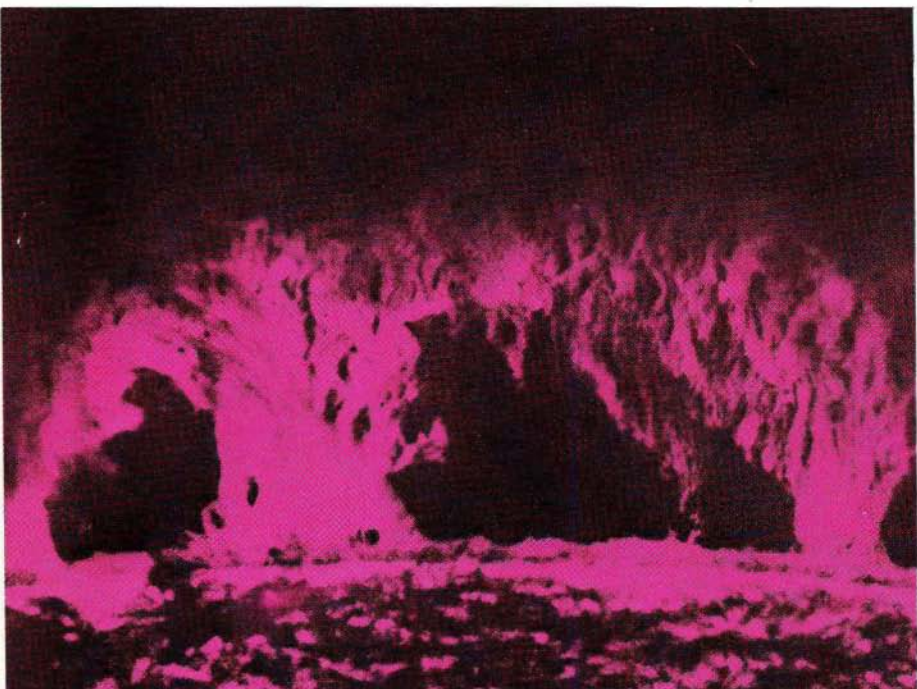


p r e 1
s e k x
1982-83



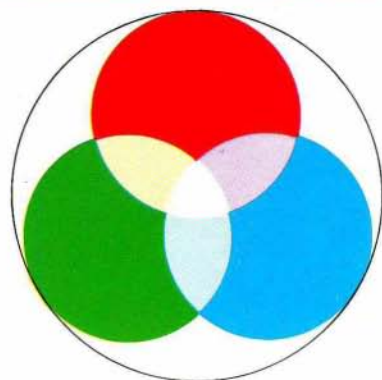
LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

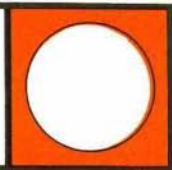
 **ASTRONOME**

IZDAJA DMFA SRS





Slika 1 Pogled na Termoelektrarno Šoštanj. Z leve proti desni hladilni stolp četrte enote in njen dimnik, zgradbe četrte in tretje enote in prvih dveh enot, dimnika tretje enote in prvih dveh enot ter hladilni stolpi druge, prve in tretje enote.



Segli ste po prvi številki desetega letnika Preseka. Z njo je Presek vstopil v jubilejno leto in ob priliki se bomo ozrli nazaj in pogledali naprej.

Pričujoča številka je posvečena energijski tematiki. Upamo, da boste z zanimanjem prebrali, "kako rešujejo svoje energijske probleme" zvezde, posebno za nas najpomembnejša zvezda - Sonce. Kaj pa smo naredili ljudje na Zemlji, da bi potešili čedalje hujšo energijsko lakoto? Morda ji bomo kos šele takrat, ko bomo znali pridobivati energijo z zlitjem lahkih jeder - podobno, kot se dogaja na Soncu. Pogledali bomo v notranjost šoštanjske termoelektrarne in jedrske elektrarne Krško. V prvi izkoriščajo izgorevanje lignita, v drugi pa jedrsko cepitev obogatenega urana. Tudi bralci, ki bolj cenijo naloge in logično sklepanje, bodo v tej številki našli precej zanimivega.

Še malo neprijetna, a žal običajna novica: zaradi porasta cen papirja in storitev, ki so potrebne, da nastane Presek, smo morali dvigniti letno naročnino za Presek na 100,00 din za skupinska naročila in na 125,00 din za posamezna naročila. Iskreno upamo, da zaradi tega ne boste obrnili Preseku hrbet. Učitelje matematike in fizike lepo prosimo, da pošljejo zbrana naročila na naš naslov do 20. septembra 1982. Takrat moramo namreč oddati v tiskarno rokopis za drugo številko in se odločiti za naklado Preseka. Naročnino pa pričakujemo do konca decembra 1982.

Lep pozdrav!

Zvonko Trontelj

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek, Andrej Čadež (astronomija), Jože Dover, Rado Flegar (tehnični urednik), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja - naloge iz fizike), Pavel Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar, Metka Luzar-Vlachs (poskusi-premisli-odgovori), Andrej Kmet, Ljubo Kostrevc, Jože Kotnik, Edvard Kramar (glavni urednik), Matilda Lenarčič (pisma bralcev), Gorazd Lešnjak (tekmovanja - naloge iz matematike), Andrej Likar (odgovorni urednik, Presekova knjižnica - fizika), Norma Mankoč-Borštnik, Franci Oblak, Peter Petek (naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Pisanski (matematika), Tomaž Škulj, Zvonko Trontelj (fizika), Marjan Vagaja, Ciril Velkovich (nove knjige, novice - zanimivosti).

Rokopis je natipkala Ivanka Breznikar, jezikovno ga je pregledala Ivanka Šircelj, slike je narisal Vili Vrhovec.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, pp 6, tel.štev. (061) 265-061/53. Štev. žiro računa: 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 50100-620-107-257300-5694/4. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 125.- din, za skupinska pa 100.- din, za inozemstvo 5 %, 10.000 Lit, 100 Asch. Posamezna številka stane 40.- din, za člane 32.- din.

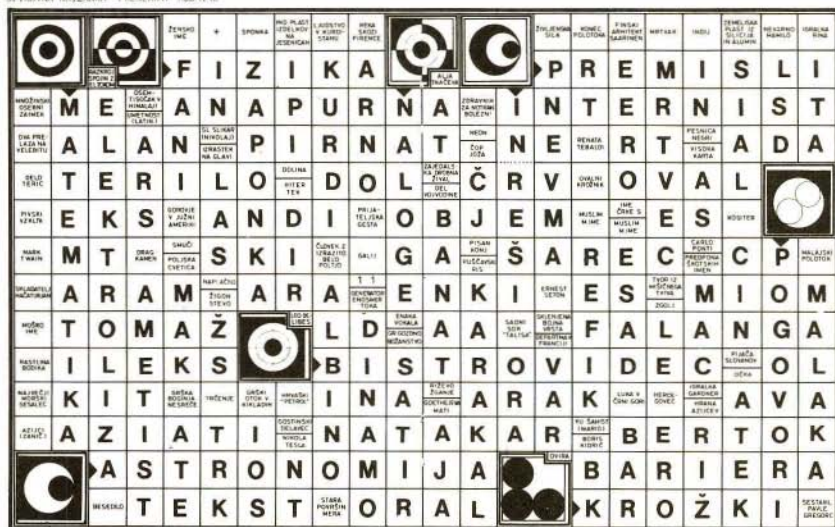
List sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk: Časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.

List izhaja štiri do šestkrat letno. Naklada 20.000 izvodov.

© 1982 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 580

ŠIKOVNA KRIŽANKA "PRESEKOV RUBRIKE"



UVODNIK	1	(Zvonko Trontelj)
MATEMATIKA	4	Štirje dokazi (Dragoljub Milošević)
	6	Naloga (Aleksandar Jurišić)
	7	Verižni ulomki (Peter Legiša)
MATEMATIČNO RAZVEDRILLO	12	Zanimivosti o figurativnih številih (Danijel Bezek)
	15	Rešitev naloge (Aleksandar Jurišić)
	16	Vsakdanje vendar imenitno (Karl Bajc)
NAROČILNICA	18	
FIZIKA	19	Pečica za žar proučuje jedrski reaktor v Krškem (Franc Cvelbar)
	24	Obisk v šoštanjski elektrarni (Janez Strnad)
KRIŽANKA	32	Planeti
NALOGE	36	Naučimo se sklepati (Izidor Hafner)
KNJIŽNICA SIGMA	38	(Ciril Velkovrh)
NALOGE BRALCEV	39	(Zdenka Panker, Rudolf Bregar, Dragoljub Milošević, Andreja Erdlen)
BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	40	Iz zapisov inšpektorja Craiga (Tomaž Pisanski)
TEKMOVANJA-NALOGE	41	26. republiško tekmovanje srednješolcev v matematiki (Milena Kožar)
	46	8. republiško predtekmovanje srednješolcev v matematiki (Gorazd Lešnjak)
PREMISLI IN REŠI	49	(Peter Petek)
ASTRONOMIJA	55	Energija in zvezde (Andrej Čadež)
NOVE KNJIGE	60	(Ciril Velkovrh)
NALOGA	61	(Dragoljub Milošević)
REŠITVE NALOG	62	Naučimo se sklepati (Izidor Hafner)
	63	Zanimivosti o figurativnih številih (Danijel Bezek)
	64	Iz zapisov inšpektorja Craiga
OVITEK	I	Slika na naslovni strani kaže silovit izbruh na površini sonca. Glej članek Energija in zvezde na str. 55
	II	Pogled na Termoelektrarno šoštanj Glej članek na str. 24
	III	Zanimivosti o pitagorejskih trojicah (Danijel Bezek)
BISTROVIDEO	IV	Bistrovideo



ŠTIRJE DOKAZI

Angleški matematik *W. Sawyer* je v svoji knjigi *Prelude to Mathematics* (Predigra matematike) zapisal zanimivo pedagoško misel:

"Često je koristneje, da rešimo eno samo nalogo na tri različne načine, kot pa da rešimo tri naloge na en način. Ko rešujemo isto nalogo na različne načine, jih lahko primerjamo, da ugotovimo, kateri je krajši, učinkovitejši in elegantnejši. Tako si pridobivamo in dograjujemo sposobnost za reševanje nalog."

Pokazali bomo štiri različne dokaze izreka:

Če sta diagonali trapeza medsebojno pravokotni, je vsota kvadratov teh diagonal enaka kvadratu vsote vzporednih stranic trapeza.

Dokaz 1. Na sliki 1 je trapez $ABCD$. Osnovnici AB in CD sta označeni z a in b , diagonali AC in BD sta e in f . Točki M in N sta središči krakov, presečišča daljice MN z diagonalama smo označili E in F . Ker sta daljici ME in FN srednjici trikotnikov ACD in BCD , velja $ME = FN = \frac{1}{2}CD = b/2$. Od tod pa, ker je $MN = (a+b)/2$, dobimo

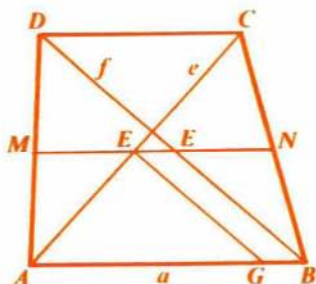
$$EF = MN - (ME + FN) = (a + b)/2 - b = (a-b)/2.$$

Konstruiramo EG vzporedno z BD . Ker je četverokotnik $BFEG$ paralelogram, je $EG = BF$. In ker MN razpolavlja diagonali trapeza, imamo $AE = e/2$ in $BF = f/2$ in zato $EG = f/2$. Hipotenuzo AG trikotnika AEG izračunamo: $AG = a - (a-b)/2 = (a+b)/2$. Uporabimo Pitagorov izrek v trikotniku AEG :

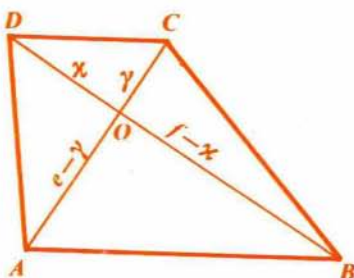
$$(e/2)^2 + (f/2)^2 = ((a+b)/2)^2$$

$$e^2 + f^2 = (a+b)^2$$

in dokaz je končan.



Slika 1



Slika 2

Dokaz 2. Poglejmo sliko 2. S črkama x in y smo označili daljici OD in OC in je zato $AO = e - y$ in $BO = f - x$, če sta e in f diagonali. Iz podobnosti trikotnikov ABO in CDO sklepamo, da velja sorazmerje

$$(e - y) : y = (f - x) : x = a : b$$

od koder izračunamo:

$$(a + b) \cdot y = b \cdot e \quad (1)$$

$$(a + b) \cdot x = b \cdot f \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2) kvadriramo in seštejemo:

$$(a + b)^2(x^2 + y^2) = b^2 \cdot (e^2 + f^2) \quad (3)$$

Za pravokotni trikotnik CDO velja Pitagorov izrek:

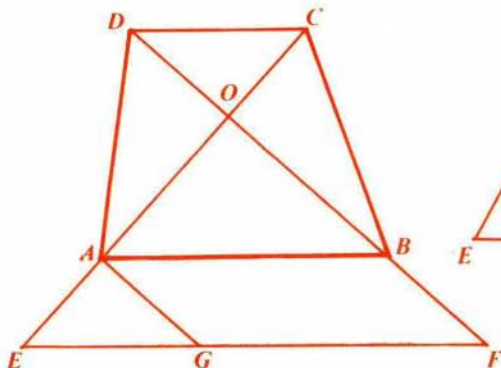
$$x^2 + y^2 = b^2 \quad (4)$$

Iz (3) in (4) sledi:

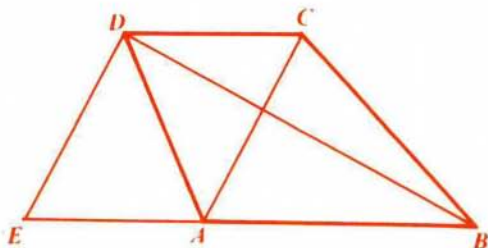
$$e^2 + f^2 = (a + b)^2$$

Dokaz 3. Diagonalo CA podaljšamo tako, da je daljica AE skladna z CO , in diagonalo DB podaljšamo do F tako, da je BF skladno z DO (slika 3). Vzporedno s podaljškom BF potegnemo še daljico AG . Četverkotnik $ABFG$ je paralelogram, zato je $FG = AB = a$. Trikotnika AEG in OCD sta skladna: $AE = OC$ po konstrukciji,

$EAG = COD = 90^\circ$ in $AEG = OCD$ (kota z vzporednima krakoma). Skladnost nam prinese $EG = CD = b$. Torej je $EF = a + b$. Spet uporabimo Pitagorov izrek, tokrat za trikotnik EFO , in zahtevana enakost je pred nami.



Slika 3



Slika 4

Dokaz 4. Na sliki 4 smo konstruirali vzporednico DE diagonali AC . Ker je $AE = CD = b$, imamo $BE = AE + AB = b + a$. Trikotnik BDE je pravokoten in zato

$$e^2 + f^2 = (a+b)^2$$

Dragoljub M. Milošević
prevedel Peter Petek

Dana so števila 1, 12, 123, ..., 1234567890, 12345678901, ... Vsako število dobimo iz predhodnjega tako, da mu dopišemo naslednjo cifro, pri čemer cifri 0 sledi 1, za 1 pride 2, ..., za 9 pride 0, itd. Dokaži, da je vsaj eno od tako dobljenih števil deljivo s 1981! (Naloga iz zveznega tekmovanja srednješolcev v matematiki 1979/80.)

