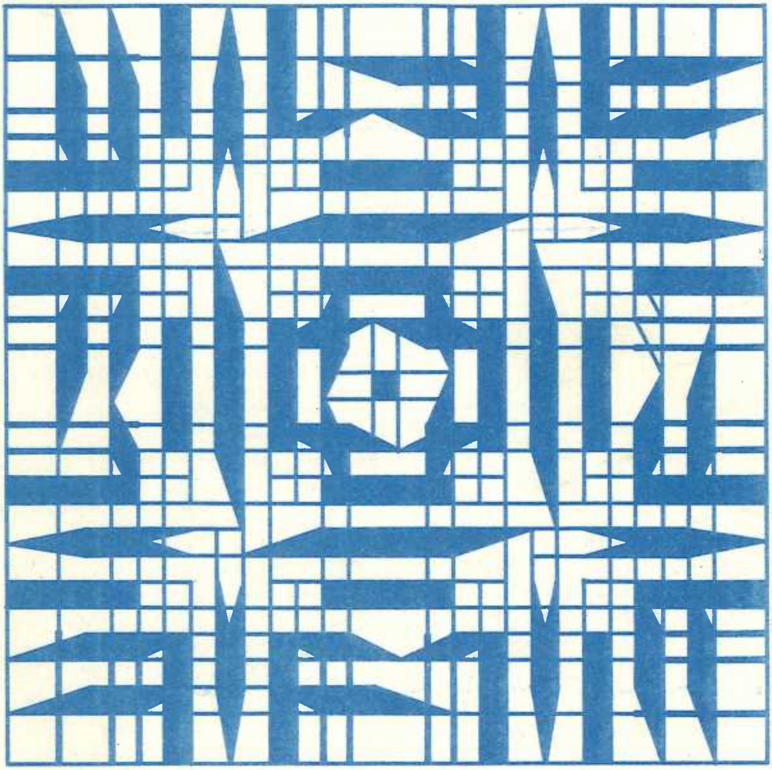
NEVTRONSKE ZVEZDE
KAPLJE
KOCKE IN BARVE



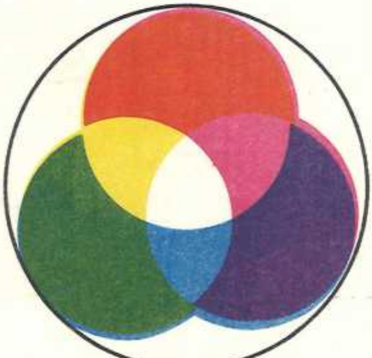
PRESEK

LIST ZA MLADE

MATEMATIKE

FIZIKE

ASTRONOME



P R E S E K, osnutek lista za mlade matematike, fizike in astronome. Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

Uredili: Avsec Franc, Batagelj Vladimir, Dover Jože, Ferbar Janez Fortuna Tomaž, Hribar Marjan, Kadunc Srečko, Mikoš Biserka, Oblak Franci, Pisansky Tomo, Prosen Marjan, Skulj Tomaž, Tomažič Davorin, Vagaja Marjan, Velkovrh Ciril, Zajc Pavel.

Slike je narisal Tomažič Davorin

List sta opremila Fajfek Janez in Delak Borut

Rokopis je natipkala Fabjančič Martina

Tiskano v tovarni Rog - Savlje, Savlje 89 v nakladi 3000 izvodov

K A Z A L O

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS se zahvaljuje kolektivu in vodstvu tovarne Rog - Savlje za pomoč pri popularizaciji matematike, fizike in astronomije med mladino in za brezplačni tisk osnutka Preseka. Uredniki osnutka preseka se zahvaljujejo vsem ki so pomagali, da je list izšel, posebno pa tovarišu Janezu Fajfeku za dokončno oblikovanje lista in za skrb, da je Presek tak, kot si ga je uredniški odbor zamislil.

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS, Jadranska 26,pp 227 Ljubljana. Izšlo v marcu 1972. Brezplačni izvod za učence osnovnih šol, dijake srednjih šol in člane Društva.

UVODNIK

Najprej hvala, da ste list odprli. Ker ste že začeli brati, preberite uvodnik, s katerim vam predstavljamo PRESEK, do kraja.

PRESEK naj bi bil naslov lista mladih matematikov, fizikov in astronomov - mladih po srcu in ne po letih. Presek je pojem iz teorije množic, ki trenutno pretresa pod naslovom NOVA MATEMATIKA slovenski šolski prostor. V simbolu treh krogov, kjer se prekrivajo barve, kot ukazuje fizika, smo hoteli povezati vse tri vede s tremi barvami v celoto: rdeča - matematika, zelena - fizika, modra - astronomija.

S PRESEKOM želimo vzgajati mlade, matematično in fizikalno misleče ljudi. Priporočati vam želimo branje primernih knjig in sploh matematičnih, fizikalnih in astronomskih tekstov. V PRESEKU poskušamo prikazati matematiko, fiziko in astronomijo na ZANIMIV IN PRIJETEN NAČIN. Predvsem pa je naša želja ta, da bi vam PRESEK ugajal po zasnovi, vsebini in obliki.

Tokrat je pred vami list, kateremu je ogrodje kopica člankov iz matematičnih in fizikalnih tekmovanj za učence in dijake v letu 1971 - poročila, seznami nagrajenih in pohvaljenih, naloge in rešitve. Ta list je kot enkratna izdaja zaključen v celoto in je dokument slovenskih tekmovanj mladih matematikov in fizikov v lanskem letu. Je pa lahko tudi "pra-PRESEK", osnutek mesečnega mladinskega lista, namenjenega vsem tistim ki jim je matematika, fizika in astronomija pri srcu. Presek bi izšel desetkrat med šolskim letom.

V rubrikah, ki so tokrat v listu ter še v novih rubrikah bi predstavili zanimiva področja iz matematike, fizike in astronomije. Uvedli bi dopisno tekmovanje v reševanju matematičnih in fizikalnih nalog za učence in dijake. Objavili bi vrsto člankov o postopkih pri reševanju nalog in problemov, rubriko pisma uredništvu, s katero bi držali stik z bralci, zabavne naloge, kratkočasnice, šaljivke in še druge zanimive tekste. Z vsem tem bi poskusili na prijeten in nevsiljiv način vzbujati ljubezen do matematike, fizike in astronomije.

POGOVORI

R A Z G O V O R   Z   R E P U B L I Š K I M   P R V A K O M

Sabo Rajko tekmuje v matematiki tri leta in dvakrat je bil republiški prvak. Sedaj je dijak matematičnega oddelka 2.razreda I.gimnazije v Ljubljani. Uči ga prof. Štalec. Sabo je vsa leta odličnjak. Prvi uspeh na tekmovanju ga je navdušil za matematiko. Kot osmošolec je dobil vsa tri Vegova priznanja in istega leta je bil na zveznem tekmovanju četrti.

Lani je kot dijak prvega razreda gimnazije ponovno postal republiški prvak. Povabili smo ga na razgovor in vprašali, kako je uspel doseči zaporedoma tako lepe uspehe.

"Veliko in predvsem se je treba učiti", je odgovoril Sabo *"Poleg učenja v šoli in za šolo delam še sam redno in vsak dan. Potrebna sta veselje in vztrajnost pa gre. Seveda ne more vsak uspeti. Potrebne so prirojene sposobnosti. Vendar je važna tudi volja, odločna volja, da ne odnehaš. Mnogo vadim in to v glavnem sam. Veliko lažje in hitreje pa se znanje pridobi, če imaš na voljo strokovno vodstvo, ki te usmerja pri iskanju poti reševanja. Ker je naš profesor preveč zaposlen, smo dijaki sami ustanovili krožek. V krožku rešujemo naloge, iščemo in analiziramo različne načine reševanja nalog, s primerjanjem razvijamo logičen način mišljenja in sklepanja.*

Menim, da imamo v rednem pouku premalo ur matematike. Mi imamo v dveh tednih devet ur, v Beogradu pa imajo na matematični gimnaziji kar štiriindvajset ur matematike. V matematičnem oddelku smo dobri učenci, zato zahtevajo profesorji od nas, da se učimo tudi pri drugih predmetih več in bolje kakor v ostalih oddelkih. Bolj kot za matematike nas imajo za odličnjake. Tako nam ostaja še manj časa za poglabljanje v matematiko."

"Kaj pa te pravzaprav privlači k študiju matematike?"

"Matematika je živa, razvijajoča se znanost, od katere je odvisen vedno večji del življenja. Daje veliko možnosti za prcučeva-

nje in samostojno delo."

Rajko je ravnokar imel šestnajst let. Zato seveda tudi že razmišlja o tem, s čim se bo ukvarjal v življenju, ki je v vsej svoji razsežnosti bogatih možnosti neposredno pred njim.

"Študiral bom matematiko", pravi Rajko, *"a profesor vseeno ne bom. Ta poklic terja le del matematičnega znanja in daje človeku malo časa, da bi svoje znanje širil in poglabljal. Zato se bom ukvarjal z delom, kjer bom lahko samostojno široko uporabljal znanje matematike in ga stalno dopolnjeval. Kateri poklic bo to pa še ne vem."*

"Kaj meniš, ali posvečamo pri nas dovolj skrbi širjenju matematičnega znanja?"

"Matematiki dajemo premalo poudarka, kar kaže tudi pomanjkanje učiteljev matematike. Morali bi jo bolj popularizirati. Že v nižjih razredih osnovne šole bi morali vzbuditi zanimanje zanjo. Uvedba moderne matematike v osnovno šolo je že ukrep v tej smeri. Več pozornosti je treba posvečati učencem, sposobnim za matematiko. Krožki in redna tekmovanja prispevajo velik delež širjenju in poglabljanju interesa za matematiko. Težava pa je, ker imamo v Sloveniji premalo matematične literature, zato uporabljam večinoma tujo. Del te vrzeli bi lahko zapolnil matematični časopis."

"Kakšna naj bi bila po tvojem mnenju vsebina takega časopisa?"

"Rad bi, da bi list redno objavljal težje naloge v zvezi z učno snovjo in članke, pisane tako, da bi bili razumljivi. Koristno bi bilo, da bi vseboval matematično šolo, v okviru katere bi nekatere teme iz učne snovi posebej razložili. Ne bi smele izostati novice s področja matematike, novejši matematični dosežki in podobno. V listu bi z veseljem prebral intervju s katerim od naših znanih matematikov npr. dr. Križaničem. Verjetno bi tudi marsikoga drugega zanimale podrobnosti o študiju matematike in o možnostih takšne zaposlitve, pri kateri je potrebno predvsem znanje matematike."

"Tvoji predlogi so zanimivi. Kaj pa bi ti prispeval?"

"Moj prispevek naj bo Newtonova slavna naloga o volih - za začetek":

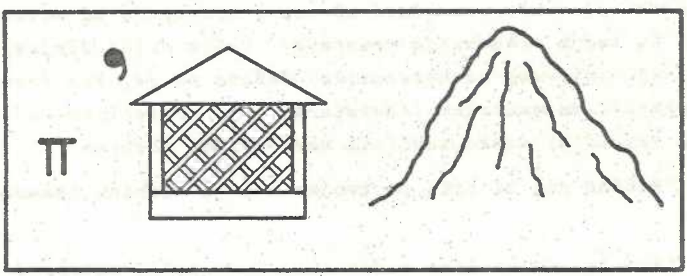
Trije travniki, pokriti z enako gosto travo, ki enako hitro raste, imajo $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha in 24 ha površine. Prvi travnik prehrani 12 volov v štirih tednih, drugi pa 21 volov v devetih tednih. Koliko volov more prehraniti tretji travnik v 18 tednih?

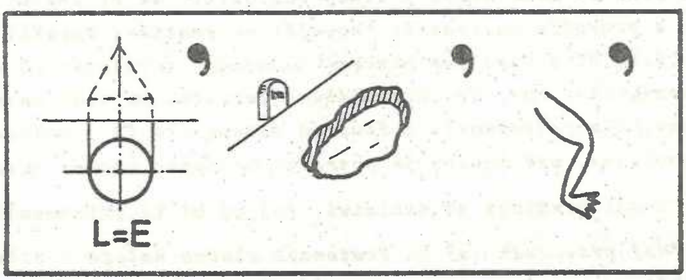
"Samo še to me zanima: Ali ti poleg matematike še kaj drugega bogati življenje?"

"Večino preostalega časa posvetim glasbi. Ob njej se sprostim, notranje napetosti popustijo. Z glasbo se ukvarjam aktivno že osem let, pet let študiram klavir. Glasba me resnično zanima. Redno obiskujem operne predstave.

S sošolci in prijatelji posvetim tudi kakšno urico igranju namiznega tenisa, treniram karate, posebno rad pa plavam in smučam."

Biserka Mikoš





ZGODBE O MNOŽICAH

Kaj je množica

Preden bomo pripovedovali o lastnostnih neskončnih množic, moramo zvedeti, kaj je množica in kako se z množicami računa. Na žalost osnovni pojem teorije - pojem množice - ne moremo natančno opredeliti. Lahko bi sicer rekli, da je množica "množina", "skupnost", "zbirka", "skupina", "družina", "razred", "sistem" itd. Toda to ni matematična opredelitev, ampak je prej zloraba besednega zaklada slovenskega jezika.

Če hočemo kakršenkoli pojem opredeliti, moramo vedno najprej povedati, kateremu širšemu pojmu je podrejen. Za pojem množice tega ne moremo napraviti, ker nima nadrejenega pojma in tudi ni vsebovan v nobenem drugem pojmu.

Zato - namesto da definiramo (opredelimo) pojem množice, raje navedimo nekaj primerov zanj. Često govorimo o nekaterih rečeh, ki jih druži skupna lastnost. Govoriti moremo npr. o množici vseh stolov v sobi, o množici vseh atomov na Jupitru, o množici vseh celic človeškega telesa, o množici krompirja v vreči, o množici vseh rib v morju, o množici vseh kvadratov na ravnini, o množici vseh točk dane krožnice itd.

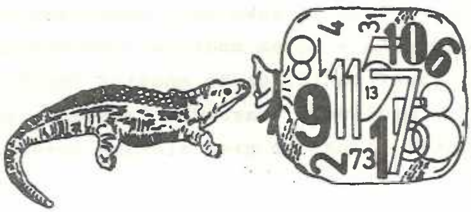
Reči, ki sestavljajo dano množico, imenujemo <u>elementi</u> te množice. Če hočemo pokazati, da dana množica $\mathcal{A}$ vsebuje elemente x, pišemo: $\mathcal{A} = \{x\}$. (A je množica vseh reči x). Zaviti oklepaj pomeni, da so elementi x združeni v neko celoto - množico $\mathcal{A}$. Da element x pripada množici $\mathcal{A}$, zapišemo z znakom ε takole: $x \in \mathcal{A}$ (čitaj: iks je element množice $\mathcal{A}$). Če pa dani element x ne pripada množici $\mathcal{A}$, zapišemo: $x \notin \mathcal{A}$. Če pomeni npr. $\mathcal{S}$ množico vseh sodih števil, potem je $6 \in \mathcal{S}$ in $7 \notin \mathcal{S}$. (Vprašanje: Kaj pa če je $\mathcal{L}$ množica lihih števil? Ali je $8 \in \mathcal{L}$? Kaj pa 31?)

Po N.Ja.Vilenkin: Zgodbe o množicah priredil F.O.

Če govorimo o množici, združimo nekatere reči v celoto - namreč v množico - katere elementi so potem te reči.

Začetnik teorije množic George Cantor je to povedal takole: "Množica je mnogo, mišljeno kot eno."

Da bi si pojem množice nazorno predstavili, je predlagal matematik N.N.Luzin naslednje. Zamislimo si prozorno nepropustno lupino - kot vrečko iz prozorne snovi. Predpostavimo, da so v tej vrečki zaprti vsi elementi dane množice in da razen njih v vrečki drugih reči ni. Ta lupina s predmeti x, ki so v njeni notranjosti, lahko služi kot predstava množice $\mathcal{A}$, ki vsebuje elemente x.



Lupina ali vrečka, ki vsebuje vse elemente (in ničesar drugega), precej dobro predstavlja tisti del združitve elementov x, iz katerih nastane množica $\mathcal{A}$. (Vrečka je lahko tudi prazna!)

Množica, ki vsebuje končno število elementov, se imenuje <u>končna</u> množica. Množica, ki vsebuje neskončno elementov, se imenuje <u>neskončna</u> množica. Tako je množica dreves danega gozda končna množica, množica točk na dani krožnici pa je neskončna množica.

Kako podamo množico

Množico moremo podati na več načinov. Lahko navedemo spisek vseh elementov, ki pripadajo množici (ki spadajo v množico $\mathcal{A}$). Primer: množica učencev 8.a razreda je določena s spiskom v redovalnici, v kateri so učenci napisani po abecedi, množica vseh držav na svetu je določena s spiskom v geografskem atlasu, množica vseh kosti človeškega telesa pa s spiskom v učbeniku anatomije.

