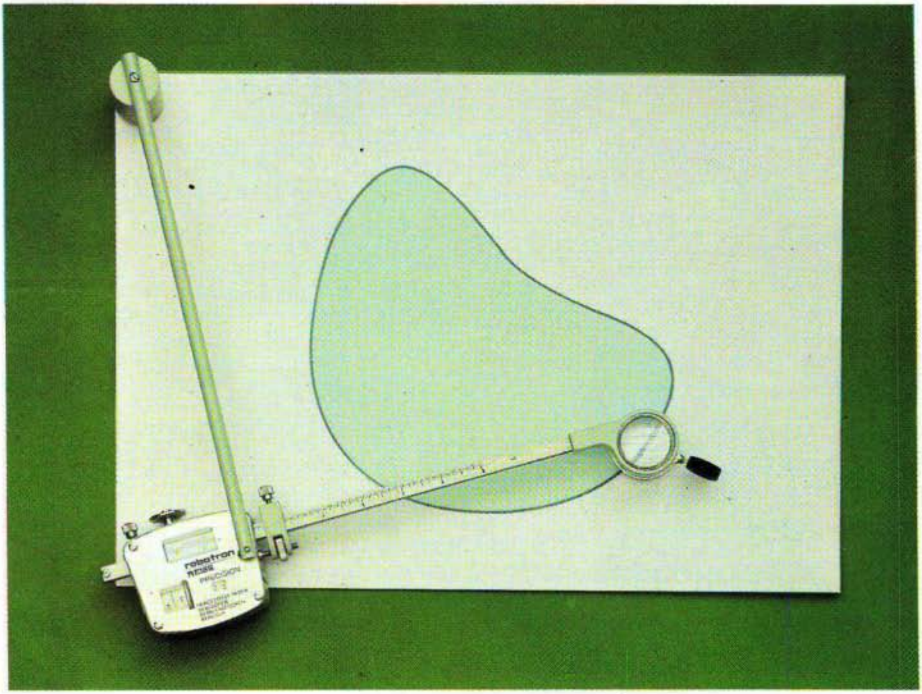
presek 3

X
1982-83



LIST ZA MLADE

MATEMATIKE

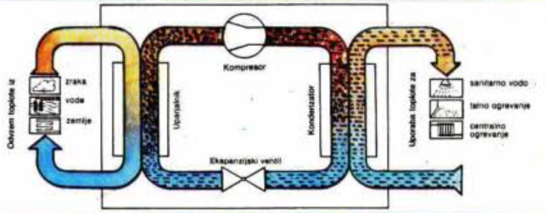
FIZIKE

ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

loške tovarne hladilnikov škofja loka

Toplotna črpalka VTČ-2 YU
Toplotna crpka VTČ-2 YU



I

Fotografija planimetra, ki ga rabijo geometri pri svojem delu (Foto Marjan Smerke)

II

Toplotna črpalka VTČ-2 YU Loških tovarn hladilnikov. Dovajati ji je treba električno moč 0,92 kW, oddaja pa toplotni tok okoli 2,5 kW. Grelno število je malenkost manjše kot 3. Toploto jemlje okolnemu zraku, ki mora imeti temperaturo nad 7°C, in jo oddaja vodi s temperaturo do 52°C. Kot hladilno snov rabi diklordifluormetan.

III

Bistrovidec - Praštevilske ogrlice (Vladimir Batagelj)

IV

Zodiak (živalski krog), ilustracija iz 16. stoletja. Glej članek na 136. strani.

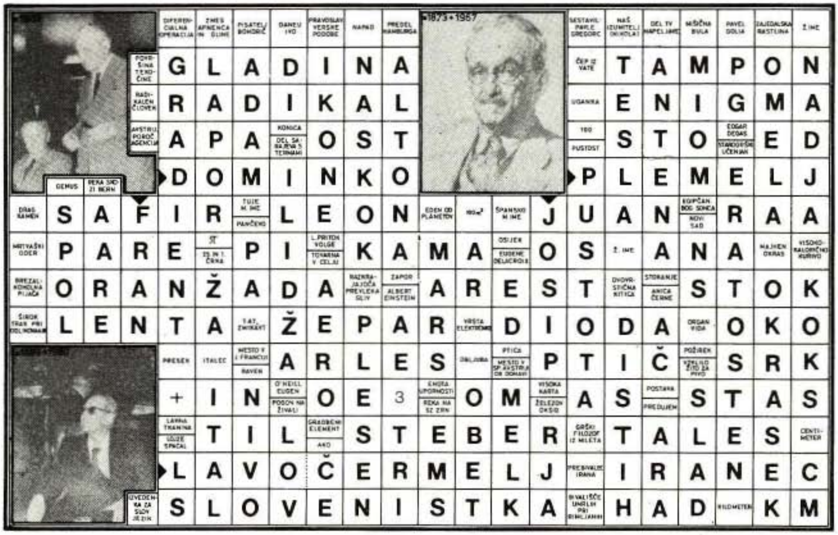
P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome.
10. letnik, šolsko leto 1982/83, 3. številka, str.97-160

Rokopis je natipkala Ivanka Breznikar, jezikovno ga je pregledala Ivanka Šircelj, slike je narisal Vili Vrhovec.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, pp 6, tel.štev. (061) 265-061/53. Štev. žiro računa: 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 50100-620-107-257300-5694/4. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 125.- din, za skupinska pa 100.- din, za inozemstvo 5 $, 10.000 Lit, 100 Asch. Posamezna številka stane 40.- din, za člane 32.- din.

List sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk: Časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.
List izhaja štiri do šestkrat letno. Naklada 20.000 izvodov.



MATEMATIKA

IGRA ŽIVLJENJA

V drugi številki Preseka iz leta 1977/78 sem prebral članek o ploskavcih. Tudi sam sem se z njimi ukvarjal in mislim, da je njihovo življenje tako zanimivo, da bi bilo o njem vredno povedati še kaj več. Ploskavce je izumil ameriški profesor *John Conway*. Zamislil si jih je kot KOLONIJE CELIC, ki se po določenem pravilu razvijajo iz roda v rod. Temu razvijanju je rekel IGRA ŽIVLJENJA. Tudi mi bomo namesto imena ploskavec raje uporabljali ime kolonija celic ali kar rod.

Ročno računanje rodov je v večjih primerih kar brezupno opravilo, zato smo vanj vpregli računalnik. Za njegovo uspešno programiranje se moram zahvaliti sodelavcu *Štefanu Kirnu*. Preden predstavimo izsledke našega raziskovanja, pa moramo seveda obnoviti znanje o igri življenja.

Pred seboj imejmo kvadratno mrežo (nizki karo). V vsakem kvadratku te mreže lahko živi *celica*. Njene *sosede* so tiste celice, ki živijo v sosednjih (dotikajočih se) kvadratkih. Vsaka celica ima tako največ 8 sosed. Rodove bomo večkrat hoteli šteti, začetni koloniji celic bomo rekli prvi rod. Pravilu, po katerem iz nekega rodu nastane naslednji rod, pa bomo rekli *rodovni zakon*. Opišemo ga takole:

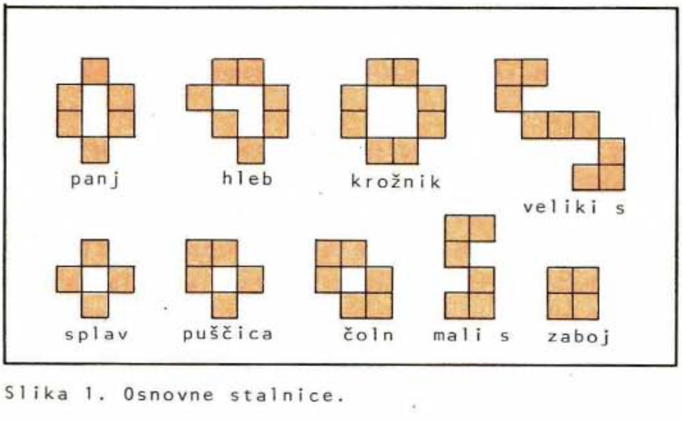
- Celice se rodijo v tistih praznih kvadratkih, ki imajo natančno 3 sosede.
- Celice preživijo, če imajo 2 ali 3 sosede, drugače odmrejo.

Rodovni zakon potrebuje dodatno razlago. Celica preživi le tedaj, kadar ima ravno pravšnje število soséd. Če jih je preveč (4 ali več), imamo opravka s prenaseljenostjo, celica nima dovolj hkrane in odmre. Kadar pa je soséd premalo (nič ali ena), pa lahko sklepamo, da so celice medsebojno odvisne in potrebuje vsaka za svoj obstoj pomoč vsaj dveh soséd, sicer zaradi prevelike osamljenosti odmre.

Kako pa je z rojstvom nove celice? Zanj so potrebne tri sosede. Tu si bomo dovolili šalo. Za rojstvo človeka sta potrebna dva odrasla človeka dveh različnih spolov. Za rojstvo celice potemtakem tri odrasle celice treh različnih spolov. Naj šalo nadaljujem. Kadar je število soséd preveliko (4 ali več), pa stopi v veljavo znan pregovor "Mnogo babic, kilavo dete" in se celica sploh ne rodi.

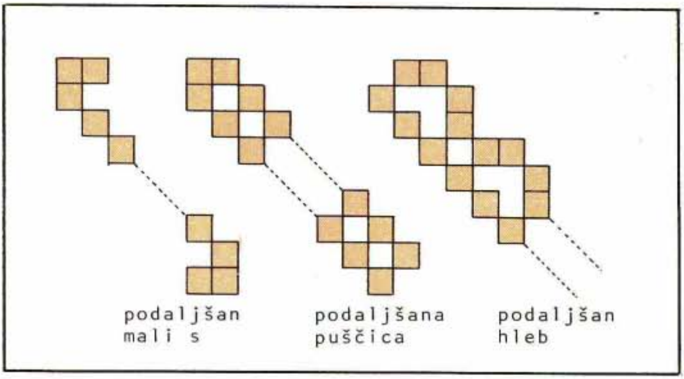
Sprehodimo se sedaj med nekaterimi primeri igre življenja. Za začetek poglejmo nekatere posebne oblike kolonij celic.

1) STALNICE so kolonije, ki se pri prehodu v naslednji rod ne spremenijo. Celice ne odmirajo niti se ne rojevajo. Slika 1 prikazuje nekatere značilne osnovne stalnice.



Slika 1. Osnovne stalnice.

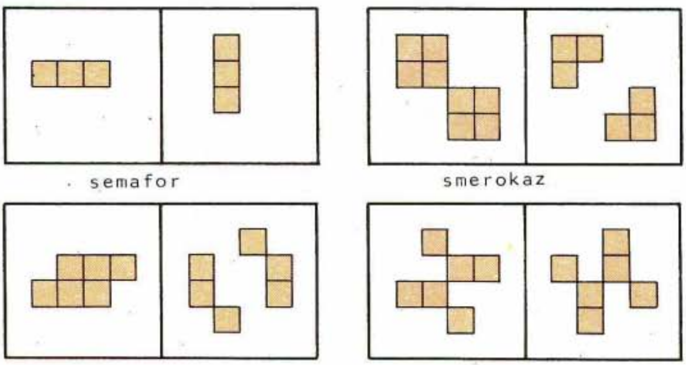
Nekatere stalnice, na primer *splav*, *puščica*, *čoln* in *mali s*, imajo zanimivo lastnost, lahko jih namreč poljubno podaljšamo, pa so še vedno stalnice. Slika 2 prikazuje tri podaljšane stalnice.



Slika 2. Nekatere podaljšane stalnice

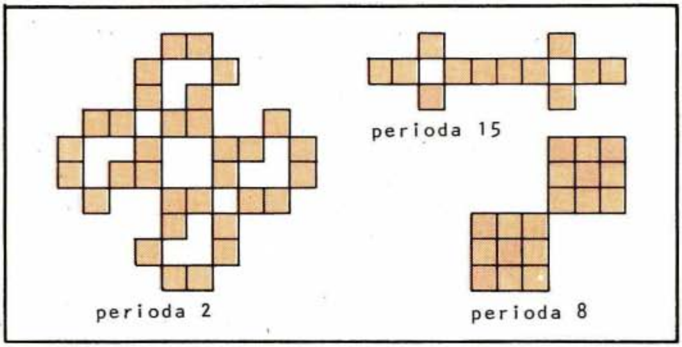
Nekatere stalnice pa lahko zlagamo drugo poleg druge in z njimi pokrijemo vso ravnino. Pravokotna skladovnica zabojev, ki so med seboj oddaljeni po en kvadratek, je primer take stalnice. Pozneje jo bomo zopet srečali.

2) NIHALA so kolonije celic, ki se sicer spreminjajo, vendar imajo po p spremembah spet tako obliko, kakršno so imele na začetku. Število p je perioda nihala.



Slika 3. Nekaj nihal s periodo 2.

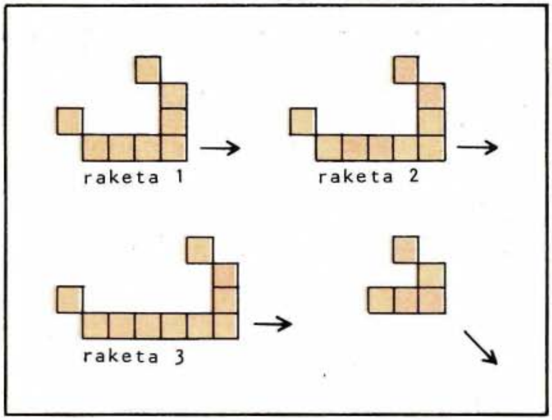
Slika 4 pa kaže samo začetne oblike treh nihal.



Slika 4. Nihala

Tudi stalnice imamo lahko za nihala, ki se ne spreminjajo in imajo zato periodo 1 (naslednji rod, po enem prehodu, ima isto obliko).

3) POTNIKI so taka nihala, ki se pri nihanju še premikajo v določeno smer. Potnika z imenom *letalo* smo že spoznali v omenjenem prispevku o ploskavcih. Na sliki 5 so prikazani vsi znani potniki. Zanimivo je, da imajo *vsi* periodo 4, torej imajo po štirih spremembah prvotno obliko, le da se nahajajo premaknjeni za en kvadratek v smeri, ki jo nakazuje puščica.

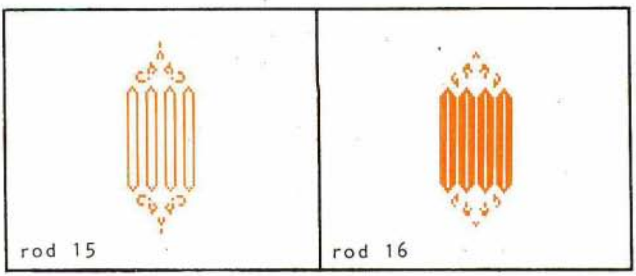


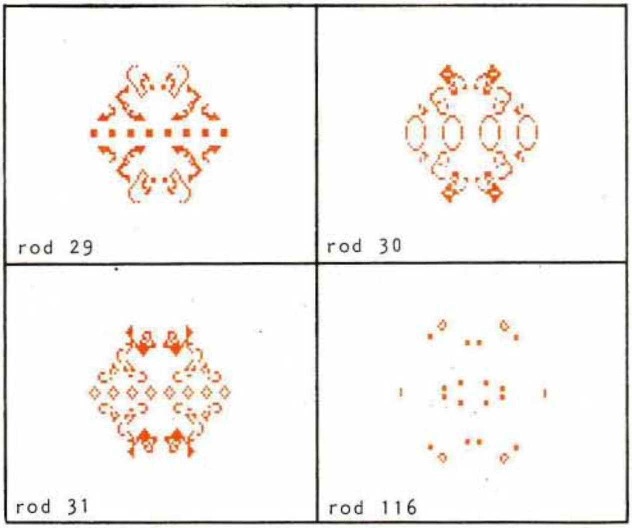
Slika 5. Potniki

Pri potnikih se pojavi zanimivo vprašanje: Kaj se zgodi, če kam trčijo? Z računalnikom smo si nekatere trke ogledali. Zaradi obširnosti te teme povejmo le na kratko, da lahko iz "karamboliranih" potnikov nastane marsikaj, celo novi potniki, lahko pa tudi po nekaj rodovih vse celice odmrejo in kolonija izgine. Za podrobnosti pa nimamo ne časa ne prostora.