Aleksandar Jurišić

VERIŽNI ULOMKI

Navadni verižni ulomek je izraz oblike

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

kjer so $a_0, \dots, a_n$ cela števila in velja: $a_0 \geq 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\dots$, $a_n > 0$. Števila $a_1, \dots, a_n$ so torej naravna števila, a_0 pa je lahko tudi 0. Vsak tak ulomek lahko simbolično zapišemo takole:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n]$$

Izračunajmo nekaj verižnih ulomkov:

$$[1, 1, 1, 1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$[0, 1, 2, 2] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}$$

Poglejmo si narobe, kako lahko zapišemo ulomek $33/17$ v obliki verižnega ulomka:

$$33/17 = 1 + 16/17 = 1 + \frac{1}{\frac{17}{16}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16}}$$

Tu je torej $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 16$. Tako je

$$33/17 = [1, 1, 16]$$

Ulomek $33/17$ lahko zapišemo tudi malenkost drugače:

$$33/17 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = [1, 1, 15, 1]$$

Vidimo, da velja splošno pravilo: če je v verižnem ulomku $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ število $a_n > 1$, je

$$[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

Če pa je zadnji člen v verižnem ulomku 1, je

$$[a_0, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

Vsak verižni ulomek ima torej isto vrednost kot verižni ulomek z enim členom več ali manj. Primer:

$$[3, 1, 1, 1] = [3, 1, 2]$$

Pokažimo zdaj, da lahko vsak ulomek p/q zapišemo v obliki verižnega ulomka. Če je $p \geq q$, delimo p s q :

$$p = a_0 q + r_1 \quad (0 \leq r_1 < q) \quad \text{oziroma} \quad p/q = a_0 + r_1/q = a_0 + \frac{1}{q/r_1}$$

Če je $p < q$, postavimo seveda $a_0 = 0$.

Delimo zdaj q z r_1 :

$$q = a_1 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1) \quad \text{oziroma}$$

$$q/r_1 = a_1 + r_2/r_1 = a_1 + \frac{1}{r_1/r_2}$$

Delimo r_1 z r_2 in tako dalje. Ker se ostanki $r_1, r_2, \dots$ nenehno manjšajo, se ta proces prej ali slej konča. Če dobro pogledamo, vidimo, da je to pravzaprav Evklidov algoritem za števili p in q . Denimo torej, da je r_n zadnji od nič različen ostanek:

$$r_{n-2}/r_{n-1} = a_{n-1} + r_n/r_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{r_{n-1}/r_n}$$

$$r_{n-1}/r_n = a_n$$

Vidimo, da je

$$p/q = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

Ta zapis je očitno enoličen, razen morda na repu ulomka, kjer imamo, kot vemo, dve možnosti.

Oglejmo si zdaj naslednjo resnično zgodbo, ki jo vem iz prve roke. Ameriški matematik je od svojega sina zvedel, da je pri baseballu imel relativni delež zadetkov 0.846. Očetu je bilo jasno, da to ne pomeni, da je sin zadel 846 žog od 1000, pač pa, da je to decimalni približek za neki ulomek p/q , kjer sta

p in q dve ne preveliki celi števili. Razvil je 0.846 v verižni ulomek:

$$0.846 = \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{38}}}}$$

Ker je število 38 veliko, je

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = \frac{11}{13}$$

zelo dober približek za 0.846. Rečemo lahko tudi narobe:

0.846 je zelo dober približek za 11/13. Dejansko je 11/13 = 0.8462... . Matematik je tvegala in vprašal sina, ali to pomeni, da je zadel enajst žog od trinajstih. Odgovor je bil pritrdilen.

Obstajajo problemi praktične narave, pri katerih so verižni ulomki prav uporabni. Denimo, da je treba izdelati zobniški mehanizem iz dveh zobatih koles, tako da bo prenos čim bliže razmerju p/q , kjer sta p in q dve veliki števili. Število zob na zobnikih je omejeno. Pomagamo si tako, da razvijemo p/q v verižni ulomek in poiščemo primeren približek. Za razmerje 988/517 bi naredili takole:

$$\begin{aligned} 988/517 &= 1.91... = 1 + 1/1.10... = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10.24}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{4.18}}} = [1, 1, 10, 4, 5, 2] \end{aligned}$$

Ena možnost za približek je tale: $[1, 1, 10] = 21/11$. Tako bi vzeli zobnik z 10 in zobnik z 21 zobmi. Poglejmo si natančnost približka:

$$988/517 = 1.911...$$

$$21/11 = 1.909...$$

Druga možnost je seveda vzeti približek $|1, 1, 10, 4| = 86/45$.

Primerjajmo:

$$988/517 = 1.9110...$$

$$86/45 = 1.9111...$$

Ta približek je seveda boljši od prejšnjega.

O taki uporabi verižnih ulomkov je obširneje pisal že znani znanstvenik *Christian Huygens*, ki je pri konstrukciji planeta-rija moral upoštevati razmerja med obhodnimi dobami različnih planetov. Knjiga *Descriptio automati planetarii* (v prevodu: *Opis mehanizma planetarija*), v kateri je pokazal, da nam veriž-ni ulomki dajejo najboljše take približke, je izšla leta 1703 na Nizozemskem.

Nekoliko težji problem je iskanje približkov za število π . Vemo, da je $\pi = 3.141592654\dots$. Poskusimo ga razviti v verižni ulomek:

$$\pi = 3 + 0.14159\dots = 3 + 1/7.062\dots$$

Vidimo, da je $3 \frac{1}{7} = 3.1428\dots$ kar dober približek za π .

Gotovo je $\pi < 3 \frac{1}{7}$. Ker je $\pi = 3 + 10/70.6\dots$, je $\pi > 3 + 10/71$.

Torej je

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Do te ocene je prišel že grški matematik Arhimed, ko je posku-šal čim natančneje izračunati π . V njegovih časih decimalni za-pis še ni bil v rabi, uporabljali so le ulomke. Zato je lahko zapisal le oceno take oblike, kot je zgoraj.

Nadaljujmo z računanjem:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15.99\dots}}$$

Iz tega zapisa je očitno, da je $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 355/113$ zelo dober približek za π . Dejansko se

$$355/113 = 3.141592920\dots \approx 3.141593$$

ujema s π na 7 mest.

Pri naši natančnosti začetnega približka (10 mest) in računanju na 10 mest verižnega ulomka skoraj ne moremo nadaljevati, saj so izračunani členi zmeraj manj zanesljivi. Zapišimo še

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1.003\dots}}}$$

Ker π ni racionalno število, ga pravzaprav ne moremo zapisati kot končen navaden verižni ulomek. Pomagamo si lahko takole:

Na 12 decimalk je

$$3.14159265358 < \pi < 3.14159265359$$

$$3.14159265358 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

$$3.14159265359 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

Zato smo bolj ali manj upravičeni zapisati, da je

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots]$$

(Izkaže se namreč: če se verižna ulomka števil a in b ujemata v prvih n členih, se verižni ulomek vsakega števila c med a in b ujema z omenjenima verižnima ulomkoma na prvih n mestih). Če bi vzeli še več decimalk, bi seveda dobili še daljši razvoj za π . Angleški matematik *John Wallis* je v knjigi *Tractatus de algebra*, ki je izšla leta 1685, vzel število π na 35 decimalnih mest in izračunal

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 3, 4, 2, 6, 6, 1, \dots]$$

Leta 1770 je nemški matematik *Lambert* objavil ponovljen izračun, ki pa je od 26. člena naprej imel drugačne vrednosti. Vsekakor v dobljenem verižnem ulomku ni mogoče opaziti kake pravilnosti. Svojevrstna kontrola Wallisovega izračuna so odlični približki za π , ki so jih konec osemnajstega stoletja našli japonski matematiki:

$$\frac{5419351}{1725033}, \quad \frac{428224593349304}{136308121570117}$$

saj jih lahko dobimo iz Wallisovega razvoja. Verjetno so Japonci do njih prišli s pomočjo nečesa takega kot verižni ulomki. Danes bi s pomočjo računalnika in primerne programa lahko napravili še mnogo daljši razvoj. Vloženi trud bi bil seveda neprimerno manjši od truda nekdanjih matematikov.

Peter Legiša

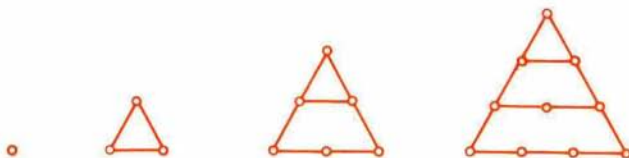


MATEMATIČNO RAZVEDRILO

ZANIMIVOSTI O FIGURATIVNIH ŠTEVILIH

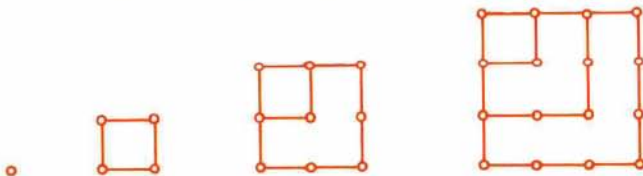
Figurativna števila povezujejo geometrijsko obliko z aritmetično vsebino. Kako? Poglejmo si na primeru!

Števila v zaporedju: 1, 3, 6, 10, 15, 21... imenujemo *trikotna števila*. Tako jih imenujemo zato, ker štejejo oglišča in točke v stranicah homotetičnih trikotnikov. Pri tem je, kot vidimo na sliki, vsak trikotnik vsebovan v svojem nasledniku.



Slika 1: Trikotna števila

Igro z zaporedjem in prirejenimi figurativnimi liki lahko tudi obrnemo. Narišemo homotetične kvadrate, preštejemo točke ter oblikujemo *zaporedje kvadratnih števil*: 1, 4, 9, 16 ...

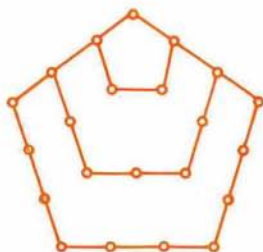


Slika 2: Kvadratna števila

Poleg trikotnih in kvadratnih števil poznamo *petkotna*, *šestkotna* in splošno *n-kotna* števila.

Včasih nas zanima kak poseben predstavnik iz zaporedja števil določene vrste. Na primer: petkotno število, ki je v zaporedju petkotnih števil na četrtem mestu.

Figurativna podoba na sliki 3 nam pomaga najti rešitev.



Slika 3: Petkotno število četrtega reda

S štetjem točk homotetičnih petkotnikov na sliki 3 ugotovimo, da je v zaporedju petkotnih števil na četrtem mestu število 22.

Tak način je pri *n*-kotnih številih, ki ležijo na bolj oddaljenih mestih, zelo zamuden. Zato bi radi imeli obrazec, po katerem se da brez težav poiskati poljubno *n*-kotno število na poljubnem *m*-tem mestu v zaporedju *n*-kotnih števil.

V Preseku (glej Presek 1977/78, št. 3, str. 159) smo pred leti tak obrazec že izpeljali. (Primerjaj še Presek 1979/80, št. 4, str. 214). Zdaj ga samo zapišimo:

$$\frac{(n-2)m(m-1)}{2} + m \quad (1)$$

Z obrazcem (1) izpolni tabelo, kjer v vrstice pišeš zaporedja *n*-kotnih števil do *m*-tega mesta.

1. TABELA: Zaporedja n -kotnih števil do m -tega mesta

$\begin{array}{c} m \\ \backslash \\ n \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	...	m
3-kotna									
4-kotna									
5-kotna									
6-kotna									
7-kotna									
$\vdots$									
n -kotna									

Tabela ti bo pomagala, da boš na konkretnih primerih ali pa splošno preizkusil veljavnost naslednjih trditev o figurativnih številih.

2. Šestkotno število na m -tem mestu je enako trikotnemu številu na $(2m - 1)$ mestu.
3. Petkotno število na m -tem mestu je enako vsoti trikotnega števila na m -tem mestu in dvakratniku trikotnega števila na $(m - 1)$ mestu.
4. Če k osemkratniku trikotnega števila prištejemo 1, dobimo kvadratno število.

Zadnjo nalogo je okoli leta 250 pr.n.št. postavil grški matematik Diofant. Njegovo najbolj znano delo s področja matematike je Aritmetika. Več o njegovem življenju pa pove v verze prelita naloga, ki ne bo pretrd oreh, če znaš nastavljeni enačbe.

5. Modrec ob grobu postoj, počasti pepel *Diofanta*,
leta njegova preštej, odmerjena z voljo bogov.
Šesti del sojenih let ozarja mu sreča otroštva,
še pol šestine mine, ko lica poraste mu puh.
Let še sedmino nato izbere si vdano družico.
Pet let že druží ju vez, ko se rodi jima sin.
Le pol očetovih dni je ljubljencu dano živeti,
radost očetova vsa v prerani utrne se grob.
Dvakrat dve leti bridko pretoži nad težko izgubo,
potlej utrujen še sam za vselej zatisne oči.

Literatura:

- Danijeł Bezek*: Figurativna števila, Presek 1977/78, št. 3
France Križanič: Aritmetika, algebra in analiza I, DZS-Ljubljana 1966
Stanko Prvanovič: Zbirka matematičnih zadatka VII, Tehnička knjiga, Beograd 1967
Roman Rojko: Trikotna števila, Presek 1979/80, št. 4

Danijeł Bezek

Rešitev s strani 6

Oglejmo si prvih 1981 členov zaporedja, ki se končujejo s cifro 0. in jih označimo z $a_1, a_2, \dots, a_{1981}$. Pri deljenju s 1981 imajo ta števila kvečjemu 1980 različnih pozitivnih ostankov. Ker je števil 1981, imata dve števili a_i in a_j ($i > j$) isti ostanek. Odtod sledi, da je njuna razlika $a_i - a_j$ deljiva s 1981. Ni težko videti, da je

$$a_i - a_j = a_{i-j} \cdot 10^{10j}$$

torej je število $a_{i-j} \cdot 10^{10j}$ deljivo s 1981. Ker 1981 ni deljivo niti z 2 niti s 5, sta si števili 1981 in 10^{10j} tuji. Zato mora 1981 deliti prvi faktor a_{i-j} . Naloga je rešena, saj smo našli člen zaporedja, deljiv s 1981.

Aleksandar Jurišič

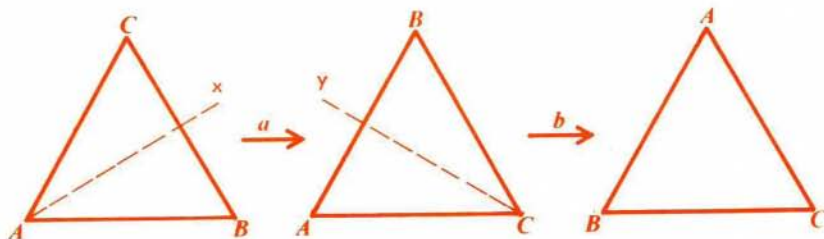
VSAKDANJE IN VENDAR IMENITNO

Vsi vemo, da je $7 + 5 = 5 + 7$ in $2.3 = 3.2$, ali splošnejše $a + b = b + a$ in $e.d = d.e$. Pri tem so a, b, e in d poljubna cela, racionalna, realna ali celo kompleksna števila.

Tako preprosta in vsakdanja se nam prikazuje ta lastnost operacij $+$ in $\cdot$, ki ji pravimo komutativnost, da kar slišimo opazko: "Saj drugače ni mogoče!" ali: "Saj mi to nič ne pove!" Sta ti dve opazki upravičeni?

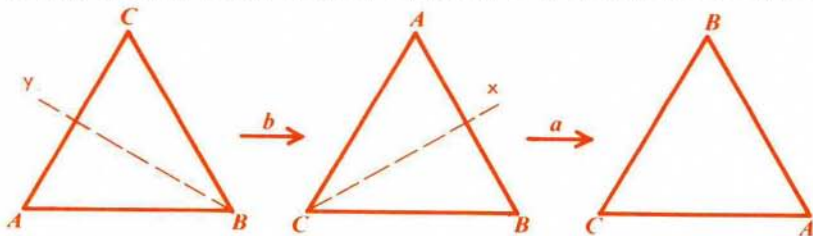
1. "Drugače ne more biti." Pri omenjenih številih in operacijah res ne, vendar se matematika ukvarja tudi z drugačnimi operacijami, za katere ta preprosta lastnost ne velja vedno.