Vendar je ta način mogoč samo za končne množice in še to ne za vse. Npr. množica vseh rib v morju je gotovo končna, vendar ne moremo napraviti spiska, ki bi vseboval vsako od rib. Kaj pa šele neskončne množice, pri teh vseh elementov sploh ne moremo našteti; samo poskusite sestaviti spisek vseh naravnih števil! Jasno, da je kaj takega nemogoče, ker se ne bi nikoli končalo.

V primeru, da množice z naštevanjem ne moremo podati, povemo neko značilno lastnost - tako lastnost, da jo imajo vsi elementi množice, a vse ostale reči na svetu te lastnosti nimajo. Npr.: govoriti moremo o množici vseh naravnih števil ($\mathcal{N}$). Jasno je, da je $73 \in \mathcal{N}$, da pa $\frac{3}{4} \notin \mathcal{N}$ in krokodil $\notin \mathcal{N}$. Prav tako število $\sqrt{2}$ in planet Saturn ne pripadata množici racionalnih števil (Q) $\frac{7}{15}$ ali $-\frac{43}{8}$ pa pripadata množici Q . (Kako bi to napisali?)

Opozarjam pa, da v praksi opredelitev množice z značilno lastnostjo ni vedno popolnoma jasna. Veliko število vmesnih oblik in večpomenskost besed večkrat onemogočata razdelitev vseh reči na pripadajoče in nepripadajoče dani množici.

Vzemimo množico vseh dreves na zemlji. Najprej moramo povedati, ali mislimo sploh na vsa drevesa, ki so bila in bodo na zemlji, ali samo na drevesa, ki so bila na zemlji v določenem času (npr. od 1. januarja do 29. februarja 1972). Potem nastane vprašanje, kaj je z drevesi, ki so bila v tem času požagana, so začela na novo rasti itd. Potem pa obstaja še cela vrsta vmesnih oblik med drevesi in drugimi rastlinami in je treba razčistiti, kaj spada k drevju in kaj ne.

Problem natančnosti pri izražanju pa se pojavi tudi že pri preprostejših primerih. Naj množica $\mathcal{A}$ vsebuje vse črke iz besede PRESEK. To množico lahko tolmačimo na dva načina. Prvi način je, da menimo množico vseh črk v tej besedi in pri tem pride vsaka črka na vrsto tolikokrat, kolikokrat je v besedi. Da črke ločimo, jih zabeležimo s številkami: $\mathcal{A} = \{P, R, E_1, S, E_2, K\}$. Lahko pa mislimo samo na množico različnih črk v tej besedi. Potem ponavljajoče se črke opustimo in je množica: $\mathcal{A} = \{P, R, E, S, K\}$. Jasno, da sta množici različni.

N E V T R O N S K E   Z V E Z D E

Podobno kot ljudje preživljajo tudi zvezde v svojem življenju mladost, zrela leta in starost. Posamezno obdobje v življenju zvezde se loči od drugega predvsem po sili, ki preprečuje, da bi se zrušila pod lastno težo. Mlada zvezda je plinasta. V njenih notranjih vročih plasteh se gibljejo molekule tako hitro, da vzdržujejo s trki težo zunanjih plasti. Tlak, ki je posledica termičnega gibanja molekul, imenujemo termični tlak. Toda to stanje ni stabilno. V njem ima zvezda zanimivo lastnost, da se segreva, ko seva in oddaja energijo. Tega ni težko pojasniti.

Mislimo si, da bi padla temperatura, ko odda zvezda energijo v okolico, kakor smo vajeni na primer pri loncu vroče vode, ki oddaja toploto. Toda pri zvezdi bi bil s tem zvezan padec tlaka, ki ne bi več kljuboval teži. Zvezda se nekoliko sesede in se pri tem segreje na račun dela, ki ga opravi sila teže. Končna temperatura mora biti večja od začetne, kajti na koncu je tlak večji kot na začetku. Ob skrčitvi zvezde se namreč poveča sila teže, ki narašča obratno sorazmerno s kvadratom radija. Mlada zvezda se torej krči in v središču segreva, dokler se ne vžge termonuklearno gorivo: jedra vodika se začnejo spajati v helij.

S tem se začne zrelo obdobje zvezde, ki traja nekako od letnika 100 milijonov do letnika 10 milijard. Tudi v tem obodbju je zvezda plinasta. Toplota, ki se sprošča s termonuklearnimi reakcijami, krije vse izgube zaradi sevanja v okolico. Zvezdi se ni treba več krčiti, da bi krila te izgube s težnostno energijo. V zrelem obdobju se velikost zvezde, njena temperatura in druge lastnosti le malo spreminjajo, le jedrsko gorivo se neprestano troši. Ob koncu zrelega obdobja pride zvezda v "drugo puberteto", ko zmanjka v središču goriva - vodika. Tedaj se zopet sredica zvezde krči in segreva, dokler ni dovolj vroča za naslednjo termonuklearno reakcijo, to je spajanje jeder helija v jedra ogljika, kisika itd. Gorenje helija zadrži nadaljnje krčenje za nekaj sto milijonov let. Med drugim krčenjem sredice sprejme plašč zvezde veliko toplote in se zaradi tega - raztegne in ohladi. Namesto, da bi seval modro ali rumeno, kot je seval prej, seva potem le še rdeče. V "drugi puberteti" postane torej zvezda rdeča velikanka.

Na starost zmanjka zvezdi vsega goriva in sredica se zopet začne krčiti. Plašč se zopet širi in deloma zgubi v vesolje. Pri lažjih zvezdah, ki imajo podobno maso kot naše Sonce, poteka ta "eksplozija" razmeroma počasi; na koncu ostane sama sredica - bela pritlikavka. Pri težjih zvezdah se to zgodi eksplozivno. Tedaj govorimo o eksploziji supernove. V nekaj minutah implodira sredica in iz nje nastane verjetno nevtronska zvezda ali črna luknja. Plašč pa eksplodira in se širi v vesolje v obliki meglice*. Nekatere meglice so torej znak, da je tam eksplodirala zvezda kot supernova in da smemo na tistem kraju iskati nevtronsko zvezdo. Zvezda preživi torej svojo starost ali kot bela pritlikavka, kot nevtronska zvezda ali kot črna luknja.

Bele pritlikavke, ki jih že dolgo poznajo, imajo maso kot naše Sonce ali manj in so velike kot Zemlja. So v stabilnem ravnotežju in se ne krčijo več. Sili teže kljubuje tlak zaradi kvantnomehanskega gibanja elektronov. Po Paulijevem izključitvenem načelu namreč ne moreta biti niti dva delca v istem stanju. Niti dva elektrona ne moreta imeti hkrati na istem kraju iste hitrosti, niti ne moreta sočasno mirovati. Čim bliže so elektroni drug drugemu, tem hitreje se morajo gibati in tem večji tlak izvajajo. To velja celo pri temperaturi absolutne ničle. Vse trdne in tekoče snovi, ki jih poznamo na Zemlji, so stabilne in se ne sesedejo ravno zaradi tega kvantnomehanskega tlaka. Snov v središču bele pritlikavke pa je milijonkrat gostejša od snovi na Zemlji in zato lahko zdrži tlak nad 1000 bilijonov atomsfer. Kvantnomehanski tlak je učinkovitejši od termičnega: bele pritlikavke se ne krčijo več, sevajo samo še na račun nakopičene toplotne energije. Sredina ima v začetku temperaturo okrog 100 milijonov stopinj, v nekaj milijardah let pa se zvezda ohladi, seva vse šibkeje in na koncu bi ji lahko rekli črna pritlikavka.

Nevtronska zvezda. Do močne implozije sredice v supernovi pride, ker pri težkih zvezdah celo kvantomehanski tlak elektronov ne vzdrži več teže zvezde. Elektroni se ne upirajo več tlaku, temveč

* Tako meglico, ki je ostanek ene zvezde, moramo razlikovati od meglenice (galaksije), to je sistema množice okrog 10 milijard zvezd. V zadnjem času je pritegnila največ pozornosti meglica Rakovica. Glej npr. Proteus 33, št. 5, str. 198 (1971).

se združijo s protoni v nevtrone*. Sredica se zruši vase in se zaustavi šele ko doseže gostoto skoraj milijon ton na kubični milimeter. S tolikšno gostoto, ki je okoli 10^{14} krat večja kot pri običajni snovi, imamo opraviti npr. v atomskih jedrih. Pri taki gostoti more kljubovati teži zvezde kvantnomehanski tlak nevtronov. Za nevtrone, ki so 2000 krat težji od elektronov, postane Paulijevo izključitveno načelo odločilno šele pri taki silni gostoti in nevtroni lahko s svojim gibanjem vzdržujejo tlake do tisoč kvadriljonov (10^{27}) atmosfer. Nevtronska zvezda ima maso približno kot naše Sonce, njen polmer pa meri samo okrog 10 km.

Črna luknja. Če ima začetna zvezda precejkrat večjo maso kot naše Sonce, pričakujemo, da se še huje sesede kot nevtronska zvezda. Zaradi silnega težnostnega polja iz nastale gmote ne more več uiti niti svetloba. Tako zvezdo, ki se je ne da videti, imenujemo črna luknja. Črnih lukenj še niso našli, vendar jih vneto iščejo. Zaznali bi jih lahko na primer po kroženju kake zvezde, ki bi krožila okrog črne luknje, podobno kot krožijo planeti okrog Sonca.

Oglejmo si sedaj supergosto snov v nevtronski zvezdi! Ta snov je podobna snovi v atomskem jedru, s katero se približno ujema po gostoti. Tudi gradniki so v obeh primerih isti: pozitivni protoni in nevtralni nevtroni. Različen pa je sestav: medtem ko je v atomskem jedru približno polovica nevtronov in polovica protonov, je v sredici nevtronske zvezde 96 % nevtronov, 2 % protonov in 2 % elektronov. Jedrske sile so namreč močnejše, če je v snovi prav toliko nevtronov kot protonov, kar da svoj pečat atomskim jedrom. Toda pozitivni protoni se med seboj odbijajo z električno silo. V atomskih jedrih jih je malo in pač potrpijo. V resnici že v jedru urana, v katerem jih je 92, ne potrpijo več, saj se uran razcepi npr. v reaktorju ali atomski bombi. V nevtronski zvezdi pa množica protonov potrpi samo, če nevtralizira enako število elektronov njihov vpliv. Toda zaradi Paulijevega izključitvenega načela v sredici nevtronske zvezde ne more biti več elektronov kot 2 %. Če jih je več, se kar združijo s protoni v nevtrone. Kljub tej razliki si smemo predstavljati nevtronsko zvezdo kot eno samo ogromno atomsko jedro.

---

*Pri tej reakciji nastane tudi lahek nevtralni delec - nevtrino, ki zbeži v vesolje.

Jedrska snov je v tekočem agregatnem stanju, saj lahko popišemo atomsko jedro približno kot kapljico "jedrske tekočine". Pričakujemo, da je tudi supergosta snov v sredici nevtronske zvezde tekoča in jo imenujemo "nevtronska tekočina". V skorji nevtronske zvezde pa sta tlak in gostota manjša (gostota meri kak kilogram na kubični milimeter, podobno kot v sredini bele pritlikavke. Zato je snov v skorji nevtronske zvezde sestavljena iz jeder in elektronov, kot na Zemlji in ne iz skoraj samih nevtronov. Nekateri domnevajo, da je skorja nevtronske zvezde zaradi velike gostote trdna vkljub temperaturi več milijonov stopinj.

Lastnosti nevtronskih zvezd, ki smo jih že opisali, so v glavnem sad teoretičnega razglabljanja. Po poznavanju običajne snovi in atomskih jeder smo sklepali o neznanih in nenavadnih razmerah. Čas je, da povemo, kako so odkrili nevtronske zvezde in katere lastnosti so res videli. Najprej so jih "videli" z radijskimi teleskopi. To so ogromne parabolične antene, ki sprejemajo radijske valove. Zvezde namreč ne sevajo samo elektromagnetnega valovanja z valovno dolžino vidne svetlobe, temveč tudi elektromagnetno valovanje z drugimi valovnimi dolžinami, npr. z dolžino nekaj metrov, kot jih uporabljamo pri radiu in televiziji. Leta 1967 in 1968 so v Cambridgu v Angliji opazili z velikim presenečenjem, da nekatere zvezde oddajajo radijske signale v kratkih pulzih, ki se redno ponavljajo s presledkom okrog ene sekunde. To je bila velika senzacija. Nekateri so celo pomislili, da utegnejo biti ti signali sporočila neke oddaljene civilizacije, vendar so to kmalu ovrgli. Nova nebesna telesa so imenovali pulzarje. Sedaj poznamo že skoraj sto pulzarjev. Vsi imajo izredno točne periode. Najhitrejši je v meglici Rakovici in pošilja pulze vsakih 30 milisekund, najpočasnejši pa vsake 3 sekunde. Vsi ti pulzarji sevajo radijske pulze, edino od pulzarja v Rakovici so doslej opazili tudi pulze vidne svetlobe z enako periodo kot radijske in celo pulze rentgenske svetlobe. Morda nas preseneti, da utripanja pulzarja v Rakovici niso ugotovili še pred izumom radioteleskopov, saj utripa v vidni svetlobi. Toda ta pulzar je zelo šibka in na videz nepomembna zvezdica, vidna samo z najmočnejšimi teleskopi. To zvezdico so gledali le na fotografijah, na katerih se zaradi dolge ekspozicije zabrišejo utripi. Tudi pri opazovanju skozi teleskop oko ne bi ločilo bliskov s pogostostjo 33 na sekundo. Kdo bi slutil, da od ogromne množice zvezd na nebu, ki mirno sevajo, utripa ravno ta šibka zvezdica? Sedaj opazujejo tudi ostale pulzarje, če se vidi tudi tam kaka šibka zvezdica, ki utripa v vidni svetlobi.

Kateri argumenti govore za to, da so pulzarji res nevtronske zvezde? Precej pulzarjev so našli v sredi meglic, ki veljajo za ostanek supernov*. To kaže, da so pulzarji implodirana sredica bivše rdeče velikanke, torej stare zvezde.

Pri starih zvezdah izbiramo lahko le med belo pritlikavko, nevtronsko zvezdo in črno luknjo. Periodnih pojavov, s katerimi bi pojasnili kot ura točno utripanje pulzarjev, pa tudi ni na pretek: nihanje zvezde navzven-navznoter, kroženje zvezd dvojčic (ali planeta okrog zvezde) in vrtenje okrog lastne osi. Prva možnost ("dihanje") odpade, ker pokažejo računi, da so periode belih pritlikavk precej daljše, periode nevtronskih zvezd pa precej manjše kot izmerjene periode pulzarjev. Pri drugi možnosti odpade kroženje okrog bele pritlikavke: pri njem bi morala biti hitrost tolikšna, da bi že pri precej manjši hitrosti razpadla zvezda zaradi plimskih sil**. Pri tretji možnosti zopet odpade vrtenje bele pritlikavke, ker bi bila zahtevana obodna hitrost prevelika; zvezda bi razpadla zaradi centrifugalne sile.

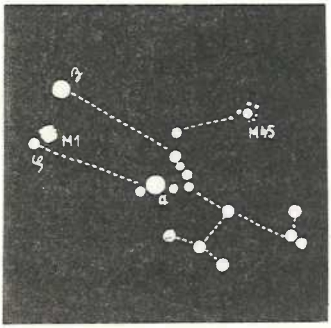
Ključ za izbiro med edinima preostalima pojavoma, kroženjem okoli nevtronske zvezde in vrtenjem nevtronske zvezde okoli lastne osi je dalo precizno merjenje periode. Opazili so, da se perioda pulzarjev počasi daljša, v večini primerov se bo podvojila po kakih 10 000 letih. To lahko pojasnimo pri vrtavki, ki s sevanjem izgublja energijo in se zato počasi ustavlja. Pri kroženju pa bi bilo

---

* Kjer je danes Rakovica, so leta 1054 kitajski astronomi videli supernovo, ki je svetila celo podnevi. To dokazuje, da je Rakovica ostanek eksplodiranega plašča supernove.

** Pri hitrih pulzarjih kot je pulzar v Rakovici bi morala biti hitrost kroženja okrog bele pritlikavke, oz. obodna hitrost vrteče se bele pritlikavke večja od svetlobne, kar je seveda nemogoče. Prepričajmo se z računom: v = obseg/perioda = $2\pi r/T$ = = 2.3,14.6000 km/0,03 s $\sim$ 1000 000 km/s. Z znakom "$\sim$" poudarimo, da nas zanima le velikostna stopnja.

ravno obratno. Če na primer planet izgublja energijo, se po špirali približuje Soncu. V bližini Sonca je privlak močnejši, zato se mora planet gibati vse hitreje, se pravi s krajšo periodo, da je centrifugalna sila lahko v ravnovesju s težnostno. Če bi bil pulzar krožeči planet ali zvezdi dvojčici, bi se morala torej perioda krajšati, kar je v nasprotju z opazovanji.



Shema ozvezdja Bika, kjer je meglica Rakovica (Crab Nebula) - M1; α Aldebaran, najsvetlejša zvezda v ozvezdju Bika; M45 Gostosevci - Plejade.

Rakovica - ostanek supernove, ki je eksplodirala 1054 leta; S puščico je označena lega pulzarja NP 0532 s periodo 0,03 s.