Sedaj pa pridejo na vrsto kolonije celic, ki ne sodijo v nobeno od zgornjih treh vrst.

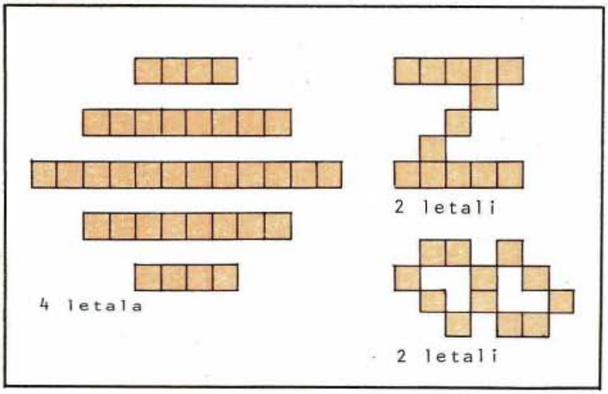
4) Oglejmo si najprej *črto*. Ta je lahko *ležeča* (ali *pokončna*, če papir tako obrnemo) ali *diagonalna*. Diagonalna črta ni zanimiva, saj kmalu izgine, kot se lahko sami prepričate. V vsakem rodu namreč izgubi po dve krajni celici in jo tako pobere po $(n+1)/2$ rodovih. Tu je n število celic v črti (dolžina črte). Z ležečo črto pa je drugače. Na sliki 6 si lahko ogledate, kaj nastane iz pokončne črte z dolžino 60 celic. Prikazani so 15., 16., 29., 30., 31. in 116. rod. Zadnji rod je sestavljen iz 16 *zabojev*, 4 *panjev* in dveh *semaforjev*. Pri naših poskusih se je izkazalo, da se pri dovolj velikem številu rodov ležeča črta razvije v posamezne skupine, ki so stalnice, nihala (predvsem *semafor*) in potniki (zlasti *letala*). Dobili smo celo občutek, da se to pripeti kakršnikoli koloniji celic, če taka kolonija sploh ne izgine. Zelo verjetno ne obstaja kolonija celic, ki bi slej ko prej prerasla vso ravnino.





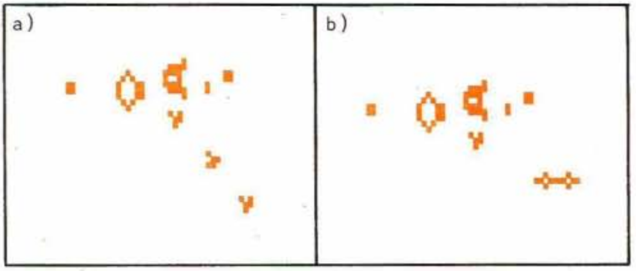
Slika 6. Razvoj pokončne črte dolžine 60

5) Posebno zanimive kolonije celic so PUŠKE. Te po določenem številu rodov "izstrelijo" enega ali več potnikov. Na sliki 7 so tri puške. Dve "izstrelita" po dve *letali*, iz ene pa nastanejo celo štiri *letala*.



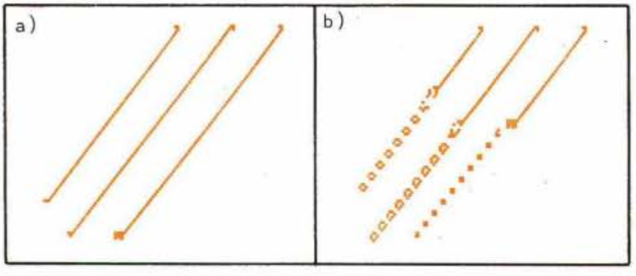
Slika 7. Puške

6) Še bolj zanimivi pa so MITRALJEZI. To so namreč nihala, ki so hkrati tudi puške. Na žalost poznamo samo en mitraljez, ki izstreljuje *letala*. Tega prikazuje slika 8. Tu bomo omenili še eno kolonijo celic z imenom *požiralnik*. Če ga postavimo na pravo mesto k mitraljezu, po "požrl" vsa *letala*, ki iz mitraljeza prihajajo. Ta požiralnik je tudi nihalo (glej sliko 4), prikazan pa je na sliki 8/b.



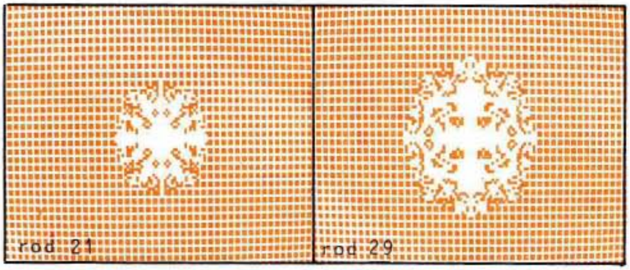
Slika 8. Mitraljez, mitraljez s požiralnikom

7) Na sliki 2 smo videli, kako lahko podaljšamo *mali s*. Če sedaj zamenjamo spodnji konec s čim drugim (kot na sliki 9/a), dobimo kolonijo celic, ki ni več stalnica, ima pa zelo zabaven razvoj. V naslednjih rodovih se namreč novi spodnji konec v obliki *motnje* pomika proti zgornjemu in pri tem podira bivši *mali s*. Nekatere motnje puščajo za seboj stalnice. Kolonije s tako motnjo se imenujejo *kosilnice*. Tri si lahko ogledate na sliki 9.



Slika 9. Kosilnice

8) Vemo že, da je pravokotna skladovnica zabojev, ki so med seboj oddaljeni za en kvadratek, stalnica. Med dva zaboja postavimo novo celico in izgubili smo stalnico. Nova celica, recimo ji *virus*, povzroči motnjo (*okužbo*), ki se širi na vse strani in načenja bivšo skladovnico. Za tako kolonijo se kar ponuja ime *virusna okužba*.

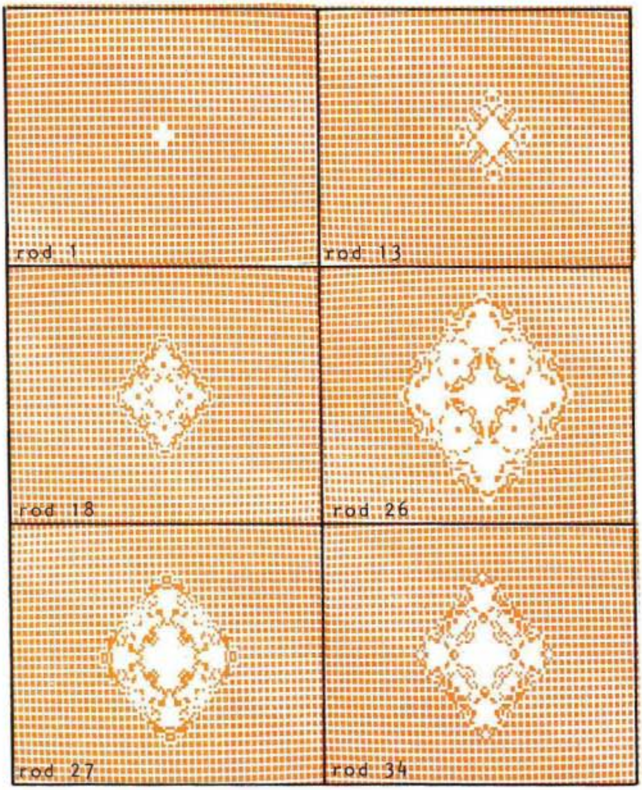


Slika 10. Virusna okužba

Seveda lahko na začetku vnesemo tudi več celic, ali pa kak zaboj odnesemo, v vsakem primeru dobimo virusno okužbo. Izjema je le ena. Skladovnica zabojev je namreč imuna za virus, ki ga postaviš na sredo med štiri sosednje zaboje, tako da se dotika njihovih oglišč. Sam ugotovi, zakaj. Na sliki 11 je prikazanih nekaj rodov življenja virusne okužbe, ki se je začela z odvzemom petih zabojev.

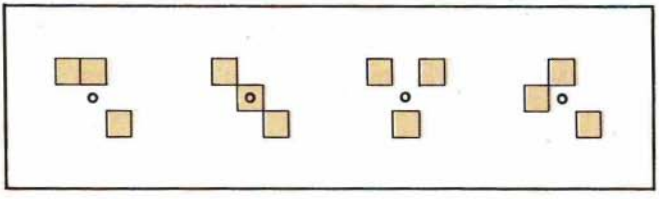
Poseben čar igre življenja je lepota vzorcev, ki jih sestavljajo celice. Včasih so presenetljivo podobni ornamentom z orientalskih preprog. Tu moramo omeniti še precej očitno lastnost: pri prehodu iz enega v naslednji rod se ohrani simetrija. Če so namreč v neki koloniji celic te razvrščene simetrično, velja isto tudi za celice naslednjega rodu.

Ko opazujemo življenje kake kolonije celic, nam pride nehote na misel, da bi bilo zanimivo obrniti življenje v nasprotno smer - nazaj. Žal tu naletimo na nepremagljivo oviro, pot nazaj ni enolična. Do določene kolonije celic lahko pridemo na več načinov.



Slika 11.

Slika 12 prikazuje štiri kolonjce celic, ki vsebujejo po tri celice, iz njih pa nastane v vsakem primeru ena celica (na sliki je označena s piko).

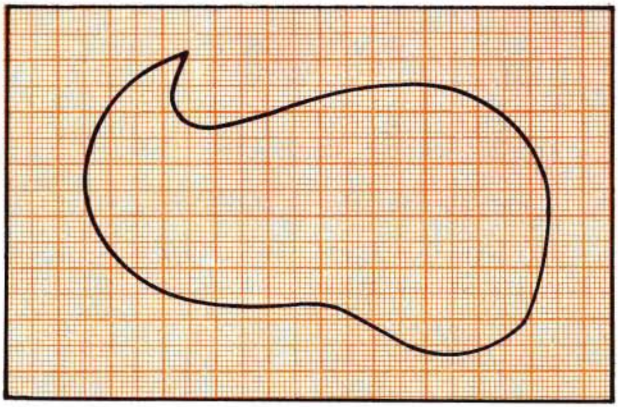


Slika 12.

Roman Rojko

NAREDIMO SI PLANIMETER

Prav gotovo znate izračunati ploščino kvadrata, trikotnika, kroga... Za take "lepe" like imamo na voljo računske izraze, ki povezujejo ploščino z dolžinami stranic, višin, s polmerom ..., ki jih prav enostavno izmerimo. Pa znate izmeriti tudi ploščino? Šlo bi z milimetrsko mrežo, na primer (glej sliko 1). Na lik položimo prozornico z milimetrsko mrežo in preštejemo kvadratke, ki ležijo znotraj lika. Nekaj sitnosti je s kvadratki na robu lika, a tam ocenjujemo. Če lik le ni preveč "čuden", dobimo kar natančen rezultat. Ploščino lahko izmerimo tudi tako, da lik prerišemo na papir in ga s škarjami izrežemo ter stehtamo. Nato stehtamo še lik, ki mu ploščino poznamo. Če je papir homogen, je razmerje mas obeh likov enako razmerju ploščin. Iz razmerja izračunamo neznano ploščino. Če imate bujno domišljijo, si lahko izmislite še kakšen način, s katerim bi merili ploščine ravninskih likov.

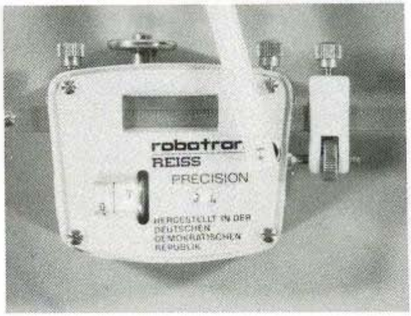


Slika 1. Ploščino lahko izmerimo tako, da na lik položimo prozornico z milimetrsko mrežo in seštejemo kvadratke, ki so znotraj lika. V našem primeru je ploščina lika 3520 mm^2.

Geometri imajo napravo, s katero igraje izmerijo ploščino poljubnemu ravninskemu liku. Tej napravi pravijo *planimeter*. Natančna izvedba takega instrumenta je na naslovnici.Planimeter spominja na škarje, ker ima gibljiva kraka. Konec enega kraka je v točki *P* vrtljivo vpet. Tej točki rečemo *pol*, kraku pa *polarni krak*. Na koncu drugega kraka - pravimo mu *obhodni krak* - je povečevalno steklo z označeno *obhodno točko O*. S tem krakom drsimo po krivulji, ki obdaja lik tako, da je obhodna točka ves čas na krivulji. Ko prevozimo lik in pridemo spet v izhodiščno točko, preberemo ploščino na kolescu *K*. To kolesce med obhodom delno drsi, delno pa se kotali, saj je os, okrog katere je kolesce gibljivo, vzporedna z obhodnim krakom.

Skala na kolescu je umerjena, da lahko preberemo ploščino objetega lika kar v kvadratnih milimetrih. Pred odhodom moramo postaviti kolesce na 0 in tudi šteti polne obrate kolesca, ko merimo like z večjo ploščino. Števnik obratov je pri boljših instrumentih vgrajen. Navadno se ne trudimo, da bi postavili kolesce na 0, temveč ga odčitamo pred obhodom in po njem, razlika pa pove ploščino lika (glej sliko 2).

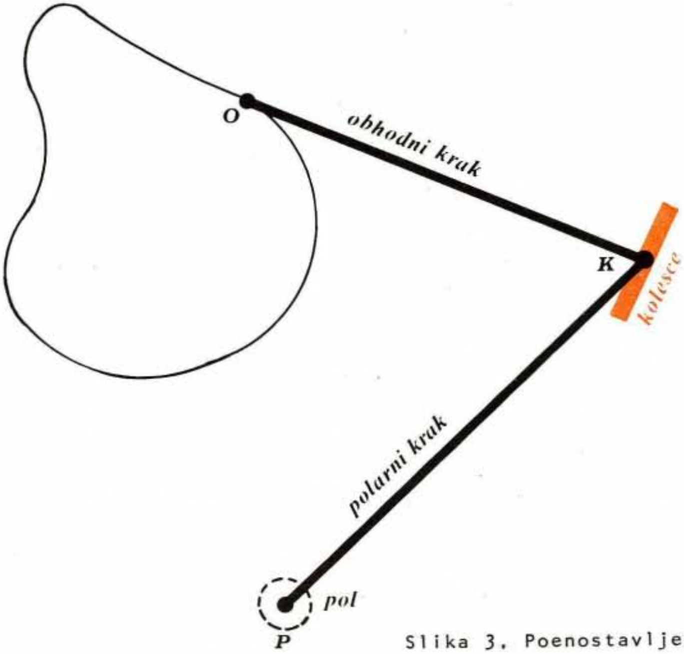
a)



b)

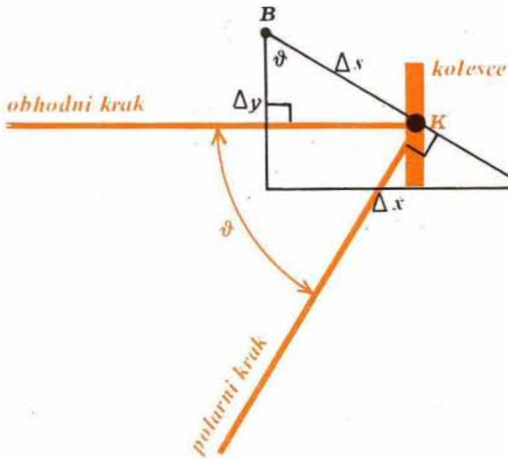
Slika 2. Lega kolesca pred obhodom (a) in po njem (b). Številka v desnem okencu se poveča za 1, ko kolesce naredi cel obrat okrog svoje osi. Pred obhodom (a) je odčitek 1255 delcev, po obhodu (b) pa 3647 delcev. Razlika je torej 2392 delcev. V zgornjem okencu vidimo, da je dolžina obhodnega kraka postavljena na dolžino 10,0. Planimeter je v tem primeru tako nastavljen, da pomeni 1 delec 10 mm^2. Ploščina merjenega lika je torej 23920 mm^2

Zakaj je zasuk kolesca kar sorazmeren s ploščino objetega lika? Oglejmo si načelo, po katerem ta zanimiva naprava deluje. Planimeter si nekoliko poenostavimo (glej sliko 3). Polarni in obhodni krak sta gibljivo speta v točki K, polarni pa je vrtljivo vpet v polu P. Kolesce bomo namestili tako, da se vrti okrog obhodnega kraka, papirja pa naj se dotika ravno pod točko K. Na ta način se izognemo vrtenju kolesca, kadar premikamo le obhodni krak. V resnici ta omejitev ni pomembna, le razlago nam olajša.