Vzemimo enakostranični trikotnik ABC in si oglejmo operaciji a in b , kjer je a zrcaljenje čez os x , b pa zrcaljenje čez os y (glej slike 1 in 2).



Slika 1

Trikotnik zaporedoma preslikamo najprej z a in nato z b . Tako dobimo celotno spremembo ab (slika 1). To ponovimo, le da v obratnem vrstnem redu: najprej b , potem a in dobimo ba (slika 2).



Slika 2

Čeprav smo obakrat začeli z enako razporejenimi oglišči, je konč na razporeditev oglišč različna. Torej v tem primeru ab ni enako ba .

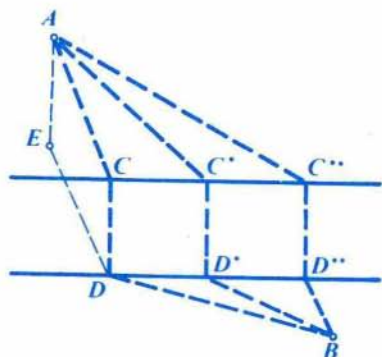
Šele v bolezni znamo ceniti zdravje. Šele ko vidimo, da bi bili zanj prikrajšani, znamo ceniti to imenitno lastnost: komutativnost!

2. "Nič ne pove." Kolikokrat smo že morali požreti ta krivični očitek brezplodnosti, ki naj bi jo po pameti nevednežev imele matematične trditve.

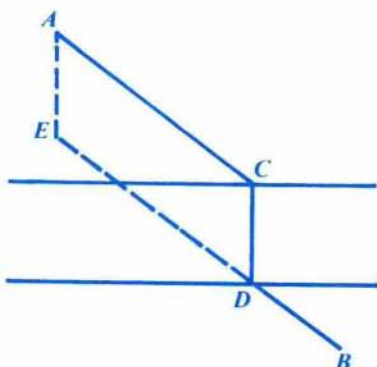
Vzemimo naslednji enostavni trditvi, ki načenjata novo temo: vektorje.

- a) Iz poljubne točke A pridemo v poljubno točko B po najkrajši poti z enim samim vektorjem AB .
- b) Seštevanje vektorjev je (po znanem paralelogramskem pravilu) komutativno.

Preizkusimo uporabnost obeh trditev na praktičnem problemu. Na sliki 3 sta prikazana kraja A in B , med katerima teče povsod enako široka ravna reka. Kraja bi radi povezali s cesto in seveda z mostom (pravokotnim na reko). Katero od nešteti možnosti izbrati, da bo celotna pot najkrajša?



Slika 3



Slika 4

Vsaka pot od A do B je sestavljena iz treh delov: priti je treba do reke, preko nje in na drugem bregu do točke B . Torej $AB = AC + CD + DB$. Prehodimo v mislih najprej most! Tako pride-mo do točke E , za katero velja $AE = CD$ in $ED = AC$. To vstavimo v izraz za AB in upoštevamo pravilo b):

$$AB = ED + AE + DB = AE + ED + DB$$

Del poti AE očitno ni odvisen od tega, kam postavimo most. Zato je celotna pot najkrajša tedaj, ko je del poti od E do B najkrajši. Trditev a) nam pove, da moramo od točke E do B naravnost po enem samem vektorju EB . Točka D mora torej ležati na zveznici EB . Ker leži tudi na obali reke, je njena lega natančno določena.

V dobljeni točki D postavimo pravokotno na reko most in tako do-bimo še točko C . Tako dobljena pot $ACDB$ je najkrajša od vseh mož-nih poti, saj je njena dolžina enaka dolžini poti AEB . Poleg te-ga je pot $ACDB$ tudi uresničljiva, kar pa pot AEB ni, saj ne mo-remo postaviti mosta na suhem, reke pa preplavati.

Karel Bajc

dopolnil Franci Forstnerič

ČLANI AKTIVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV

šola

točen naslov

NAROČAMO:

..... izvodov lista za mlade matematike, fizike in astro-nome PRESEK - X. letnik, za šolsko leto 1982/83 po ceni 100.- din (posamezna naročnina 125.- din). Naročnino bomo nakazali skupaj ali v obrokih najkasneje do 198..

Podpis:



PEČICA ZA ŽAR PROUČUJE JEDRSKI REAKTOR V KRŠKEM

Pečici za žar je po razgovoru z raziskovalnim *jedrskim reaktorjem* (glej Presek 1979, št. 4, str. 195) zrasel ponos, ko je ugotovila, da bi tudi njej morali reči *reaktor*, pa čeprav samo *atomske*. Ko je v dolgih večerih o tem ponovno razmišljala, pa ji je lastna cena počasi plahnela, saj je spoznala, kako neboljena je ona sama in z njo vred peči vseh vrst v primerjavi z mogočnimi jedrskimi reaktorji.

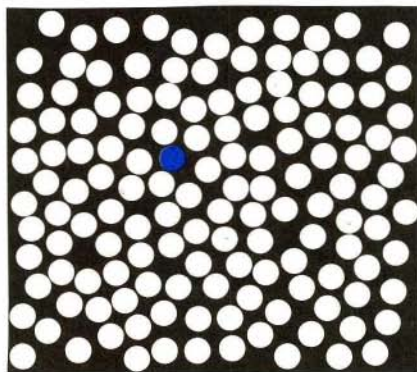
Njene misli so se neprestano vračale k *verižni reakciji*. Znova in znova si je ponavljala: "Pri verižni reakciji v reaktorju si uranova jedra pripojijo nevtrone, nato pa se vsako razleti na dve manjši jedri. Pri tem nastali nevtroni se v vodi upočasnijo in nato laže povzročijo nove cepitve".

Nekega večera jo je spreletelo: V rudnikih urana je gotovo kdaj tudi voda. Zakaj tam ne pride do verižne reakcije? Zakaj? Zakaj? Pečico je prevzela globoka želja, da bi kaj več zvedela o tem. Toda kaj, ko so jo postavili na polico v garaži, kjer mora čakati, čakati.

Letošnjo jesen je njen gospodar Janez Natančnik v garaži popravljaval avto. Na tleh je pustil razgrnjen časopis. Pečica je vesela ugotovila, da je ena stran obrnjena proti njej. Z veliko vne-
mo se je lotila črk. (Naučila se jih je nekega nedeljskega popoldneva, ko so se otroci igrali z abecedo.) Iz naslova je razbrala, da so v Krškem zgradili *jedrsko elektrarno*.

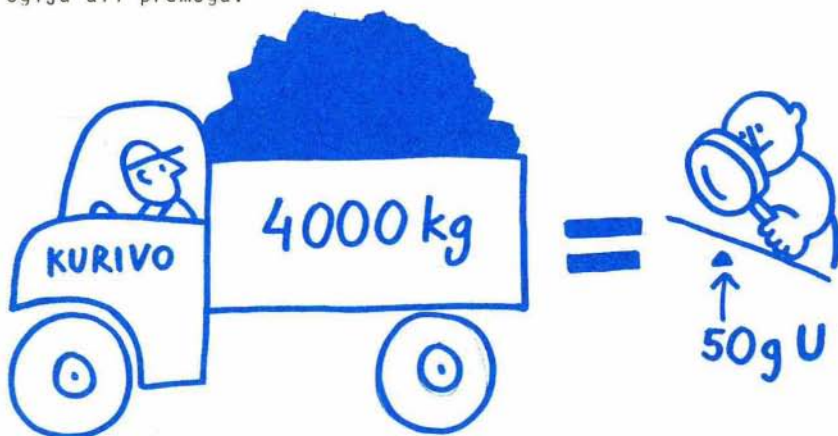


Že po prvem odstavku je ugotovila, da stvari v zvezi z verižno reakcijo niso tako preproste, kot si jih je predstavljala. Prebrala je namreč, da v uranu, ki ga dobijo v naravi, pri prisotnosti navadne vode ni mogoče vzdrževati verižne reakcije. Naravnemu uranu je mešanica dveh vrst (*izotopov*) urana: urana 235 (označijo ga z ^{235}U) in urana 238 (označijo ga z ^{238}U). Kot jedrsko gorivo je uporaben samo ^{235}U . Toda v naravi je na 140 jeder ^{238}U samo eno jedro ^{235}U . V gorivu jedrske elektrarne v Krškem mora biti delež ^{235}U povečan vsaj trikrat. Naprave za obogatitev urana so zelo drage in zapletene. Imajo jih samo velike in tehnološko razvite države. Za Krško so reaktor kupili v ZDA. Od tam bodo dobivali tudi obogateni uran.



Na 140 atomov urana 238 pride 1 atom urana 235.

Pečici se je kar zavrtelo v glavi, ko je brala, da bo pri polni moči reaktor oddajal tolikšen toplotni tok (1,8 gigawattov) kot en milijon istočasno prižganih pečic za žar. Vendar je uranskega goriva le 50 ton in bi ga torej na vsako pečico odpadlo 50 g. Teh 50 g goriva odda toliko toplote (38 megawatt ur) kot 3800 kg oglja ali premoga.

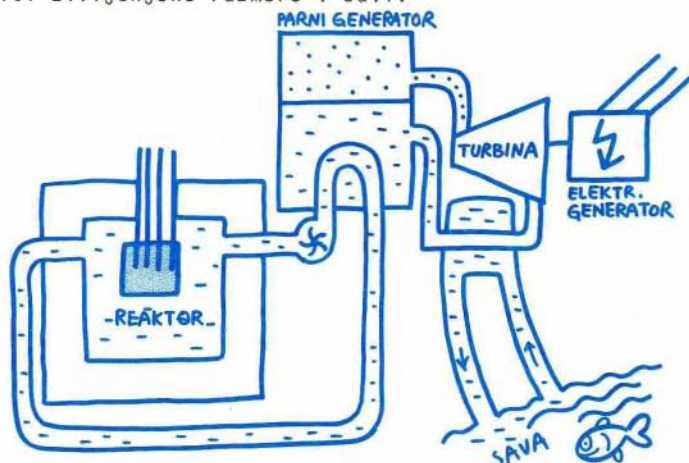


V elektrarni bo gorivo izgorevalo 3 leta v 21000 urah delovanja. Vsako uro bo torej "izgorelo" 2,3 kg goriva. Če bi kurili z ogljem, bi ga potrebovali 650 ton na uro.

Ta števila so pečici vlivala vse večje spoštovanje do jedrskih reaktorjev. Spoznala je tudi, da ljudje pozabljajo na to, da naj bi toploto vedno spremljal tudi vonj po domačem ognjišču, kadar rabijo dovolj energije za stroje, ki namesto njih opravljajo težaška dela.

Ko je pečica še naprej zlogovala besedo za besedo, je izvedela, da s toploto iz reaktorja segrevajo dva velika parna kotla, ki jima pravijo *parna generatorja*. Para, ki tu nastaja, poganja *turbino*, ta pa *električni generator*. Vendar je mogoče le približno eno tretjino toplote spremeniti v električno energijo. Dve tretjini toplote iz reaktorja ostane v savski vodi, s katero hladijo kondenzat pare ob izstopu iz turbine. Črpalka prečrpa vsako sekundo v zaprtem krogu skozi reaktor in parna genera-

torja 9 m³ posebej očiščene vode. Njen motor porabi skoraj 1 % električne energije, ki jo proizvaja elektrarna. Ko se bo ob polni moči elektrarne savska hladilna voda vrnila v strugo, bo celotni vodi dvignila temperaturo tudi za 2°C. Vsa ta toplota bo vržena stran. Strokovnjaki se celo bojijo, da bi utegnili porušiti življenjske razmere v Savi.



Projektanti so morali zagotoviti, da se temperatura Save ne bo dvignila za več kot 2°C oziroma da ta ne bo nikoli presegla 28°C. Kadar bo poleti v Savi malo vode, ali pa bo njena temperatura že blizu 28°C, bodo vodo ohlajali tudi v hladilnih stolpih.

Na koncu je pečica prebrala tudi, da je pri elektrarni dobro poskrbljeno za zaščito pred *ionizirajočim sevanjem*, vendar ni razumela, kaj to pomeni. Od vsega skupaj se ji je meglilo pred očmi. Potopila se je v globoko razmišljanje o vsem, kar je izvedela. Iz dneva v dan si je bolj in bolj želela, da bi vsaj od daleč videla to čudo moderne tehnike.

Jesen je bila lepa in Natančnik je večkrat vzel pečico s police ter se z družino in znanci odpravil na izlet, povezan s peko na žaru. Po enem od takih izletov je pečico pozabil v avtu. Ker je kot strokovnjak za reaktorje sodeloval pri kontrolnih meritvah, je večkrat potoval v Krško. Tako se je primerilo, da je nekega

dne vzel s seboj tudi njo - pečico za žar.

Avto je pustil na parkirišču, od koder je bil lep razgled na elektrarno. K sreči je imel Natančnik tak avto, da prtljažnik ni bil pokrit in tako se je pečici izpolnila velika želja. Skozi natrgani papirnati omot je videla mogočne zgradbe reaktorja. Po sliki v časopisu je prepoznala posamezne stavbe.

Nad vsemi je gospodovala kupolasta stavba reaktorja. Pravijo ji reaktorski hram, čeprav v njej ni cvička. Tudi temperatura v njegovem sodu - reaktorju je veliko višja (300°C), kot v sodih, v katerih kipi jeseni cvičkov mošt, ki ga na bližnjih sončnih pobočjih pridelujejo marljivi Dolenjci.

Reaktorski hram je z ene strani prislonjen na razsežno stavbo, v kateri sta parna generatorja, turbina, električni generator in komandni pult elektrarne.

Nedaleč stran je upravna zgradba in za njo so stolpi, po katerih bodo z vrha spuščali vodo in jo tako hladili, kadar bo Sava premajhna ali pa pretopla.

Pečica se je zastrmela tudi v jez, ki so ga zgradili na Savi, da se za njim zbira rezervna voda za hlajenje.

Nedaleč od stavb reaktorja je pečica videla pravi gozd električnih žic, izolatorjev in stebrov in ... To je transformatorska postaja od katere se en daljnovod vije proti osrednji Sloveniji, drugi pa proti Hrvaški, saj je vsaka od teh republik prispevala polovico sredstev za gradnjo elektrarne.

"Nevidni elektroni, ki jih po daljnovodih potiska električna napetost, prispevajo k temu, da v tovarnah napravijo več izdelkov, da kmetje pridelajo več hrane, da je v domovih svetlo in prijetno", je razlagal na poti domov Natančnik radovednemu šolarju, ki se je nekaj časa peljal z njim. Pečica, ki je prisluškovala, pa je na tistem dodala: "In da laže in hitreje naredijo novo pečico za žar." Stisnila se je v omot in se potopila v prijetno drema-vico.

OBISK V ŠOŠTANJSKI ELEKTRARNI

Ob cesti med Šoštanjem in Titovim Velenjem stoji na desni pod gričkom skupina stavb z visokimi dimniki in z značilnimi širokimi stolpi, iz katerih se vali noč in dan megla. To je Termoelektrarna Šoštanj (TEŠ). Ta je lani oddala v električno omrežje dobrih 3750 gigawattur električnega dela. Največja slovenska elektrarna je tako sama pokrila skoraj 47 % potreb po električnem delu v naši republiki. Preostanek so prispevale druge toplotne elektrarne skupaj z jedrsko elektrarno Krško (10 %) in vodne elektrarne (36 %), nekaj pa smo dobili iz drugih republik in iz tujine (7 %).