Po tem smemo imeti v okviru današnjega znanja in opazovanj pulzarje za vrteče se nevtronske zvezde. Medtem ko svetijo mlade zvezde na račun krčenja (težnostne energije), zrele zvezde na račun gorenja (jedrske energije), bele pritlikavke na račun nakopičene toplotne energije, pa izkoriščajo nevtronske zvezde mehansko rotacijsko energijo. Nevtronske zvezde si ob eksploziji supernove nakopičijo tolikšno mehansko energijo, da z njo lahko zalagajo vso svojo meglico še celih 100 000 let. Dolgo je bila uganka, od kod jemlje Rakovica energijo, da lahko sveti kot 30 000 sonc. Sedaj vemo, da jo zalaga z energijo njen pulzar na račun svoje rotacijske energije. Opišimo račun, katerega rezultat se lepo ujema z opazovanji in dodatno vliva zaupanje v teorijo o nevtronskih zvezdah. Skladno z lastnostmi supergoste snovi in enačbo za ravnovesje zvezde predpostavimo, da ima nevtronska zvezda v Rakovici približno maso našega Sonca (2.10^{30} kg) in radij 10 km. Hitrost vrtenja meri na ekvatorju $v = 2\pi r/T = 2.3.10$ km/0,03 s = 2000 km/s. Če bi se vse plasti vrtele s to hitrostjo, bi bila rotacijska kinetična energija pulzarja $W = mv^2/2 = 2.10^{30}$ kg.4.10^{12} $m^2s^{-2}/2 = 4.10^{42}$ joulov. V resnici je vrednost nekajkrat manjša, ker je pulzar nekoliko lažji in notranje plasti se gibljejo počasneje. Pulzar pa bi se po izmerjenem naraščanju periode ustavil v 2500 letih, če bi se ustavljal enakomerno. Iz obeh podatkov izračunamo moč, ki jo oddaja pulzar: $P = W/t = 4.10^{42}$ joule/2500.365.3600 sekund = 10^{32} wattov. Ta ocena se ujema z opazovanji, da seva cela Rakovica energijski tok približno 10^{31} wattov. Za primerjavo naj navedemo, da seva naše Sonce le energijski tok $3{,}7.10^{26}$ wattov. Kako pa pulzar v Rakovici zalaga svojo meglico s tolikšno energijo? Verjetno brizga vanjo curek visokoenergijskih elektronov, ki potem sevajo v magnetnem polju Rakovice.

Nevtronsko zvezdo lahko primerjamo z vztrajnikom girobusa. Girobus je avtobus, ki mu na začetni postaji z elektromotorji zavrtijo velik vztrajnik, tako da lahko z zalogo rotacijske kinetične energije pripelje do končne postaje (to energijo prenaša s posebnim menjalnikom z vztrajnika na pogonska kolesa). Tudi nevtronsko zvezdo, ko nastane ob eksploziji supernove, "navije" implozija na veliko hitrost vrtenja, da še 100 000 let "vozi", se pravi zalaga z energijo, celo Rakovico.

Življenjski razvoj zvezd lahko primerjamo z bančnim poslovanjem. Glavni kapital zvezde je njena težnostna energija, potrošnja pa je sevanje v okolico. Mlada zvezda troši na račun svojega kapitala. Toda na ta način bi v nekaj sto milijonih let zapravila večino kapitala. Zato zvezda v zrelih letih kapitala ne troši več (se skrči in ne izrablja težnostne energije), temveč jemlje potrošniško posojilo iz banke "jedrska energija". Na račun tega potrošniškega posojila lahko živi (seva) celih 10 milijard let. Ko v banki "jedrska energija" zmanjka fondov, je s posojilom konec in zvezda doživi bankrot (eksplozijo supernove). Ob tej priliki

(1) Vrne iz svojega kapitala večino posojila. Zaradi silne vročine se namreč jedra spet razkrojijo v protone in nevtrone. Za to rekacijo, ki poteka obratno kot zlivanje atomskih jeder, uporabi namreč zvezda prav toliko energije, kot se je prej sprostila z zlivanjem.

(2) Ogromno kapitala zapravi z razvratnim sevanjem. Supernova seva nekaj dni tako močno kot cela galaksija s 10 milijardami sonc in v tem času ne izseva dosti manj energije kot prej v celem življenju 10 milijard let.

(3) Ostanek kapitala naloži v banko "rotacijska energija", da lahko do smrti, ko ugasne, še razkošno živi 100 000 let (z meglico vred seva pulzar v začetku bolj kot 30 000 sonc).

Na koncu pojasnimo še zakaj seva nevtronska zvezda v pulzih. Nevtronska zvezda ima močno magnetno polje, najbrž bilijonkrat močnejše kot naša Zemlja. Podobno kot na Zemlji magnetna polja ne sovpadata z geografskima. Iz polov brizga curek zelo hitrih elektronov, ki krožijo po vijačnici okrog magnetnih silnic. Če nabit delec kroži, seva elektromagnetne valove (od radijskih pa morda do vidnih in rentgenskih). Izsevano valovanje leži v ravnini pravokotni na smer silnic - podobno kot pri svetilniku. Svetilnik sveti v ekvatorialni ravnini nevtronske zvezde. Pri vsakem vrtljaju nevtronske zvezde nas ta svetilnik enkrat ali dvakrat oplazi.

Mitja Rosina

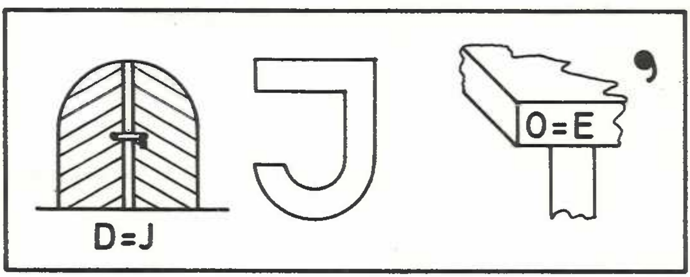
V E G O V A   P R I Z N A N J A   V   L A N S K E M   L E T U

Na prvem tekmovanju iz matematike za Vegova priznanja v šolskem letu 1970/71 je sodelovalo iz vse republike Slovenije preko 6500 učencev višjih razredov osnovnih šol. Republiškega tekmovanja se je udeležilo 136 učencev, od katerih je 82 doseglo zlato Vegovo priznanje. Zelo lepo so uspela občinska tekmovanja. Nekatere tekmovalne komisije so učence pogostile, jim pripravile krajše izlete in jih nagradile. Poglejmo podatke o lanskoletnem tekmovanju:

šolska tekmovanja	6457 tekmovalcev	3044 bronastih VP
občinska tekmovanja	3011 tekmovalcev	1836 srebrnih VP
republiško tekmovanje	136 tekmovalcev	82 zlatih VP.

Naslednjih prvih deset najboljših na republiškem tekmovanju je prejelo tudi knjižne nagrade:

- Avbelj Viktor, Ljubljana (osnovna šola Prežihov Voranc)
- Novak Jerko, Ljubljana (osnovna šola Majde Vrhovnik)
- Simonič Martin, Ljubljana (osnovna šola Prežihov Voranc)
- Oman Matej, Maribor (osnovna šola Boris Kidrič)
- Černigoj Branko, Ajdovščina (osnovna šola Boris Kidrič)
- Cindro Vladimir, Ljubljana (osnovna šola Majde Vrhovnik)
- Hrup Andrej, Radeče (osnovna šola Marjan Nemec)
- Jeran Rajko, Cerkno (osnovna šola dr.Fran Močnik)
- Mikoš Marko, Maribor (osnovna šola Prežihov Voranc)
- Kompare Boris, Nova Gorica (osnovna šola Milojka Štrukelj).



Naloge z občinskega tekmovanja 1971

VI. razred

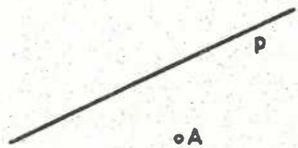
1. Dopolni "magični kvadrat" tako, da bodo vsote števil v vseh vodoravnih, vseh navpičnih in obeh diagonalnih smereh enake!

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

2. Po redu plovbe izpluje ladja A iz pristanišča vsak četrti dan, ladja B vsak osmi dan in ladja C vsak deseti dan. Danes, 29.maja, so izplule vse tri istočasno. Katerega dne bodo naslednjič vse tri ladje hkrati zapustile pristanišče?

3. Pravokotno šolsko igrišče, ki je bilo 80 m dolgo in 48 m široko, so povečali tako, da so zvečali dolžino za 15 %, širino pa za četrtino. Za koliko % je sedaj ploščina igrišča večja?

4. Premica p naj bo simetrala enakokrakega trikotnika, točka A pa ena izmed njegovih oglišč. Načrtaj trikotnik, če je njegova višina enaka osnovnici! Opiši postopek!



5. Iz kock z robom 1 cm je sestavljena večja kocka z robom 3 cm. Površje te kocke je rdeče popleskano.

a) Koliko malih kock je potrebnih za večjo kocko?

b) Koliko malih kock ni popleskanih?

c) Koliko malih kock ima popleskano le eno ploskev?

d) Koliko malih kock ima popleskani dve ploskvi?

e) Koliko malih kock ima popleskane tri ploskve?

f) Koliko malih kock ima popleskane štiri ploskve?

VII. razred

1. Za koliko se razlikujeta vrednosti izrazov

$$\frac{1}{1 - x + x^2 - x^3}$$

in

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3},$$

če je $x = -\frac{1}{2}$?

2. Pri deblih izražamo delež skorje v odstotkih ploščine presečnega lika. Pri hrastu je ta delež 18 %.
Kako debela je skorja, če je premer debla $\frac{1}{2}$ m? (Na mm natančno!)

3. Dani so kvadrati s stranicami $a_1 = 2$ cm, $a_2 = 3$ cm, $a_3 = 4$ cm. Načrtaj jih in konstruiraj kvadrat, katerega ploščina je enaka vsoti ploščin vseh treh kvadratov!

4. Enaka kot peta naloga za šesti razred

5. Izračunaj ploščino štirikotnika $ABCD$ s podatki:

$AB = 30$ m, $BC = 10$ m

$\sphericalangle ABC = 60^\circ$,

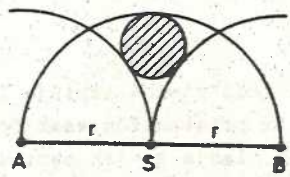
$\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 120^\circ$!

VIII. razred

1. S postaje A odpelje proti postaji B, ki je oddaljen 54 km, ob 18. uri 36 minut motorni vlak in prispe tja ob 19. uri 21 minut. S postaje B odpelje ob 18. uri 55 minut potniški vlak proti postaji A in prispe ob 20. uri 7 min. Ob kateri uri se vlaka srečata? Koliko sta takrat oddaljena od postaje A ?

2. Dan je trapez $ABCD$. Na njegovi krajši osnovnici ležita točki M in N. Načrtaj skozi ti točki premici tako, da razdelita trapez na tri ploščinske enake dele! Opiši postopek!

3. Iz krajišč polkrogovega premera A in B sta načrtana loka s polmerom r; mali osenčeni krog se dotika obeh lokov in polkrogovega loka. Izračunaj, koliki del polkrožne ploskve je osenčena krožna ploskev!



4. Osnovna ploskev pokončne piramide je romb ($a = 2$ cm, $\alpha = 60^\circ$), krajši stranski rob meri 2 cm. Izračunaj površino in prostornino piramide!

5. Enaka kot peta naloga za šesti razred

Pavle Zajc

Rešitve nalog z občinskega tekmovanja matematikov 1971

VI. razred

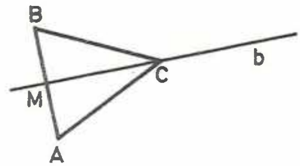
1.

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

2. V (4, 8, 10) = 40, 40 dni po 29.maju je 8.julij. Naslednjič bodo vse tri ladje hkrati zapustile pristanišče 8. julija.

3. Ploščina igrišča je večja za 43,75 %.

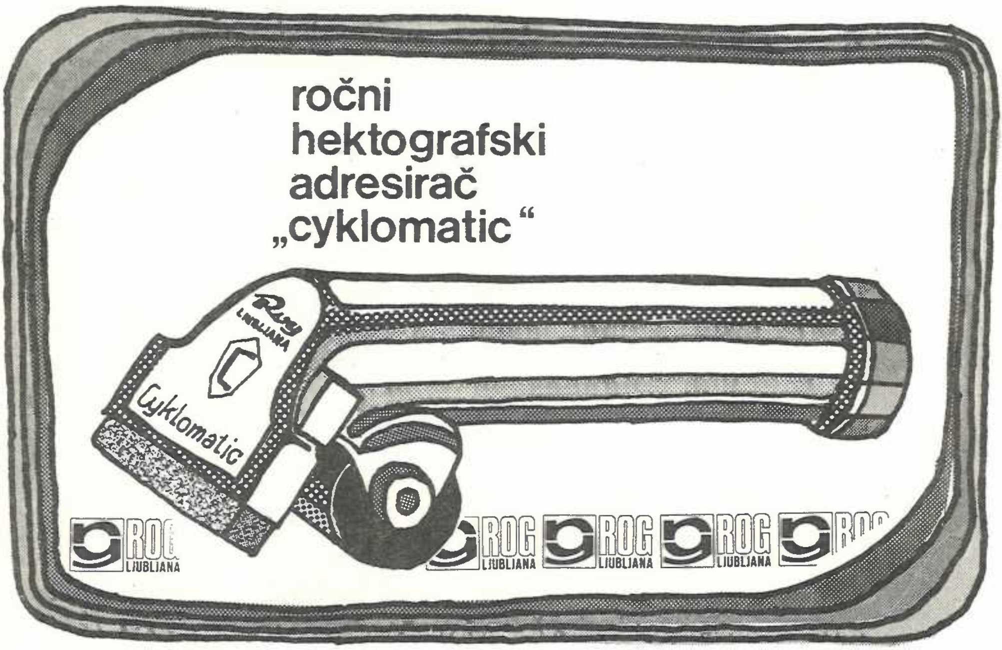
4.



Točki A poiščem simetrično ležečo točko B. Daljica AB je osnovnica trikotnika, simetralo seka v točki M. Nanesem še $MC = AB$ in dobim vrh iskanega trikotnika.

5. a) 27 kock
b) 1 kocka
c) 6 kock
d) 12 kock
e) 8 kock
f) 0 kock

Biserka Mikoš

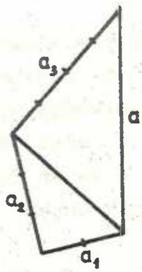


VII. razred

1. Za $\frac{64}{65}$.

2. 4,8 cm.

3.



4. Glej rešitev 5. naloge za 6. razred.

5. $p = 125\sqrt{3}$ m^2.

VIII. razred

1. $v_1 = 1200$ m/min

$v_2 = 750$ m/min

$AC + CB = 54000$ m

$t = 27\frac{9}{13}$ min .

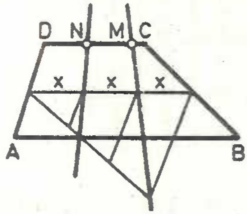
Vlaka se srečata ob 19^h 3 $\frac{9}{13}$ min.

Od postaje A sta takrat oddaljena 33 $\frac{3}{13}$ km.

2. $p_1 + p_2 + p_3 = s\cdot v$

$x = \frac{s}{3}$

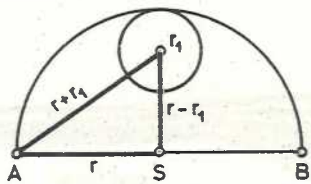
$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{s}{3}\cdot v = x\cdot v$



3. $(r + r_1)^2 = r^2 + (r - r_1)^2$

$r_1 = \frac{r}{4}$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1^2\pi}{\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{1}{8}$$



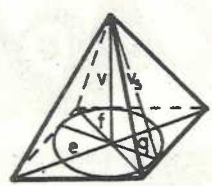
4. $\frac{e}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $e = 2\sqrt{3}$,

$f = a = 2$

$v = \sqrt{3}$,

$a\cdot\rho = \frac{e\cdot f}{2}$,

$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$v_s = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $P = 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$

$V = 2$

5. Glej rešitev 5. naloge za 6. razred.

Pavle Zajc in Stanko Uršič

Naloge z 7.republiškega tekmovanja 1971

1. Mimo telegrafskega droga vozi vlak 12 sekund, 1500 m dolg predor pa prevozi v 1 minuti in 12 sekund. Kako dolg je vlak in kolikšna je njegova hitrost?

2. Za $a = 3$ ima izraz $\frac{5a - 3}{b - 3}$ vrednost 6. Pri kateri vrednosti števila a je tá izraz enak 1?

3. Načrtaj trikotnik z oglišči $A(-2,4)$, $B(-2,-4)$, $C(6,0)$ ter mu očrtaj krog! Polmer tega kroga tudi izračunaj!

4. Enakokrak trapez s ploščino $12\sqrt{3}$ cm^2 je sestavljen iz treh enakostraničnih trikotnikov. Izračunaj diagonalo in obseg tega trapeza!