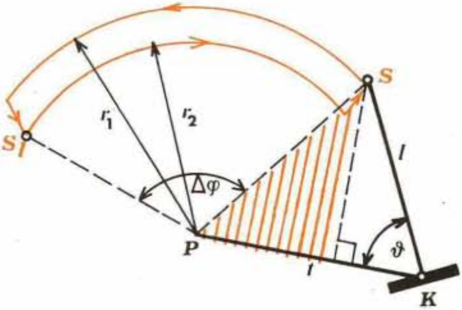


Slika 3. Poenostavljen planimeter.

Najprej si oglejmo, kolikšno razdaljo prekotali kolesce, ko se točka K premakne za kratko razdaljo Δs. S slike 4 vidimo, da bo kolesce prekotalilo le pot $\Delta y = \Delta s \cos \vartheta$, vmes pa bo ves čas še drselo. Pokažimo, da s tem instrumentom lahko izmerimo ploščino zelo ozkemu liku, ki ga o-



Slika 4. Kolesce prekotali pot Δy, predrsa pa pot Δx, ko se točka K premakne za Δs iz točke A v točko B.



Slika 5. S planimetrom lahko izmerimo ploščino zelo ozkemu liku, ki ga omejujeta krožnici s središčem v polu.

mejujeta krožnici s središčem v polu (glej sliko 5). S točko O obhodimo lik od točke S do S_1 in nato po spodnji krožnici nazaj v S. Ko potujemo po zgornji krožnici od S do S_1 , prepotuje točka K razdaljo $p\ \Delta\phi\pi/180$. Kot ϑ je namreč skoraj ves čas enak, kot ϕ pa se spremeni od začetnega ϕ_z do končnega ϕ_k, torej za $\Delta\phi$. Točka K opiše del krožnice s polmerom, ki je enak dolžini polarnega kraka. V bližini točke S_1 se sicer kot ϑ prav malo spremeni, kar pa zanemarimo, ker je obravnavani lik zelo ozek. Kolesce zabeleži razdaljo $t\Delta\phi\Pi/180.\cos\vartheta$, ker deloma drsi. Iz Pitagorovega izreka za počrtan trikotnik na sliki 5 dobimo:

$$r_1^2 = (l\sin\vartheta)^2 + (t-l\cos\vartheta)^2 = t^2+l^2-2tl\cos\vartheta$$

(Nekateri morda poznate to enačbo kot kosinusov izrek.) Vidimo, da velja

$$\frac{(t^2+l^2)-r_1^2}{2l} = t\cos\vartheta$$

Kolesce torej prekotali pot

$$\Delta y_1 = \Delta\phi\frac{\Pi}{180}\left[\frac{t^2+l^2-r_1^2}{2l}\right] = \frac{1}{l}\left[\frac{\Pi(l^2+t^2)\Delta\phi}{360} - \frac{\Pi r_1^2}{360}\Delta\phi\right]$$

Ko gremo od S_1 nazaj k S, se kolesce spet kotali, a to pot v obratno smer. Podobno kot zgoraj je njegov zasuk

$$\Delta y_2 = \frac{1}{l}\left[\frac{\Pi(l^2+t^2)}{360}\Delta\phi - \frac{\Pi r_2^2}{360}\Delta\phi\right]$$

le da sedaj namesto r_1 pišemo r_2, torej manjši radij, ker drsimo po spodnji krožnici. Kot $\Delta\phi$ je seveda enak, saj pridemo spet v začetno točko, kjer se obhod konča. Kolesce pokaže razliko poti

$$\Delta y = \Delta y_2-\Delta y_1 = \frac{1}{l}\left[\frac{\Pi(r_1^2-r_2^2)}{360}\Delta\phi\right]$$

V oklepaju hitro spoznamo ploščino našega lika, saj je le-ta razlika med ploščinama krožnih izsekov s kotom $\Delta\phi$. Kolesce torej prekotali pot, ki je sorazmerna s ploščino obkroženega lika. Iz zadnje enačbe sledi

$$\Delta p = l\Delta y$$

Poljuben lik sedaj razrežemo na ozke pasove, za katere smo pokazali, da jim s planimetrom lahko izmerimo ploščino (glej sliko 6). Sedaj merimo ploščino vsakemu liku posebej, kolesce pa sešteva delne ploščine. Obkrožati moramo vedno v istem smislu, recimo v smeri, nasprotni smeri urinega kazalca, pri prehodu na drug lik pa moramo kolesce dvigniti, da se ne zasuče dodatno.

To je seveda hudo nerodno. S slike 6 pa hitro uvidimo, da se ni treba voziti po krožnicah. Ko obkrožamo spodnji pas, gremo po zgornji krožnici od desne na levo, ko obkrožamo sosednjega zgoraj, pa ravno v nasprotni smeri. Oba obhoda skupaj seveda ne premakneta kolesca, zato ju ni treba delati. Vse mučno delo odpade, ostane le rob danega lika, ki pa ga lahko obkrožimo brez prestavljanja in dviganja kolesca. Ploščina merjenega lika je potemtakem taka kot prej:

$$\Delta p = l\Delta y$$

Slika 6. Poljuben lik razdelimo na pasove, ki so omejeni s koncentričnimi krogi. Takim pasovom lahko izmerimo ploščino s planimetrom.

Hitro se da pokazati, da deluje planimeter tako, kot smo opisali, četudi je kolesce kjerkoli - vendar s pogojem, da je njegova os vzporedna z obhodnim krakom. Planimeter na ovitku ima kolesce kar daleč od točke K.

Planimeter si po vzorcu na ovitku lahko izdelate sami. Namesto lupe uporabite kar konico, s katero boste obkrožali like. Z malo spretnosti boste uspeli tudi z montažo kolesca, kjer morate paziti le na to, da je njegova os vzporedna z obhodnim krakom. Za pol spet uporabite konico, polarni krak pa na polu obtežite, da bo pol res trdno pripet, a vrtljiv. Kraka se morata mehko premikati. Pišite nam, če vam je uspelo in nam opišite svoj planimeter. Napišite tudi, kakšno natančnost ste dosegli z njim. To najlaže preverite na likih, ki jim ploščino že poznate. Na koncu vidite preglednico, kjer so kolegi merili število π tako, da so s planimetrom, ki ga vidite na ovitku, izmerili ploščino kroga s polmerom 10 cm.

PREGLEDNICA - MERJENJE ŠTEVILA π S PLANIMETROM

Merilec	lega kolesca (en delec = 10 mm²) pred obhodom	po obhodu	$P_i\,[cm^2]$	$r_i\,[cm]$	$\frac{P_i}{r_i^2} = \pi_i$	$\Delta\pi_i = \pi_i - \bar{\pi}$
Matjaž	7255	10412	315,7	10,005	3,154	- 0,001
Danilo	423	3592	316,9	10,00	3,169	0,014
Darko	6757	9917	316,0	10,00	3,160	0,005
Bogdan	4236	7392	315,6	10,015	3,147	- 0,008
Rafael	3593	6756	316,3	10,02	3,150	- 0,005
Matej	4584	7745	316,1	10,00	3,161	0,006
Franc	2809	5964	315,5	10,01	3,149	- 0,006
Andrej	8069	11228	315,9	10,015	3,150	- 0,005

$\bar{\pi} \approx 3{,}155$ $\overline{|\Delta\pi|} \approx 0{,}006$

Vsi merilci so merili ploščino in polmer istega kroga. Poprečna vrednost za število π iz teh meritev je 3,155, odmik od poprečja pa 6.10^{-3}. Na natančnost meritve sklepamo iz $\frac{\overline{|\Delta\pi|}}{\bar{\pi}} \approx 2.10^{-3}$ ali 0,2 %.

Ker so vse meritve nekoliko nad pravo vrednostjo za število π, je verjetno, da imamo opravka s sistematsko napako (napako merilnega pribora).

Andrej Likar

VSOTA KUBOV

V matematiki pogosto naletimo na važno nalogo: sešteti je treba k-te potence prvih n naravnih števil:

$$s_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

n in k sta seveda naravni števili.

Pokazali bomo, in to na tri različne načine, kako lahko poiščemo

$$s_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

če poznamo formuli za vsoto prvih n naravnih števil in za ustrezno vsoto kvadratov

$$s_3(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

$$s_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

Prvi način

S pomočjo lihih naravnih števil 1, 3, 5, 7, 9, ... sestavimo zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ takole

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3 + 5$$
$$a_3 = 7 + 9 + 11$$
$$a_4 = 13 + 15 + 17 + 19$$

itd.

če seštejemo vse člene zaporedja a_n, dobimo ravno vsoto prvih $n(n + 1)/2$ lihih števil

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n = 1 + 3 + 5 + \ldots +(n^2 + n - 1)$$

Tu smo na koncu kar zapisali $n^2 + n - 1$ kot zadnje liho število, ki še pride v poštev. Res, liha števila sestavljajo aritmetično zaporedje s prvim členom 1 in razliko 2, zato je liho število z zaporedno številko $n(n + 1)/2$ enako

$$1 + (n(n + 1)/2 - 1).2 = n^2 + n - 1$$

To liho število je zadnji sumand člena a_n. Prvi sumand v tem členu pa je za $2.(n - 1)$ manjši, torej enak

$$n^2 + n - 1 - 2(n - 1) = n^2 - n + 1$$

Člen a_n je vsota aritmetičnega zaporedja z n členi, prvi sumand je $n^2 - n + 1$, zadnji $n^2 + n - 1$. Zato

$$a_n = (n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1).n/2 = n^3$$

To pa pomeni, da je vsota prvih n kubov ravno enaka vsoti prvih $n(n + 1)/2$ lihih naravnih števil. Opravka imamo torej z aritmetičnim zaporedjem, število členov je $n(n + 1)/2$, prvi člen je enak 1, zadnji $n^2 + n - 1$.

$$S_3(n) = ((1 + n^2 + n - 1).n(n + 1)/2$$

Uredimo in dobimo formulo

$$S_3(n) = n^2(n + 1)^2/4$$

Drugi način

Vzemimo najprej, da je število n liho in preuredimo člene v vsoti $S_3(n)$:

$$S_3(n) = (1^3 + (n - 1)^3) + (2^3 + (n - 2)^3) + \dots + n^3 =$$

$$= (1^3 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (2^3 + n^3 - 3n^2.2 + 3n.2^2 - 2^3) +$$

$$+ \dots n^3 = n^3 + n^3 + n^3 + \dots + n^3 - 3n^2(1 + 2 + \dots + (n - 1)/2)$$

$$+ 3n(1^2 + 2^2 + \dots + ((n - 1)/2)^2)$$

V zgornji vsoti nastopa n^3 najprej $(n - 1)/2$-krat iz vsakega oklepaja, potem pa še n^3, ki smo ga pisali posebej. Zato je enakih sumandov n^3 vsega skupaj $(n - 1)/2 + 1 = (n + 1)/2$. To upoštevamo, vsote v oklepajih pa izrazimo s S_1 oziroma S_2:

$$S_3(n) = n^3.(n + 1)/2 - 3n^2.S_1((n - 1)/2) + 3n.S_2((n - 1)/2)$$

Uporabimo znana rezultata (1) in (2) in uredimo

$$S_3(n) = n^3(n + 1)/2 - 3n^2.\tfrac{1}{2}(n - 1)/2.((n - 1)/2 + 1) +$$

$$+ 3n.\tfrac{1}{6}(n - 1)/2.((n - 1)/2 + 1)(2(n - 1)/2 + 1)$$

$$S_3(n) = n^2(n + 1)^2/4$$

Bralcu prepuščamo, da premisli, kaj se spremeni, če je število n sodo in da sam izpelje isto formulo tudi v tem primeru.

Tretji način

Uporabimo enakosti

$$1^4 = 1$$
$$2^4 = (1 + 1)^4 = 1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$
$$3^4 = (2 + 1)^4 = 2^4 + 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$
....
....
$$(n + 1)^4 = n^4 + 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$$

Seštejemo vse zgornje enačbe, pri tem se vse četrte potence razen $(n + 1)^4$ uničijo in ostane

$$(n + 1)^4 = 4(1^3 + 2^3 + \ldots n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \ldots n^2) +$$
$$+ 4(1 + 2 + \ldots + n) + n + 1$$

od tod dobimo

$$4s_3(n) = (n + 1)^4 - 6s_2(n) - 4s_1(n) - (n + 1)$$

Vstavimo (1) in (2) in spet dobimo

$$s_3(n) = n^2(n + 1)^2/4$$

1. Dokaži, da je vsota kubov katerihkoli m zaporednih naravnih števil deljiva z vsoto teh števil.
2. Dokaži, da nobena od številk 2, 3, 7, 8 ni zadnja številka od $s_3(n)$.

Dragoljub M. Miloševič
prevedel Peter Petek

NOVE KNJIGE

AKTIVOM MATEMATIKOV IN FIZIKOV NA OSNOVNIH IN SREDNJIH ŠOLAH

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS je v zadnjih dveh letih ob pomoči Izobraževalne skupnosti Slovenije in Raziskovalne skupnosti Slovenije izdalo nekatere publikacije, ki bodo zanimive za učence osnovnih šol, dijake srednjih šol, člane društva, učitelje matematike in fizike, kakor tudi za šolske knjižnice. Zato vam bomo v teh dneh poslali na šolo paket naših publikacij, za katere vas prosimo, da jih priporočite vsem interesentom. Knjige, ki jih boste prejeli preveč, nam prosimo vrnite. Za vse vrnjene knjige in za vsa nova naročila, ki nam jih lahko pošljete kadarkoli, pa vam bomo po 1. maju 1983 poslali račun, v kolikor nam ustreznega zneska ne boste že prej sami nakazali na žiro račun številka 50101-678-47233.