V času splošne energijske lakote je šoštanjska elektrarna vredna vse pozornosti. Ima štiri enote, ki so jih gradili drugo za drugo in vsaka poznejša je zmogljivejša in boljša (sl.1).

Enota	moč	lastna raba	leto dograditve
1. TEŠ I	60 MW(2.30 MW)	6 MW	1956
2. TEŠ II	75	7	1960
3. TEŠ III	275	22	1972
4. TEŠ IV	335	30	1977

Moč merimo v *wattih*. Večje enote so kilowatt, megawatt, gigawatt:

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W} \quad 1 \text{ MW} = 1000 \text{ kW} \quad 1 \text{ GW} = 1000 \text{ MW}.$$

Delo, toploto in energijo merimo v *joulih*. Enoto za delo dobimo, ko pomnožimo enoto za moč z enoto za čas. Joule je *wattsekunda*. Večje enote so kilowattura, megawattura, gigawattura.

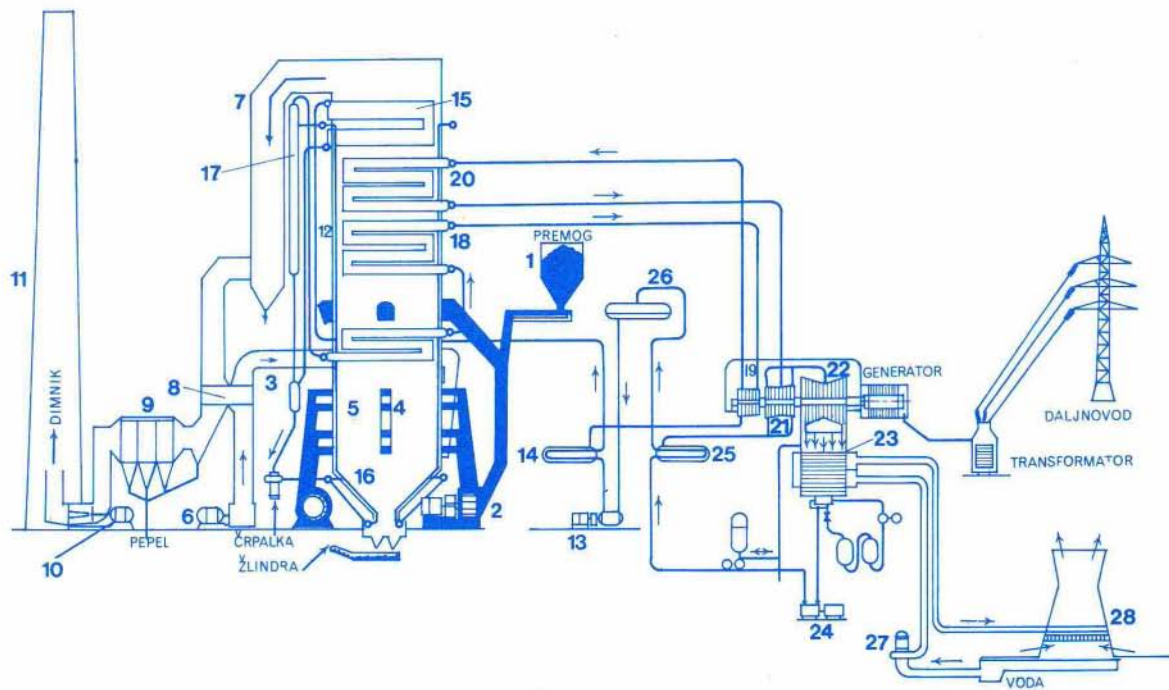
$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ joule}$$

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ GWh} = 10^9 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Naprava z močjo 1 MW odda (prejme) v enem letu delo

$$1 \text{ MW} \cdot 1 \text{ leto} = 1 \text{ MW} \cdot 360 \cdot 24 \text{ h} = 8,64 \text{ GWh}.$$



Slika 2 Poenotavljena shematična risba enote Termoelektrarne Šoštanj.
Številke se nanašajo na besedilo.

V toplotni elektrarni poganja *dinamostroj* (generator na indukcijo), ki oddaja električno delo, *parna turbina*. Parna turbina oddaja mehanično delo, dovajamo pa ji toploto. V šoštanjski elektrarni je to toplota, ki se sprosti pri sežigu premoga. Lani je elektrarna porabila več kot štiri in pol milijona ton premoga (4 741 000 ton). Večji del je bil to lignit iz velenjskega rudnika, nekaj pa je bilo tudi premoga iz drugih slovenskih in jugoslovanskih rudnikov. Premog iz drugih premogovnikov je nekoliko boljši od lignita, a v povprečju se je pri sežigu 1 kilograma sprostito okoli 9,1 milijona joulov toplote. S sežigom premoga so dobili lani tako $4,3 \cdot 10^{16}$ joulov ali skoraj natanko 12 000 GWh toplote.

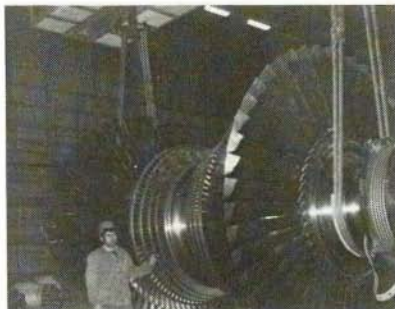
S širokimi potezami, ne da bi se spuščali v tehnične nadrobnosti, opišimo največjo, to je četrto enoto šoštanjske elektrarne.

Druge so ji precej podobne, le da so manjše.

Iz bližnjega rudnika dovaja lignit tekoči trak na veliko odlagališče, kamor odložijo tudi premog iz železniških vagonov. Tam nalagata velika nakladalna stroja premog na tekoča trakova, ki ga preneseta do bunkerjev ob kotlih (1 na sl.2). Od tam pride v mline (2), ki ga sproti meljejo. Mešanico premogovega prahu in vročega zraka (3) vpihajo skozi gorilnike (4) v gorilno komoro (5), kjer premog zgori. Tok vročih dimnih plinov poganja velik ventilator (6) navzgor. Nekoliko ohlajene dimne pline vodita nato navzdol kanala (7) skozi grelnik svežega zraka (8). V električnem filtru (9) odložijo prah, nakar jih ventilator (10) odčrpa skozi 230 metrov visoki dimnik (11). Pepel odlagajo v rudniške ugreznine, nekaj pepela iz električnih filtrov pa porabijo za izdelavo zidakov.

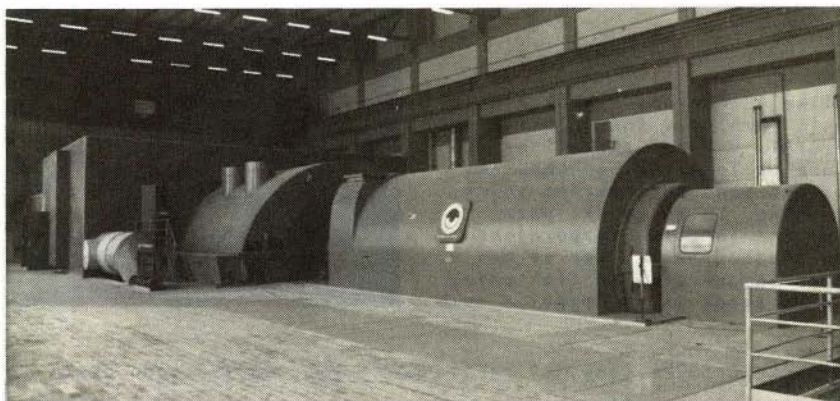
Skoraj sto metrov visoki *kotel* (12) visi na štirih nosilnih stebrih. Ko se kotel segreje, se zaradi temperaturnega raztezanja raztegne za pol metra navzdol. Skupaj z ogradjem in pomožnimi napravami tehta kotel 15 tisoč ton in vsebuje cevi s skupno dolžino več kot 350 tisoč metrov in skupno površino skoraj 45 tisoč kvadratnih metrov. Med cevmi je 35 tisoč zvarov.

Slika 3 Montaža nizkotlačnega dela turbine v šoštanjski elektrarni. V parni turbini brizga para na lopatice, podobno kot brizga voda na lopatice vodne turbine, le da so pri parni turbini lopatice razporejene na poseben način, ker se manjšata temperatura in tlak pare, ko se razpenja in opravlja delo.



Orjaške črpalke (13), ki rabijo moč 6 MW, tlačijo vodo preko predgrelnikov (14) v kotel. Voda gre najprej v grelnik (15) na vrhu kotla in nato v uparjalnik (16). Nastala para pusti vodo v izločevalniku (17) in se v pregrevalniku (18) pregreje, tako da doseže pri tlaku 187 barov temperaturo 545°C . Pregreta para - kotel je da več kot tisoč ton na uro - poganja visokotlačni del turbine (19). Nato se vrne v pregrevalnik (20) na pregrevanje in poganja še srednjetačni (21) in nizkotlačni (22) del turbine. Naposled odteče v kondenzator (23), v katerem se utekočini in ohladi na okoli 32°C . Črpalke jo potisnejo skozi predgrelnik (25) v napajalno posodo (26) in tako sklenejo krožno pot vode in pare.

Toploto, ki jo odda para, ko se utekočini in ohladi v kondenzatorju, prevzame voda v drugem, ločenem krogu. V njem potiskajo črpalke (27) vodo v hladilni stolp (28), v katerem se ohladi od okoli 45°C na okoli 32°C in se vrne v kondenzator. (Na ti temperaturi vpliva temperatura zunanjega zraka.) V hladilnem stolpu voda izhlapeva, ko curlja navzdol po kanalih in se razprši. To se dogaja v spodnjem delu stolpa; preostali del stolpa poskrbi, da se tok vlažnega zraka s kapljicami hitreje dviga (da stolp "vleče"). Izhlapelo vodo nadomestijo iz zajetja v bližnjem potoku, potem ko odstranijo iz nje raztopljeni apnenec in jo filtrirajo.



Slika 4 Parna turbina četrte enote v termoelektrarni Šoštanj z dinamostrojem za moč 335 MW. V hišici na levi sta visokotlačni in srednjetačni del turbine, nato sledita na skupni osi nizkotlačni del turbine in dinamostroj.

V hladilnem stolpu četrte enote izhlapi okoli 140 kilogramov vode v sekundi. Kilogramu vode je treba za izhlapevanje pri 30°C dovesti kaka 2,4 milijona joulov toplote (to je nekaj več, kot jo je treba dovesti za izparevanje pri 100°C). Samo za izhlapevanje vode gre tedaj v sekundi okoli 340 milijonov joulov toplote. Upoštevati je treba še, da se zrak v hladilnem stolpu segreje. Tako odda četrta enota v sekundi 670 milijonov joulov toplote in 330 milijonov električnega dela, prejme pa okoli 1000 milijonov joulov toplote. Večino toplote prejme pri visoki temperaturi v kotlu in večino je odda pri nizki temperaturi v kondenzatorju. Naposled jo prevzame vlažni zrak, ki izhaja iz hladilnega stolpa. Nekaj prejete toplote, več kot desetina, gre v *izgubo* s prevajanjem v okolico in z vročimi plini v dimniku. Omrežje ne prejme vsega električnega dela, ki ga oddaja dinamostroj, precej ga porabi elektrarna zase. Ta *lastna raba* gre za pogon mlinov za premog, črpalk za vodo, ventilatorjev in podobno. Pri računanju je treba povedati, katero dovedeno delo in katero dovedeno toploto imamo v mislih. Če upoštevamo električno delo na pragu omrežja in vso toploto, ki jo odda premog, je termoelektrarna Šoštanj kot celota v obliki dela oddala slabo tret-

jino dovedene toplote. Enote so se pri tem odrezale takole: prvi dve skupaj 27 %, tretja 31 % in četrta 33 %.

Izkoristimo obisk elektrarne za kratko razmišljanje o *toplotnih strojih*, na katerih "sloni naša civilizacija". To so poleg parne turbine in že zastarelega batnega parnega stroja še stroji na notranje zgorevanje: bencinski stroj in dieselski stroj. Že v času, ko so poznali samo parne stroje, se je poskušal dokopati do njihove teoretične osnove Sadi Carnot (sl.5). Svoje misli je objavil v knjižici *Razmišljanja o gibalni moči ognja in o strojih za izrabljanje te moči* leta 1824. Čeprav je šlo Carnotu bolj za izboljšanje delovanja parnih strojev kot za zakone narave, ga imajo nekateri za začetnika termodinamike.



Slika 5 Sadi Carnot (*1796, Pariz - +1832, Pariz). S svojo knjižico je hotel predvsem opozoriti francosko gospodarstvo, ki je tedaj zaostajalo za angleškim, na prednosti parnega stroja. Umrli je mlad v epidemiji kolere in po tedanji navadi so z njim pokopali večino njegovih rokopisov. Preostanek rokopisov je leta 1878 njegov brat izročil Francoski akademiji znanosti. Odloemek rokopisa iz leta 1825 kaže, da je S.Carnot tedaj že zavrgel misel o toploti kot snovi. Sodil je, da je toplota v zvezi z gibanjem molekul in je celo slutil energijski zakon (namigoval je na možnost poskusov, ki jih je pozneje naredil J.P.Joule). Vendar te njegove misli niso vplivale na nadaljnji razvoj. Njegovo knjižico so začeli prav ceniti šele po letu 1850. Zasluge za to ima William Thomson (lord Kelvin), ki je vpeljal absolutno temperaturo, zapisal izkoristek Carnotovega stroja in skupaj z Rudolfom Clausiusom postavil entropijski zakon.

Zamislil si je *idealni toplotni stroj*, ki odda v danih okoliščinah največ dela. Tak zamišljeni stroj, ki ga imenujemo danes po Carnotu, združuje glavne značilnosti vseh toplotnih strojev. Periodično ponavlja spremembo, za katero je značilno dvoje. Prvič: sprememba je *reverzibilna*, kar naj pomeni, da jo je mogoče takole obrniti: če pri prvotni spremembi stroju dovedemo toploto in odvedemo od njega delo, odvedemo pri obrnjeni spremembi prav tolikšno toploto in mu dovedemo prav tolikšno delo. Drugič: stroj prejema toploto samo pri višji temperaturi T_2 in jo oddaja samo pri nižji temperaturi T_1 .

Čeprav lahko stroj dela z različnimi snovmi, mislimo ta hip na vodo. V prvem koraku dovedemo vodi v kotlu toploto, da izpari pri temperaturi T_2 pri konstantnem visokem tlaku. V drugem koraku se para razširi, ne da bi ji dovajali toploto in opravi delo. V tretjem koraku se para v kondenzatorju pri temperaturi T_1 utekočini pri konstantnem nizkem tlaku in odda toploto. V četrtem koraku stisne črpalka vodo v kotel, ne da bi ji pri tem dovajali toploto. Tako spremembo iz štirih korakov - prvega izo termnega (pri konstantni temperaturi), drugega adiabatnega (brez dovajanja toplote), tretjega izotermnega in četrtega adiabatnega - imenujemo *Carnotova krožna sprememba*. Sprememba je *krožna*, ker je delovna snov po spremembi v enakem stanju kot pred njo. S. Carnot je pomislil na druge delovne snovi, tudi na zrak, in zaslutil ob tem možnost strojev na notranje zgorevanje.

S. Carnot je primerjal parni stroj z mlinским kolesom. Voda z maso m , ki pade z višine z_2 na višino z_1 , odda v idealnem primeru kolesu kot delo spremembo potencialne energije:

$$-A = mg(z_2 - z_1)$$

Delo A je negativno, ker ga stroj odda. S. Carnot je privzel, da pri parnem stroju ustreza masi toplota Q in višini temperatura. V idealnem primeru odda tedaj stroj delo, ki je sorazmerno s prenešeno toploto in temperaturno razliko:

$$-A = \text{konst.} \cdot Q(T_2 - T_1) \quad (1)$$

Premislek je bil zanj dokaj naraven, saj je v njegovem času veljala toplota za neuničljivo snov - kalorikum. Toplota teče v naravi z mesta z višjo temperaturo na mesto z nižjo temperaturo in naj bi v stroju mimogrede oddala delo, kot ga odda voda, ki teče z večje višine k manjši.