5. Pravokotni trikotnik s katetama 3 cm in 4 cm zavrtimo prvič okrog ene katete, drugič okrog druge katete in tretjič okrog hipotenuze. Izračunaj razmerje površin in razmerje prostornin nastalih teles!

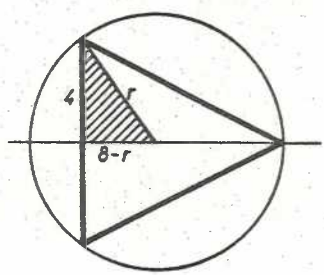
Rešitve nalog iz 7.republiškega tekmovanja 1971

1. $v = d/12$, $1500 + d = 72.d/12$

   $d = 300$ m, $v = 25$ m/s

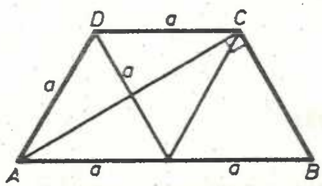
2. $b = 5$, $a = 1$

3. $r^2 = 4^2 + (8 - r)^2$, $r = 5$



4. $3\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$

$a = 4,\ c = 5a = 20,\ AC = 4\sqrt{5}$



5. $c = 5\ ,\quad r = 12/5$

$P_1 : P_2 : P_3 =$

$= 3(3 + 5\pi) : 4(4 +$

$+ 5\pi) : \frac{84}{5}\pi$

$V_1 : V_2 : V_3 = 3 : 4 : 2{,}4$

Stanko Uršič

Zvezno tekmovanje učencev 8-ih razredov

je bilo 13.junija 1971 v Beogradu. Tekmovali so najboljši učenci 7. in 8. razredov iz republik Bosne in Hercegovine, Črne gore in Srbije. Tekmovalo je 12 učencev iz 7. in 23 učencev 8. razredov.

Tekmovalne naloge za 8. razred

1. Šest učencev (imenujmo jih *A, B, C, D, E, F*) je reševalo isto nalogo. Nalogo sta pravilno rešila le dva. Na vprašanje, kdo je nalogo izračunal, smo dobili pet odgovorov:

   1. *A* in *C*
   2. *B* in *F*
   3. *F* in *A*
   4. *B* in *E*
   5. *D* in *A* .

   Štirje od teh odgovorov so le delno pravilni, le en odgovor je popolnoma nepravilen. Katera dva učenca sta nalogo pravilno izračunala?

2. Učenec si izbere število, mu na desni pripiše 2 in dobljenemu številu prišteje 14. Tako dobljenemu številu pripiše na desni še število 3 in dobljenemu prišteje 52. Ko to št število deli s 60, je količnik za 6večji od prvotnega števila, dvoštevilčni ostanek ima enaki številki, pri čemer je številka desetic enaka izbranemu številu. Poišči izbrano število!

3. Kolikšen je kot med diagonalama trapeza, če je višina v in ploščina v^2?

4. V četverokotniku $ABCD$ smo središča nasprotnih stranic AB in CD označili z M in N. Presečišče daljice MD in AN označimo s P in presečišče daljice MC in CN s Q. Dokaži, da je ploščina četverokotnika $MQNP$ enaka vsoti ploščin trikotnikov APD in BCQ!

5. Osnovna ploskev prizme je pravokotnik s stranicama 5 cm in 8 cm. Plašč meri 408,2 cm^2. Izračunaj plašč valja s polmerom 4 cm, če je prostornina valja enaka 64 % prostornine dane prizme! (π = 3,14).

Rešitve

1. Zaradi krajšega izražanja uvedemo posebno zapisovanje: če je npr. A nalogo rešil, zapišemo $A = 1$, če naloge ni rešil, zapišemo $A = 0$.

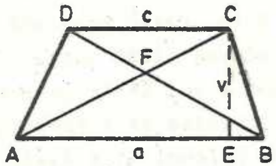
V enem od petih odgovorov sta oba odgovora napačna, torej obakrat oznaka 0. V ostalih odgovorih je po en odgovor napačen, torej enkrat 1 in enkrat 0.

a) Predpostavimo, da sta napačno rešila A in C: $A = 0$ in $C = 0$. Če je tako, potem sledi iz tretjega in petega odgovora $F = 1$ in $D = 1$, iz drugega sledi $B = 0$ in iz četrtega $E = 1$. To pa ni v skladu s podatki, da sta nalogo rešila dva. Naša domneva je torej napačna.

b) Domnevamo $B = 0$ in $F = 0$. Iz tretjega in četrtega odgovora sledi $A = 1$ in $E = 1$, iz prvega $C = 0$ in petega $D = 0$. V tem primeru je bilo naše predvidevanje pravilno. Vse drugačne domneve nas pripeljejo v protislovje.

2. Izbrano število označimo z x. Če mu na desni pripišemo 2, dobimo $10x + 2$. Ko prištejemo 14, dobimo $10x + 16$. Če sedaj na desni pripišemo 3, dobimo $10(10x + 16) + 3$ in ko prištejemo še 52, imamo $10(10x + 16) + 3 + 52$. Po deljenju s 60 je bil količnik $x + 6$ in ostanek $10x + x$. Zaradi znanih odnosov med deljenjem, deliteljem in ostankom dobimo enačbo:

$10(10x + 16) + 55 =$
$= 60(x + 6) + 11x$. Koren enačbe je iskano število $x = 5$.

3. 

$AD = BC$

$\frac{a + c}{2}\cdot = v^2$

$\frac{a + c}{2} = v =$ srednjica

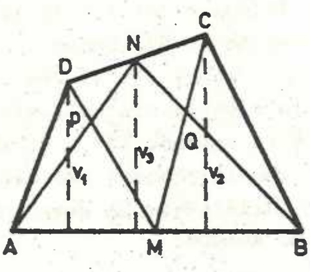
Zato $AE = AB - EB =$

$= a - \frac{1}{2}(a-b) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} =$

$= v = CE$

zato $EAC = ABD = 45^\circ$.

Ker je vsota notranjih kotov trikotnika 180°, sledi: kot $AFB = 90^\circ$. Diagonali se sekata pravokotno.

4. 

$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2}$ srednjica trapeza

$p_{MQNP} = p_{ABN} - p_{AMP} - p_{MBQ} =$

$= p_{ABN} - (p_{AMD} - p_{APD}) -$

$- (p_{MBC} - p_{QCB}) =$

$= \frac{a.v_3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{av_1}{2} + p_{APD} -$

$- \frac{1}{2}\cdot\frac{av_2}{2} + p_{QCB} =$

$= \frac{a}{2}(v_3 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_2}{2}) +$

$+ p_{APD} + p_{QCB}$

Ker je $v_3 = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2}$, sledi

$p_{MQNP} = p_{APD} + p_{QCB}$, kar je bilo treba dokazati.

5. Iz znanega plašča in osnovne ploskve izračunamo višino prizme. Sedaj lahko izračunamo prostornino prizme in nato prostornino valja. Ker je znan polmer osnovne ploskve valja, mu lahko izračunamo višino. S pomočjo polmera in višine valja pa lahko izračunamo plašč valja. Plašč valja meri $200{,}96\ cm^2$.

Srečko Kadunc

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

Komisija za popularizacijo pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS je v letu 1971, kot že prejšnja leta, razpisala republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike za vse štiri letnike gimnazij in štiriletnih strokovnih šol. Komisija za tekmovanje mladih matematikov je pod vodstvom univ.prof. dr. I.Vidava izvedla tekmovanje v soboto, 24.aprila 1971 v prostorih oddelka za matematiko in fiziko FNT Univerze v Ljubljani. Tekmovalna komisija, ki je poleg predsednika štela osem članov, je pripravila predloge za tekmovalne naloge. Na prvi seji je izmed zbranih predlogov izbrala po štiri naloge za vsak razred.

I. razred

1. Izračunaj vrednost ulomka $(a + b)/(a - b)$, če je $2.a^2 + 2.b^2 = 5.ab$ in če je $a > b > 0$!

2. Med ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 izberemo poljubno tri različne. Poiščemo vsa tromestna števila, ki jih moremo zapisati z izbranimi ciframi. Dokaži, da je vsota vseh tako dobljenih števil deljiva s 37 in 6!

3. V katerih točkah se sečeta grafa funkcij

$$y = |x + 1| \quad \text{in}$$
$$y = |-x| + 1?$$

4. V ravnini je narisana krožnica κ z danim središčem S, skozi katerega je potegnjena premica p. Konstruiraj samo s pomočjo ravnila pravokotnico na premico p iz poljubne točke T na ravnini krožnice, pri čemer točka T ne leži na premici p ali na krožnici κ. Obravnavaj različne možne primere!

II. razred

1. Dokaži identiteto

$$\frac{\log_a x}{\log_c x} = \frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} \quad ,$$

če je $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ in $x \neq 1$ ter $b^2 = ac$!

2. Poišči kompleksno število a, ki ustreza pogoju

$$2.|a| - 3a = 9i - 2!$$

3. Premica p seče stranici AB in AD paralelograma ABCD v točkah E in F, diagonalo AC pa v točki G. Dokaži relacijo

$$AB/AE + AD/AF = AC/AG!$$

4. Če med stranicami trikotnika velja odnos

$$a^2 + b^2 = 5.c^2 ,$$

je $t_a \perp t_b$. Trditev dokaži!

III. razred

1. Razcepi trinom x^4-10x^2+1 v produkt dveh trinomov z realnimi koeficienti, nato določi vse ničle danega trinoma v obliki $\pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, kjer sta a in b dve celi pozitivni števili! Ali more biti kaka ničla racionalna? Ali morejo biti pri razcepitvi vsi koeficienti racionalni?

2. Izračunaj vrednost sinusa tri desetine polnega kota brez uporabe tabel (natančno na tri decimalke)!

3. Za katere realne vrednosti p ima enačba

$$\sin^4 x - p.\sin^2 x - p = 1$$

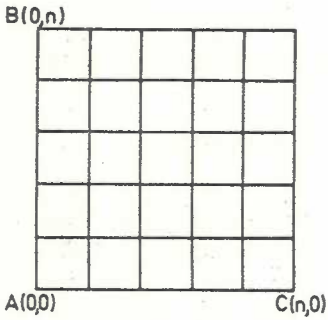
rešitev in kako se takrat glasi ta rešitev?

4. Površina pokončnega stožca je n-krat tolika kakor površina njemu včrtane krogle. Določi kot 2φ ob vrhu osnega preseka stožca! Za katere realne vrednosti n ima naloga rešitev in kako se glase rešitve?

IV. razred

1. Seštej $a + a^2(1 + a) + a^3(1 + a + a^2) + a^4(1 + a + a^2 + a^3) + \ldots + a^n(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$!

2. Trije kraji A, B in C leže tako, da je kot $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Iz kraja A odpelje kolesar proti B z enakomerno hitrostjo v_1, istočasno pa iz B proti C drugi kolesar z enakomerno hitrostjo v_2. Čez koliko časa bo razdalja med kolesarjema najmanjša, če je razdalja AB = a km?



3. Napiši enačbo tangente na krivuljo $y = \frac{\sin x}{x}$! $x = 0$!

4. Imamo kvadratno mrežo poti. Iz točke A krene 2^n potnikov, polovica na desno, polovica navzgor. V vsakem križišču se vsaka skupina razdeli: polovica na desno, polovica navzgor. V katerih točkah bodo popotniki po n križiščih in koliko jih bo v vsaki končni točki?

Po tekmovanju, ki je trajalo dve uri in pol, so člani komisije pregledali izdelke, jih ocenili in določili vrstni red tekmovalcev.

Priznanja so prejeli tekmovalci, ki so bili na tekmovanju najbolj uspešni:

I. razred

prva nagrada: Sabó Rajko, 1.gimnazija Ljubljana; Duplančič Zvonko, gimnazija Kranj;

tretja nagrada: Zupančič Germana, gimn. Poljane, Ljubljana; Kontler Saša, gimn. Miloša Zidanška, Maribor; Šifrer Darko, 1.gimn. Ljubljana; Jelen Tatjana, gimanzija Celje;

pohvale: Javornik Rajko, gimn. Nova Gorica; Ajlec Bojan, 2.gimn. Ljubljana; Tomšič Marjan, Trčelj Dušan, Mikoš Uroš, Razdrtič Andrej, vsi 1.gimnazija Ljubljana; Durjava Matjaž, 1.gimn. Maribor; Gorenjec Ivan, gimn. Celje; Bizjak Ivo, Križnar Branko, oba gimn. Kranj; Kobal Andrijana, gimn. Nova Gorica;

II. razred

prva nagrada: Lavrič Boris, gimn. Kranj; Magajna Zlatan, gimn. Koper;

druga nagrada: Šmit Žiga, 2.gimn. Ljubljana; Petkovšek Marko, 2.gimn. Ljubljana;

tretja nagrada: Martinčič Boris, 1.gimn. Ljubljana;

pohvale: Magajna Bojan, gimn. Postojna; Robnik Marko, gimn. Miloša Zidanška Maribor; Koderman Ivan, Mrdjenović Radomir, Hostnik Boštjan, Štrukelj Marjeta, Erjavec Janez, vsi 1.gimn. Ljubljana; Malnič Aleksander, gimn. Nova Gorica; Jagrič Anton, gimn. Celje; Gradišek Anton, gimn. Poljane Ljubljana; Vozlič Andrej, 2.gimn. Ljubljana;

III.razred

tretja nagrada: Cerar Janez, 1.gimn. Ljubljana; Steiner Darko, 1.gimn. Ljubljana;

pohvale: Klep Mihael, Koprivec Martin, Bratož Špela, vsi 1.gimn. Ljubljana; Polanc Ljubomir, gimn. Nova Gorica; Rovtar Marija, gimn. Škofja Loka; Škofič Zvone, gimn. Poljane Ljubljana;

IV. razred

prva nagrada: Markelj Karel, gimn. Miloša Zidanška, Maribor;

tretja nagrada: Hadži Saša, 1.gimn. Ljubljana; Klepej Tanja, 1.gimn. Ljubljana;

pohvale: Vodopivec Milan, Brvar Andrej, oba 1.gimn. Ljubljana; Mestek Lojze, gimn. Jesenice; Prijatelj Matjaž, gimn. Nova Gorica; Štajner Vlasta, gimn. Velenje; Zorman Darko, gimn.Jesenice.

Za zvezno tekmovanje mladih matematikov v Beogradu je komisija določila po štiri najboljše iz drugega, tretjega in četrtega razreda, tako da so na njem slovensko ekipo sestavljali: Lavrič Boris, Magajna Zlatan, Šmit Žiga in Petkovšek Marko iz drugega razreda, Cerar Janez, Steiner Darko, Klep Mihael in Koprivec Martin iz tretjega ter Markelj Karel, Hadži Saša, Klepej Tanja in Vodopivec Milan iz četrtega razreda.

Republiškega tekmovanja se je udeležilo 223 srednješolcev in sicer 69 iz prvega razreda, 63 iz drugega, 39 iz tretjega in 52 iz četrtega razreda. Mlade matematike je na tekmovanje poslalo 22 gimnazij in 2 tehniški šoli. Zadnji podatek opozarja na dejstvo, da 14 gimnazij ni sodelovalo na tekmovanju in da bo treba zanimanje za matematiko poživiti na tehniških šolah.

Branko Roblek

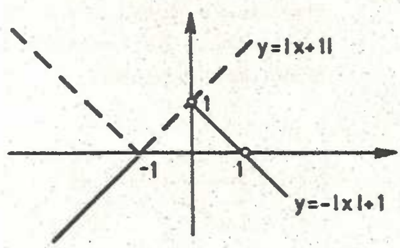
Rešitve nalog z republiškega tekmovanja mladih matematikov 1971

I. razred

1. Če prištejemo $4ab$ na obeh straneh enačbe $2a^2 + 2b^2 = 5ab$, dobimo $2(a + b)^2 = 9ab$, če pa $4ab$ odštejemo, dobimo $2(a - b)^2 = ab$. Torej je: $((a + b)/(a-b))^2 = 9$. Ker pa je $a > b > 0$, je $(a + b)/(a - b) = 3$.

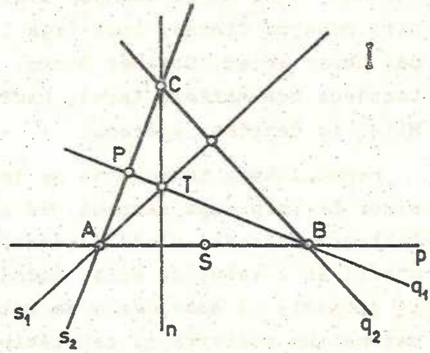
2. Z a,b in c označimo izbrane cifre. Z izbranimi ciframi lahko sestavimo 6 različnih tromestnih števil: $100a + 10b + c$, $100a + 10c + b$, $100b + 10a + c$, $100b + 10c + a$, $100c + 10a + b$ in $100c + 10b + a$. Vsota teh števil je $222(a + b + c)$. Ker je $222 = 6 \cdot 37$, je trditev dokazana.