V paketu vam pošiljamo naslednja dela v skupni vrednosti		900.- din
	KNJIŽNICA SIGMA	
32.	Weinberg S., Prve tri minute - sodobni pogled na nastanek vesolja (Prev. S.Oblak)	240.-
34.	Laue M., Kratka zgodovina fizike (Prev. J.Strnad)	240.-
35.	Milanković M., Kratka zgodovina astronomije, 1. del do l. 1727 (Prev. Č.Zupančič)	240.-
	PRESEKOVA KNJIŽNICA	
7.	Križanič F., Ukročena matematika	40.-
11.	Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja : Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence 5. in 6. razrednov	40.-
12.	Ranzinger P., Naše nebo 1983, Astronomske efemeride	100.-
	PRESEK - dve starejši številki	brezplačno

V nadaljevanju je pregled, katere starejše številke Preseka imamo še na zalogi. Naročnikov našega mladinskega lista je še vedno veliko, zato bodo novi naročniki prav gotovo z veseljem posegli po omenjenih številkah, ki vam jih danes ponujamo. Žal bi nam bilo, da bi jih morali čez čas odpeljati v papirnico.

NAŠE NEBO je brošura z obilico astronomskih podatkov za leto 1983, ki bodo zanimivi predvsem za člane astronomskih krožkov in druge ljubitelje astronomije. Brošura bo letos izšla prvič pri našem društvu, zato želimo dobiti čimveč naročnikov.

V KNJIŽNICI SIGMA pa smo v tem letu zapolnili veliko vrzel v slovenski literaturi na področju zgodovine naravoslovnih ved. V prihodnjem letu bomo pripravili tudi 2. del zgodovine astronomije, ki bo obsegala obdobje od l. 1727 do današnjih dni.

Priporočamo vam tudi druge brošure iz PRESEKOVE KNJIŽNICE in knjigo iz KNJIŽNICE SIGMA Osnove matematične logike, 1. del (N.Prijatelj), ki smo vam jo že lani poslali. Tako jo boste lahko pokazali tudi novim interesentom. Iz te zbirke so na razpolago še druga dela.

PRESEKOVA KNJIŽNICA

1.	Vidav I., Josip Plemelj - Ob stoletnici rojstva	40.-
3.	Prosen M., Astronomska opazovanja	48.-
4.	Strnad J., Začetki sodobne fizike	48.-
5.	Strnad J., Relativnost za začetnike	48.-
6.	Landau L.D., Kaj je teorija relativnosti	48.-
8.	Ranzinger P., Presekova zvezdna karta	40.-
9.	Strnad J., Začetki kvantne fizike	40.-
10.	Kuščer I., Enajsta šola iz fizike	40.-
	PRESEKOV KOLEDAR	32.-

PRESEK - navajamo letnik in posamezne številke, ki so še na zalogi
(v oklepaju so cene posameznih številk v letniku)
II/4 (5.-din), III/1, 3 (5.-din), IV/4 (5.-din), V/2, 4 (8.-din), VI/1, 2, 3, 4 (10.-din), VII/1, 2, 3, 4 (10.-din), VIII/1, 2, 3, 4 (15.-din), IX/1, 2, 3, 4 (21.-din), X/1, 2 (32.-din).

Ciril Velkovrh

UGANKE

ŠE ENKRAT O UGANKI O LOVCU

V Preseku št. 1 (1981/82) smo objavili uganko o lovcu, ki se je moral sprehajati po vzporednikih in poldnevnikih, da je po treh kilometrih pešačenja prispel na začetno točko. Iz Stare Pazove smo prejeli zanimivo pismo, v katerem nam profesor *V.Ječmen* predlaga nekatere posplošitve te uganke.

Tudi nam je prišlo na misel vprašanje, kaj se zgodi, če lovec na svoji poti proti jugu prekorači južni tečaj. Pri pogojih uganke se to ne more zgoditi, saj gre od južnega tečaja naprej proti severu, četudi hodi ves čas naravnost. Celo če bi lovcu dovoljevali tudi takšno pot, bi moral ta po prehojenem kilometru po vzporedniku zaviti na sever, to pa je stran od začetnega mesta.

Vendar lahko lovčevo uganko zastavimo drugače: Naj se lovec obrne proti jugu, prehodi *1 km*, nato proti vzhodu, zopet *1 km*, končno pa naj se obrne proti *jugu*, prehodi *1 km* in se znajde na startu. Tu zahtevamo samo to, da hodi lovec ves kilometer naravnost, torej sme (mora?) čez tečaj. Kje so zdaj vsi starti?

Bralce vabimo, da sami poiščejo rešitve. Ali imajo rešitve obeh ugank kaj skupnega? Koliko se obe uganki spremenita, če razdalje niso *1 km*, ampak na primer a, b in c?

Roman Rojko

ŠTEVILČNICA

Številčnica sodi med najlažje uganke. Vsaka številka pomeni namreč eno in vedno isto črko in se najmanj enkrat ponovi. Ko odkrijemo, katero črko predstavlja posamezna številka, uganke ni težko rešiti do konca.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	9	8	13	3	16	14	1	13	8	3	6	12	14	3	19
10	11	2	11	11	6	1	6	7	6	10	4	5	1	6	1
4	5	16	15	2	4	2	7	2	7	13	2	17	6	8	6
20	12	9	3	8	5	15	2	9	1	5	14	6	18	5	17
5	2	11	10	10	19	2	4	1	10	9	10	11	5	9	6
15	8	6	7	13	6	3	18	10	7	2	4	2	3	6	20
2	13	4	3	9	1		2	19		11	6	9	6	1	4
3			6				1	6				6			6

Samo navpično: 1. vrsta uganke, ki je sestavljena po principu šahovskega skakača, 2. triglava mišica na nadlaktu, 3. začimbna rastlina s suličastimi listi in drobnimi belkastimi cvetovi v koških, 4. čipkarski vzorec, 5. moralno, značajsko pozitivna lastnost, 6. kartažanski vojskovodja, ki je osvojil skoraj vso zgornjo Italijo, znan pa je predvsem po svojem prehodu preko Alp celo z bojnimi sloni (247-182 pr.n.š.), 7. mleku podoben sok nekaterih rastlin, 8. pogovorno ime za zelo dišečo rastlino sivko, 9. elektromagnetno valovanje, za katerega je občutljivo človeško oko, 10. ruski zdravnik in fiziolog, utemeljitelj nauka o pogojnem refleksu (Ivan, 1849-1936), 11. srebrno bela kovina (Sn), 12. okrasna rastlina z raznobarvnimi cvetovi, vetrnica, 13. tobačni izdelek, 14. enoletni poganjek lesnate rastline, 15. premoženje v denarju; glavnica, 16. zavarovana omarica za shranjevanje denarja.

Črke v debeleje obrobljenih vrsticah za puščicami sestavljajo hrvaškega književnika in politika Anteja Starčevića.

ENAČBA

$$(a-b) + c + \frac{1}{d} + (e-f) + g + (h-i) + j\ (k-l) + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + (o-e) + p = x$$

V enačbi pomeni vsaka črka eno besedo. Pojavljajo se kot samostojne besede; v nakazani razliki, katere vrednost je črka ali črkovna skupina; in v ulomku. Ulomek predstavlja črkovno skupino, ki je palindrom (obrnjena beseda) besede v imenovalcu (primer: če je a = roka, je 1/a = akor). "Seštete (zaporedoma brane) samostojne skupine in "izračunane" črkovne skupine sestavljajo rešitev uganke. Pri reševanju si pomagajte s polji lika.

a = ime slovenske operne pevke Ognjanovićeve, *b* = prečni drog v kozolcu, *c* = kraška planota, ki deli Postojnsko kotlino od Vipavske doline, *d* = pripadnik zahodne skupine starih Slovanov, *e* = prvi prst na roki, *f* = ime angleškega filmskega igralca Guinnessa, *g* = šolska ocena, *h* = enigma, *i* = prebivalka afriške države z glavnim mestom Gana, *j* = odmev, *k* = majhna omara, *l* = miličniško vozilo, *m* = nekdanji trgovec z moko, *n* = naša pisava francoske reke, ki teče skozi Pariz, *o* = moški pri kopanju, *p* = globoka, dolgotrajna nezavest, *x* = misel angleškega zgodovinarja Thomasa Macaulaya (izg. mekolija).

ISKALNICA "ŠTEVILA"

BENARES - SPOMENIČAR - ARTRITIS - KRITOSEMENKA - SERENADA - PARAPET - INTRIGANT - DENARNICA - KARNIČNIK - PUSTOST - SESTRIČNA - SENATOR - PREDVAJANJE - POLPETA - BOLNIČARKA

V vsaki gornji besedi je skrito eno število. Poišči ga, nato pa obkroži črko, ki je v besedi pred tem številom. Primer: v besedi vremENAr se skriva ENA, obkrožil pa bi črko M.

Zaporedoma brane obkrožene črke sestavljajo ime in priimek angleškega matematika, filozofa in humanista. (Ime sestavlja 8, priimek pa 7 črk). Leta 1950 je prejel Nobelovo nagrado za književnost, živel pa je v obdobju od 1872 do 1970.

DOPOLNJEVANKA S ŠTEVILI

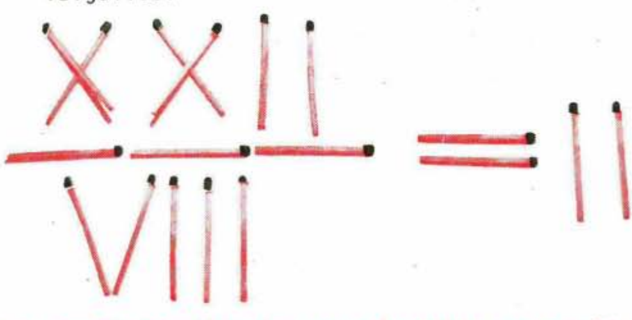
MOJ S___C ___ER, KI JE VI___AR, SE ZA___NJ VESELI LEPEGA VREM___, SAJ BO S___ DEŽEVALO.

Na črtice vpiši imena šestih števil tako, da boš dopolnil besede in prebral smiseln stavek.

Pavle Gregorc

KRATKOČASNE VŽIGALICE*

11. Ta enačba ne drži. Izboljšaj jo tako, da prestaviš eno vžigalico!

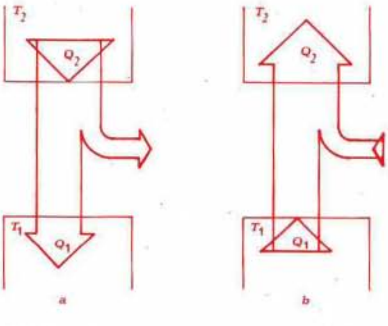


* V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Se nadaljuje. (Op.ur.)

FIZIKA

HLADILNI STROJI IN TOPLOTNE ČRPALKE

Na obisku v šoštanjski elektrarni smo spoznali, kako deluje *toplotni stroj* (Presek X, 1. štev.). Za to, da oddaja delo, mu je treba pri višji temperaturi dovajati toploto in jo pri nižji temperaturi odvajati (sl. 1). Dovedemo več toplote, kot je odvedemo; razlika je odvedeno delo: $-A = Q_2 - |Q_1|$. To razberemo iz *energijskega zakona* za stroj, ki deluje periodično in mu pri višji temperaturi dovedemo toploto Q_2 in od njega pri nižji temperaturi odvedemo toploto Q_1. Da mora toploto neizkoriščeno oddajati okolici, je neizogibno zaradi *entropijskega zakona* (*drugega zakona termodinamike*). Kako lahko to toploto uporabimo za daljinsko ogrevanje, smo ugotovili med obiskom v ljubljanski toplarni (Presek X, 2. štev.).



Slika 1 Toplotni stroj (a) in hladilni stroj (b). Enega dobimo iz drugega, če obrnemo delovanje - na risbi spremenimo le smer puščic.

Zdaj nas zanimajo *hladilni stroji*. Morda misli kdo, da ne kaže govoriti v isti sapi o toplotnih in hladilnih strojih. Gospodinjski hladilnik ni na videz niti malo podoben toplotni elektrarni. Vendar bomo videli, da sta oba v veliko tesnejšem sorodstvu, kot kaže videz.

Premislimo! V hladilnik damo živila, da se ohladijo, ostanejo hladna in se ne pokvarijo. V notranjosti hladilnika je nižja temperatura kot v okolici in vedno uhaja nekaj toplote iz okolice v notranjost. Sicer poskrbimo, da je notranjost kolikor mogoče dobro toplotno izolirana, vendar se uhajanju toplote ne moremo povsem izogniti. Če bi hladilnik nehal delati, bi se živila prej ali slej segrela na temperaturo okolice in pokvarila. To se zares zgodi, če zmanjka elektrike.

Naloga hladilnika je torej, da črpa toploto iz notranjosti, kjer je temperatura nižja, v okolico, kjer je višja. Vemo, da teče toplota sama od sebe z mesta z višjo temperaturo na mesto z nižjo, denimo iz okolice v notranjost hladilnika. Ta trditev je ena izmed oblik entropijskega zakona. Ali ne zahtevamo tedaj od hladilnika nečesa nemogočega? Ne, toploto je mogoče črpati z mesta z nižjo temperaturo na mesto z višjo, če ob tem dovajamo delo. Hladilniku dovajamo delo z elektromotorjem, prav s tistim, ki preneha delati, če zmanjka elektrike.

Zdaj se nam posveti. Hladilni stroj prejema toploto pri nižji temperaturi in jo oddaja pri višji, če mu dovajamo delo. Deluje torej ravno obratno (sl. 1b) kot toplotni stroj. Pravimo, da je hladilni stroj *obrnjeni* toplotni stroj. Za hladilni stroj, ki deluje periodično, pove energijski zakon, da mu moramo dovesti delo

$$A = |Q_2| - Q_1, \qquad (2)$$

če pri višji temperaturi odvedemo toploto Q_2 in mu pri nižji dovedemo toploto Q_1.

Seveda ne kaže obračati delovanja toplotne elektrarne, da bi jo uporabili na primer kot hladilnico, ali delovanja gospodinjskega hladilnika, da bi z njim poganjali na primer vrtalni strojček.

Vendar obstajajo manjše naprave, ki jih je mogoče uporabiti kot toplotni ali kot hladilni stroj. Še posebno je taka možnost dobrodošla v računih. Denimo, da neki stroj odda delo A, ko deluje kot toplotni stroj, in mu dovedemo toploto Q_2 in odvedemo od njega toploto Q_1. Če odda enako toploto Q_2, ko deluje kot hladilni stroj, in mu dovedemo enako delo A in enako toploto Q_1, imamo opraviti z *reverzibilnim strojem*. Reverzibilni stroj, ki prejme ali odda toploto samo pri višji temperaturi T_2 in odda ali prejme toploto samo pri nižji temperaturi T_1 je *idealen*. To pomeni, da odda največje mogoče delo, ko deluje kot toplotni stroj, in prejme najmanjše mogoče delo, ko deluje kot hladilni stroj.

Že zadnjič (Presek X, 1. štev., str. 31) smo ugotovili, da sta pri idealnem stroju toploti Q_2 in Q_1 v razmerju temperatur:

$$Q_1/|Q_2| = T_1/T_2. \qquad (2)$$

Idealnemu hladilnemu stroju moramo potemtakem dovesti delo

$$A = Q_1(|Q_2|/Q_1 - 1) = Q_1(T_2/T_1 - 1),$$

če prejme pri nižji temperaturi toploto Q_1.