S. Carnot je dokazal, da noben stroj v enakih okoliščinah, to je pri danih temperaturah T_2 in T_1 in toploti Q , ne more oddati več dela kot idealni toplotni stroj. Denimo, da tak stroj odda več dela A_0 , ko mu dovedemo toploto Q . Povežimo ga z obrnjenim idealnim toplotnim strojem, ki mu dovajamo delo $-A$ in ki odda toploto Q . Povezana stroja bi oddala razliko dela $-(A_0 - A)$, ne da bi jima dovajali toploto (ali delo). To pa bi bil perpetuum mobile, za katerega vemo, da je neuresničljiv.

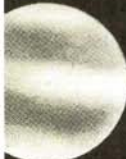
Carnotovo enačbo (1) so podpirale obsežne eksperimentalne izkušnje. Načrtovalci strojev so namreč ugotovili, da toplotni stroj zares ne more oddajati dela, če je vsa okolica pri enaki temperaturi, če je torej $T_2 = T_1$. To bi bil *izotermni toplotni stroj*. Zato pravzaprav ni presenetljivo, da nekateri Carnotovi sklepi veljajo še danes, čeprav S. Carnot ni vedel, da s toploto in z delom sistemi le izmenjujejo energijo in da velja energijski zakon (glej na primer Presek 9 (1981/82) str. 216). Po energijskem zakonu stroj, ki ponavlja krožno spremembo, to je sistem, katerega energija se ne spremeni, odda delo $-A$, če mu dovedemo toploto Q_2 in odvedemo manjšo toploto Q_1

$$-A = Q_2 - |Q_1| \quad (2)$$

Idealnemu toplotnemu stroju dovedemo tedaj pri temperaturi T_2 toploto Q_2 in odvedemo od njega pri temperaturi T_1 toploto Q_1 . Če bi stroj oddal tolikšno toploto, kot jo prejme, ne bi oddal nič dela.

Privoščimo si še nekoliko ugibanja. Ali lahko hkrati obveljata Carnotovo spoznanje, da je oddano delo sorazmerno s temperaturno razliko (1), in nasledek energijskega zakona (2)? Da, seveda, če postavimo, da je dovedena toplota sorazmerna z višjo temperaturo, pri kateri jo stroj prejme, in odvedena toplota z nižjo temperaturo, pri kateri jo odda:

$$Q_2/|Q_1| = T_2/T_1 \quad (3)$$

LETALA	DUŠE UMR- LIH PRI RIMLJANIH	ODLIČNA AMER. TE- NISAIČICA (CHRIS)	DETEKTIV KIRBY	GEOMETR. POJEM	BURMANSKI POLITIK	BORIŠČE BOKSARJEV				
IRIDIJ							KMEČKO NASELJE			
	PERJE PRI REPI						RADO SIMONITI			
	LUKA V S. JADRANU		RECEPT	PODKOŽNA MAŠČOBA	ORODJE ŽENSKÉ TELOVADBE 3					
	NEON					POŽREŠNEŽ KAJETAN KOVIČ				
		MESTNI NASAD					ELO (LJUBK.)			
		TOLST TREBUH								
			GEOMETR. POJEM				NJIVA			
			KASTORJEV DVOJČEK				BURMANSKO MESTO OB R. SITTANG			
VULKAN NA FILIPINI					DEL DIRKE	REKA SKO- ZI FRANK- FURT				
MOLIBDEN						ENOČLENIK				
			TOVARNA V CELJU					DOLORES IBARRURI		
			POPRAV- LJALEC UR							
								EDVARD KARDELJ		
										
	VODJA									
	SRAMO- VANJE									

Tedaj je oddano delo

$$-A = Q_2(1 - T_1/T_2)$$

V enačbi (1) nastopa le temperaturna razlika in merimo lahko temperaturo v poljubni lestvici. Za zadnjo enačbo, v kateri se pojavi kvocient temperatur, pa to ne drži. Enačba velja le, če merimo temperaturo v *absolutni* ali *Kelvinovi lestvici*. Temperaturo v tej lestvici dobimo, če temperaturi v Celzijevi lestvici prištejemo 273,15. Nova enota za temperaturo, kelvin K, je enako velika kot stopinja Celzija, le ničli sta v obeh lestvicah premaknjeni. 0°C ustreza 273,15 K, absolutni ničli 0 K pa -273,15°C. Pri naši natančnosti smemo računati kar z 273.

Enačbo za Carnotovo krožno spremembo (3) uporabimo za definicijo temperaturne lestvice. Dostaviti moramo le še dogovor, da je temperatura trojnega stanja vode, v katerem so v ravnovesju led, voda in vodna para 273,16 K. Ta *termodinamična definicija* je dandanes v veljavi.

Vpeljimo še *izkoristek toplotnega stroja* kot kvocient oddanega dela in dovedene toplote

$$\eta = -A/Q_2$$

Izkoristek idealnega toplotnega stroja ali Carnotovega stroja je tedaj

$$\eta_C = 1 - T_1/T_2$$

Tega izraza Carnot ni mogel zapisati, saj je mislil, da stroj odda prav tolikšno toploto, kot jo dobi, in še ni poznal absolutne temperaturne lestvice.

Izkoristek toplotnih strojev, ki so praktično v rabi, je nekako dvakrat manjši od η_C . Pri njih so namreč spremembe tako hitre, da niso reverzibilne, poleg tega prejme delovna snov del toplote pri temperaturah pod T_2 in je del odda pri temperaturah nad T_1 . S podatki za najvišjo temperaturo pare (v kotlu po vrsti 515, 530, 540 in 545°C) in za najnižjo temperaturo vode (v kondenzatorju 32°C) za štiri enote šoštanjске elektrarne bi dobili za izkoristek idealnega toplotnega stroja po vrsti 61,3%, 62,0%, 62,5% in 62,7%.

Nazadnje tvegajmo še kratek premislek. *Energijski zakon* ali *prvi zakon termodinamike* prepoveduje toplotni stroj, ki bi ponavljal krožno spremembo in oddajal delo, ne da bi mu dovajali delo ali toploto. To bi bil *perpetuum mobile prve vrste*. Zakon pa ne nasprotuje izotermnemu toplotnemu stroju, ki bi oddajal samo delo, ko bi mu dovajali toploto: kar postavimo v enačbo (2) $Q_1 = 0$. Za izkušnjami, da takega stroja ni mogoče uresničiti, se skriva nov zakon narave, ki je nad energijskim zakonom. To je *entropijski zakon* ali *drugi zakon termodinamike*.

V orjaški tovarni - naravi - sedi entropijski zakon na mestu direktorja, ki določa vrsto poslovanja in njegov potek. Energijski zakon ima samo vlogo knjigovodje, ki izravnava prejeme in izdatke.

Po J.Meixnerju, *Physikalische Blätter* 16 (1960) 506

Ta zakon prepoveduje izotermni toplotni stroj, ki mu pravimo tudi *perpetuum mobile druge vrste*. Kdaj drugič bi kazalo spregovoriti o tem zakonu naravnost, ne pa se vrteti okoli njega kot mačka okoli vrele kaše. Tedaj bi bilo treba skrbneje vpletati pojma *reversibilnost* in *ireversibilnost*. Za zdaj pa se zadovoljimo s spoznanjem, da toplotni stroj potrebuje temperaturno razliko in da mora poleg dela oddajati tudi toploto pri nižji temperaturi. To spoznanje smo zgradili na praktičnih izkušnjah, tudi na izkušnjah, ki smo jih dobili pri obisku elektrarne.

Janez Strnad

Zahvaljujem se dipl.inž.Marjanu Jerneju iz Termoelektrarne Šoštanj za vse podatke in pojasnila ter za fotografije,



NALOGE

NAUČIMO SE SKLEPATI

V tej številki Preseka in še v nekaterih od prihodnjih številki smo vam pripravili nekaj nalog, ki so namenjene razvijanju logičnega sklepanja. Sposobnost logičnega sklepanja ni prirojena, temveč jo je treba razviti in negovati. Tako kot še noben športnik ali glasbenik ni uspel brez vaj, tako noben matematik ne more brez nenehnega utrjevanja svoje sposobnosti sklepanja. Matematik najprej formulira trditve, ki se mora skladati s sprejetimi predpostavkami, nato pa sledi dolgotrajno iskanje dokaza. Delo je uspešno zaključeno le, če postavljeni trditvi sledi pravilen dokaz. Matematik znanstvenik si zastavi precej več problemov, kot mu jih na koncu uspe rešiti. Velikokrat mu namesto prvotno zastavljene trditve uspe dokazati kakšno drugo, pogosto pa pri sklepanju zaide v slepo ulico. Vse te poti pa so nujni del utrjevanja sklepanja. Na koncu je celoletno delo strnjeno v nekaj dokazov.

Problemov, ki so zastavljeni tu, ni treba reševati z naglico. Nalogo je treba najprej prebrati in razumeti. Če rešitve ne najdemo prvi dan, jo bomo morda našli drugič. Prvim štirim nalogam prilagamo v tej številki Preseka tudi rešitev v pomoč, če kakšne naloge ne boste znali rešiti. Dobro proučimo točko, kjer se nam bo zataknilo. Ne pozabimo pa, da moramo odgovor na zastavljeno vprašanje utemeljiti - dokazati.

Za največ tu zastavljenih problemov gre zahvala ameriškemu logiku R. Smullyanu. Pa začnimo!

x x x

Ko je Alica vstopila v gozd pozabljivosti, ni pozabila vsega, pač pa le nekatere reči. Pogosto je pozabila svoje ime, skoraj vedno pa, kateri dan v tednu je. Lev in enorožec sta bila česta gosta v gozdu. Bila pa sta tudi precej čudni živali. Lev je lagal vsak ponedeljek, torek in sredo, druge dneve pa je govoril resnico. Po drugi strani pa je enorožec lagal vsak četrtek, petek in soboto, in govoril resnico druge dni. Beseda "lagal" nam pomeni, da je tisti dan govoril same laži, če je le kaj spregovoril.

1. Nekega dne je Alica srečala leva in enorožca, ki sta počivala pod drevesom. Izjavila sta naslednje:

Lev: Včeraj je bil moj dan laganja.

Enorožec: Tudi jaz sem včeraj lagal.

Iz teh dveh izjav je Alica (ki je bila zelo pametna deklica) izpeljala, kateri dan v tednu je bil. Torej?

2. Nekoč je Alica srečala samo leva, ki je izjavil tole:

(1) Včeraj sem lagal.

(2) Ponovno bom lagal šele čez tri dni.

Kateri dan v tednu je bil?

3. V katerih dnevih v tednu lev lahko izreče naslednji dve trditvi:

(1) Včeraj sem lagal.

(2) Ponovno bom lagal jutri.

4. Kateri dan v tednu je lev lahko izjavil naslednje:

"Včeraj sem lagal, pa tudi jutri bom lagal!"

(Pozor: nalogi 3 in 4 sta različni!)

Gotovo boš sedaj sam brez naše pomoči rešil tudi naslednje štiri naloge. Ker spadajo te naloge istočasno v rubriko Premisli in reši, lahko pošlješ rešitve uredništvu Preseka.

V gozdu pozabljivosti sta se večkrat sprehajala tudi dvojčka Peter in Pavel. Eden od njiju je bil podoben levu, saj je lagal ob ponedeljkih, torkih in sredah, drugi pa je tako kot enorožec lagal ob četrtnih, petkih in sobotah. Druge dneve pa sta govo-

rila resnico. Toda po videzu sta si bila brata tako podobna, da ju Alica ni mogla razločevati.

1. Nekega dne je Alica srečala oba brata, ki sta izjavila naslednje:

Prvi: Jaz sem Peter.

Drugi: Jaz sem Pavel.

Kateri je bil zares Peter in kateri Pavel?

2. Nekega drugega dne v istem tednu sta brata rekla naslednje:

Prvi: Jaz sem Peter.

Drugi: Če je to res, potem sem jaz Pavel!

Kdo je kdo?

3. Ob neki drugi priložnosti je Alica spet srečala oba brata in enega vprašala: "Ali lažeš ob nedeljah?" Pritrdil je. Potem je tudi drugega vprašala isto. Kaj je odgovoril?

4. Nekega dne sta brata izjavila naslednje:

Prvi: (1) Lažem ob sobotah.

(2) Lažem ob nedeljah.

Drugi: Jutri bom lagal.

Kateri dan v tednu se je to zgodilo?

Isidor Hafner

ŠTIRIMESTNI LOGARITMI IN DRUGE TABELE. - (Knjižnica Sigma.201)

Učitelji matematike in učenci srednjih in osnovnih šol v Sloveniji lahko tudi v letošnjem šolskem letu dobijo matematični priročnik ŠTIRIMESTNI LOGARITMI IN DRUGE TABELE. Zaradi velikega povpraševanja po tej knjižici, smo jo morali tudi v letošnjem letu ponatisniti. Knjigo lahko dobite v vseh knjigarnah po 125 din, člani društva in naročniki Preseka pa jo lahko naročijo pri Komisiji za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, z 20 % popustom.

Ciril Velkovich

NALOGE BRALCEV



NALOGE BRALCEV

1. Poišči vrednost cifer v kriptaritmu - ista črka pomeni isto cifro, različni črki pomenita različni cifri!

$$abc + bc = ade$$

$$\quad - \quad + \quad +$$

$$ad - c = af$$

$$\hline agf + be = aeg$$

Zdenka Panker

2. Reši enačbo $\sqrt{x+7} - x + 3 = 0$
3. Za koliko procentov se spremeni sila teže na višini 1000 m nad površino Zemlje? Radij Zemlje je 6400 km.

Rudolf Bregar

4. Dokaži, da za nobeno celo število z izraz $z^2 + z + 2$ ni deljiv s 3.

Dragoljub M. Milošević

5. V škatli so modre, rdeče in bele kroglice. Vsota modrih in belih kroglic je enaka dvakratnemu številu rdečih kroglic. Štirikratna razlika med rdečimi in belimi kroglicami da število modrih kroglic. Produkt števila modrih in rdečih kroglic pa nam da 30-kratno število belih kroglic. Koliko je kroglic vsake barve?

Andreja Erdlen



BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

IZ ZAPISKOV INŠPEKTORJA CRAIGA

Znani ameriški logik *R. Smullyan* v knjigi *What is the Name of this Book* zastavlja naslednjo logično uganko. Glavne osebe so obtoženec, tožilec in branilec obtoženega. Ve se, da eden izmed njih vedno govori resnico (recimo mu *resničnik*), drugi je *lažnivec* - vedno laže, tretji pa včasih govori resnico, včasih laže (recimo mu *običajnik*). Ne ve se pa, kaj je kateri. Sodišče ve tudi, da če obtoženi ni kriv, da je kriv ali branilec ali tožilec. Ve se tudi, da tisti, ki je kriv, ni lažnivec. Omenjeni trije so izjavili naslednje:

Obtoženi: Nedolžen sem.

Branilec obtoženega: Moj varovanec je res nedolžen.

Tožilec: Ni res, obtoženi je kriv.

Porota se na osnovi teh treh izjav ni mogla odločiti. Zato so poslali po inšpektorja Craiga iz Scotland Yarda. Craig se je odločil, da poišče krivca, pa tudi, da ugotovi, kaj je kdo, in to s čim manj vprašanji. Vprašal je tožilca, če je morda on krivec. Tožilec mu je odgovoril. Inšpektor je malo pomislil in vprašal obtoženega, če je tožilec kriv. Obtoženi je odgovoril in inšpektor je vedel vse. Kdo je kriv, kdo je resničnik, kdo običajnik in kdo lažnivec?