3. Iz grafov obeh funkcij razberemo, da se grafa sečeta na daljici s krajiščema $A(-1,0)$ in $B(0,1)$.

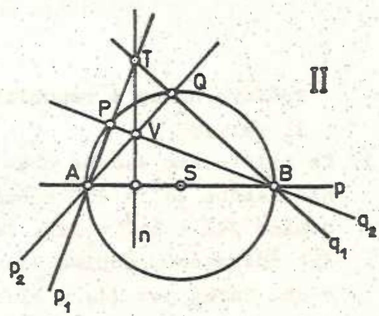


4. Reševanje razpade na štiri primere, odvisne od lege točke T. Območja, na katerih leži točka T v posameznih primerih, so prikazana na skici.

I. Točka T leži v notranjosti kroga. Načrtujemo tako: najprej načrtamo premici q_1 in s_1. Tako dobimo točki P in Q in lahko načrtamo premici q_2 in s_2, ki se sečeta v točki C. Točka T je višinska točka trikotnika ABC. Premica n je nosilka tretje višine in je zato $n \perp p$.

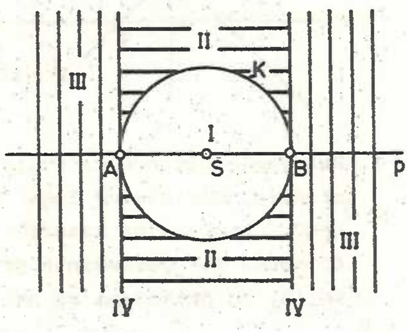


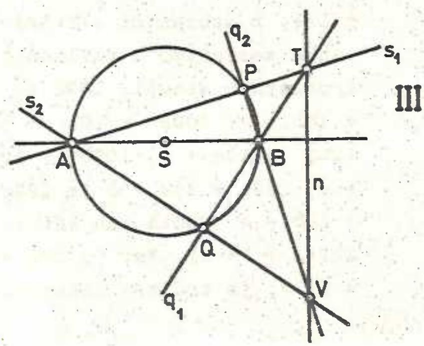
II. Točka T leži v območju II. Načrtamo q_1 in s_1, pri tem dobimo točki P in Q. Skozi njiju potegnemo premici q_2 in s_2, katerih presečišče je višinska točka trikotnika ABT. Premica n je iskana pravokotnica.



III. Točka T leži v območju III. Redosled konstrukcij je tak kot pod II.

IV. Točka T leži na tangenti krožnice v točki A oz. B. V tem primeru je tangenta iskana pravokotnica.





II. razred

1. $(\log_a X - \log_b X)/(\log_b X - \log_c X) =$

$= (\log_a X - \log_a X . \log_b a)/$

$/(\log_c X . \log_b c - \log_c X) =$

$= [(\log_a X)/(\log_c X)] .$

$. [(1 - \log_b a)/(\log_b c - 1)] =$

$= [(\log_a X)/(\log_c X)] .$

$. [(\log_b b/a)/(\log_b c/b)]$

Ker je $b^2 = ac$, oziroma $b/a = c/b$, sledi:

$(\log_a X)/(\log_c X)\ (\log_b b/a)/$

$/(\log_b c/b) =$

$= (\log_a X)/(\log_c X)$.

2. Iskano število naj bo $\alpha = x + yi$. Pogoj lahko zapišemo:

$2\sqrt{x^2+y^2} - 3x - 3yi = 9i - 2$

Iz pogoja sledi sistem enačb:

$$3y = -9$$

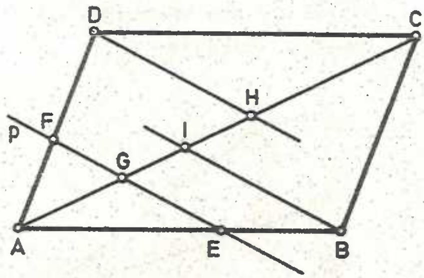
$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 3x - 2$$

Iz prve enačbe dobimo $y = -3$. To vrednost vstavimo v drugo enačbo, ki jo nato kvadriramo in uredimo: $5x^2 - 12x - 32 = 0$. Izraz na levi razstavimo:

$(5x + 8)(x - 4) = 0$.

Korena sta: $x_1 = 4$ in $x_2 = -8/5$. S preizkusom ugotovimo, da le x_1 ustreza prvotni iracionalni enačbi. Iskano število je: $\alpha = 4 - 3i$.

3. Skozi točki B in D potegnemo vzporednici premici p. Zaradi podobnosti je: $AB/AE = AI/AG$ in $AD/AF = AH/AG$. $AB/AE + AD/AF = (AI + AH)/AG$. Ker pa je $AH = IC$, je $(AI + AH)/AG = (AI + IC)/AG = AC/AG$, kar je bilo treba dokazati!



4. Nalogo rešimo z vektorji. Iz skice je razvidno, da je: $\vec{t}_a = \vec{a}/2 - \vec{b}$, $\vec{t}_b = \vec{b}/2 - \vec{a}$ in $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Izračunajmo skalarni produkt $\vec{t}_a . \vec{t}_b$.

$\vec{t}_a.\vec{t}_b = (\vec{a}/2 - \vec{b})(\vec{b}/2 - \vec{a}) =$

$= \vec{a}\vec{b}/4 - b^2/2 - a^2/2 + \vec{a}\vec{b} =$

$= 5\vec{a}\vec{b}/4 - (a^2 + b^2)/2$.

Izračunajmo še: $\vec{c}.\vec{c} =$

$= (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = c^2 =$

$= a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b}$.

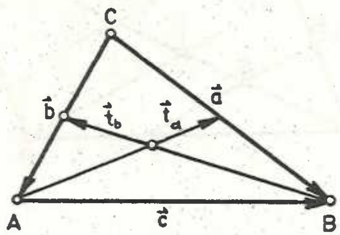
Zato je $\vec{a}.\vec{b} = (a^2+b^2-c^2)/2$.

Če to upoštevamo v gornji enačbi, dobimo

$5\vec{a}\vec{b}/4 - (a^2 + b^2)/2 =$

$= (a^2 + b^2 - 5c^2)/8 = 0$.

Ker nobeden od vektorjev ni vektor $\vec{0}$, sta vektorja pravokotna. Torej $t_a \perp t_b$!



III. razred

1. Računajmo z nedoločenimi koeficienti.

$$x^4 - 10x^2 + 1 =$$
$$= (x^2 + ax + b)(x^2 + Ax + B)$$

Ko zmnožimo in primerjamo koeficiente, dobimo sistem enačb:

$$a + A = 0$$
$$Ab + Ba = 0$$
$$b + Aa + B = -10$$
$$Bb = 1$$

Iz prve enačbe dobimo $A = -a$, iz zadnje pa $B = 1/b$. Oboje vstavimo v preostali enačbi in ju preuredimo:

$$b + 1/b - a^2 =$$
$$= -10 \quad \text{in} \quad (1/b - b) = 0.$$

Obstajajo naslednje možnosti:

1. $a = 0$: tedaj je $A = 0$, $b + 1/b = -10$, oziroma $b = -5 \pm 2\sqrt{6}$ in $B = -5 \mp 2\sqrt{6}$.

   Razcep ima obliko:

   $$x^4 - 10x^2 + 1 =$$
   $$= (x^2 - 5 + 2\sqrt{6})(x^2 -$$
   $$- 5 - 2\sqrt{6}).$$

2. $b - 1/b = 0$, oziroma $b^2 = 1$: tu ložimo dva primera:

a) $b = 1$: tu je $B = 1$, $a = \pm\sqrt{12}$ in $A = \mp\sqrt{12}$ z razcepom:

$$x^4 - 10x^2 + 1 =$$
$$(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 1)$$

in

b) $b = -1$: tu je $B = -1$, $a = \pm\sqrt{8}$ in $A = \mp\sqrt{8}$ z razcepom:

$$x^4 - 10x^2 + 1 =$$

$= (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)(x^2 +$
$+ 2\sqrt{2}x - 1).$

Na razpolago imamo tri različne razcepe, vsak od njih združuje dva simetrična razcepa. V nobenem niso vsi koeficienti racionalni. Iz drugega (a) ali (b) razcep dobimo vse ničle trinoma v zahtevani obliki. $x = \pm\sqrt{2} \pm\sqrt{3}$, pri vseh možnih kombinacijah predznakov. Od tod je razvidno, da nobena ničla ni racionalna.

2. $\sin 12^\circ = \sin(30^\circ - 18^\circ) =$

$= \sin 30^\circ \cos 18^\circ - \cos 30^\circ .$
$. \sin 18^\circ =$

$= (\cos 18^\circ - \sqrt{3} \sin 18^\circ)/2 .$

Ker je $2.18^\circ = 90^\circ - 3.18^\circ$, je $\sin 2.18^\circ = \cos 3.18^\circ$.

Z uporabo formul za sinus dvojnega kota in kosinus trojnega kota dobimo

$2.\sin 18^\circ \cos 18^\circ =$

$= \cos 18^\circ (1 - 4\sin^2 18^\circ) .$

Ker je $\cos 18^\circ \neq 0$, dobimo

$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$

Ker je $\sin 18^\circ > 0$, je

$\sin 18^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4.$

Izračunajmo še $\cos 18^\circ$!

$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} =$

$= \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$ in že imamo

$\sin 12^\circ = \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} -\right.$
$\left.- \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)\right] /8.$

Po nerodnem računanju dobimo rezultat:

$\sin 12^\circ = 0,208 .$

3. Iz $\sin^4 x - p.\sin^2 x - p = 1$

$\sin^4 x - 1 - p(1 +$

$\sin^2 x) = 0.$

In končno $(\sin^2 x + 1).$
$.(\sin^2 x - 1 - p) = 0.$

Ker je prvi faktor $\neq 0$, je

$\sin^2 x = p + 1.$

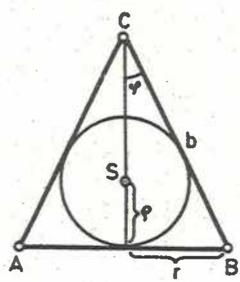
Od tod sledi

$1 \geqq p + 1 \geqq 0$ ali

$0 \geqq p \geqq -1 .$

Za vsak tak p ima enačba realne korene $x = \arcsin(\pm\sqrt{p+1})$.

4.



Iz skice razberemo: $\sin\varphi =$
$= r/b$ in $\operatorname{ctg}\varphi = v/r$.

Polovični obseg trikotnika ABC je: $s = b + r = r(1 + \sin\varphi)/\sin\varphi$, ploščina pa: $p = rv = r^2\mathrm{ctg}\,\varphi$.

Od tod dobimo $\rho = r\cos\varphi/(1 + \sin\varphi)$.

Površina stožca je:
$P_s = \pi r(r + b) = \pi r^2(1+\sin\varphi)/\sin\varphi$, površina krogle pa:
$P_k = 4\pi\rho^2 = 4\pi r^2\cos^2\varphi/(1+\sin\varphi)^2$

Iz pogoja $P_s = n.P_k$ sledi
$\pi r^2(1 + \sin\varphi)/\sin\varphi = 4n\pi r^2\cos^2\varphi/(1+\sin\varphi)^2$.

Po krajšanju, odpravi ulomkov in ureditvi dobimo:

$(4n + 1)\sin^2\varphi - 2(2n -1)\sin\varphi + 1 = 0$ in dalje:

$$\sin\varphi = \frac{2n-1\pm 2\sqrt{n^2-2n}}{4n+1}.$$

Korena sta realna, če je

$D \geq 0$, torej $n^2 - 2n \geq 0$ in končno $n \geq 2$!

Za $n = 2$ dobimo: $\sin\varphi = 1/3$ in $\varphi \doteq 19°28'$.

Za $n > 2$ pa veljata oceni:

$$\frac{2n-1+2\sqrt{n^2-2n}}{4n+1} < \frac{2n-1+2n}{4n+1} < 1$$

in

$2n - 1 > 2|\sqrt{n^2 - 2n}|$. Zato imamo v tem slučaju vedno dve rešitvi

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{2n-1+2\sqrt{n^2-2n}}{4n+1} \text{ in}$$

$$\varphi_2 = \arcsin\frac{2n-1-2\sqrt{n^2-2n}}{4n+1}.$$

IV. razred

1. Naj bo $a^2 \neq 1$. Množimo obe strani enačbe z $(1 - a)$!

$s(1 - a) = (1 - a) + a^2(1 - a^2) + a^3(1 - a^3) + \ldots + a^n(1 - a^n) =$
$= (a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n) - (a^2 + a^4 + a^6 + \ldots + a^{2n}) =$

$$= a\,\frac{a^n-1}{a-1} - a^2\,\frac{a^{2n}-1}{a^2-1} =$$

$$= a\,\frac{(a^{n+1}-1)(1-a^n)}{a^2-1}$$

Od tod pa:

$$s = \frac{a(a^{n+2}-1)(a^n-1)}{(a^2-1)(a-1)}.$$

Če je $a = 1$ preide gornja vsota v

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

za $a = -1$ pa v

$s.2 = (-1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n - (1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^n) =$
$= ((-1)^n - 1)/2) - n$ in
$s = 1/4((-1)^n - 1 - 2n)$.

2. Opirajoč se na sliko dobimo po kosinusovem izreku

$$d^2 = (a - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - v_2 t(a - v_1 t)$$

Po ureditvi pa:

$$d^2 = (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)t^2 - a(2v_1 + v_2)t + a^2$$

d^2 je kvadratna funkcija t-ja. Ker je $d > 0$, bo d imela ekstrem iste vrste pri istem kot d^2. Ker je $v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2 > 0$, je ekstrem minumum, nastopi pa pri

$$t = a(2v_1 + v_2)/2(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2) .$$

3. Kot vemo je $y_o = y(0) = \lim_{x\to 0}(\sin x/x) = 1$.

Izračunajmo odvod dane funkcije za $x = 0$.

$$y' = (x\cos x - \sin x)/x^2 = (\cos x - \sin x/x)/x.$$

Poizkusimo izračunati $y'(0)$. Za $0 < x < \pi/2$ velja ocena $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$, iz katere sledi

$$0 < \sin x/x - \cos x < 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$$ oziroma, ker je $x > 0$

$$0 < - y'(x) < x/2(\sin(x/2)/(x/2))^2 .$$

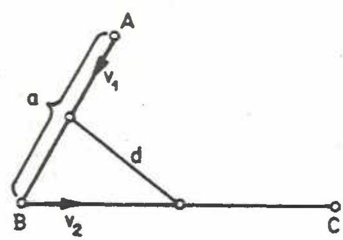
Limitirajmo po pozitivnih proti 0, pa dobimo:

$$0 \leq - y'(0) \leq 0 ,$$

od tu pa $y'(o) = 0$.

S podobnim sklepanjem izračunamo $y'(0)$, ko gre x po negativnih vrednostih proti 0. Tudi zdaj dobimo $y'(0) = 0$. Odvod v točki T_o je torej 0. Enačba tangente pa $y = 1$.

4. Očitno imajo vse poti med poljubnima točkama mreže enako dolžino, ki je za točko $A(0,0)$ in poljubno točko $T(p,q)$ enaka kar $p+q$. Potniki so lahko po križiščih natančno v tistih točkah $T(p,q)$, za katere velja $p+q = n$, to pa so točke mreže, ki leže na diagonali BC.



Vsaki točki $T(p,q)$ priredimo število $N(k,q)$, kjer je $p + q = k$, ki nam pove število potnikov, ki pridejo v to točko. Iz skice je razvidno, da lahko pridemo v točko $T(p,q)$ samo iz točk $T(p,q-1)$ in $T(p-1,q)$, pri čemer vsaka od obeh prispeva polovico svojih potnikov. Za notranje točke velja:

$$N(k,q-1) + N(k,q) = 2N(k+1,q)$$

Za robne pa je:

$$N(k,0) = N(k,k) = 2^{n-k}.$$

Zgornja pogoja predstavljata sistem enačb, ki nam natančno določa števila $N(k,q)$. Pišimo: $N(k,q) = 2^{n-k}C(k,q)$. Po krajšanju dobimo nov sistem $C(k,q-1) + C(k,q) = C(k+1,q)$

$$C(k,0) = C(k,k) = 1 \quad .$$

To je pa sistem, ki ima za rešitev binomske koeficiente. Torej je $C(k,q) = \binom{k}{q}$ in

$$N(k,q) = 2^{n-k}\binom{k}{q}.$$

Vstavimo $K = n$ in naloga je rešena. $N(n,q) = \binom{n}{q}$.

Marijan Vagaja

K O L E D A R

TEKMOVANJ IZ MATEMATIKE ZA VEGOVA PRIZNANJA V LETU 1972

do 6.maja	do	6. maja	-	šolska tekmovanja
		13. maja	-	občinska temovanja
		27. maja	-	republiško tekmovanje
		11. junija	-	zvezno tekmovanje

R E P U B L I Š K O T E K M O V A N J E M L A D I H F I Z I K O V

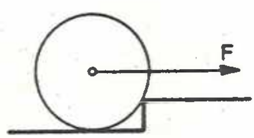
V soboto, 9.maja 1971 je bilo v veliki fizikalni predavalnici oddelka za matematiko in fiziko v Ljubljani deveto republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike. Tekmovalo je 150 dijakinj in dijakov iz 18 srednjih šol, od tega 64 drugošolcev, 55 tretješolcev in 31 četrtošolcev.