Vzemimo, da damo v hladilnik s temperaturo $0^\circ C$ kilogram vode s to temperaturo in bi radi spremenili vodo v led pri $0^\circ C$. Če ima rebrasta cev na hrbtni strani hladilnika temperaturo $30^\circ C$ in če deluje hladilnik kot idealni stroj, mu moramo za to dovesti delo:

$$A = 0{,}34\ \mathrm{MJ}\ (303\ \mathrm{K}/273\ \mathrm{K} - 1) = 0{,}037\ \mathrm{MJ}.$$

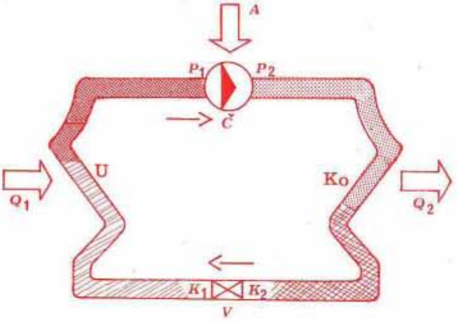
Pri tem odda pri višji temperaturi toploto

$$|Q_2| = A + Q_1 = 0{,}34\ \mathrm{MJ} + 0{,}037\ \mathrm{MJ} = 0{,}38\ \mathrm{MJ}.$$

Upoštevali smo, da je talilna toplota ledu 0,34 milijonov joulov (megajoulov, MJ) na kilogram in da je treba vstaviti v enačbo absolutno temperaturo.

Gospodinjski hladilnik seveda ne deluje kot idealni stroj in porabi precej več dela, da zamrzne kilogram do ledišča ohlajene vode, po oceni kako desetinko MJ.

Doslej smo razpravljali o namišljenem hladilnem stroju, zdaj pa opišimo resničnega. Pri tem se ne spuščamo v tehnične podrobnosti. V stroju teče po sklenjenem krogu (sl.2) *hladilna snov*, ki je v navadnih okoliščinah plin, a ima pri navadnem zračnem tlaku razmeroma visoko vrelišče. *Kompresor* (Č) stisne plin (tehniki govorijo v tem primeru o pari) do višjega tlaka nekaj barov.



Slika 2 Močno poenostavljena risba hladilnega stroja: Č kompresor, Ko kondenzator, V ekspanzijski ventil, U uparjalnik. Na desni strani kroga je tlak višji, na levi nižji. P_2 je plin pri višjem tlaku in P_1 pri nižjem, K_2 je kapljevina pri višjem tlaku in K_1 pri nižjem. V uparjalniku prejema hladilni stroj toploto pri nižji temperaturi in jo v kondenzatorju pri višji oddaja.

Plin (P_2) ima nekaj višjo temperaturo od vrelišča pri tem tlaku (glej okvir 1). V *kondenzatorju* (Ko) oddaja toploto hladnejšemu okolnemu zraku in se ob tem postopno ohladi do vrelišča, utekočini in naposled ohladi še nekoliko pod vrelišče. Kapljevina pri višjem tlaku (K_2) dospe do *ekspanzijskega ventila* (V) in preide skozi njegove šobe v del cevi z nižjim tlakom. Po prehodu ima kapljevina (K_1) temperaturo malenkost nad vreliščem pri nižjem tlaku, nekaj pa je že med prehodom izpari. Preostala kapljevina pri nizki temperaturi v uparjalniku (U) prejema toploto od okolice in postopno izpari ter se naposled segreje še nekoliko nad vrelišče. S tem vzdržujemo v bližini uparjalnika v notranjosti hladilnika (po domače pravimo uparjalniku *zmrzovalnik*) nižjo temperaturo. Plin pri nižjem tlaku (P_1) kompresor zopet stisne do višjega tlaka in igra se ponovi.

Vrelišče se spreminja s tlakom

Da je vrelišče odvisno od tlaka, se najhitreje prepričamo z vodo, za katero vemo, da vre pri navadnem zračnem tlaku 1 bar pri temperaturi 100°C. Vodo iz vodovodne napeljave nalijemo v steklenico in segrejemo na kakih 25°C. Ko s črpalko na vodni curek znižamo tlak v steklenici, začne voda

SLIKOVNA KRIŽANKA "ŠTEVILA"

3865

PREBIVALKA CELJA

PISATELJICA PEROCI

LIČILO

DESNI PRITOK VOLGE

$\frac{5}{32}$

UČENJE

VRSTA RAZCVETA

NARAVNA SMOLA ZA LAKE

POTOK V IŠKEM VINTGARJU

DELO TLAČANOV

MARK TWAIN

SVETLO VINO

M. PEVSKI GLAS

OBROK ODPLAČILA

EVA JANC

LOJZE KRAKAR

PRITRDILNICA

SL. GLED. IGRALEC (VOLODJA)

SANITETNI MATERIAL

RIJEKA

GEOMET. TELO

ZLITINA Fe IN Ni

ŽENSKO IME

NAUK O SPOZNAVANJU

LADKO KOROŠEC

REDKEJŠE Ž. IME

ŽENSKO IME

OVNOVA SAMICA

ALJA TKAČEVA

ZELENICA V PUŠČAVI

TANTAL

MESTO OB ŽENEV. JEZERU

π

SVETO MESTO MUSLIMANOV

IZBRANA DRUŽBA

3

OSEBNI ZAIMEK

STRAN

TOVARIŠICA (OTROŠKO)

DEBEL KARTON

VOJAŠKI PRATEŽ

POD

PREBIVALCI IRSKE

IVAN ČARGO

ILJUŠIN

VINKO GLOBOKAR

MAJHNE RANE

AVTO

PREBIVALEC ITAKE

JEZERO V JUŽNI AFRIKI

…IČ | FAZA | OSNOVNA MERA | DOLGA KOLONA POTUJOČIH VOZIL | $a = 4 + 5i$ | GOZDNA ŽIVAL | INDIJSKO ŽENSKO OBLAČILO | ROBERT FISCHER | PREVZETA DOLŽNOST | NAJVIŠJA GORA TURČIJE

1

…LDA …ILER | IZDELOVALEC ŠKAFOV

TRENJE | LANTAN | TOVARNA V MARIBORU

PLAST TRANSISTORJA

…OSTOR, …JER …MIMO …AMEN | ANTONIO VIVALDI | OČKA | VOJNA POŠTA | MEDMET SMEHA | TURŠKI VELIKAŠ

GRŠKI JUNAK PRED TROJO | ZMAGA PRI ŠAHU | KRAVJI MLADIČ

DEL SMUČ. SKAKALNI. | GL. MESTO EGIPTA | IZPOVEDNO PESNIŠTVO | $1{,}414 = \sqrt{2}$

SLONOV ČEKAN | PRIPADNIK ANARTOV

NASTAVA V PASTI | MRŽNJA, SOVRAŠTVO | SLIKARJEV IZDELEK

GLEDAL. IGRALEC BAN | KRUTI RIM. CESAR | JEZIK BANTU ČRNCEV

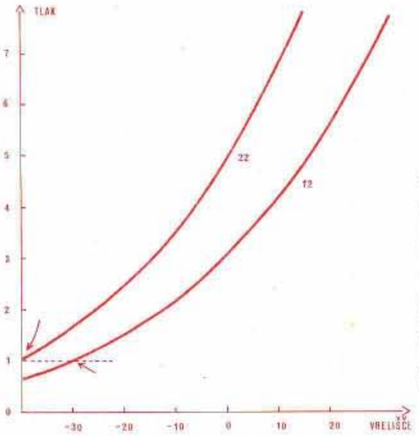
RADIJSKI SPREJEMNIK | GRŠKA ČRKA | RIMSKA BOGINJA JEZE | ANA FRANK

ANGL. POVRŠIN. MERA

VZDEVEK GOETHEJEVE MATERE | POBA, DEČEK

vreti pri tej temperaturi. Voda pri višjem tlaku kot 1 bar v tlačnem loncu (loncu ekonom) pa vre pri višji temperaturi od 100°C (jed se pri tem hitreje skuha). O tem, da voda vre, priča para, ki uhaja skozi ventil.

Vrelišče se potemtakem z naraščajočim tlakom zviša, s pojemajočim tlakom pa zniža. Tako je pri vseh snoveh, tudi pri hladilnih snoveh, ki jih uporabljamo v hladilnih strojih. Najbolje se obnesejo *klorofluoroogljikovodiki*, ki niso strupeni in vnetljivi in se jim vrelišče zviša od nekaj deset stopinj pod ničlo na nekaj deset stopinj nad ničlo, ko se tlak poveča od 1 bara na nekaj barov (sl.3).



Slika 3 Odvisnost vrelišča od tlaka za diklordifluormetan (12) in klordifluormetan, ki imata pri navadnem tlaku vrelišče (V) pri -30°C in -41°C. Za primerjavo: metilklorid vre pri navadnem tlaku pri -24°C, eter pri -25°C, žveplov dioksid pri -73°C, amoniak pri -78°C, ogljikov dioksid pa pri -78,5°C sublimira.

Kompresor je priključen na majhen elektromotor, ki ne deluje neprekinjeno, ampak ga vključi termostat, ko temperatura v hladilniku naraste do določene meje. Tako smo opisali glavne sestavne dele gospodinjskih hladilnikov in najpomembnejše pojave, ki se v njih dogajajo.

Hladilne skrinje (sl.4) se odlikujejo le po nižji temperaturi.

V današnjem času pomanjkanja energije kaže posebej razmisliti o zanimivi možnosti. Kondenzator na hrbtni strani hladilnika oddaja toploto pri temperaturi, ki je nekoliko višja kot temperatura okolnega zraka. Zato je v prostoru s hladilnikom nekoliko topleje, čeprav nihče ne bo trdil, da se da s hladilnikom ogrevati kuhinjo. Če pa se načrta lotimo dovolj velikopotezno, dosežemo lahko prav to. Prej moramo hladilnik preurediti, saj nam zdaj ne gre več za toploto, ki jo jemlje živilom v zmrzovalniku, ampak za toploto, ki jo oddaja v kondenzatorju.

Slika 4 Hladilna skrinja ZS-220 Loških tovarn hladilnikov. Kot hladilno snov uporablja diklordifluormetan. Kompresor poganja elektromotor z močjo 140 W in skrinja porabi v povprečju okoli 1,6 kWh električnega dela na 24 ur. Skrinja vzdržuje v različnih predalih temperaturo od -18 do -28°C.

Hladilnemu stroju, ki ga rabimo za ogrevanje, pravimo *toplotna črpalka*. Toploto jemlje zraku ali vodi v okolici, jo "oplemeniti" s svojim delom in jo odda pri višji temperaturi. To, da se zrak ali voda v okolici ohladita za nekaj stopinj, nikogar ne moti: toploto dobimo tako rekoč zastonj. Toploto pri višji temperaturi lahko izkoristimo za ogrevanje vode v napeljavi za centralno ogrevanje ali sanitarne vode za umivanje in pomivanje.

Naredimo kratek račun! Kako bi bilo, če bi toplotna črpalka delovala kot idealni hladilni stroj? Iz enačb (1)

Iz zgodovine

V starih časih so uporabljali za ohlajanje jedil in pijač led, ki so ga pozimi nalomili na rekah in jezerih. Okoli leta 1600 so ugotovili, da je mogoče zmrzniti vodo z zmesjo kuhinjske soli in stolčenega ledu ali snega. Že Rimljani so ohlajali prostore z glinastimi vrči, skozi stene katerih je pronicala voda in izhlapevala.

Leta 1775 je Cullen v Edinburghu z zračno razredčevalko znižal tlak in dosegel, da je voda vrela pri nižji temperaturi kot 100^o. Hladilniki so precej mlajša iznajdba. Leta 1834 je Jacob Perkins v Londonu zgradil prvi uporaben hladilnik s kompresorjem*. Kot hladilno snov je uporabil eter (CH_3OCH_3). Pozneje so uvedli druge hladilne snovi: Carl Linde leta 1873 v Nemčiji amoniak (NH_3), Raoul Pictet leta 1876 v Franciji žveplov dioksid (SO_2). Tedaj so že uporabljali na ladjah, ki so prevažale meso iz Argentine v Francijo, hladilnike na eter. Proti koncu prejšnjega stoletja so uporabili še metilklorid (CH_3Cl) in ogljikov dioksid (CO_2).
Velika ovira za še močnejši razvoj hladilnikov v našem stoletju je bila v tem, da so bile vse znane hladilne snovi strupene ali gorljive ali pa so zahtevale previsok tlak. Leta 1928 pa je Thomas Midget s sodelavci v ZDA sintetiziral diklordifluormetan (CCl_2F_2) in s tem začel zmagoslavno pot klorofluoroogljikovodikov. Leta 1931 so ga dali v rabo z imenom freon. Naslednje leto mu je sledil triklorfluormetan (CCl_3F), za tem diklortetrafluoretan ($CClF_2$-$CClF_2$) in naslednje leto še triklortrifluoretan ($CClF_2$-CCl_2F). Med drugo svetovno vojno so jih prvič uporabili tudi v pršilih (sprejih). Po vojni so sintetizirali še veliko drugih klorofluoroogljikovodikov. Brez njih si danes hlajenja ni mogoče zamišljati. Za vsak namen je mogoče najti pripraven klorofluoroogljikovodik. Tovarne jih izdelujejo pod raznimi imeni (freon, frigen, kaltron,...), zaznamujejo pa jih kar s številkami: 12 diklordifluormetan, 22 klordifluormetan itd.

---

* Drugo vejo v razvoju hladilnikov - *absorpcijske hladilnike* z dvema snovema, na primer vodo in amoniakom, smo pustili vnemar. Čeprav so bili pred desetletji mali absorpcijski hladilniki zelo razširjeni, je dandanes ta veja odmrla.

in (2) dobimo

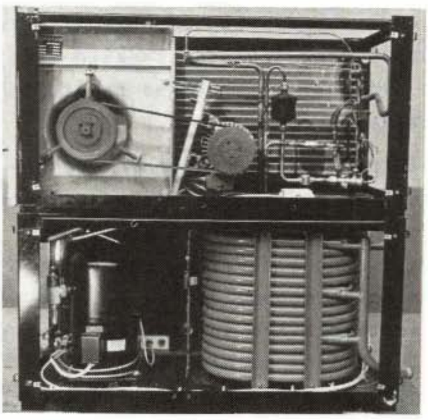
$$A = |Q_2| - Q_1 = |Q_2|\ (1 - Q_1/|Q_2|) = |Q_2|(1 - T_1/T_2)$$

Razmerje med oddano toploto in dovedenim delom, tako imenovano *grelno število*, je v tem primeru

$$|Q_2|/A = T_2/(T_2 - T_1).$$

To je obratna vrednost izraza, ki smo ga dobili za izkoristek idealnega toplotnega stroja, Glej Presek X, 1. štev., str. 31.) Denimo, da je temperatura okolnega zraka $10^{o}C$ in temperatura vode, ki doteka v napeljavo za centralno ogrevanje, $40^{o}C$. Grelno število je v tem primeru $|Q_2|/A$ = 323 K/(323 K - 283 K) = 8.

Resnične toplotne črpalke tega seveda ne zmorejo. Črpalka, ki jo izdeluje Zavod za hlajenje in klimatizacijo Loških tovarn hladilnikov (sl.5), ima v navedenih okoliščinah grelno število 3. To je še vedno zelo ugodno in je ogrevanje z električno pečjo trikrat dražje. Če upoštevamo, da toplotna elektrarna izkoristi le približno tretjino toplote, ki se sprosti pri gorenju premoga, pri ogrevanju s toplotno črpalko izravnamo izgubo v elektrarni. V navedenih okoliščinah odda toplotna črpalka toliksno toploto, kot smo jo vložili v elektrarni.



Slika 5 Kompaktna toplotna črpalka TČ 0300 Zavoda za hlajenje in klimatizacijo v izvedbi za zrak (pogled z zadnje

strani): levo spodaj je viden kompresor in desno spodaj kondenzator - v vijačnico navito dvojno cev, po notranji teče hladilna snov, po zunanji pa topla voda. Levo zgoraj je vidno ohišje ventilatorja in desno zgoraj ekspanzijski ventil (v desnem spodnjem kotu) in uparjalnik. Uparjalnik sestavljajo bakrene cevi z aluminijastimi rebri. - Kot hladilna snov uporablja klordifluormetan. Elektromotor kompresorja ima moč 2,2 kW, elektromotor ventilatorja za zrak pa 0,55 kW. Pri temperaturi zraka v okolici 5°C in temperaturi tople vode 50°C oddaja toplotni tok do 8,3 kW. Skozi uparjalnik steče dober kubični meter zraka v sekundi in se ohladi za okoli 5 stopinj.