Tomaž Pisanski

TEKMOVANJA - NALOGE



26. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV V MATEMATIKI

Sončni Koper je 3. aprila 1982 pozdravil 161 navdušenih mladih matematikov (46 učencev prvih razredov, 49 učencev drugih razredov, 40 učencev tretjih razredov in 26 učencev četrtih razredov), ki so pripotovali z vseh koncev Slovenije, da bi na *Srednji pedagoški in naravoslovno-matematični šoli* Koper preverili svoje znanje ob reševanju nalog, ki jih je pripravila republiška komisija za tekmovanja srednješolcev v matematiki pri DMFA SR Slovenije.

Tekmovanje se je po svečani otvoritvi pričelo ob 10. uri, dijaki pa so imeli za reševanje nalog na voljo dve uri in pol časa. Naloge so bile takšne:

1. razred

1. Naj bo x iracionalno število. V kakšni zvezi morajo biti od nič različna racionalna števila a , b , c in d , da bo

$$\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

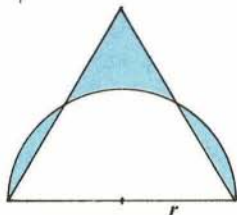
spet racionalno število?

2. Določi tiste vrednosti spremenljivke x , za katere doseže funkcija

$$f(x) = |x - 1| + |x - 9| + |x - 8| + |x - 2|$$

najmanjšo vrednost!

3. Nad premerom polkroga je načrtan enakostranični trikotnik kot kaže risba. Izračunaj ploščino osenčenega dela!



4. Raztopino dobimo tako, da zmešamo dve tekočini. Eni pravimo *topljenec*, drugi pa *topilo*. *Koncentracija* raztopine je razmerje med maso topljenca v raztopini in maso raztopine. Kolikšna je gostota ρ_0 raztopine s koncentracijo c , če ima topilo gostoto ρ_o , topljenec pa gostoto ρ ?

2. razred

1. Za katere m so točke $A(3,2)$, $B(m,-1)$ in $C(-2,m)$ oglišča pravokotnega trikotnika?

2. Pokaži, da je funkcija

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

liha!

3. Poišči vse realne rešitve enačbe

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$$

4. Krajišči premera krožnice K sta točki $(0,1)$ in (p,q) . Dokaži, da sta presečišči x_1 in x_2 krožnice K z abscisno osjo korena kvadratne enačbe

$$x^2 - px + q = 0$$

Pri tem velja: $p^2 \geq 4q$.

3. razred

1. V krožni odsek je včrtan krog, ki ima enak obseg kot je dolžina tetive. Izračunaj središčni kot!

2. V kakšni zvezi morata biti koeficienta p in q v enačbi

$$x^3 - x^2 + px + q = 0$$

da bo za korene x_1 , x_2 in x_3 veljalo

$$x_1x_2 + x_2x_3 = \frac{3}{4} \cdot x_1x_3$$

3. Izrazi v obliki produkta

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma$$

če je $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

4. Nariši graf funkcije

$$f(x) = \arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1-x}$$

4. razred

1. Koliko števil med 1 in 1 000 000 (vključno) je deljivih vsaj z enim od števil 6, 7 in 10?

2. Naj bo $b \neq c$ in

$$f(x) = \frac{x^3}{x+a} + \frac{Bx^3}{x+b} + \frac{Ax^3}{x+c}$$

Določi A in B tako, da bo obstajala limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

in to limito tudi izračunaj!

3. Pokaži, da števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ ne morejo biti hkrati členi nekega geometrijskega zaporedja!
4. V ravnini leži n krogov z enakim polmerom tako, da se ne sekajo. Načrtamo vse premice, ki so tangente vsaj dveh krogov. Koliko največ presečišč dobimo?

Po tekmovanju so imeli dijaki kosilo, nakar so si skupno ogledali zanimive hrastoveljske freske in pa Piran. V tem času so člani tekmovalne komisije ob pomoči številnih spremljevalcev ekip pregledali in ocenili njihove izdelke, kar zaradi velikega števila sodelujočih dijakov sploh ni bila lahka naloga. Tekmovalci so pri reševanju nalog pokazali veliko znanja, delovne vneme in vztrajnosti, o čemer priča tudi veliko število nagrad (27) in pohval (22), podeljenih na svečanosti ob koncu tekmovanja.

Najuspešnejši so bili naslednji učenci:

1. razred

1. nagrada: *Toni Biasizzo*, Sred.nar.-mat. in kov.str.šola Postojna; *Roman Drnovšek*, *Marko Gašperšič* in *Dušan Gorše*, vsi s Srednje naravoslovno-matematične šole Ljubljana.

2. nagrada: *Dejan Šemrov*, Sred.nar.-mat.šola Idrija.

3. nagrada: *Martin Juvan*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana; *Sašo Strle*, Sred.šola za elektroniko Ljubljana.

Pohvala: *Aleš Ambrožič*, Sred.šola za zdr. in družboslovje Nova Gorica; *Slavko Dobnikar*, *Sandi Kodrič* in *Tomaž Kranjčec*, vsi s Sred.nar.-mat. šole Ljubljana; *Benko Igor*, Gimn.M.Zidanška, Maribor; *Aleš Podgornik*, Sred. ped. in nar.-mat. šola Koper.

2. razred

1. nagrada: *Jure Škarabot*, Gimn. M.Zidanška, Maribor.

2. nagrada: *Matjaž Mencej*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana; *Vlado Robar*, Gimn.M.Zidanška, Maribor; *Uroš Seljak*, Gimn. Nova Gorica.

3. nagrada: *Mitja Doma*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana; *Stanko Gruđen*, Gimn. Idrija; *Adam Karalič*, Gimn. Šentvid; *Miroslav Repar*, Gimn. Sežana; *Primož Vindšnurer* in *Miloš Žefran*, Gimn. Nova Gorica.

Pohvala: *Darja Grač*, Gimn. Ravne na Koroškem; *Samo Hajdinjak*, ŠC R.Maistra, Kamnik; *Boštjan Jaklič*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana; *Matjaž Kovačec*, Gimn.M.Zidanška Maribor; *Aleksander Zidanšek*, Gimn. Celje.

3. razred

1. nagrada: *Robert Bakula*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana.

2. nagrada: *Ivan Pepelnjak*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana;
Roman Šoper, Gimn. Novo mesto.

3. nagrada: *Polona Blaznik*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana;
Aleksej Turnšek, Gimn. I.Cankarja, Ljubljana.

Pohvala: *Marjeta Cedilnik* in *Ana Pribakovič*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana; *Juš Kocjan*, ETŠ Ljubljana; *Dean Mozetič*, Sred.ped. in nar.-mat. šola Koper; *Robert Rodošek*, Gimn. M.Zidanška, Maribor; *Irena Šifrar*, Gimn.M.Zidanška, Maribor.

4. razred

1. nagrada: *Miran Černe* in *Mojca Tavčar*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana.

3. nagrada: *Goran Filipovič*, ETŠ Ljubljana; *Boko Mandrino* in *Igor Močnik*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana.

Pohvala: *Veronika Anderluh*, Sred.šola za elektroniko Ljubljana; *Peter Antunovič*, Gimn. I.Cankarja Ljubljana; *Matej Brešar*, Gimn. M.Zidanška Maribor; *Janko Kokošar*, Železarska in metalurška sred.šola Jesenice; *Igor Kukavica*, Sred.nar.-mat. šola Ljubljana.



V sodelovanju z DMFA SR Slovenije je tekmovanje organizirala podružnica DMFA Koper, pokroviteljstvo nad njim pa je prevzela LB - Splošna banka Koper, ki je prispevala večino denarnih sredstev in vsem prvonagrajencem izročila tudi svoje hranilne knjižice z lepo denarno nagrado. Sodelovale so tudi številne druge delovne organizacije, skupnosti in ustanove z Obale in na različne načine podprle tekmovanje. Tako je k dobremu počutju tekmovalcev pripomogel tudi kolektiv Doma učencev *Heroja Tita* v Kopru, kjer so prenočili dijaki iz oddaljenih krajev in ki je za vse tekmovalce pripravil kosila ter odstopil svojo dvorano za svečano zaključno slovesnost z razglasitvijo rezultatov tekmovanja.



Vsi tekmovalci so prejeli v spomin na to tekmovanje še knjige iz zbirke *Sigma*, značke LB - Splošne banke Koper in posebne Presekovske značke, ki jih dobijo le udeleženci republiških tekmovanj, Bilten o tekmovanju in še nekaj malenkosti. V Biltenu, ki ga je pripravila prizadevna skupina organizatorjev, najdemo poleg nagovorov ob otvoritvi še sezname sodelujočih, naloge s

tekmovanja, seznam nagrajencev in poročilo tekmovalne komisije. Vtisi s tekmovanja govorijo, da imamo Slovenci sposoben, zagnan in uspešen mladi rod matematikov, nad katerim bdijo požrtvovalni mentorji po šolah in DMFA SR Slovenije.

Republiška komisija za tekmovanja srednješolcev v matematiki je v Kopru tudi določila ekipo štirinajstih dijakov za zvezno tekmovanje mladih matematikov, ki je bilo v Sarajevu od 22. do 25. aprila. Poročilo o tem tekmovanju in o uspehu naših dijakov pa boste našli v naslednji številki Preseka.

Milena Kožar

8. REPUBLIŠKO PREDTEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV V MATEMATIKI

Šolski aktivni profesorjev matematike so v soboto, 13. marca 1982, pod vodstvom republiške komisije za tekmovanja srednješolcev v matematiki izvedli šolska tekmovanja, na katerih je sodelovalo preko 1200 dijakov s 36 srednjih šol iz vse Slovenije. Naloge predvsem v prvem in drugem razredu niso bile težke, o čemer priča število dijakov, ki so jih šole predlagale za republiško tekmovanje v Kopru (1. razred: 128, 2. razred: 118, 3. razred: 67, 4. razred: 50) in število dijakov, ki so pravilno rešili vse naloge (1. razred: 23, 2. razred: 40, 3. razred: 14, 4. razred: 8). Sicer pa o tem presodite sami!

Naloge s predtekmovanja:

1. razred

1. Pri kakšnem a velja:

$$a + 2|a| = |2a - 4|$$

2. Poenostavi izraz:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

3. V petmestnem številu $32x1y$ določi cifri x in y tako, da bo to število deljivo z 12! Poišči vse rešitve!
4. V nedeljo je prišlo na smučišče 624 smučarjev. Zmogljivost vlečnice je 720 oseb na uro, vožnja pa traja 10 minut. Smučar potrebuje za spust (upoštevaje padce, postanke v okrepčevalnici, sončenje itd.) 15 minut. Kako dolgo je treba čakati na vožnjo z vlečnico? Koliko smučarjev čaka v vrsti pred vlečnico?

2. razred

1. Dokaži, da v pravokotnem trikotniku s katetama a in b , hipotenuzo c in ploščino p velja:

$$c^4 = a^4 + 8p^2 + b^4$$

2. Poišči vse rešitve enačbe

$$x^{1+\log x} = 0,001^{-2/3}$$

3. V krožni izsek z radijem R je včrtan krog z radijem r . Izračunaj, koliko meri središčni kot izseka in kakšno je razmerje ploščin izseka in včrtanega kroga, če je

$$R : r = 3 : 1$$

4. Od doma do šole imata brata 400m. Starejši brat, ki dela 1dm daljše korake, naredi na tej poti 200 korakov manj kot mlajši brat. Kako dolge korake delata brata?

3. razred

1. Reši enačbo:

$$\sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}} = a$$

2. Reši enačbo:

$$4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 5$$

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{za } x < 2 \\ 4 - x, & \text{za } x \geq 2 \end{cases}$$

Določi inverzno funkcijo in nariši njen graf!

4. Enaka naloga kot 4. naloga za 1. razred.

4. razred

1. Poišči vse funkcije oblike

$$F(x) = \frac{ax + b}{x + c}$$

za katere identično velja: $F(F(x)) = x$

2. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} \right) \right)$$

3. Če so števila a^2 , b^2 , c^2 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, dokaži, da so števila

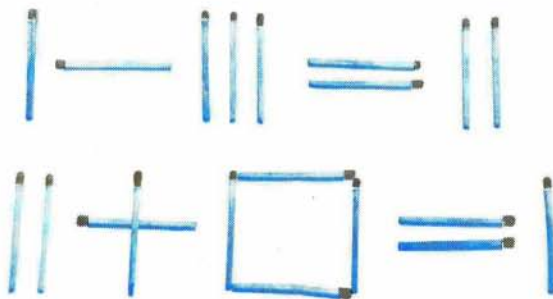
$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$$

tudi zaporedni členi aritmetičnega zaporedja!

4. Dokaži, da je največji koeficient v razvoju potence binoma $(a+b)^{2n}$ sodo število!

Gorazd Lešnjak

10. Nobena od spodnjih enačb ne drži, vendar lahko vsako popraviš tako, da prestaviš eno samo vžgalico.*



* V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Se nadaljuje. (Op.ur.)



Za nalogo o rezanju šahovnice smo dobili le šest rešitev. Poslali so nam jih Alojz Barlič iz Zagorja, Zoran Grom z Vrhnike, Juš Kocijan iz Ljubljane, Tomaž Leban z Jesenic, Gordana Miletič iz Titovega Velenja in Franc Jerala iz Kranja.

Zoran Grom se je zelo sistematično lotil naloge, zato njegovo rešitev tudi objavljamo in mu pošiljamo knjižico N. Prijatelja *Osnove matematične logike*, ki je ravno izšla v knjižnici Sigma.

Najprej sem vse možne ploskve (like), ki jih dobimo z rezanjem šahovnice s 4x4 polji (kvadratkí), razdelil v 6 skupin.

- I. V prvi skupini sta ploskvi s po enim samim kvadratom.
Možni sta le dve: bela in črna (glej prilogo slika 1).



- II. S po dvema kvadratkoma je možna le ena ploskev, saj v vsakem primeru izrežemo en bel in en črn kvadrata, ki se držita skupaj (slika 2).



- III. Štiri variante pa so možne s tremi kvadratkí: dve "ravni" in dve "zlomljeni", ki se med seboj ločijo po drugačnem razporedu črnih in belih kvadratkov (slika 3).



- IV. Tudi s 4 kvadratkami še ni bilo nobenih težav in kmalu sem ugotovil, da več kot 10 možnih ploskev v našem primeru ni (slika 4).



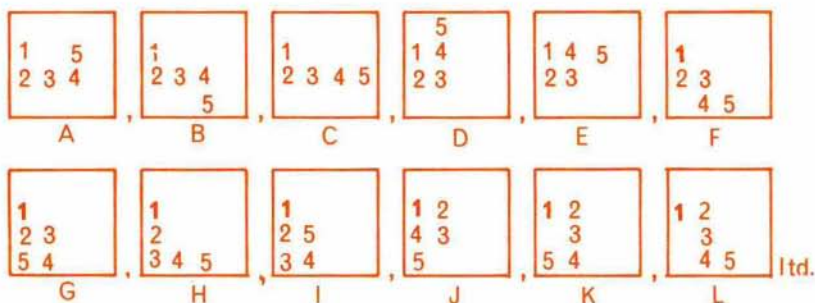
- V. Pri ploskvah s 5 kvadratkami pa sem naletel na prve težave. Poleg tega, da lika s slike 5 nista možna, ker imamo šahovnico veliko le 4x4 polja, so se pojavile težave predvsem v iskanju novih likov. Poskušal sem priti do rešitve po matematični poti, po vzoru naloge KOLIKO JE KOMBINACIJ? iz lanske 4. številke Preseka, pa mi ni uspelo. Zato sem se iskanja novih likov lotil raje s sistemom dodajanja, tako da sem si na šahovnici izbral začetno polje (izhodiščni kvadrater) in mu sistematično dodajal še druga, kot je prikazano na sliki 5. Nastal pa je nov problem, ker sem dobil polno identičnih ploskev, ki so bile npr. le malo drugače zasukane ali pa so imele spremenjen položaj ipd. (kot npr. liki E, L in G ali pa A in K). Ko sem potem s sistemom eliminacije izločil vse odvečne ploskve, mi jih je še vedno ostalo 32, ki pa bi jih bilo treba nekako urediti. Najprej mi je na misel prišla klasifikacija po razmerju belih in črnih kvadratkov na posameznih ploskvah. Vendar ta ureditev ne bi dala ravno dobrega pregleda nad vsemi ploskvami.