Tekmovalna komisija, ki so jo sestavljali univerzitetni in srednješolski učitelji in asistenti, je pod predsedstvom univ.prof. dr. A.Moljka sestavila za vsak razred 4 naloge.

II. razred

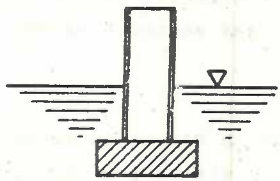
1. Na kamionu, ki vozi s hitrostjo 40 km/h, vržemo navpično navzgor kamen, ki prileti do višine 8 m nad kamionom. Kolikšno pot prevozi kamion, preden pade kamen nazaj? Kakšen se zdi tir kamna opazovalcu, ki miruje ob robu ceste?

2. Valj s polmerom 20 cm in maso 1 kg leži na vodoravni ravnini pred 10 cm visoko stopnico. S kolikšno najmanjšo silo, ki deluje vodoravno v osi valja, moramo potegniti valj, da se bo povzpel na stopnico? Trenje zanemari!



3. Vagon z maso 10 ton se s hitrostjo 0,8 m/s zaleti v mirujoči vagon z maso 16 ton. Za koliko cm se pri trku stisnejo vzmeti v odbijačih, če ima vsaka koeficient 800 kp/cm?

4. Na spodnji rob gladko brušene cevi s presekom 50 cm^2 tesno pritisnemo gladko železno ploščo s presekom 100 cm^2 in z debelino 3 cm. Cev potisnemo v vodo v navpični legi in zadržimo ploščo, da voda ne vdre v cev. Kako globoko pod vodo moramo potisniti cev, da plošča ne bo odpadla, ko jo spustimo? Gostota železa je 7,9 g/cm^3, gostota vode pa 1 g/cm^3.



III. razred

1. Izoliran valj je napolnjen s plinom pri temperaturi 27 °C. Gibljiv bat s površino 15 cm^2 ga deli na dva enaka dela s prostornino 100 cm^3. Temperaturo v enem delu povišamo za 100 °C, v drugem pa jo držimo konstantno. Koliko se premakne bat med spremembo temerature, če skozi bat ni izmenjave toplote?

2. Vodoravno žico na enem koncu pritrdimo, na drugem koncu pa preko lahkega škripca obesimo nanjo utež. Osnovna lastna frekvenca te žice je 390 Hz. Če utež popolnoma potopimo v vodo, pade frekvenca na 340 Hz. Kakšna je gostota uteži?

3. Dva delfina si plavata nasproti z enakima hitrostma 15 m/s. Eden oddaja zvok s frekvenco 1 kHz. Kolikšno frekvenco sliši drugi delfin? Hitrost širjenja zvoka v vodi je 1450 m/s.

4. Krivinski radij konkavnega zrcala je 40 cm. Na optični osi 30 cm od njegovega temena je točkasto svetilo. V kateri razdalji od temena moramo postaviti ravno zrcalo, da bo slika svetila nastala v isti točki kot je svetilo? Nariši!

IV. razred

1. Na izvor napetosti je priključen porabnik R kot kaže slika (a). Voltmeter z uporom 1000 Ω in ampermeter z uporom 0,2 Ω sta priključena zato, da stalno kontroliramo porabo moči. Kolikšno moč troši porabnik tedaj, ko kaže voltmeter 12 V in ampermeter 5 A? Za koliko pa se spremeni rezultat, če sta voltmeter in ampermeter zvezana, kot kaže slika (b)?

2. Razdalja med dvema enakima kroglicama je 2 cm. Polmera sta zanemarljivo majhna. Če sta kroglici naelektreni z nasprotnima nabojema, se privlačita s silo 4.10^{-4} N, ko pa ju nato zvežemo z vodnikom in spustimo, se odbijata s silo $2,25.10^{-4}$ N. Koliko sta bila prvotna naboja kroglic?

3. Katodni oscilograf, v katerem pospešimo elektrone z napetostjo 500 V, ima za električno odklanjanje občutljivost 2 V/mm. Kolikšno napetost moramo priključiti na oba pravokotno ležeča para odklonskih plošč, da bomo dobili krog s premerom 5 cm?

4. Prazno dolgo tuljavo s premerom 14 cm, dolžino 80 cm in 200 ovoji oklepa kratka tuljava s 1000 ovoji. Kolikšna napetost se inducira med koncema kratke tuljave, če naraste tok skozi dolgo tuljavo enakomerno v eni desetinki sekunde od 0 A do 5 A?

Po končanem tekmovanju je komisija pregledala in ocenila pismene izdelke dijakov in sklenila, da dobe nagrade in pohvale naslednje dijakinje in dijaki:

II. razred

druga nagrada:	Martinčič Boris, I. gimn. Ljubljana;
tretja nagrada:	Božič Samo, gim. Poljane; Magajna Zlatan, gimn. Koper;
pohvale:	Vodnik Srečo, gimn. Šentvid; Demšar Silvo, T.š. Jesenice; Muševič Igor, gimn. Poljane, Ljubljana; Robnik Marko, gimn. "M.Zidanška", Maribor; Gams Matjaž, I.gimn. Ljubljana; Magajna Bojan, gimn. Postojna; Hostnik Boštjan, I.gimn. Ljubljana;

III. razred

prva nagrada:	Polanc Ljubomir, gimn. Nova Gorica; Zgonik Marko, gimn. Nova Gorica; Košiček Franc, gimnazija Nova Gorica; Kugonič Oto, gimn. Velenje; Škofič Zvone, III.gimn. Ljubljana; Klep Mihael, I.gimn. Ljubljana;
tretja nagrada:	Miklavčič Milan, t.š. KMRLP Gorjup Dušan, gimn. Nova Gorica; Cerar Janez, I.gimn. Ljubljana;
pohvale:	Urbančič Jelko, III gimn. Ljubljana; Lešnjak Gorazd, I.gimn. Maribor; Pahor Branko, VI. gimn. Ljubljana; Mihelič Matjaž, III.gimn. Ljubljana; Založnik Aleš, I.gimn. Maribor;

IV. razred

prva nagrada:	Kusterle Dušan, gimn. Kranj
tretja nagrada:	Prijatelj Matjaž, gimn. Nova Gorica; Hadži Aleksander, I.gimn. Ljubljana
pohvale:	Žiberna Gorazd, gimn. M.Zidanška, Maribor; Rijavec Cvetana, gimn. Nova Gorica; Markelj

Karel, gimn. „M. Zidanška" Maribor; Vodopivec Milan, I. gimn. Ljubljana.

Najuspešnejši so bili letos tretješolci, pet jih je izdelalo naloge brez napake. Največ nagrad in pohval so dobili dijaki gimnazije v Novi Gorici. Komisija je izbrala 25 kandidatov iz 9 gimnazij in 2 tehniških šol za slovensko ekipo za zvezno tekmovanje mladih fizikov.

Tomaž Skulj

Rešitve nalog z republiškega tekmovanja mladih fizikov 1971

II. razred

1. $v_o = 40$ km/h $= 11{,}1$ m/s, $h = 8$ m
Potovanje kamna traja $2(2h/g)^{\frac{1}{2}} = 2{,}53$ s. V tem času opravi kamion pot $s = v_o t = 28{,}1$ m.

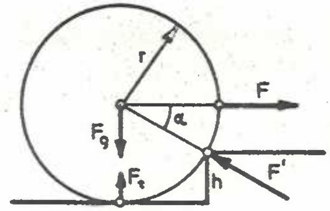
Opazovalcu, ki miruje ob robu ceste, se zdi tir kamna parabola. Tak tir bi opisal kamen, ki bi ga vrgli s tal z začetno hitrostjo $v = (v_o^2 + v_1^2)^{\frac{1}{2}} = (v_o^2 + 2gh)^{\frac{1}{2}} = 16{,}8$ m s kotom $\alpha = 48{,}8^o$ proti vodoravnici. Tangens tega kota izračunamo iz enačbe $\mathrm{tg}\alpha = v_1/v_o$.

2. $F_g = 1$ kp, $r = 20$ cm, $h = 10$ cm
Sile, ki delujejo na valj, ko ga vlečemo v vodoravni smeri, kaže spodnja slika. Ker je valj popolnoma gladek, je sila F' usmerjena proti osi valja. Naj bo valj v ravnovesju. Tedaj sila tal F_t in navpična komponenta sile F' uravnovešata težo:

$$F_t + F' \sin\alpha = F_g ,$$

vodoravna komponenta sile F' pa uravnoveša silo F:

$$F' \cos\alpha = F$$



V mejnem primeru, ko se valj ne dotika tal, je $F_t = 0$ in zato $F = F_g/\mathrm{tg}\alpha$. S slike povzamemo, da je $\sin\alpha = (r - h)/r = \frac{1}{2}$. Kot α je tedaj 30^o, vlečna sila pa $F = F_g\sqrt{3} = 1{,}73$ kp.

3. m_1 = 10 ton, m_2 = 16 ton, v_1 = 0,8 m/s, k= 800 kp/cm = = 8.10^5 N/m.

Ko so vzmeti stisnjene do kraja, se gibljeta vagona skupaj s hitrostjo, ki je enaka hitrosti težišča

$$v^* = m_1 v_1/(m_1 + m_2) \quad ,$$

saj med trkom na vagona ne delujejo zunanje sile vzdolž tira. Pred trkom je kinetična energija $W_k = m_1 v_1^2/2$, ko so vzmeti stisnjene pa $W_k^* = (m_1 + m_2)v^{*2}/2$. Razlika energij $W' = W_k - W_k^* = (m_1 m_2/(m_1 + m_2))v_1^2/2$ se porabi za delo pri stiskanju vzmeti. Torej je

$$W' = 4(ks^2/2)$$

Iz tega izračunamo, da se vzmeti stisnejo za

$$s = (m_1 m_2\ v_1^2/4k(m_1 + m_2))^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3{,}5 \text{ cm}$$

4. S = 100 cm^2, S' = 50 cm^2 , d = 3 cm , ρ = 7,9 g/cm^3 , ρ_o = 1 g/cm^3.

V ravnovesju so sile zaradi hidrostatičnega tlaka enake teži plošče. Naj bo p_o zračni tlak na gladini vode. Na zgornjo ploskev plošče v globini h pod gladino deluje tedaj sila $p_o S' + (p_o + \rho_o gh)(S-S')$ na spodnjo ploskev pa sila $(p_o + \rho_o g(h + d))S$. Razlika med silama mora biti enaka teži plošče $mg = \rho\ g\ d\ S$. Iz dobljene enačbe izračunamo

$$h = d(S/S')(\rho - \rho_o)/\rho_o = 41{,}4 \text{ cm}$$

III. razred

1. V_o = 100 cm^3, T_o = 300 K, T_1 = 400 K, S = 15 cm^2 .

V začetnem stanju sta prostornini delov posode enaki po V_o. Med spremembo se poveča prostornina segretega dela za ΔV, prostornina dela, ki je ostal pri začetni temperaturi pa se za prav toliko zmanjša. Tlak je v obeh delih posode enak. Ker je v obeh delih posode enaka masa plina, povezuje stanji plinska enačba

$$p(V_o + \Delta V)/T = p(V_o - \Delta V)/T_o$$

Iz enačbe izračunamo spremembo prostornine:

$$\Delta V = V_o(T - T_o)/(T + T_o) = V_o/7 \quad ,$$

iz te pa še premik bata $\Delta s = \Delta V/S = 0{,}95$ cm.

2. $\nu = 390\ s^{-1}$, $\nu' = 340\ s^{-1}$, $\rho_o = 1\ g/cm^3$.

Razmerje med osnovnima frekvencama strune je enako razmerju med hitrostma valovanja $\nu'/\nu = c'/c$. Vemo, da je hitrost valovanja po struni $c = \sqrt{F/\mu}$, če je F sila, ki napenja struno, μ pa masa strune na enoto dolžine. V prvem primeru napenja struno teža uteži $F = \rho V g$, v drugem primeru pa razlika med težo uteži in vzgonom $F' = (\rho - \rho_o)Vg$. Vse to postavimo v prvo enačbo in dobimo

$$\rho = \rho_o/(1 - (\nu'/\nu)^2 = 4{,}17\ g/cm^3$$

3. $\nu = 1000\ s^{-1}$, $v = 15$ m/s, $c = 1450$ m/s.

Mirujoči delfin bi zaznaval zvok, ki ga oddaja bližajoči se delfin, s frekvenco $\nu' = \nu/(1 - v/c)$. Če se giblje tudi sam proti prvemu delfinu z enako hitrostjo glede na vodo, bo slišal zvok s frekvenco $\nu'' = \nu'(1 + v/c) = \nu(1 + v/c)/(1 - v/c) \doteq \nu(1 + 2v/c) = 1002{,}1\ s^{-1}$.

4. $r = 40$ cm, $a = 30$ cm.

Konkavno zrcalo ima goriščno razdaljo $f = r/2 = 20$ cm. Predmet, ki je v razdalji pred temenom zrcala, upodobi zrcalo v razdalji $b = af/(a - f) = 60$ cm pred zrcalom. Ravno zrcalo, ki naj povzroči, da bosta predmet in slika na istem mestu, moramo postaviti v sredo med predmet in sliko, to je v razdaljo $x = (a + b)/2 = 45$ cm pred teme konkavnega zrcala.

IV. razred

1. $I = 5$ A, $U = 12$ V, $R_a = 0{,}2\ \Omega$, $R_v = 1000\ \Omega$

Moč, ki jo porablja upornik, je vselej enaka produktu iz toka po uporniku in napetosti na uporniku:

$$P = U_R I_R$$

V prvem primeru kaže ampermeter tok po uporniku I_R voltmeter pa kaže skupno napetost na uporniku in ampermetru: $U = U_R + I_R R_a$. Moč, ki jo porablja upornik, je tedaj

$$P = I_R(U - I_R R_a) = 55\ W.$$

V drugem primeru kaže voltmeter napetost U_R, ampermeter pa skupni tok po uporniku in voltmetru: $I = I_R + U_R/R_v$. Moč, ki jo porablja upornik, je v tem primeru

$$P = U_R(I - U_R/R_v) =$$
$$= 60 \text{ W } (1 - 2{,}4.10^{-3}) .$$

2. $F_1 = -4.10^{-4}$ N ,

$F_2 = 2{,}25.10^{-4}$ N , $r = 2$ cm .

Predno ju zvežemo, se kroglici privlačita s silo

$$F_1 = e_1 e_2/4\pi\varepsilon_o r^2 . \qquad (1)$$

Ko kroglici za hip staknemo, se izenačita naboja, pri čemer ostane skupni naboj nespremenjen

$$e_1 + e_2 = 2\,e \qquad (2)$$

Po tem se kroglici v enaki razdalji odbijata s silo

$$F_2 = e^2/4\pi\varepsilon_o r^2 \qquad (3)$$

Po krajšem računu dobimo iz treh enačb naslednji enačbi za začetna naboja

$$e_1 = \pm(4\pi\varepsilon_o r^2)^{\frac{1}{2}}\left[(F_2-F_1)^{\frac{1}{2}} + F_2^{\frac{1}{2}}\right] =$$
$$= \pm\ 8{,}46.10^{-9} \text{ As}$$
$$e_2 = \pm(4\pi\varepsilon_o r^2)^{\frac{1}{2}}\left[F_2^{\frac{1}{2}} - (F_2-F_1)^{\frac{1}{2}}\right] =$$
$$= \mp\ 2{,}12.10^{-9} \text{ As} .$$

Predznak nabojev ni določen, vemo le, da imata naboja nasproten predznak.

3. Občutljivost je 2 V/mm

Na zaslonu osciloskopa dobimo krog, če priklopimo na para odklonskih plošč sinusni napetosti, ki sta fazno premaknjeni za 90°, npr.:

$$U_x = U_o \sin\omega t ,$$
$$U_y = U_o \cos\omega t .$$

Amplituda U_o določa radij kroga, ki ga na zaslonu opisuje curek elektronov. Če naj bo radij kroga 25 mm, mora biti $U_o = 50$ V.

4. $2r = 14$ cm, $l = 80$ cm ,

$N = 200$, $N' = 1000$, $\Delta t = 0{,}1$ s,

$\Delta I = 5$ A .