Enačba kaže, da je ogrelno število manjše, če je zunanja temperatura nižja ali temperatura vode višja. Navedena toplotna črpalka ima pri zunanji temperaturi 5°C ogrelno število okoli 2,8, pri temperaturi 0°C pa okoli 2,4 (oboje pri temperaturi tople vode 40°C). Toplotna črpalka, ki jemlje toploto zraku, postane neekonomična, ko se zniža njegova temperatura za nekaj stopinj pod ničlo. Pri toplotni črpalki, ki jemlje toploto vodi, ni te težave, če je le pretok vode dovolj velik. V naših podnebnih razmerah je pozimi mogoče računati s povprečnim grelnim številom med 2 in 3.

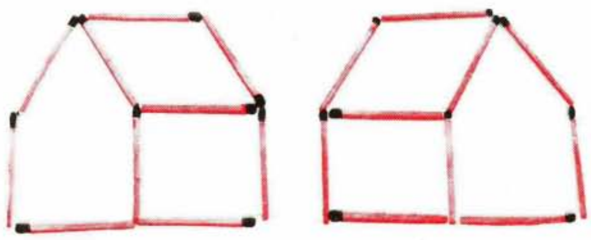
Ko uporabljamo toplotno črpalko za ogrevanje prostorov, speljemo toplo vodo skozi radiatorje napeljave za centralno ogrevanje ali - še bolje - skozi ogrelne cevi v podu. Pogosto hkrati ogrevamo sanitarno vodo. Navadno kombiniramo toplotno črpalko s kotlom na trdno gorivo ali kurilno olje, ki priskoči na pomoč, če se zunanja temperatura preveč zniža.

Ni dvoma, da se ogrevanje s toplotno črpalko v ugodnih vremenskih razmerah splača. Če pa bi hoteli podrobneje primerjati toplotno črpalko z električno pečjo in pečjo na trdno gorivo ali kurilno olje, bi morali upoštevati ceno električne energije, ceno goriva - tudi to, ali ga je sploh mogoče dobiti - in še nabavno ceno naprave. Ti podatki se tako hitro spreminjajo, da ne kaže delati podrobne primerjave. V tujini so pred leti močno spodbujali uporabo toplotnih črpalk za ogrevanje eno- in dvodružinskih hiš. V državah, ki nimajo težav z uvozom nafte, so zdaj nekoliko bolj zadržani. Pač pa povsod priporočajo toplotne črpalke za večje objekte, na primer za javna kopališča. V nekaterih primerih so toplotne črpalke še posebej ugodne, na primer v sušilnicah lesa. Toplotne črpalke, te vrste, ki jih gradi Zavod za hlajenje in klimatizacijo LTH, so se zelo obnesle.

Vsekakor kaže toplotne črpalke razvijati in preizkušati. Ne bi smeli biti presenečeni, če se bo v bližnji prihodnosti cena vsakršne energije tako povečala, da bodo postale toplotne črpalke nepogrešljive.

Janez Strnad

12. Iz leve hiše naredi desno, tako da prestaviš dve vžigalici!



13. Iz leve hiše naredi desno, tako da prestaviš eno vžigalico!

ASTRONOMIJA

OSONČJE NEKDAJ IN DANES

Brez dvoma je Sonce tisti pojav na nebu, ki ga človek najprej zazna. Ponoči vidimo Luno in zvezde. Kdaj se je človek zavedel, da poleg zvezd stalnic obstajajo tudi drugačne "zvezde", ki se po nebu premikajo, ni znano. Takim "zvezdam" so rekli planeti (gr. potnik).

Že Babilonci so poznali sedem premičnih teles. To so *Sonce, Luna, Mars, Merkur, Venera, Jupiter* in *Saturn*. Na Babilonce so ta telesa napravila velikanski vtis, saj so jih vtkali v koledar, kjer so ostala še danes. Po njih mnogi narodi imenujejo dneve v tednu:

nedelja (angl.: Sunday)	dan, posvečen Soncu
ponedeljek (angl.: Monday)	dan, posvečen Luni
torek (ital.: martedi)	dan, posvečen Marsu
sreda (ital.: mercoledi)	dan, posvečen Merkurju
četrtek (ital.: giovedi)	dan, posvečen Jupitru
petek (ital.: venerdi)	dan, posvečen Veneri
sobota (angl.: Saturday)	dan, posvečen Saturnu

Seveda si takrat še niso predstavljali, da je tudi Zemlja planet. Grški filozofi in astronomi so imeli nasprotujoča si mnenja o zgradbi Osončja. *Eratosten* je že 200 let pred našim štetjem vedel, da je zemlja okrogla, in je prvi izmeril zemeljsko oblo. Še prej je *Aristarh* odkril metodo, da z Zemljinim premerom ob Sončevem in Luninem mrku izmerimo, kako daleč sta Sonce in Luna in kako veliki sta ti dve telesi (glej Presek VII, št.2, 1979/80).

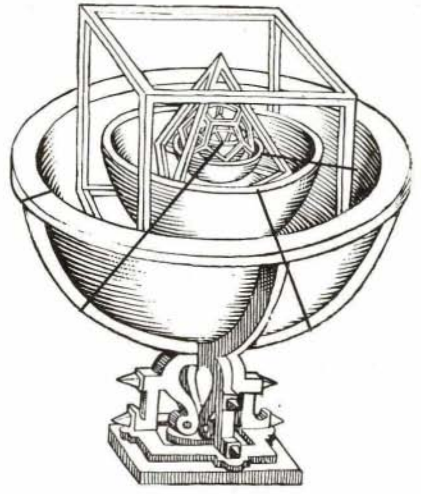
Ta genij je pred več kot 2000 leti spoznal, da se Zemlja vrti okoli Sonca (heliocentrični sistem). Njegov nauk je bil v nasprotju z vladajočim prepričanjem, da je sicer Zemlja okrogla, da pa se Sonce in ves nebesni svod vrtita okoli Zemlje (geocentrični sistem). Geocentrični sistem je zagovarjal *Ptolomej*, zadnji veliki astronom antike. Zbral je vse astronomsko znanje aleksandrijskega obdobja v svojem velikem delu "Veliki zbornik astronomije" v 13 knjigah. Na srečo se je njegovo delo ohranilo. Po propadu stare Grčije so grško znanje prevzeli Arabci. V Evropi je zavladal "mračni" srednji vek. Predstavljali so si, da je Zemlja ravna. Znanje astronomije je strahovito nazadovalo. Arabci so prevedli v svoj jezik dela pomembnih grških učenjakov: *Aristotela, Arhimeda, Apolonija, Ptolomeja* in drugih. S križarskimi vojnami in pa preko Španije, ki je bila v arabskih rokah, je Evropa prihajala v stik z arabsko omiko in z grško znanostjo, kljub nasprotovanju španske Cerkve. V štirinajstem in petnajstem stoletju je postalo jasno tudi Evropejcem, da je Zemlja okrogla. Po prvih evropskih univerzah so poučevali Ptolomejev nauk. Leta 1543 pa je treščilo. Z objavo razprave "De revolutionibus orbium coelestium" je *Nikolaj Kopernik* porušil Ptolomejevo zgradbo vesolja in sezidal novo, v bistvu Aristarhovo. Šele 5. marca 1616, ko je heliocentrični sistem prišel v javnost, je katoliška cerkev uvrstila Kopernikovo razpravo na seznam prepovedanih knjig, kjer je ostala več kot 200 let. Seveda pa to dejstvo ni moglo zatreti razvoja znanosti. Že v prvi polovici sedemnajstega stoletja je človeštvo prišlo do novih spoznanj o osončju, do spoznanj, ki so prekašala še tako genialne razmisleke antičnih mislecev in v drugi polovici sedemnajstega stoletja privedla do Newtonove teorije gravitacije. Ta z določenimi omejitvami velja še danes! *Johannes Kepler* (1571-1630) je odkril zakone o gibanju planetov. Do tedaj so menili, da nebesna telesa enakomerno krožijo. Kepler pa je ugotovil tole:

(1) Središča planetov se gibljejo okrog Sonca po elipsah. V skupnem gorišču teh elips je središče Sonca.
(2) Zveznica med središčem Sonca in središčem planeta opiše v enakih časovnih presledkih enake ploščine.
(3) Kvadrati obhodnih časov posameznih planetov so v istem razmerju kakor tretje potence velikih polosi njihovih eliptičnih tirov.

Slika 1 Nikolaj Kopernik

Slika 2 Johannes Kepler

Leta 1609 je prvi človek uprl daljnogled v zvezdno nebo. To je bil *Galileo Galilei* (1564-1642). Že 7. januarja 1610 se je v očeh Galilea osončje povečalo. Odkril je namreč štiri Jupitrove satelite (lune): Io, Evropo, Ganimeda in Kalisto. Za tem pa je šlo precej naglo. *Huygens* pojasni Saturnov obroč. Leta 1655 odkritje Saturnovo luno Titan. Astronom *Cassini* odkrije še štiri Saturnove lune: leta 1671 Japeta, leta 1672 Reo in leta 1681 Dione in Tetido.



Slika 3 Keplerjev zgrešeni model planetnih sfer

Do leta 1781 so poznali le šest planetov. Kepler je veroval v harmonijo vesoljstva in je sprva menil, da je šest planetov zato, da je med njihovimi tiri pet vmesnih prostorov, prav toliko, kolikor je pravilnih teles. (O pravilnih telesih je Presek že pisal, glej Presek VIII, št. 3, 1980/81, str. 134-142).

Kepler je postavil med Merkurjev in Venerin tip oktaeder, med Venero in Zemljo ikozaeder, med Zemljo in Mars dodekaeder, med Mars in Jupiter tetraeder in med Jupiter in Saturn kocko! Kasneje je, kot vemo, spremenil mnenje. Kljub temu pa mu je njegov čut za red pravil, da je med Marsovim in Jupitrovim tirom prevelika praznina. Zato je domneval, da mora med njima obstajati planet. Nemški astronom *Bode* je iz podatkov za tire znanih planetov leta 1772 omenil neverjetno računsko zaporedje, ki velja za razmerja razdalj planetov do Sonca. To zaporedje je znano z imenom Bodejev zakon, čeprav ga je odkril že prej *Titij* iz Wittenberga.

Bodejev zakon: Vzemi števila 0, 3, 6, 12, 24, ... Vsako med njimi je (razen prvih dveh) dvakratnik prejšnjega. Vsakemu številu prištej 4. Tako dobiš zaporedje:

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388, ...

če vzamemo, da je razdalja med Zemljo in Soncem 10 enot, merijo členi zaporedja razdalje drugih planetov do Sonca. Ujemanje z dejanskim stanjem je presenetljivo. Glej preglednico 1. Leta 1750 je bila slika osončja že precej podobna današnji. Poznali so 17 nebesnih teles osončja: Sonce, 6 planetov in 10 satelitov (Luno, štiri Jupitrove lune in 5 Saturnovih lun). Precej natančno so izmerili razdalje satelitov do planetov in planetov do Sonca ter njihove obhodne čase. In vendar je manjkal med Marsom in Jupitrom planet!

Planet	Razdalja po Bodeju	Dejanska razdalja
Merkur	4	3·9
Venera	7	7·2
Zemlja	10	10
Mars	16	15·2
------	28	-
Jupiter	52	52·0
Saturn	100	95·4

Preglednica 1. Primerjava dejanskih razdalj planetov do Sonca z razdaljami, ki jih predvideva Bodejev zakon.

Leta 1781 pa je sloviti astronom *William Herschel* ob sistematičnem pregledovanju neba odkril nov planet: Uran. Kasneje je odkril še dva Saturnova in dva Uranova satelita. Tako se je osončje povečalo za 5 teles, premer pa se mu je dvakrat povečal, saj je Uran približno dvakrat dalj od Saturna. Tudi Bodejev zakon velja zanj neverjetno dobro.

Planet	Razdalja po Bodeju	Dejanska razdalja
Uran	196	191·8

Preglednica 2. Bodejev zakon velja tudi za Uran, ki je bil odkrit leta 1781.

Leta 1800 se je šest nemških astronomov zbralo v majhnem mestu Lilienthalu, da bi našli manjkajoči planet, ki ustreza številu 28 v Bodejevem zaporedju. Kasneje so jih poimenovali "nebesna policija". In vendar jih je prehitel *Piazzi*, direktor observatorija v Palermu. Prav 1. januarja 1801 je uperil daljnogled v čudno "zvezdo", ki jo je sprva imel za komet brez repa, kasneje pa se je izkazalo, da gre za planet. Imenovali so ga Ceres. V primerjavi z Bodejevo napovedjo 28 ima Ceres srednjo razdaljo 27·7 in zakon je bil rešen. Ceres pa je pravi pritlikavec med planeti. Ima več kot desetkrat manjši polmer od Zemljinega. Ker so kasneje našli še mnogo takih pritlikavih planetov, mu astronomi niso priznali statusa planeta. Danes pravimo takim pritlikavcem *asteroidi*. Kmalu so odkrili še druge asteroide. Leta 1802 je *Olbers* našel Palas, leta 1804 je *Harding* odkril Juno in 1809 spet Olbers Vesto. Šele leta 1845 je *Hencke* odkril naslednji asteroid Astraeo. Po tem pa se je usul pravi plaz. Le leto dni kasneje je *Galle* po *Leverrierovih* računih odkril planet Neptun in do konca stoletja so odkrili še nekaj satelitov in kopico asteroidov. Tako so ob prelomu stoletja poznali približno 450 prebivalcev osončja. V prvi polovici tega stoletja se je ta številka povzpela na približno 1500, večinoma na račun asteroidov.

Slika 4 Primerjava velikosti asteroidov z Veliko Britanijo

Zadnji doslej odkriti planet, ki je hkrati tudi najbolj oddaljen od Sonca, z imenom Pluton, je odkril leta 1930 *Tombaugh*. Tudi jugoslovanski astronomi so odkrili več asteroidov. Tako na primer poznamo tira asteroidov Jugoslavija in Tito.

Slika 5 Primerjava planetov po velikosti. Od leve proti desni: Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun in Pluton.

Na koncu se kar samo pojavlja vprašanje. Kaj je poleg nenehne človekove želje po spoznavanju in razumevanju povzročilo, da se je slika osončja v zadnjem času tako spremenila? Brez dvoma je odkritje daljnogleda krivo za pravo revolucijo v astronomiji. Z vedno bolj natančnimi daljnogledi je bilo mogoče odkrivati vedno več nebesnih teles. Tudi odkritje fotografije je pripomoglo pri raziskavah osončja. S primerjavo fotografij je mogoče odkriti "premičnice". Vse kaže, da bo tudi uporaba računalnika v astronomiji povzročila nov kvaliteten preskok v raziskavah osončja. Kljub vsemu pa imajo raziskave na daljavo določene meje. Če je že mogoče izračunati tire nebesnih teles in oceniti njihove polmere, pa je v nekaterih primerih izredno težko določiti njihovo maso. Ta naloga postane dosti lažja, če v bližino nebesnega telesa pošljemo vesoljsko ladjo. Prav vesoljske ladje so človeku posredovale mnogo natančnejše podatke o osončju, kot bi jih dobil sicer, in v njih je prihodnost raziskav osončja. O tem pa kdaj drugič.