Nato pa sem opazil, da se nekateri liki spremenijo, če jih prezrcalim preko premice, drugi pa šele, če jih prezrcalim preko točke, tretji spet pa se v obeh primerih sploh ne spremenijo. Tako sem jih po zgornjem kopitu razvrstil v tri podskupine:

- V.a) ploskve, ki se ne spremenijo, če jih prezrcalimo preko premice ali preko točke. Takih ploskev v skupini s po petimi kvadratkami ni, prav tako jih ni tudi v vsaki

skupini z lihim številom kvadratkov. To pa verjetno zato, ker liho število kvadratkov onemogoča, da bi ploskev imela vsaj dve telesni simetriji, kar pa je v tej skupini pogoj;



V.b) ploskve, ki se ne spremenijo pri zrcaljenju preko prečnice, spremenijo pa pri zrcaljenju preko točke. Nahajajo se v skupinah po dve in imajo najmanj eno telesno simetrijo (središčno točko ali pa telesno simetra-lo). Tu imamo šest takih skupin, torej 12 ploskev (slika 7);



V.c) ploskve, ki se spremenijo na oba načina zrcaljenja. Nahajajo se v skupinah po 4 in nimajo telesne simetrije. Opazil sem, da je teh ploskev procentualno več, če je število kvadratkov liho, in manj, če je število kvadratkov sodo. Teh likov je 4*5, torej 20 (slika 8);





Slika 8

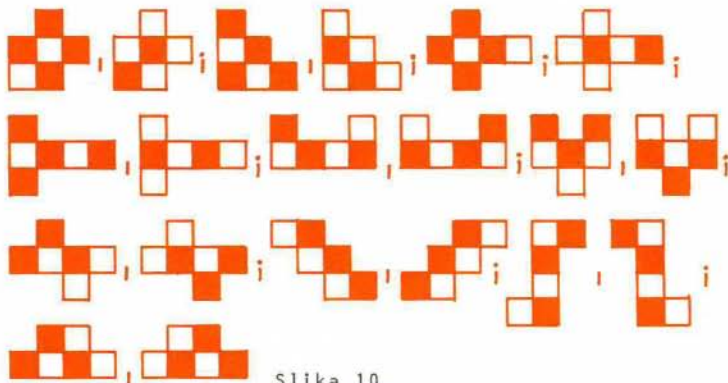
VI. Na podobne težave, kot pri ploskvah s 5 kvadratkami, sem logično naletel tudi pri ploskvah s 6 kvadratkami, le s to razliko, da je bilo tu likov še več in zato tu tudi nisem povsem prepričan, da sem našel prav vse. Sicer pa sem jih tudi tu razdelil v tri podskupine:

a) lik, ki se ne spremeni na oba načina prej omenjenih zrcaljenj, je samo eden (slika 9);



Slika 9

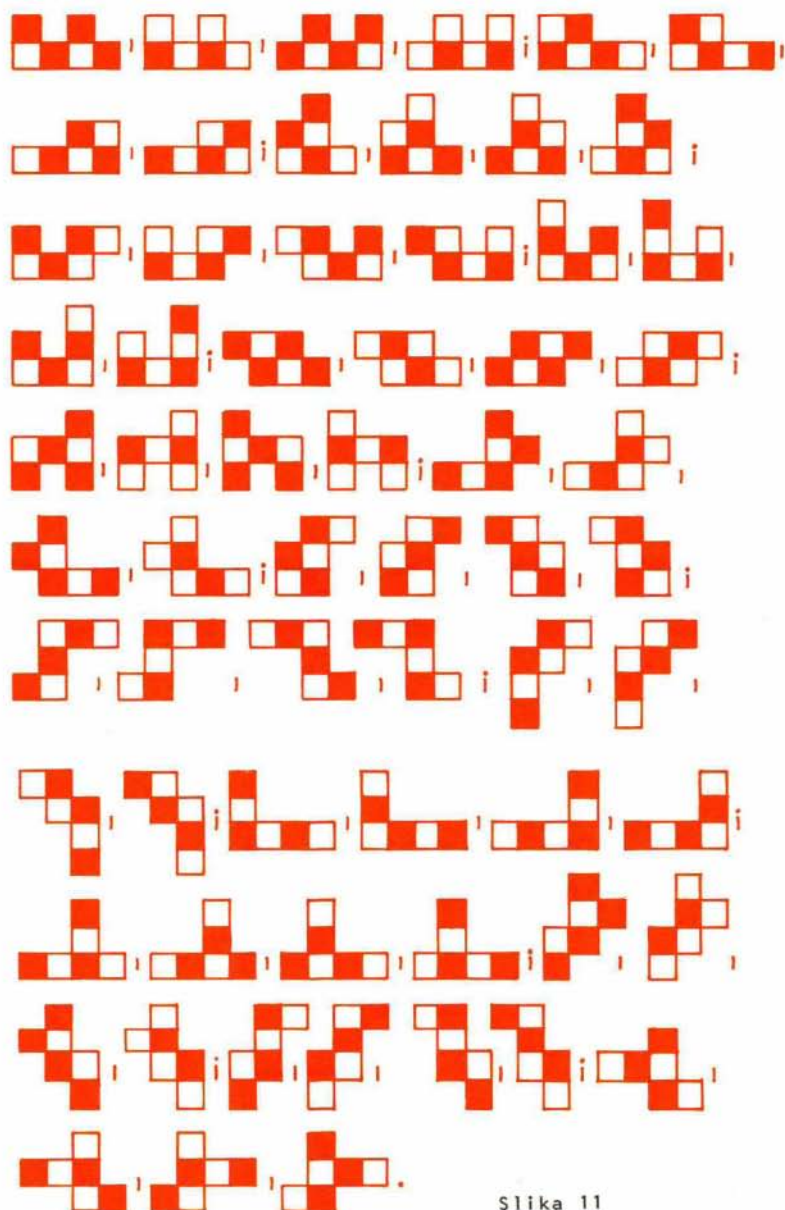
b) pri likih, ki se spremenijo, če jih prezrcalimo preko točke, imamo tu 10 skupin, torej 20 likov (slika 10);



Slika 10

c) v tretji skupini ploskev s po 6 kvadratkami pa imamo 4.18, torej 72 likov (ploskev) (slika 11).





Slika 11

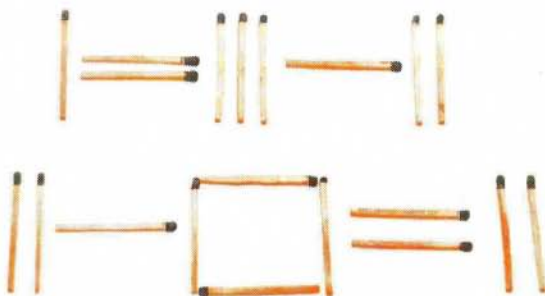
Vseh različnih ploskev z največ 6 kvadratki, ki jih lahko
dobimo z rezanjem šahovnice s 4x4 polji je
 $2+1+4+10+12+20+1+20+72 = \underline{142}$.

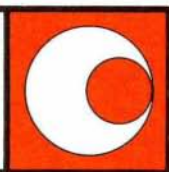
Zoran Grom

Tokrat vam predlagamo logično nalogo. Preberite si članek "Naučimo se sklepati" I. Hafnerja na strani 36 in poskusite rešiti vsaj eno od štirih nalog o dvojčkih Petru in Pavlu. Rešitev katerekoli teh nalog - seveda pa lahko tudi rešitev dveh, treh ali vseh štirih - nam pošljite do 25. septembra 1982.

Peter Petek

Rešitev s strani 48!





ENERGIJA IN ZVEZDE

V 4. številki lanskega Preseka smo videli, kako koristen pojem je *energija*. Tudi v astronomiji nam pojem energije pomaga, da rešimo marsikatero uganko.

Sonce se dan za dnem vsako jutro dvigne nad obzorje in nas ogreva. Tudi zvezde na videz nespremenljivo svetijo vsako noč. Od kod jim tolikšna energija, da v tisočletjih, kolikor jih ljudje gledamo, nismo opazili, da bi zvezde ugašale? Za Sonce vemo še celo več - arheologi so odkrili ostanke življenja, ki so stari milijardo let. Gotovo je moralo Sonce svetiti tudi v tako davnih časih, saj si drugače ne znamo predstavljati, da bi življenje lahko obstajalo brez tega.

S kakšnim gorivom se napaja "sončna centrala", da lahko deluje tako dolgo? Pa poskusimo z nekaj sklepi. Svetloba, ki jo Sonce seva, odnaša z njega energijo, ki jo morajo preskrbeti izvori v njem. Koliko energije odnese svetloba s Sonca v sekundi, lahko ocenimo. Astronomi so izmerili, da je Zemlja oddaljena od Sonca 150 milijonov kilometrov, na vsak kvadratni meter na Zemlji pa pride v sekundi okrog 1300 J energije. Vse kaže, da seva Sonce v vse smeri enako, zato bi katerikoli kvadratni meter, ki je obrnjen proti Soncu in je oddaljen od njega toliko kot Zemlja, presegel enak energijski tok. Energija, ki jo seva Sonce v sekundi - to moč imenujemo tudi *izsev* Sonca (L_0) - je torej enaka energiji, ki pade na kvadratni meter v sekundi, pomnoženi s površino krogle, ki ima radij 150 milijonov kilometrov. Kratek

račun nam pokaže, da je izsev Sonca skoraj 4×10^{26} W. (če bi hoteli na Zemlji proizvesti tolikšno moč, bi morali na vsak kvadratni meter celotne Zemljine površine postaviti okrog 20 tolikšnih elektrarn, kot je nuklearka v Krškem.) To je vsekakor gigantška moč, vendar nam številka ne pove veliko, če ne vemo, kolikšna je masa goriva, ki daje to moč.

Tudi maso Sonca lahko izračunamo, ker vemo, da se Zemlja giblje okoli Sonca približno po krožnici z radijem (r) 150 milijonov kilometrov. Gibanje Zemlje je torej pospešeno v smeri proti Soncu s pospeškom

$$a = v^2/r.$$

Tu pomeni v krožilno hitrost. Ker poznamo obhodni čas Zemlje okoli Sonca (t_0), lahko takoj izračunamo:

$$v = 2\pi r/t_0.$$

Zemljo pospešuje proti Soncu gravitacijska sila

$$F_{ZS} = G M_Z M_\odot / r^2.$$

Tukaj je G gravitacijska konstanta, M_Z in $M_\odot$ pa sta masi Zemlje in Sonca. Pospešek Zemlje a je potem enak

$$a = F_{ZS}/M_Z = G M_\odot / r^2.$$

Iz izrazov za a in v lahko končno izračunamo $M_\odot$.

$$M_\odot = 4\pi^2 r^3 / G t_0^2.$$

Ko vstavimo numerične podatke, dobimo za maso Sonca približno $2 \cdot 10^{30}$ kg.

Končno poznamo moč, ki jo Sonce seva, in njegovo maso. Če si predstavljamo, da je vsa Sončeva masa gorivo, ki napaja "sončno centralo", lahko izračunamo moč, ki jo proizvaja vsak kilogram goriva - to količino ponavadi označimo z ε . Očitno je

$$\varepsilon = L_\odot / M_\odot \approx 2 \times 10^{-4} \text{ W/kg}$$

Moč, ki jo v povprečju proizvaja kilogram snovi na Soncu, je izredno majhna. Kolesarska žarnica troši pri normalnem gorenju okrog 3 W - če bi jo poganjali s tako baterijo, kot je na Soncu, bi rabili 15 tonsko baterijo - prav neprimerno. Ob tako ne navadni številki pa se moramo spomniti drugega ekstrema; "sončna baterija" sveti že vsaj milijardo let, pravzaprav cenijo, da sveti že štiriin pol milijarde let in še nič ne kaže, da bo kmalu ugasnila. Izračunajmo energijo, ki jo je do danes že oddal povprečni kilogram snovi na Soncu - to je moč, pomnožena s časom, v katerem se ta moč proizvaja ($T_{\odot} \approx 4,5 \times 10^9 \text{ let} \approx 1.4 \times 10^{17} \text{ sekund}$)

$$\mathcal{E} T_{\odot} = 2.8 \times 10^{13} \text{ J/kg}$$

Še pred slabimi sto leti je tako izračunana številka močno begala fizike in astronome, ker je tako velika. Če npr. zažgemo kilogram premoga, se sprosti stotisočkrat manj energije. Energijski zakon nam potemtakem zagotavlja, da na Soncu ne gori premog, ne bencin in gotovo prav nobeno kemijsko gorivo, saj je katerokoli kemijsko gorenje energijsko veliko premalo izdatno, da bi se lahko kosalo s potrebami "sončne centrale".

V začetku tega stoletja še niso slutili, da lahko potekajo v naravi tudi *jedrske reakcije*, katerih izdatnost je ravno pravšnja za energijske potrebe zvezd. Zato so v okviru tedanjega znanja iskali druge možne energijske izvore. Posebno zanimiva se je zdela *gravitacijska potencialna energija*.

Vzemimo, da je zvezda najprej zelo velika plinasta krogla, nato pa se polagoma krči pod vplivom lastne teže. Ker deluje sila teže stalno proti sredini zvezde, to pa je tudi v smeri krčenja, opravlja delo na plasteh zvezde. To delo se porabi za segrevanje zvezde. Seveda pa se zvezda ne sme preveč segreti, saj so zvezde plinaste in vemo, da v plinu raste tlak z naraščajočo temperaturo. Če bi se plin preveč segrel, bi tlak v njem tako močno narasel, da bi se zvezda napihnila, ne pa skrčila. Krčenje zvezde zaradi lastne gravitacije torej natanko nadzira tlak plina. Če zvezda s segrevanjem izgubi nekaj energije, se lahko skrči le toliko, da opravi sila teže na plinu v zvezdi dvakrat

toliko dela, kolikor energije je odneslo sevanje. Zakaj pa dvakrat toliko? Če bi teža lahko opravila delo, ne da bi se zvezda spremenila, bi bilo nadomeščanje izgub ravno zadostno. Vendar pa se je zvezda ob krčenju zmanjšala, zato teža močneje stiska pline, ki morajo biti sedaj pod višjim tlakom in zato pri višji temperaturi. Polovica dela, ki ga je opravila teža, se mora porabiti za segrevanje plina v zvezdi, drugo polovico pa je zvezda izsevala. (Da se dokazati, da mora biti pri normalnih zvezdah delitev energije ravno pol na pol, vendar dokaza tukaj ne bomo navajali, ker je malo daljši.) Proti koncu prejšnjega stoletja je tako angleški fizik Eddington izračunal, da bi moglo Sonce na ta način sevati okrog trideset milijonov let. Ker takrat geološki dokazi o starosti Zemlje še niso bili tako prepričljivi kot danes, se mu je ta številka zdela zadovoljiva in veliko fizikov je verjelo, da je gravitacijska potencialna energija res tisti energijski izvor, ki preskrbuje zvezde.