Inducirana napetost je enaka časovnemu odvodu magnetnega pretoka skozi tuljavo

$$U_i = d\phi_m/dt = NBS\ dB/dt ,$$

če je B gostota magnetnega polja v dolgi tuljavi. Vemo, da je $B = \mu_o N'I/l$, če je I tok po dolgi tuljavi. Prejšnja enačba nam da s tem

$$U_i = (\mu_o NN'S/l)\Delta I/\Delta t =$$
$$= 0{,}242 \text{ V} .$$

Marjan Hribar

K N J I Ž N I C A " S I G M A "

Izdaja Društvo matematikov,
fiziko in astronomov SRS

Marjan HRIBAR:

Rešene naloge iz fizike
z republiških tekmovanj

168 str. 8^{o}. 1971. Cena 32.- din
(za člane Društva matematikov,
fizikov in astronomov SRS ter
fizikalnih krožkov na šolah 16,-)

Sredi leta 1971 je izšla pri Mladinski knjigi 21. knjiga v zbirki Sigma, ki jo izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS. V tej knjižici so zbrane naloge, ki so jih reševali dijaki na republiških tekmovanjih do vključno leta 1970. Dodan je še kratek snopič, v katerem so naloge, povzete po zbirkah, ki jih je DMFA SRS izdalo kot pripomoček pri pripravah za tekmovanja. Vmes so naloge z zveznih tekmovanj in olimpiad in nekaj primernejših nalog s pismenih izpitov in vaj s prvega letnika na univerzi. Naloge so razporejene v petih skupinah: mehanika, toplota, nihanje in valovanje, optika, elektrika in atomika. Reševanje zahteva solidno znanje srednješolske snovi, pa tudi kanec fiziaklnega mišljenja. Priložene so obširno izdelane rešitve, ki naj bodo za kontrolo pri reševanju in obenem napotek v drugih podobnih primerih. V večini primerov je rešitev obsežnejša, kot jo zahteva tekst naloge - priloženi komentar naj bralcu pokaže, o čem naj še razmišlja. Zbirka bo koristen pripomoček tako prihodnjim tekmovalcem kot tudi drugim dijakom in študentom.

Ciril Velkovrh

TEKMOVANJA MLADIH MATEMATIKOV IN FIZIKOV V LETU 1972

Društvo matematikov, fizikov in astronomov bo tudi letos organiziralo tradicionalni republiški tekmovanji srednješolcev iz matematike in fizike. Upravni odbor društva je sprejel sklep, da bi tekmovanji organizirali v krajih izven Ljubljane. Podružnica društva v Mariboru je sprejela organizacijo republiškega tekmovanja iz matematike, podružnica društva v Novi Gorici bo organizirala republiško tekmovanje mladih fizikov.

Komisija za popularizacijo, ki ima v svojem programu med drugim tudi organizacijo tekmovanj, je letos že sestavila načrt tekmovanj srednješolcev iz matematike in fizike. Časovna stiska in neusklajenost posameznih rokov republiških tekmovanj, priprav in zveznih tekmovanj, je bila najbolj pogosta slabost organizacije tekmovanj. Komisija za popularizacijo je na seji v januarju sprejela načrt za tekmovanja. Skrajšana oblika razporeda tekmovanj srednješolcev iz matematike in fizike v letu 1972 je naslednja:

	matematika	fizika
Razpis in obvestilo o republiških tekmovanjih	20.3.	20.3.
Rok za prijave na republiško tekmovanje	1.4.	29.4.
Prva seja komisije za republiško tekmovanje (priprava nalog)	7.4. v Mariboru	5.5. v Novi Gorici
Republiško tekmovanje	sobota 8.4. ob 10. uri v Mariboru	sobota 6.5. ob 10. uri v Novi Gorici

	matematika	fizika
Druga seja komisije za republiško tekmovanje (pregled nalog, določitev nagrad in pohval, kandidatov za zvezno tekmovanje, zastopnika v zvezni komisiji za tekmovanje in spremljevalca slovenske ekipe na zveznem tekmovanju)	8.4. v Mariboru	6.5. v Novi Gorici
Slovesna razglasitev rezultatov tekmovanja in podelitev nagrad ter pohval	8.4. ob 17. uri v Mariboru	6.5. ob 17. uri v Novi Gorici
Priprave kandidatov za zvezno tekmovanje, določitev ekipe	19., 20. in 21.4. v Ljubljani	17., 18. in 21.5. v Ljubljani
Odhod ekipe na zvezno tekmovanje	22.4.	20.5.
Zvezno tekmovanje	nedelja, 23.4. v Beogradu	nedelja 21.5. v Novi Gorici.

Komisija za popularizacijo pripravlja pravilnik o republiških tekmovanjih iz matematike in fizike. V pravilniku je predvidenih nekaj novosti. Število nalog se poveča od 4 na 5. Tekmovanje se v celoti zaključi v enem dnevu. Dopoldne bo tekmovanje, popoldne pa komisija za republiško tekmovanje pregleda naloge, določi nagrajene in pohvaljene dijake ter določi kandidate za zvezno tekmovanje. Ob zaključku tekmovanja predvidevamo slovesno razglasitev rezultatov in podelitev nagrad ter pohval.

XIV. zvezno tekmovanje iz matematike bo letos v Beogradu. VIII. zvezno tekmovanje mladih fizikov, ki ga tudi letos organizira društvo, bo v Novi Gorici. Organizacijski odbor je že začel s pripravami. Tudi letos so za kandidate ekip, ki se bosta udeležili zveznega tekmovanja, predvidene tridnevne priprave v Ljubljani. Priprave bodo vodili sodelavci oddelka za matematiko in fiziko FNT.

Sekretar komisije za popularizacijo:
Tomaž Skulj

K A P L J E

1. Koliko tehtajo vodne kaplje, ki ostanejo na tebi potem, ko si se okopal?

Za meritev rabiš brisačo in kuhinjsko tehtnico. Ostalo ugani sam.

Kolikšen delež tvoje telesne teže predstavlja voda, ki ti je po kopeli ostala na telesu? Na kosmatih živalih ostane po kopeli več vode. Kakšen misliš, da bi bil ta delež pri mokri miški in pri mokri muhi? Ali lahko zdaj delno razložiš, zakaj se majhne kosmate mokre živalce tako težko gibljejo?

2. Koliko kapelj je v kopalni kadi, polni vode?

Vprašanje ima smisel, če se zmenimo za velikost kapelj. Veljajo take, ki padajo od slabo zaprte pipe. Ugotovi, ali se njihova velikost kaj spreminja, izmeri njihovo prostornino in preštej, koliko jih gre v kopalno kad. Če te nimaš, je dober tudi škaf. In če pri hiši še ni vodovoda, spuščaj vodo prek žlebiča iz lubja kar pri studencu ali kapnici. Napiši nam, kako si meril in štel. Pa dodaj še, koliko litrov drži kad ali škaf.

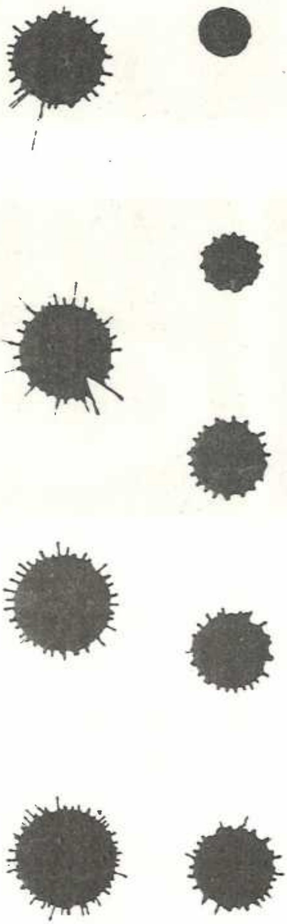
3. Ura na vodne kaplje

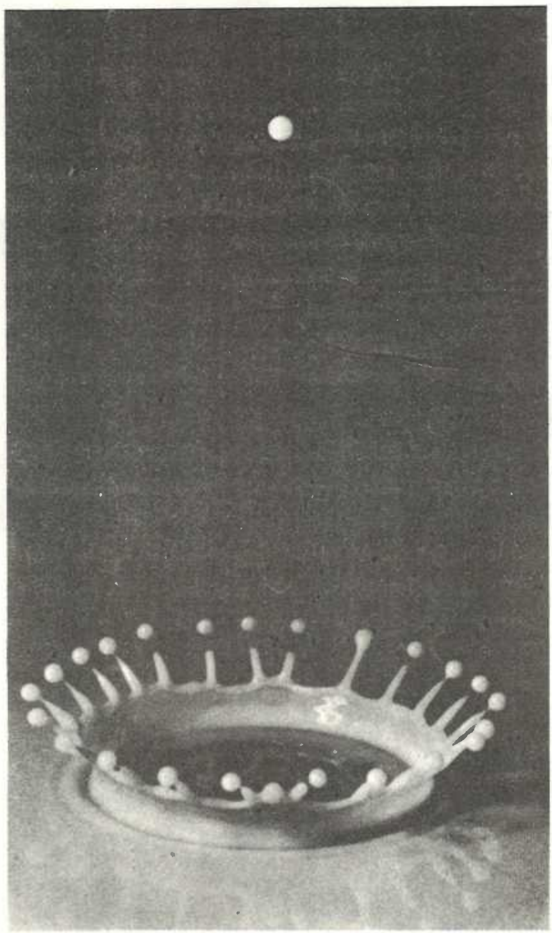
V starih časih so merili čas s peskovnimi urami. Podobno uro lahko napraviš iz plastične steklenice ali kozarčka za jogurt, če ji pri dnu zvrtaš majhno luknjico, skozi katero bo kapljala (ali iztekala) voda. Opazuj gibanje gladine vode v kozarcu in zaznamuj lego vsako minuto, pol minute ali 10 sekund. Tako dobiš "številčnico". Piši, kolikšen najkrajši čas lahko izmeriš z ravnokar "navito uro". Po kolikšnem času moraš "uro" znova "naviti"?

4. Kako hitro padajo deževne kaplje?

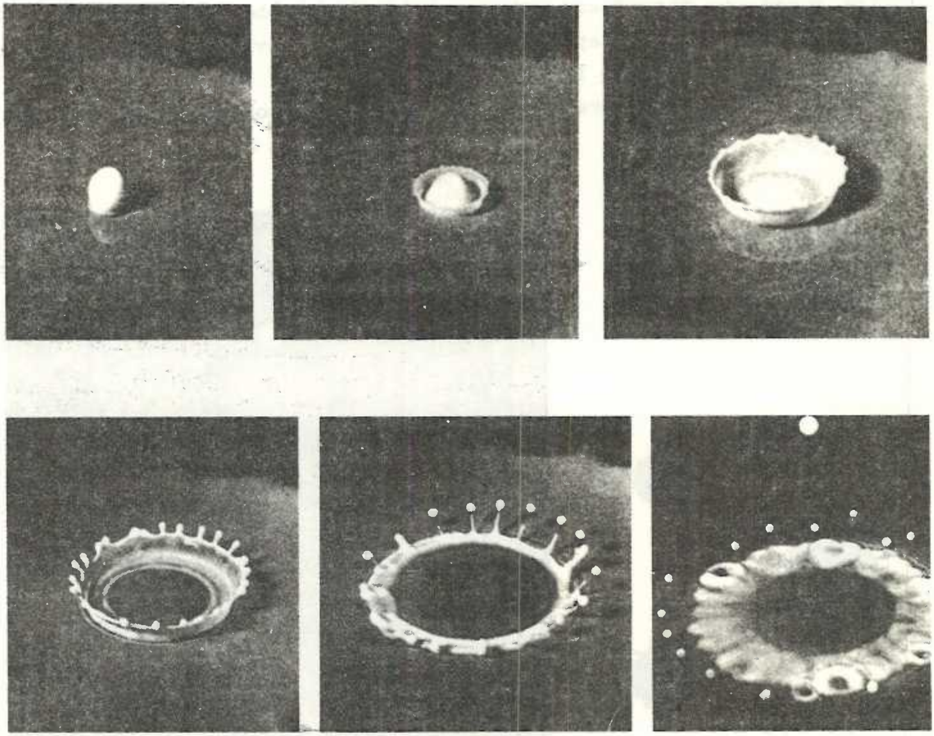
Dežuje iz oblakov, ki so na različnih višinah. Dežne kaplje pa zaradi tega ne prilete na Zemljo z različnimi hitrostmi. Nekaj časa hitrost kaplje sicer narašča, nazadnje pa doseže kaplja neko največjo končno hitrost. Na prav preprost način lahko izmerimo, kako globoko mora pasti kaplja, da doseže to hitrost.

Če kapljo prestrežemo na papir, bo pustila na njem packo, ki ima zvezdasto razcefrane robove. Oblika teh robov se spreminja z višino, s katere je kaplja padla, dokler se z višino spreminja tudi hitrost kaplje, ki jo ima pri naletu na papir. Ko pa se hitrost kaplje z višino ne spreminja več, ostaja tudi oblika zmazka nespremenjena.





Izmeri, kako globoko mora pasti kaplja, da doseže svojo največjo hitrost. Pošlji nam svoje rezultate in natančen opis poskusa, ki pa naj bo čim krajši. Posebej lepo bo, če navedeš še premer kaplje in kako si ga izmeril.



Navodila:

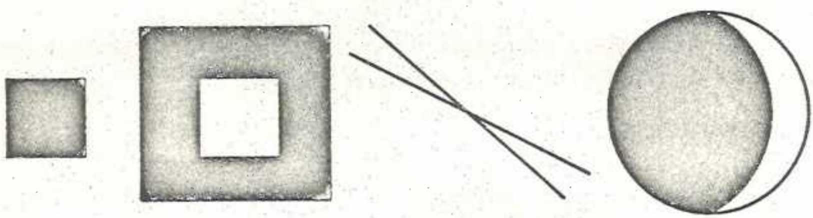
Kaplje padajo s strehe, od slabo privite pipe in še od kje. Napraviš pa jih lahko tudi s slamico ali kapalko za zdravila. Da jih boš bolje videl, jih lahko malce obarvaš s črnilom. Pazi na obleko in na mamine preproge!

Janez Ferbar

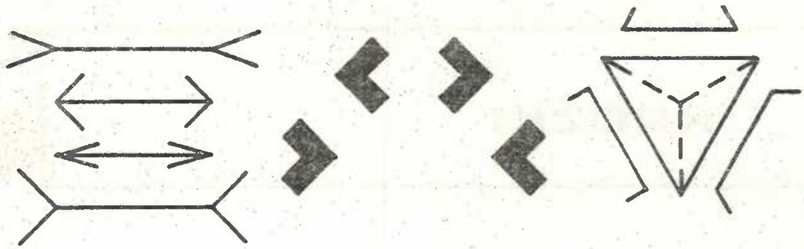
I L U Z I J E V I D A

Človek iz svojega okolja neprestano sprejema informacije in ji deloma avtomatično deloma zavestno vrednoti po svojih dotedanjih izkušnjah. Prav avtomatično vrednotenje sprejetih informacij pogosto privede do napačnih zaznav. Takrat pravimo, da imamo iluzije. Čim manj podatkov ima sprejeta informacija, tem laže dobimo iluzije. Sam lahko napraviš preprost preizkus. Stehtaj dvakrat po 1 kg fižola ali česa drugega. Prvi kilogram daj v majhno, drugi kilogram pa v veliko vrečo, ki jo še napihneš, da izgleda polna. Prijatelj, ki mu daš vreči potehtat, bo z gotovostjo trdil, da je manjša vreča težja. Pričakuje namreč, da bo težja večja vreča, ko jo dvigne z lahkoto, pa se mu zdi manjša vreča nenavadno težka.

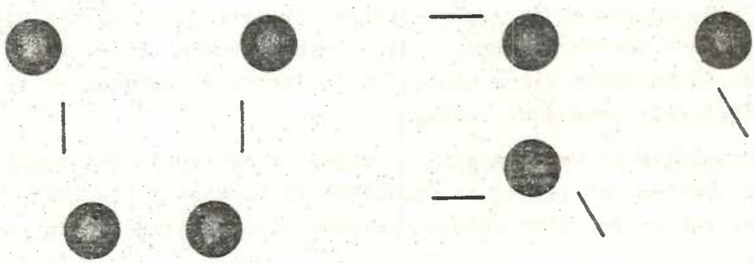
Zelo zanimive in vsakdanje so iluzije, ki nastopajo pri gledanju. S preučevanjem teh iluzij si psihologi in biologi prizadevajo spoznati kaj več o tem, kako deluje človekov vid. Oglejmo si jih nekaj!



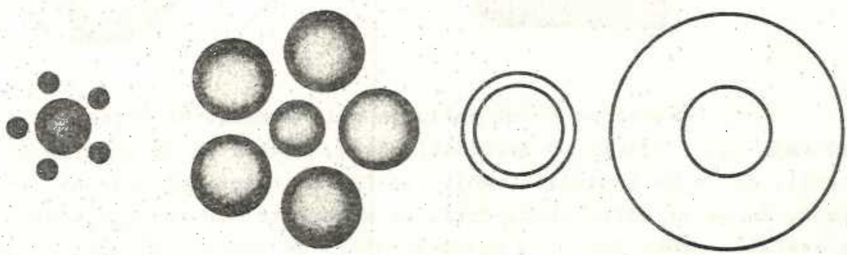
Črni kvadrat na belem polju in beli kvadrat na črnem polju na zgornji sliki sta si po velikosti enaka. Dokler ju ne izmeriš pa boš trdil, da je beli kvadrat večji. Velika kontrastnost privede tudi do tega, da se ti zdita tanki črti, ki se sekata pod majhnim kotom, v presečišču prekinjeni. Na sosednji sliki je radij krožnice, ki loči počrnjeni in svetli del kroga, enak radiju kroga, zaznava pa je drugačna!