Tomaž Pisanski

TEKMOVANJA - NALOGE

IZBRANE NALOGE ZA UČENCE VIŠJIH RAZREDOV OSNOVNE ŠOLE

5. razred

1. Hiše v ulici so oštevilčene od 1 do 50.
   Kolikokrat je napisana cifra 4?

2. V neki šoli je 630 učencev. Na vsakih 5 fantov so 4 dekleta. Koliko je v tej šoli fantov in koliko deklet?

3. Preberi števila, ki so zapisana v dvojiškem sistemu:
   10   100   1000   10000   1010   11001

4. Zapiši vse pare (x, y) iz $N_0 \times N_0$, ki zadoščajo enačbi

   a) $x + y = 9$
   b) $x + y = 0$
   c) $x + y = 1$

5. Na mestih, označenih s piko, vstavi cifre, da bo razlika števil pravilna.

$$\begin{array}{rr} & .\;.\;1\;2\;0\;0 \\ - & 2\;.\;9\;.\;. \\ \hline & 7\;1\;.\;2\;8 \end{array}$$

6. Reši enačbo: $88 + x : 13 = 95$

7. Mešamo 30 kg kave po 480 din in 15 kg kave po 600 din za kilogram. Kolika je cena 1 kg mešanice?

8. Iz 1 km dolgega papirnatega traku, širokega 1 mm, narežemo po 1 mm^2 velike kvadratke. Iz teh kvadratkov sestavimo nov

trak, dolg 4 m. Kolika bo širina tega traka?
Kaj pa, če iz teh kvadratkov sestavimo kvadrat? Kolika bo njegova stranica?

9. V trikotniku sta dani stranici 7 cm in 9 cm. Katera naravna števila so lahko dolžina tretje stranice?

10. Sosed A ima vrt v obliki pravokotnika z dolžino 18 m in širino 8 m. Sosed B ima vrt z enako ploščino kot sosed A, le da je njegov vrt kvadratne oblike.
Ali bo dolžina ograje enaka ali različna? Ugotovi!

6. razred

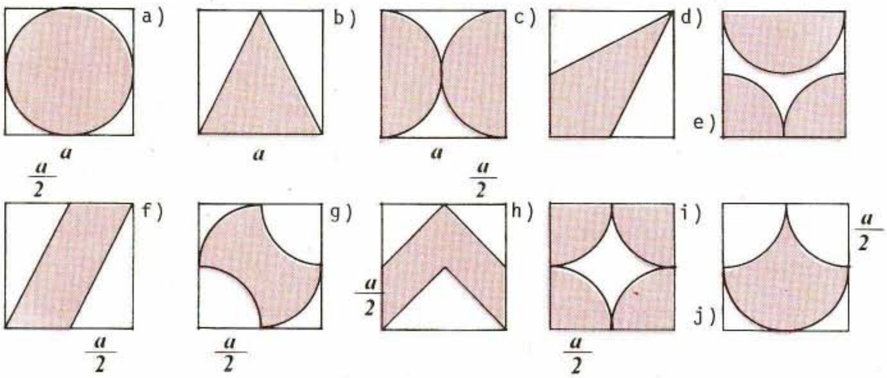
1. $\frac{5}{6}$ tvoje starosti je 10 let 10 mesecev. Koliko si star?

2. Tone in Tina se vozita s kolesom po isti poti. V enakem času prevozi Tone $\frac{3}{5}$ poti, Tina pa $\frac{5}{8}$ poti. Kateri kolesar je hitrejši?

3. V krožnico z radijem 3 cm včrtaj poljubni pravokotnik. Če zvežeš zaporedno središča stranic pravokotnika, dobiš štirikotnik. Izračunaj njegov obseg!

4. V poljubni krog $K(s, r)$ včrtaj kvadrat. Kolika je ploščina včrtanega kvadrata, izražena s polmerom r? (Nasvet: iz dobljenega kvadrata sestavi dva ploščinsko enaka kvadrata).

5. Narisanih je 10 enakih kvadratov, v katerih so včrtani liki.
a) Poišči črtane like, ki imajo enako ploščino!



6. Kvadrat s stranico a povečamo tako, da dobimo dvakrat večji obseg.
   a) Za koliko odstotkov se spremeni ploščina kvadrata?
   b) Kolikokrat je ploščina novega kvadrata večja od ploščine danega kvadrata?

7. Učenec je imel narisan enakokrak pravokotni trikotnik ABC s simetralami kotov. Nagajivi sošolec mu je zradiral stranico BC in del stranic AB in AC, tako da je ostalo še oglišče A. Pomagaj skonstruirati prvotni trikotnik!

7. razred

1. a) Za katere vrednosti spremenljivke x je ulomek $\frac{1}{x}$ manjši od 1?
   b) Za katere vrednosti spremenljivke x velja enakost $|x| = x$?
   c) Kaj je večje: a ali a^2. Obrazloži!

2. Izračunaj številčno vrednost izraza $A = 0{,}001a^3b^2 - 500a^2b^3$, če je a enako največjemu dvomestnemu negativnemu številu, število b pa je enako najmanjšemu celemu številu, ki je med številoma -5,1 in -2,4!

3. Za katera realna števila a in b velja

   a) $\frac{a}{-1} < 0$ d) $-\frac{1}{a^2} < 0$

   b) $\frac{1}{a} > 0$ e) $\frac{-a^3}{-1} < 0$

   c) $-\frac{a^2}{b^4} > 0$ f) $\frac{-1}{(-a)^3} < 0$

4. Določi množico števil, ki je dana z naslednjo unijo:
   $M = Z^+ \cup Z^+ \cup Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$

5. Reši enačbi:
   a) $(1000 - 333x).10000 - 9999 = 1$
   b) $(-3\frac{3}{35} : \frac{2}{3}).x = 7{,}2 : (-\frac{7}{9})$

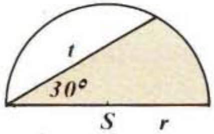
6. Določi množico A vrednosti spremenljivke x, za katere bo številčna vrednost izraza $5x + 21$ naravno število, manjše od 25 ter deljivo z 2 in 3.

7. Za katero vrednost spremenljivke x ima izraz $23 - (x - 8,5)^2$ največjo vrednost? Obrazloži!

8. razred

1. Enakostraničnemu trikotniku ABC s stranico $a = 20$ cm narišemo tak krog $K(A,r)$, da bo nastali krožni izsek imel dvakrat manjšo ploščino kot trikotnik. Kolikšen mora biti polmer kroga?

2. V polkrogu s polmerom r narišemo tetivo pod kotom 30° (glej sliko). Kolika je ploščina črtanega dela polkroga?

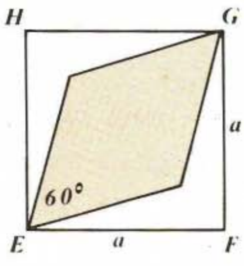


3. V ravnini koordinatnega sistema nariši pravokotnik z oglišči: $A(-3, -1)$, $B(5, -1)$, $C(5,3)$.
   Določi: a) koordinati četrtega oglišča D,
   b) koordinati sečišča diagonal AC in BD,
   c) enačbe premic, ki so nosilke stranic in diagonal pravokotnika.

4. Če nekemu ulomku povečamo števec za 20 in imenovalec za 30, se ulomek ne spremeni. Poišči ga!

5. Številu 19701971 pripiši na desni strani tri take cifre, da bo število deljivo s 7,8 in 9!

6. Kocko z robom a presekamo pravokotno na spodnjo mejno ploskev tako, kot kaže slika (na sliki je vodoravni prerez). Izračunaj prostornino in površino nastale prizme. (Slika)

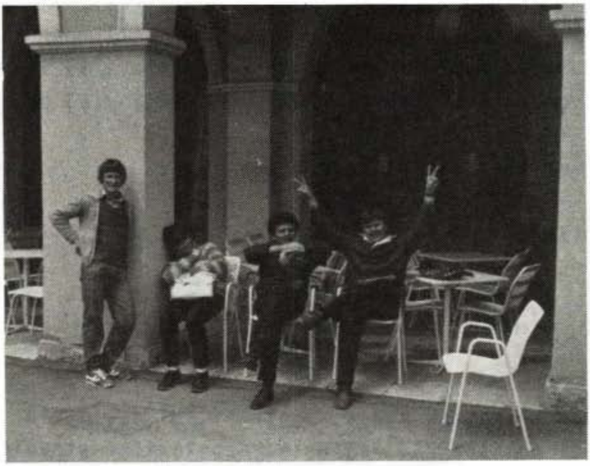


7. Kocki z robom a podaljšamo diagonali iste mejne ploskve za rob a. Dobljene točke zvežemo s priležnimi oglišči nasprotne mejne ploskve.
Izračunaj prostornino nastalega telesa in vsoto vseh njegovih robov.

Pavle Zajc

XXIII. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Že na začetku letošnjega zveznega tekmovanja v Sarajevu je tekmovalce presenetila novica, da bo tokrat olimpijska ekipa štela le štiri člane. Po zveznem tekmovanju in mali olimpiadi je bila sestavljena naslednja ekipa: Igor Kukavica (IV. razred, Ljubljana), Mladen Despić (III. razred, Sarajevo), Pavle Pandžić (IV. razred, Zagreb) in Petar Pavešić (III.razred, Rijeka).



Priprave so potekale v Beogradu od 30. junija do 6. julija. Sestavljene so bile iz predavanj in reševanja nalog s prejšnjih olimpiad in tujih zveznih tekmovanj. Predavanja so vodili A. Vučić, N. Blažić, V. Janković, Z. Kadelburg in P. Mladenović, izbrane teme pa so bile: teorija števil, polinomi, geometrija, verjetnostni račun, kombinatorika in topologija. V prostem času so si tekmovalci izmenjali mnogo zanimivih nalog, si ogledali slavne zanimivosti Beograda in se na koncu sprostili ob športnih dejavnostih.

7. julija so se tekmovalci z vodjo ekipe Petrom Mladenovićem odpravili v Budimpešto, kjer jih je pričakal jugoslovanski predstavnik v žiriji Zoran Kadelburg. Domačini so tokrat gostili kar 30 ekip, ki so bile nastanjene v modernem študentskem domu, obkrožene s številnimi športnimi tereni za košarko, nogomet in odbojko. Še isti dan se je mednarodna druščina odpravila na ogled znamenitosti Budimpešte. Vsaka ekipa je dobila tudi svojega prevajalca in vodiča. Po enodnevnem premoru je sledil sprejem na gimnaziji Margit Kaffka. Tekmovalci so reševali naloge 9. in 10. julija, in sicer vsak dan po tri ure in pol. Naloge so bile:

Prvi dan:

1. Funkcija $f(n)$ je definirana za vsa naravna števila n in zavzema nenegativne celoštevilčne vrednosti. Funkcija $f(n)$ pa ima še naslednje lastnosti:
   a) za vsaki naravni števili m in n zavzame izraz
      $f(m+n) - f(m) - f(n)$
      vrednosti 0 ali 1;
   b) $f(2) = 0$;
   c) $f(3) > 0$;
   d) $f(9999) = 3333$.
   Določi $f(1982)$!

2) Dan je neenakokrak trikotnik $A_1A_2A_3$ s stranicami a_1, a_2 in a_3 (a_1 je nasproti oglišča A). Naj bo M razpolovišče stranice a_i, T_i dotikališče danemu trikotniku včrtanega kroga s stranico a_i, S_i pa točka, ki je simetrična točki T_i glede na simetralo kota pri oglišču A_i ($i = 1, 2, 3$).

   Dokaži, da se premice M_1S_1, M_2S_2 in M_3S_3 sečejo v eni točki!

3) Za zaporedje $\{x_n\}$ pozitivnih realnih števil velja

$$1 = x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

a) Dokaži, da za vsako zaporedje s to lastnostjo obstaja tak n, da velja:

$$\frac{x_0^2}{x_1} \quad \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999$$

b) Poišči tako zaporedje $\{x_n\}$, da bo za vsak n veljalo

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

Drugi dan:

4. Dana je enačba

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

če je n tako pozitivno celo število, da ima dana enačba celoštevilčno rešitev (x,y), potem dokaži, da ima vsaj tri take rešitve!

Dokaži, da za $n = 2891$ ta enačba nima celoštevilčnih rešitev!

5. Na diagonalah AC in CE pravilnega šestkotnika $ABCDEF$ sta zaporedoma izbrani točki M in N, tako da je

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = K$$

Določi k, če veš, da so točke B, M in N kolinearne!

6. Dan je kvadrat S s stranico 100. Naj bo $L = A\ A\ A \dots A$ lomljena črta v , ki sama sebe ne seka niti se ne dotika, in taka, da je $A_0 \neq A_n$. Naj za vsako točko P roba kvadrata S obstaja taka točka črte L, da je razdalja med njo in točko P manjša ali enaka 1/2.

Dokaži, da na črti L obstajata taki točki X in Y, da je razdalja med njima manjša ali enaka 1, dolžina črte L med X in Y pa je večja ali enaka 198!

Po reševanju nalog so tekmovalci izmenjali rešitve, v večernih urah pa so se sprostili ob namiznem tenisu, ki je na Madžarskem zelo popularen. Za čas, ko je komisija pregledovala naloge, je organizator pripravil bogat program. Najprej smo se odpravili na zanimiv izlet v pionirsko mesto ob Blatnem jezeru, kjer pa se zaradi slabega vremena žal nismo mogli kopati. Naslednji dan smo z ladjo odpluli v staro prestolnico Madžarske Višegrad, kjer smo si ogledali grajsko palačo.

Tekmovalni del olimpiade se je končal s podelitvijo nagrad in priznanj. Prvo mesto je zasedla ekipa ZRN, druga je bila ZSSR, tretje in četrto mesto sta si delili ekipi ZDA in NDR, peti so bili predstavniki Vietnama. Naša ekipa je z dvema drugima nagradama dosegla 12. mesto. Nagradi sta osvojila *Mladen Despić* in *Pavle Pandžić*. Kljub zelo težkim nalogam pa sta en ruski in en zahodnonemški tekmovalec dosegla vse možne točke.

Tekmovalci so se poslovili na zaključnem banketu, na katerem je ciganska godba ustvarila nepozabno vzdušje. Zabava se je nadaljevala v študentskem domu, kjer je bilo še veliko smeha in veselja. Sklenile so se številne nove vezi in prijateljstva.

Pokroviteljstvo nad tekmovanjem je za naslednje leto prevzela Francija, tako da bo Pariz prihodnjič gostil šestčlanske ekipe.

Aleksandar Jurišić

14. Iz osmih vžigalic sestavi lik, ki vsebuje osmerokotnik, dva kvadrata in 8 trikotnikov!

RAZPIS 7. REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ RAČUNALNIŠTVA

Sedmo republiško tekmovanje iz računalništva bo organiziralo Slovensko društvo Informatika v sodelovanju s Fakulteto za elektrotehniko, Institutom Jožef Stefan in Društvom matematikov, fizikov in astronomov SRS. Tekmovanje bo v soboto, 16. aprila 1983 ob 10. uri na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani.

Šole lahko prijavijo za tekmovanje poljubno število svojih učencev. Za prijavnico k tekmovanju velja spodnji vprašalnik. Izrežite ga ali prepišite, izpolnite in pošljite priporočeno do četrtka, 17. marca 1983 na naslov

Institut Jožef Stefan, (Iztok Tvrdy), Jamova 39, p.p. 53, 61111 Ljubljana, s pripisom: Tekmovanje srednješolcev iz računalništva.

Bivanje tekmovalcev in njihovih spremljevalcev bo organizirala Komisija za popularizacijo računalništva. Pred tekmovanjem bomo šolam potrdili prijavo tekmovalcev, obenem pa jih bomo obvestili o natančnem poteku tekmovanja.