Šele v začetku tega stoletja so se začele kazati pomanjkljivosti te teorije. Dokazi, da je Zemlja v resnici precej starejša od 30 milijonov let, so postajali vse bolj prepričljivi, odkrili pa so tudi jedrske reakcije, ki so energijsko milijonkrat izdatnejše od kemijskih in so zato takoj postale najresnejši kandidat za energijski izvor v zvezdah.

Eddingtonovo delo pa je kljub napačnemu zaključku igralo pomembno vlogo pri odkrivanju resničnega izvora energije v zvezdah. Eddington in drugi so namreč izračunali, kolikšna morata biti temperatura in gostota v notranjosti Sonca, da pritisk plina ravno zadrži krčenje Sonca zaradi teže. Ugotovili so, da mora biti gostota nekaj desetkrat večja od gostote vode, temperatura v središču Sonca pa naj bi bila okrog 15 milijonov stopinj. Končno je Bethe 1938 leta predpostavil, da v Soncu teče *jedrska reakcija*, pri kateri se jedra atomov vodika zlivajo v jedra atomov helija. Ko so na osnovi podatkov, ki so jih izmerili na Zemlji, preračunali, kolikšna bi morala biti moč, ki se sprošča pri taki reakciji na kilogram snovi pri razmerah v notranjosti Sonca, so dobili rezultat, ki se je presenetljivo dobro ujemal

z malo prej izračunanim. To je krepko podprlo Bethejevo domnevo. En dokaz sam po sebi seveda ni dovolj, da bi domnevo privzeli kot resnico, vendar je bilo mogoče z njo pojasniti tudi vrsto podatkov o zvezdah. Tako smo danes prepričani, da vendarle poznamo izvor energije v zvezdah, kakršna je Sonce.

Zgodba o energijskem izvoru zvezd je le en primer, kako je razmislek o energijski bilanci pomagal astronomom razjasniti neko temeljno vprašanje. V vesolju najdemo še celo vrsto pojavov, kjer nam podobni razmisleki pomagajo odločati pri presojanju posameznih domnev. Za konec omenimo samo še en primer, ki še vedno ni povsem pojasnjen, gotovo pa bo pri njegovem pojasnjevanju energijska bilanca igrala pomembno vlogo.

V letu 1963 so odkrili naravo *kvazarjev*. To so objekti, ki so v velikem teleskopu videti kot zvezde, vendar se po *svetlobnem spektru* močno razlikujejo od zvezd. Predvsem je v njihovih spektrih močno poudarjen *Dopplerjev pojav* - tiste črte, ki se v spektrih normalnih zvezd vidijo npr. pri modri barvi, so pri kvazarjih lahko pri rdeči. Verjetno je, da pride do takega premika zato, ker se kvazarji zelo hitro oddaljujejo od nas. Po moderni kozmološki teoriji pa to pomeni, da morajo biti kvazarji od nas zelo zelo oddaljeni. Sedaj pa se pojavi problem: če so kvazarji res tako daleč, kot nam dokazujejo premiki njihovih spektralnih črt v rdeče in naša kozmološka teorija, je njihov izsev ogromen, do stokrat večji od izseva največjih znanih galaksij. Po drugi strani pa nam govore mnogi podatki o tem, da so kvazarji mnogo manjši celo od povprečnih galaksij. Ali je mogoče, da obstajajo še izdatnejši energijski izvori, kot so jedrske reakcije? Fizikalni zakoni, kot smo jih spoznali na Zemlji, nam pravijo, da lahko pri sistemih z zelo veliko maso gravitacijska potencialna energija, o kateri je govoril že Eddington, tekmuje z jedrsko energijo ali jo celo nekoliko prekosi po izdatnosti. Vendar pa danes še ne vemo prav dosti o tem, kako naj bi se ta energija sproščala v kvazarjih. Na osnovi energijske bilance lahko samo sklepamo, da kvazarji ne bi mogli zelo dolgo tako potratno razsipati energije.

Andrej Čadež



NOVE KNJIGE

NAŠE NEBO - astronomske efemeride 1982

Astronomsko-geofizikalni observatorij v Ljubljani že petintrideset let izdaja letno brošuro, ki vsebuje mnogo zanimivih podatkov iz astronomije in geofizike. Iz vsebine efemerid lahko ugotovimo, da je brošura namenjena predvsem mladim, ki se zanimajo za astronomijo. Prav bo prišla vodjem astronomskih krožkov na osnovnih in srednjih šolah, kakor tudi udeležencem astronomskih taborov v Sloveniji. Večina objavljenih podatkov velja za geografsko širino in dolžino slovenskega glavnega mesta. Poglavlja oziroma razdelki v delu si sledijo takole:

Najvažnejše astronomske konstante. Sončevi in Lunini mrki. Vzidi, kulminacije in zaidi Sonca in Lune. Koordinate ter drugi podatki planetov. Kometi. Pregled nebesnih pojavov. Lege in trenutki nekaterih pojavov pri velikih Jupitrovih satelitih. Umetni Zemljini sateliti in potresi v času od 1.7.1980 do 30.6.1981. Med temi poglavji vsebuje brošura še vrsto drugih drobnih podatkov.

Brošura je dolga leta izhajala kot priloga Proteusa - revije, ki jo izdaja Slovensko prirodoslovno društvo. V zadnjih nekaj letih pa izhaja kot samostojna publikacija. Interesenti jo lahko dobijo v knjigarnah (cena 125.- din), naročniki Preseka pa na AGO ali pri Komisiji za tisk DMFA SRS za 100.- din.

Ciril Velkoverh

Niko Prijatelj, OSNOVE MATEMATIČNE LOGIKE, 1. del -
Simbolizacija, Knjižnica Sigma - 33, DMFA SRS, Ljubljana 1982.

Kot izvemo iz avtorjevega uvoda, je po dobrih dvajsetih letih prišel čas, da svoj UVOD V MATEMATIČNO LOGIKO, ki je doživel tri izdaje (1960, 1969 in 1973), nadomesti s celovitejšim delom OSNOVE MATEMATIČNE LOGIKE. Letos je v knjižnici Sigma izšel prvi del OSNOV s podnaslovom SIMBOLIZACIJA, v pripravi pa je še drugi del, ki nosi podnaslov FORMALIZACIJA. Namen OSNOV je seznaniti bralca s teorijami prvega reda, ki predstavljajo jedro matematične logike in obenem njen, v matematiki najbolj uporabljeni del.

SIMBOLIZACIJA je nekakšen naslednik UVODA. V njej naj bi se bralec postopoma seznanil z osnovnimi prvinami jezikov prvega reda (izjave, izjavne povezave, notranja zgradba izjav), pa tudi z zgodovino logike in nekaterimi vprašanji bolj filozofske narave. Večina pojmov je podrobno razložena in podprta s številnimi zgledi.

SIMBOLIZACIJA je prijetno napisana in, za matematično knjigo, lahko berljiva. Ker v zadnjem času posamezni deli matematične logike prodirajo tudi v osemletko, v srednji šoli pa se uporablja že dovršen del snovi, zajete v SIMBOLIZACIJI, bo knjiga nedvomno dobrodošla širšemu krogu bralcev.

Vladimir Batagelj

NALOGA

Na krožnici, ki je opisana okrog enakostraničnega trikotnika ABC , poljubno izberemo točko M .

- Dokaži, da daljice, ki spajajo točko M z oglišči trikotnika, ne morejo biti stranice nobenega trikotnika!
- Izračunaj vsoto kvadratov teh daljic, če poznamo stranico enakostraničnega trikotnika ABC !

Dragoljub M. Mišlošević



REŠITVE NALOG

NAUČIMO SE SKLEPATI (Rešitve s strani 36)

1. Edina dneva, ko lev lahko reče "Včeraj sem lagal", sta ponedeljek in četrtek. Za enorožca pa sta taka dneva četrtek in nedelja. Torej je edini dan, ko lahko oba to izrečeta, četrtek.
2. Iz prve levove izjave sledi, da gre za ponedeljek ali četrtek. Iz druge izjave sledi, da ne gre za četrtek. Torej je ponedeljek.
3. V nobenem dnevu v tednu to ni mogoče. Prva izjava je mogoča le v ponedeljek ali četrtek, drugo pa je mogoče izreči le v sredo ali nedeljo. Presek je torej prazen.
4. Ta naloga dobro kaže razliko med tem, da v enem stavku izrazimo dve misli ali pa da ti misli izrečemo vsako posebej. Če sta namreč dani izjavi X, Y in je trditev " X in Y " resnična, potem sledi, da sta obe izjavi X in Y resnični. Toda če je izjava " X in Y " neresnična, je neresnična vsaj ena izmed teh dveh izjav.

Edini dan v tednu, ko je lahko res, da je lev lagal prejšnji dan in da bo naslednji dan spet lagal, je torek. Toda ta dan ne more biti torek, saj lev takrat laže, za trditev pa smo predpostavili, da je resnična. Se pravi, da je levova trditev neresnična. Toda obe misli ne moreta biti neresnični. To smo imeli v prejšnji nalogi. Če je izjava "Včeraj sem lagal" resnična, "Jutri bom spet lagal" pa neresnična, je iskani dan sreda, če pa je obratno, je iskani dan ponedeljek.

1. TABELA: Zaporedja n -kotnih števil do poljubnega mesta m

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	...	m
3-kotna	1	3	6	10	15	21	28	...	$\frac{m(m-1)}{2} + m$
4-kotna	1	4	9	16	25	36	49	...	m^2
5-kotna	1	5	12	22	35	51	70	...	$\frac{3m(m-1)}{2} + m$
6-kotna	1	6	15	28	45	66	91	...	$2m(m-1) + m$
7-kotna	1	7	18	34	55	81	112	...	$\frac{5m(m-1)}{2} + m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
n -kotna	1	n	$3n-3$	$6n-8$	$10n-15$	$15n-24$	$21n-35$	...	$\frac{(n-2)m(m-1)}{2} + m$

2. V prvi trditvi o figurativnih številih moramo pokazati, da je: $2m(m-1)+m$ enako: $(2m-1)((2m-1)-1)/2+(2m-1)$

Preveri!

3. V drugi trditvi moramo pokazati, da je $3m(m-1)/2 + m$ enako $m(m-1)/2 + m + 2((m-1)((m-1)-1)/2 + (m-1))$

Preveri!

4. V Diofantovi nalogi je treba pokazati, da je

$8-(m(m-1)/2 + m)+1$ popoln kvadrat. Pokaži, da je to res!

5. V nalogi o Diofantovem življenju se rešitev glasi takole. Do 14. leta preživlja Diofant mladost. Pri 21 letih dobi brado, kar lahko pomeni, da se začne ukvarjati z matematiko in filozofijo. Ko mu je 33 let se poroči in pri 38 letih dobi sina. Sin umre star 42 let, ko je očetu Diofantu že 80 let. Nato živi še 4 leta, nakar umre star 84 let.

Danijel Bezek

Kaj vemo pred inšpektorjevim prihodom?

Obtoženec ne more biti lažnivec. Če bi namreč bil, bi bila njegova trditev neresnična, bil bi kriv in še lažnivec, kar pa je v nasprotju s pogojem, da krivi ni lažnivec. Obtoženi je torej resničnik ali običajnik.

Prva možnost: Obtoženi je resničnik. Njegova izjava je resnična, je nedolžen. Izjava branilca je tudi resnična, branilec je resničnik ali običajnik. Toda, ker je obtoženi resničnik, je branilec običajnik. Tožilec je potem lažnivec. Ker lažnivec ni kriv, je kriv branilec.

Druga možnost: Obtoženi je običajnik in nedolžen. Izjava branilca je resnična, torej je branilec resničnik. Ker je obtoženi nedolžen in ker lažnivec ni kriv, je kriv branilec obtoženega.

Tretja možnost: Obtoženi je običajnik in kriv. Trditev tožilca je resnična, tožilec je resničnik (zakaj?). Branilec je lažnivec.

Po Craigovem prihodu: Tožilec ni kriv v nobenem primeru. Če bi na Craigovo vprašanje odgovoril "Ne", bi nastopila tretja možnost in Craigu ne bi bilo treba zastavljati drugega vprašanja. Torej je tožilec odgovoril pritrdilno. Nastopata prva ali druga možnost. V obeh primerih je tožilec lažnivec, branilec obtoženega pa krivec. Ne vemo pa, kateri je resničnik in kateri običajnik. Toda ko je inšpektor vprašal obtoženega, ali je tožilec kriv, je vedel vse. Če bi obtoženi odgovoril "Ne", potem Craig še vedno ne bi vedel vsega, torej je bil odgovor "Da", kar seveda ni res. Obtoženi je običajnik, branilec pa resničnik.

KOMENTAR

S koliko vprašanji je nameraval inšpektor ugotoviti stanje? Če bi bil zadnji odgovor nikalen, bi moral postaviti še eno vprašanje, vsega skupaj vsaj tri. Pa se morda da rešiti problem z dvema vprašanjema? Z vprašanjem tožilcu "Ali je $1 + 1 = 2$?" ugotovimo, ali je tožilec resničnik ali lažnivec. Nato tožilca vprašamo, ali je obtoženi resničnik. Katere možnosti nastopijo?

Isidor Hafner

ZANIMIVOST O PITAGOREJSKIH TROJICAH

Če najdemo naravna števila za x , y in z , ki rešijo enačbo $x^2 = y^2 + z^2$, pravimo, da smo našli *pitagorejsko trojico*. Tedaj so x , y in z celoštevilске stranice pravokotnega trikotnika. Za pitagorejske trojice velja vrsta zanimivosti. Med njimi sta tudi naslednji dve:

a) Zapišemo dvojice zaporednih lihih števil:

$$(1,3), (3,5), (5,7), (7,9), \dots, (2n-1, 2n+1)$$

Seštejemo obratni vrednosti števil v dvojicah:

$$\begin{aligned} 1/1 + 1/3 &= 4/3, \quad 1/3 + 1/5 = 8/15, \dots, 1/(2n-1) + 1/(2n+1) = \\ &= 4n/(4n^2-1) \end{aligned}$$

Trditve: Vsota obratnih vrednosti je ulomek, katerega števec, imenovalc in za 2 povečani imenovalc predstavljajo števila pitagorejskih trojic:

$$(4,3,5), (8,15,17), \dots, (4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1)$$

Preveri veljavnost trditve!

b) Podobno zanimivost lahko sestavimo z dvojicami sodih števil.

Zapišemo dvojice zaporednih sodih števil:

$$(2,4), (4,6), (6,8), \dots, (2n, 2n+2)$$

Seštejemo obratni vrednosti števil v dvojicah:

$$\begin{aligned} 1/2 + 1/4 &= 3/4, \quad 1/4 + 1/6 = 5/12, \dots, 1/(2n) + 1/(2n+2) = \\ &= (2n+1)/(2n^2+2n) \end{aligned}$$

Trditve: Vsota obratnih vrednosti je ulomek, katerega števec, imenovalc in za 1 povečani imenovalc predstavljajo števila pitagorejske trojice:

$$(3,4,5), (5,12,13), \dots, (2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$$

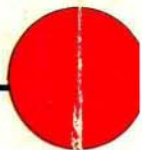
Preveri veljavnost trditve!

Premisli, če obstaja kakšna pitagorejska trojica, ki je ne dobimo na nobenega od obeh načinov!

Danižel Bezek



BISTROVIDEC



BIK SE PASE, TRAVA RASE

Leta 1707 je Newton objavil delo "Splošna aritmetika", v katerem je algebrajski pristop dobil obliko, kakršne smo danes vajeni. V tem delu najdemo tudi naslednjo nalogo:

Dvanajst bikov je v štirih tednih popaslo tri in še tretjino jutra pašnika; enaindvajset bikov pa popase deset juter takega pašnika v devetih tednih. Koliko bikov bi popaslo štiriindvajset juter pašnika v osemnajstih tednih?

Vladimír Batagelj