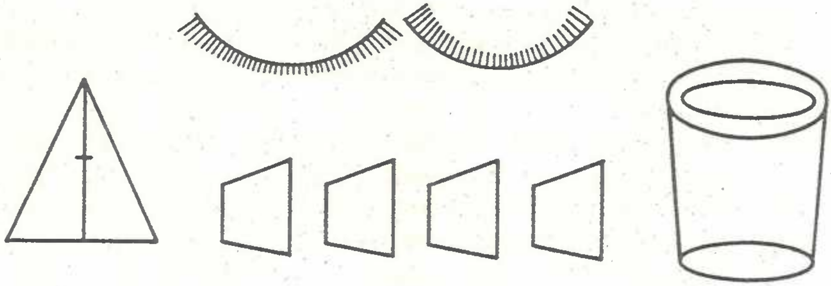
Primerjaj dolžine narisanih daljic! Čeprav so vse daljice enako dolge, se ti zdijo daljše tiste, pri katerih smo na krajiščih narisali puščice navznoter. Prav tako se zmotimo, ko primerjamo naznačeno razdaljo med konicami na naslednji sliki, ali pa razdaljo med tangentami na kroge.



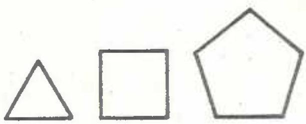
Na naslednjih slikah je viden vpliv okolja na enaka elementa. Element obrokžen z manjšimi elementi izgleda večji.



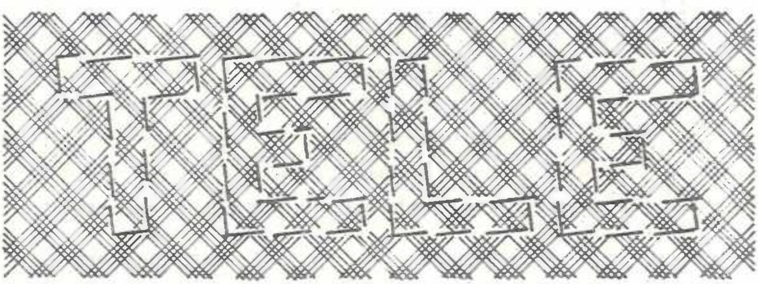
Še nekaj primerov vpliva okolja:



Zgornja polovica višine izgleda krajša, enaka loka se zdita različno dolga, tudi vsak naslednji od štirih skladnih likov je navidezno manjši od prejšnjega, za obe elipsi pa bi vsak rekel, da je spodnja večja od zgornje. Ravno tako se zdi stranica trikotnika manjša od stranice kvadrata in ta manjša od stranice peterokotnika, čeprav so vse enake.

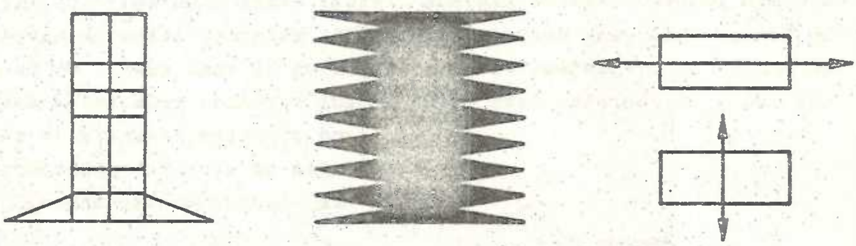


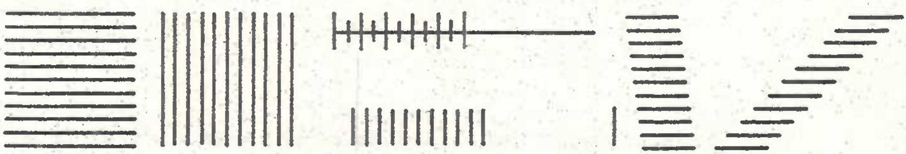
Če natančno pogledamo naslednjo sliko, bomo videli, da so črke v napisu v resnici pokončne.



Izkazalo se je, da obstaja razlika med gledanjem v vodoravni smeri slike in gledanjem v navpični smeri. Ko so dali večjemu številu ljudi narisati enako dolgo navpično in vodoravno črto, je bila vodoravna črta skoraj vselej daljša od navpične. Tovrstnim iluzijam so sorodne iluzije osnovane na pravilu: zapolnjen prostor na sliki izgleda vedno večji kot nezapolnjen. Tako je na prvih dveh spodnjih slikah višina figure navidezno večja od širine; na tretji sliki pa izgleda zgornja figura nižja in širša, čeprav sta enaki.

Podoben efekt kažeta tudi prvi spodnji sliki.





Daljico na naslednji sliki smo razdelili na pol in na prvi polovici vrisali črtice v enakomernih razmikih. Prva polovica se nam zdi daljša. Podoben vpliv imajo tudi črtice, ki smo jih enakomerno nanizali na prvo polovico razdalje med skrajnima črticama na naslednji sliki. Na zadnji sliki se nam zde daljice, ki smo jih vrisali v poševni stolpec krajše od onih, ki so v skoraj navpičnem.

Vladimir Batagelj

K N J I Ž N I C A " S I G M A "

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS izdaja že od leta 1959 serijo drobnih knjižic v zbirki SIGMA. Knjižice so namenjene mladim matematikom in fizikom, dijakom in študentom, ki se radi ali neradi ukvarjajo z matematiko in fiziko. Večina knjižic je napisana na zelo dostopnem nivoju, nekaj je tudi uporabnih priročnikov, drugi pa so zopet zelo primerni kot pomožni učbeniki za študente na univerzi. V zadnjem času so izšle naslednje knjige, katere vam še prav posebej toplo priporočamo:

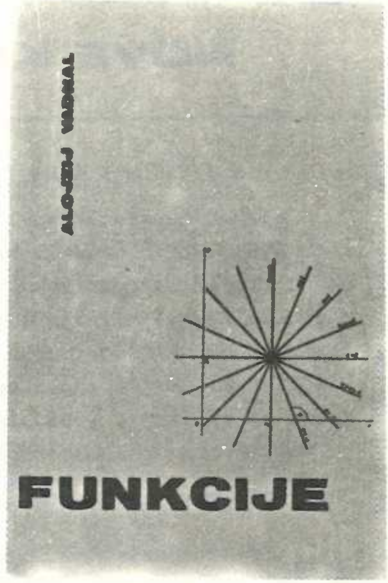
URŠIČ Stanko: Štirimestni logaritmi in druge tabele 1971
148 str. pl. 25,- (20,-)

To so standardne logaritemske tablice na štiri decimalna mesta, ki jih dandanes uporabljajo predvsem na gimnazijah pri rednem pouku. Zaradi nekaterih elementarnih tabel na začetku pridejo prav tudi v višjih razredih osnovne šole. V dodatku "matematične formule in definicije" pa so le-te opremljene z lepimi slikami. Knjiga je posvečena slovenskemu matematiku Juriju Vegi, katerega kratek življenjepis je na začetku knjige.

PRIJATELJ Niko: Matematične strukture I.ponatis 1971
216 str. 28,- (22,-)

Prvi natis te knjige je izšel že leta 1964. Z uvajanjem nove matematike pa je postala knjiga zelo iskana na tržišču. Danes je nepogrešljiv pomožen učbenik študentom matematike na univerzi. Knjigo, ki nosi podnaslov: množice - relacije - funkcije toplo priporočamo tudi dijakom na srednjih šolah, kakor tudi učiteljem in profesorjem matematike na osemletnih in srednjih šolah.

VADNAL Alojzij: Funkcije I.
Drugi ponatis 1971
244 str. 27,- (20,-)



Omenjena knjiga je tipičen priročnik. Bralcu predstavlja vse tipične funkcije, od najbolj enostavnih (linearne funkcije) do ciklometričnih. Zaradi posrečenega izbora in obdelave funkcij z metodičnim pristopom, je bilo za to knjigo v minulih letih izredno zanimanje. Zato smo jo v lanskem letu morali že drugič ponatisniti. Zbirko funkcij toplo priporočamo vsem srednješolcem. Komur delajo funkcije težave, jih bo prav lahko dodobra spoznal brez inštruktorja.

Vse omenjene knjige boste lahko kupili v knjigarnah, člani društva matematikov, fizikov in astronomov SRS ter dijaki in učenci, člani šolskih matematičnih in fizikalnih krožkov pa jih lahko dobe pri KOMISIJI ZA TISK DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19 (ŽR 501-8-240/1) po znižani ceni (v oklepaju).

Pred kratkim pa je Komisija za tisk izdala tudi skripta

URŠIČ Stanko: Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev 8-ih razredov osnovnih šol v Sloveniji. 1972. 56 strani srednjevelikega formata. Cena 8,- din.

Naslov pove že skoraj vse. Pri težjih nalogah je tudi kratko navodilo za reševanje. Večina nalog je opremljenih s potrebnimi skicami. Ker naloge niso zbrane metodično po snovi in težini, ampak po letih in krajih, kjer so jih reševali, smo na koncu dodali pregledno tabelo z zaporednimi številkami nalog, zbrane po razredih in poglavjih po veljavnem učnem načrtu. Knjižica ne bo koristila le tekmovalcem, pač pa tudi tistim, ki potrebujejo še več različnih nalog.

Ciril Velkovrh

PREMISLI IN REŠI

VI. razred

1. V škatli je 15 kroglic: črnih, belih in rdečih. Rdečih kroglic je 7 krat manj kot belih. Koliko je črnih kroglic?

2. Baterija z žarnico stane 12 din. Baterija je za 10 din dražja od žarnice. Koliko stane baterija?

3. V trikotniku *ABCD* s koti: $\alpha = 67^\circ 32' 15''$ in $\beta = 37^\circ 24' 45''$. Določi kot med simetralo kota γ in višino na stranico c!

4. Z začetne postaje odpelje avtobus neko število potnikov. Na prvi postaji izstopi 1/9 potnikov, na drugi postaji se število potnikov poveča za 3/4 števila preostalih potnikov, na tretji izstopi 6/7 potnikov, ki so se pripeljali na to postajo; na končni postaji ostane še 16 potnikov. Koliko je bilo potnikov na začetni postaji?

5. Ploščina pravokotnika meri 96 3/5 cm^2. Če povečamo njegovo širino za 1 1/5 cm, se ploščina poveča za 12 3/5 cm^2. Kolike so dimenzije pravokotnika:

a) pred povečanjem,

b) po povečanju?

6. Preveri enakost:

$$(1\tfrac{1}{3})^2 \cdot (2\tfrac{2}{3})^2 \cdot (1\tfrac{1}{4})^3 \cdot (\tfrac{2}{5})^3 \cdot (1\tfrac{1}{2})^4 = 8 .$$

7. Polje za setev je pripravljeno v 3 dneh: prvi dan 3/10 zemljišča, drugi dan 3/5 ostanka, tretji dan vse ostalo. Kolika je površina tega polja, če je tretji dan obdelano 11,2 ha manj kot drugi dan? Koliko je obdelano vsaki dan?

VII. razred

1. Diagonali trapeza merita 20 cm in 15 cm, višina pa 12 cm. Kolika je ploščina trapeza?

2. Razlika kvadratov dveh zaporednih neparnih števil je 48. Katera so ta števila?

3. Kaj je večje 10^{20} ali 20^{10}?

Navodilo:

$10^{20} = 10^{10} . 10^{10}$,

$20^{10} = (2.10)^{10}$. Torej?

4. Dve kolesi s polmerom $r_1 = 2$ cm in $r_2 = 4$ cm sta oviti s transmisijskim jermenom tako, da se prekrižana dela sekata pravokotno.

a) Načrtaj kolesi z jermenom!
b) Izračunaj dolžino jermena!
c) Kolika je razdalja središč koles?

5. Izrazi ploščino, obseg in diagonalo enokrakega trapeza s stranico c, ki je enaka tretjini višine, ako meri kot $\alpha = 60^\circ$!

VIII. razred

1. V pravokotnem trikotniku ABC s katetama $AC = 8$ cm, $BC = 4$ cm je včrtan kvadrat $CDEF$. Izračunaj ploščino kvadrata!

Nalogo reši na osnovi podobnosti trikotnikov ali pa ploščino trikotnika izrazi z vsoto ploščin dveh trikotnikov!

2. Dana je enačba:

$$\frac{kx - 5}{12} - \frac{3k + 2x}{18} = k + x$$

Za katere vrednosti k enačba nima rešitve?

3. Kraka trapeza merita 39 mm in 45 mm. Diagonala, ki leži pravokotno na daljši krak, je dolga 60 mm.

a) Konstruiraj trapez,
b) Izračunaj obseg in ploščino trapeza!

4. Kaj se zgodi s produktom, če množenec povečamo za 20 %, množitelj pa zmanjšamo za 20 %?

5. Izračunaj površino in prostornino tristrane pokončne prizme z osnovnimi robovi 87 cm, 65 cm in 88 cm in višino 50 cm!

Pavle Zajc

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

NALOGE ZA OSNOVNO ŠOLO

1. Kako je treba povedati: $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ je enako $1\frac{1}{12}$ ali bo enako $1\frac{1}{12}$?

2. Vlak z 10 vagoni je prevozil 100 km. Koliko km je prevozil vsak vagon?

3. Za knjigo plačamo 10 din in 1/3 cene knjige. Kolika je cena te knjige?

4. Količnik dveh števil je 13 krat manjši od deljenca. Kolik je delitelj?

5. Deček in deklica imata enako število orehov. Deček je dal deklici 15 orehov. Razumljivo je, da ima deklica več orehov kot deček. Koliko?

6. Katero število je deljivo z vsemi števili?

7. Z dvema številkama zapiši najmanjše celo pozitivno število!

8. Kaj je več: polovica polovice od 20 ali četrtina četrtine od 80?

9. Koliko krajišč ima 5 palic? Koliko pet in pol palic?

10. En lajajoči pes zbudi tri ljudi, koliko jih zbudita dva lajajoča psa?

11. Henrik VIII.je imel šest žena, koliko jih je imel Henrik IV.?

razmnoževalni aparati

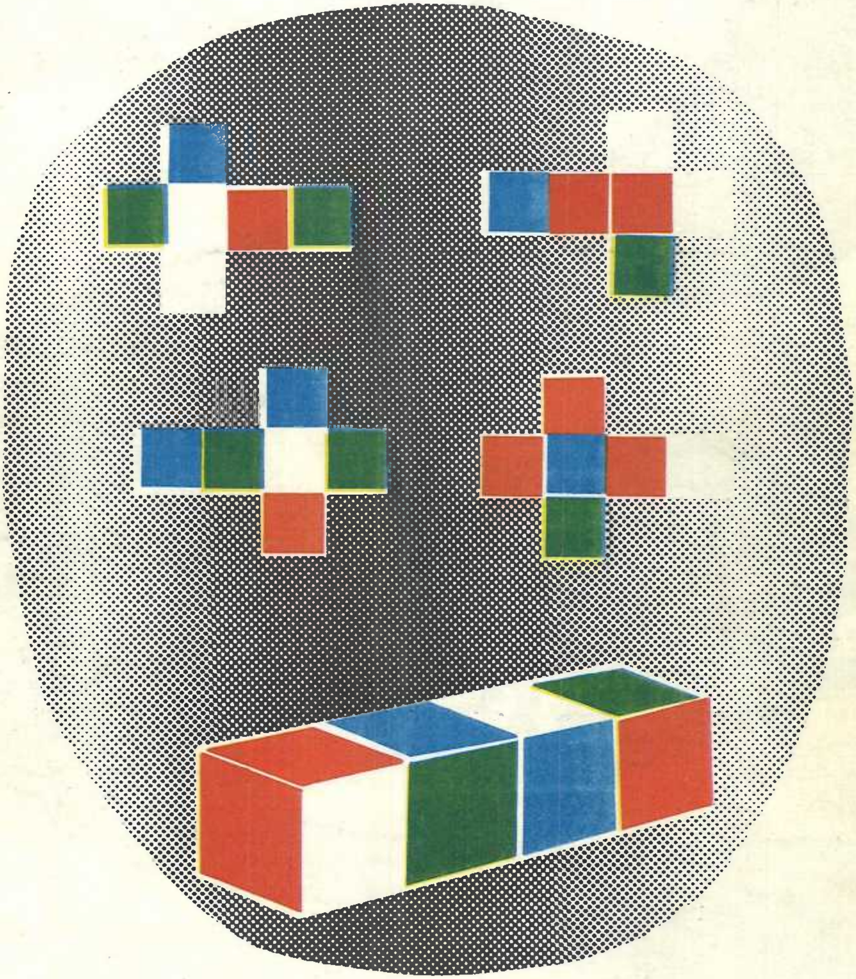
ROG
LJUBLJANA

Cyklograf

gestetner 105


sistem
responderjev
ROG
LJUBLJANA
PRISOTNIH
UNIS-ROG
tovarna
opreme
Ljubljana
Savlje 89
341 - 261

BISTROVIDEC



K O C K E I N B A R V E

Izreži iz papirja mreža štirih kock in jih pobarvaj kot kaže slika. Zlepi kocke in iz njih prizmo. Nalogo boš rešil, če bodo na vsaki od štirih ploskev prizme vse štiri barve. Naloga ni tako preprosta kot kaže prvi pogled nanjo.

Priredil Franci Oblak