- -

PRIJAVA TEKMOVALCEV

za 7. republiško tekmovanje srednješolcev iz računalništva

ŠOLA: ____

NASLOV: ____

TELEFON. ____________________ POŠTNA ŠTEVILKA ______________

Tekmovalci po prvem letu pouka računalništva: ______________

____

____

Tekmovalci po drugem letu pouka računalništva: ____________

____

____

Spremljevalec: ______________________________________

Ali je potrebno zagotoviti prenočišče DA NE

Datum: ____________ Žig šole in podpis ravnatelja:

PREMISLI IN REŠI

REŠITEV NALOGE IZ ŠTEVILKE X/1

V prvi številki X. letnika smo vam zastavili logično nalogo s štirimi vprašanji. Dobili smo 35 pravilnih odgovorov, pri tem je kar precej reševalcev rešilo vse štiri zanke. Rešitve so nam poslali:

Arjana Rosina iz Ljubljane, Sabina Gajšek iz Vrbna, Bojan Kuzma iz Ljubljane, Marjeta Mohorič iz Kranja, Marjeta Duh iz Trbovelj, Franc Jerala iz Kranja, Jože Fabčič iz Vipave, Sašo Strle iz Ljubljane, Damjan Sever iz Ljubljane, Aleš Bajt iz Novega mesta, Janko Stergar iz Šoštanja, Jure Mencinger iz Ljubljane, Ciril Pezdir iz Vnanjih goric, Božo Dajčman iz Novega mesta, Damjan Podržaj iz Prestranka, Pavel Ilija iz Doba, Jože Arh z Jesenic, Zoran Rogič iz Titovega Velenja, Natalija Fužir iz Lampreč, Aleksander Križ iz Šoštanja, Filip Žvanut iz Ljubljane, Barbara Motnikar iz Kamnika, Samo Gerkšič iz Ljubljane, Samo Grčman iz Ljubljane, Janez Hren iz Domžal, Tomo Bogataj iz Ljubljane, Juš Kocijan iz Ljubljane, Maja Bračič iz Radovljice, Martina Kerlatec iz Maribora, Irena Gorenc iz Ljubljane, Saša Pucko iz Brežic, David Lukman iz Ljubljane, Hinko Plevnik iz Gornje Radgone, Božnar Marija z Malega vrha, Mira Stare iz Vodic.

Izžrebali smo tri reševalce: Natalijo Fužir, Janeza Hrena in Martino Kerlatec, poslali jim bomo knjižico Max von Laue: *Kratka zgodovina fizike*, ki je ravnokar izšla v slovenskem prevodu v knjižnici Sigma.

Peter Petek

Objavljamo rešitev vseh štirih nalog, kot nam jo je poslal Jure Mencinger:

Iz teksta je razvidno, da razen nedelje ni dneva, v katerem ne bi kdo izmed bratov lagal. Vendar pa brata nikoli ne lažeta na isti dan.

1) V tem primeru obstojata dve možnosti, in sicer, da oba lažeta ali pa oba govorita resnico. Ker pa dneva, v katerem oba lažeta ni, oba govorita resnico.
   PRVA OSEBA JE RES PETER, DRUGA PA JE PAVEL.

2) Bil je nek dan v tednu - ne nedelja - zato vemo, da eden od bratov laže. Drugi zagotovo ne laže, kajti ne trdi, da je on Pavel, pač pa, da je Pavel, če je prvi Peter.
   PRVA OSEBA JE PAVEL, DRUGA JE PETER.

3) Kot smo že ugotovili ob nedeljah nihče ne laže. Prvi je rekel, da ob nedeljah laže, torej je bil ta dan zanj "lažniv". Če ima "lažniv" dan en, ga drugi nima.
   ODGOVOR DRUGEGA SE JE GLASIL: NE

4) Prva oseba trdi, da laže ob sobotah in nedeljah, kar je gotovo laž. To je lahko povedala na ponedeljek, torek in sredo. Drugi govori resnico. Dan pred njegovim prvim "lažnim" dnevom (četrtkom) je sreda.
   TO SE JE ZGODILO V SREDO.

Nekaterim je nekaj težav povzročala izjava "Če je on Peter, potem sem jaz Pavel." Kdaj je izjava oblike "Če je A, potem je B." resnična? Vsakdo bo potrdil resničnost naslednje splošne izjave:

Za vsako naravno število n velja: če je $n < 2$, potem je $n < 3$. Zato moramo imeti tudi naslednje posamezne izjave za resnične:

1) če je $1 < 2$, potem je $1 < 3$.
2) če je $2 < 2$, potem je $2 < 3$.
3) če je $3 < 2$, potem je $3 < 3$.
4) če je $4 < 2$, potem je $4 < 3$.

....

....

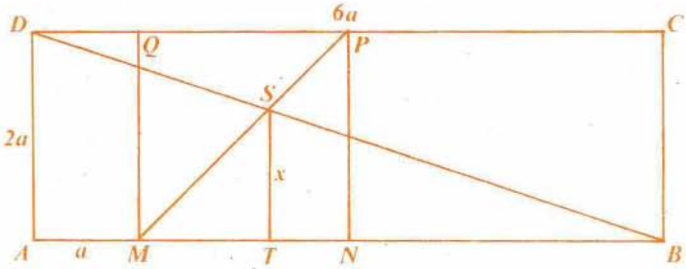
Vse te resnične izjave imajo obliko "če je A, potem je B." Pri prvi izjavi sta obe izjavi - A in B, resnični. Pri drugi je prva neresnična, druga pa resnična. Pri vseh ostalih sta obe neresnični. Prav ta zadnji primer je nastopil v naši uganki.

Pa še vprašanje, kdaj je izjava "če je A, potem je B neresnična? Seveda samo v primeru, ko je A resnična izjava B pa neresnična izjava.

Izidor Hafner

PRIBLIŽNA PODVOJITEV KOCKE

Ena od klasičnih grških nalog zahteva, da poiščemo rob kocke, ki ima natanko dvakrat večjo prostornino kot kocka z robom a. Seveda je ta rob $a\sqrt[3]{2}$, vendar se take daljice - pri danem a seveda - ne da narisati samo z ravnilom in šestilom. Obstaja cel kup različnih približnih konstrukcij. Ena je pred vami



Pravokotnik $ABCD$ ima stranici $2a$ in $6a$; stranica MQ kvadrata $MNPQ$ je od stranice AD oddaljena ravno za a. Diagonali pravokotnika in kvadrata se sekata v točki S. Razdalja te točke od stranice AB je približek $x = ST$.

Naloga: Izračunaj x in oceni, za koliko procentov se razlikuje od $a\sqrt[3]{2}$!

Rešitve nam pošljite do konca marca 1983.

Peter Petek

REŠITVE NALOG

RESITVE UGANK S STRANI 121

DOPOLNJEVANKA S ŠTEVILI: Moj stric Peter, ki je viničar, se zastonj veseli lepega vremena, saj bo spet deževalo.

ENAČBA: Z-lata, Nanos, tna (Ant), p-Alec, red, u-Ganka, jek, o-marica, rakom (mokar), anes (Sena), ko-palec, koma. Misel: Znanost napreduje korakoma, ne skokoma.

ISKALNICA "ŠTEVILA": ena - B, nič - E, tri - R, osem - T, ena - R, pet - A, tri - N, ena - D, nič - R, sto - U, tri - S, ena - S, dva - E, pet - L, nič - L. Končna rešitev: Bertrand Russell.

ŠTEVILČNICA: 1. konjiček, 2. triceps, 3. pehtran, 4. srčkovka, 5. krepost, 6. Hanibal, 7. mleček, 8. lavendel, 9. svetloba, 10. Pavlov, 11. kositer, 12. anemona, 13. cigareta, 14. mladika, 15. kapital, 16. blagajna. Misel: Nihče ne ve vsega, pač pa vsakdo ve nekaj.

Pavle Gregorc

REŠITVE IZBRANIH NALOG ZA UČENCE VIŠJIH RAZREDOV OSNOVNE ŠOLE

Besedila nalog glej na strani 143

5. razred

1. Cifra štiri je napisana 15-krat.
2. Na šoli je 350 fantov in 280 deklet.
3. $10_2 = 2$ $\quad 100_2 = 4$ $\quad 1010_2 = 10$

   $1000_2 = 8$ $\quad 10000_2 = 16$ $\quad 11001_2 = 25$
4. a) (0,9), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1), (9,0)

   b) (0,0)

   c) (0,1), (1,0)
5. $$\begin{array}{r} 101200 \\ -\ 29972 \\ \hline 71228 \end{array}$$
6. $x = 91$
7. Mešanica 1 kg kave stane 520 din.
8. Širina traku bo 25 cm, kvadrat pa bi imel stranico 1 m.
9. Ker je vsaka stranica trikotnika manjša od vsote in večja od razlike ostalih dveh stranic, je dolžina tretje stranice lahko vsako naravno število med 3 in 15 vključno.
10. Sosed B ima za 4 m krajšo ograjo.

6. razred

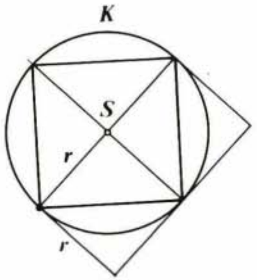
1. $\frac{5}{6}$ od x let je $10\frac{5}{6}$

   $x = 13$

   Tvoja starost je 13 let.
2. Tisti, ki prevozi v enakem času daljšo pot, je hitrejši. Tina je hitrejša, saj prevozi v enakem času kot Tone $\frac{1}{40}$ poti več.

3. Iz risbe, ki si jo narisal, je razvidno, da je stranica romba enaka polmeru kroga. Torej!

4. $p = 2 . r^2$



5. Enake ploščine imajo liki iz nalog:
a), c), e) in i) ter liki iz nalog b), d), f), g), g) in j)

6. $o = 4 . a$ $\qquad$ $o_1 = 8 . a = 4a_1$
$p = a^2$ $\qquad$ $p_1 = a_1{}^2 = 4a^2$

$p_1 - p = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

a) Ploščina kvadrata je večja za $\frac{300}{100}$ ali 300%.
b) Ploščina kvadrata je 4-krat večja od prvotnega kvadrata.

7. Reši sam!

7. razred

1.a) Ulomek $\frac{1}{x}$ je manjši od 1, kadar je x negativen ali večji od 1.
b) Enačba $|x| = x$ velja za vsa nenegativna števila x.
c) Za $0 < a < 1$ je $a > a^2$. Če pa je $a < 0$ ali $a > 1$, je $a < a^2$.

2. $a = -10$, $b = -5$
A = 6249975

3. a) $a > 0$ $\qquad$ c) ni rešitve $\qquad$ e) $a < 0$
b) $a > 0$ $\qquad$ d) $a \neq 0$ $\qquad$ f) $a < 0$

4. $M = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\} = Q$

5. a) $x = 3$ $\qquad$ b) $x = 2$

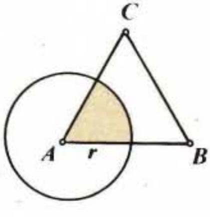
6. Naravna števila, manjša od 25 in deljiva z 2 in 3, so: 6, 12, 18 in 24.

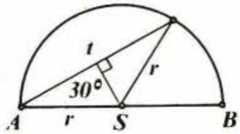
Tako dobimo: Iz enačbe $5x + 21 = 6$ sledi $x = -3$.
Če 6 nadomestimo z 12, 18 in 14, dobimo še tri rešitve.
Torej:
$A = \{-3, -\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\}$

7. Dani izraz bo največji, če bo vrednost izraza $(x - 8{,}5)^2$ najmanjša. To pomeni $(x - 8{,}5)^2 = 0$, se pravi $x = 8{,}5$.

8. razred

1. $p_i = \frac{1}{2}p_t$





$\frac{\pi r^2}{6} = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$

$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$

$r \doteq 13$ cm

2. $p = \frac{r^2}{12}(3\sqrt{3} + 2\pi)$

3. a) $D(-3,3)$
   b) $S(1, 1)$
   c) Stranice ležijo po vrsti na premicah z enačbami $y = -1$, $x = 5$, $y = 3$, $x = -3$. Diagonali pa na premicah $2y = x + 1$ in $2y = -x+3$

4. Naj bo iskani ulomek $\frac{a}{b}$.

$\frac{a + 20}{b + 30} = \frac{a}{b}$

$ab + 30a = ab + 20b$

Odtod

$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

Iskani ulomek je $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

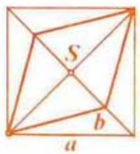
5. Če naj bo število deljivo s 7,8 in 9, potem je deljivo s produktom 7.8.9, t.j. s 504.
Pripisati številu 19701971 tri cifre pomeni številu 19701971000 prišteti x (kjer je $0 < x < 1000$).
Iskano število ima obliko $19701971000 + x$. Ostanek pri deljenju števila 19701971000 s 504 je 152. Iskano trimestno število x mora biti táko, da je $152 + x$ deljivo s 504, to je le za število 352 in 856.
Odgovor: (1) 19701971352
(2) 19701971856

6. $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2} \implies b = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$V = \frac{1}{3}a^3\sqrt{3}$

$P = \frac{2}{3}a^2(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$

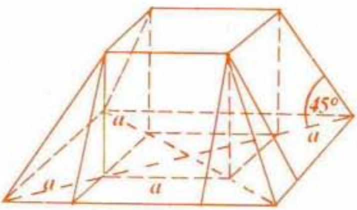
$\overline{AS} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



7. $V = a^3 + \frac{2}{3}a^3 + a^3\sqrt{2}$

$V = a^3(\frac{5}{3} + \sqrt{2})$

$o = 8a(1 + \sqrt{2})$



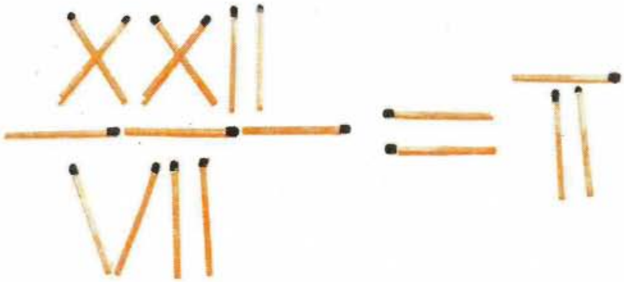
Pavle Zajc

PRESEKOV ŠKRAT

Pred novim letom ste dobili peto številko Preseka, ki je obenem tudi Presekov koledar. V njem so datumi rojstev slavnih slovenskih matematikov in fizikov, označeni z modro barvo. Natančnejše bralce vljudno prosimo, da v mesecu marcu pokrijejo z modro barvo 23. in 24. dan v mesecu in ne 30. in 31., kot je to storil Presekov škrat.

Ciril Velkovrh

Rešitev 11. naloge s strani 123.

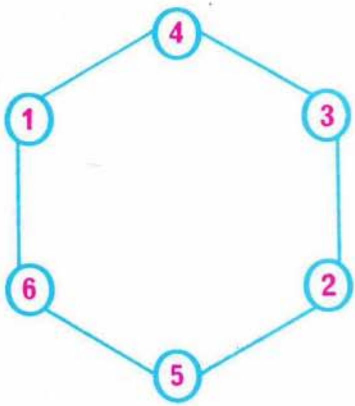


Rešitev 14. naloge s strani 150.

BISTROVIDEC

PRAŠTEVILSKE OGRLICE

V reviji Journal of Recreational Mathematics 14 (1982) 1, stran 64 je Antonio Filz vpeljal pojem "praštevilske ogrlice" velikosti n . To je "ogrlica" iz števil od 1 do n, na kateri je vsota dveh sosednjih si števil vselej praštevilo. Na primer za n = 6:



Poišči vse "praštevilske ogrlice" za n = 8. Pokaži še, da ne obstajajo "praštevilske ogrlice" lihe velikosti.

Vladimir Batagelj