PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 4
Strani 200–202

Peter Petek:

DESETI KOREN IZ DESET

Ključne besede: matematika, aritmetika, binomska formula, numerično računanje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/9/559-Petek.pdf

MATEMATIKA

DESETI KOREN IZ DESET

Profesor Vidav nam je v pogovoru zastavil nalogo, izračunati deseti koren iz deset na pet decimalk, seveda samo s svinčnikom in papirjem. Pri reševanju te naloge si bomo pomagali z dvema rezultatoma, ki ju je prav lahko preveriti, le nekaj računanja je treba.

Najprej opazimo, da je $2^{10} = 1024$, kar blizu številu tisoč, t.j. 10^3. Zapišemo približno "enačbo"

$$2^{10} \doteq 10^3 \tag{1}$$

Druga reč je deseta potenca vsote. Poznamo že kvadrat in kub vsote:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Za deseto potenco pa imamo

$$(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10} \tag{2}$$

kar prav lahko preverimo, le "malo" več računanja je.

"Enačbo" (1) kubiramo in še pomnožimo z 10

$2^{30} \doteq 10^9$

$10.2^{30} \doteq 10^{10}$

Delimo s številom $2^{30} = 8^{10}$ in potegnemo deseti koren

$\sqrt[10]{10} \doteq \frac{10}{8}$

Očitno je ta približek premajhen. Imamo tedaj pozitivno število x, , tako da je

$$\sqrt[10]{10} = \frac{10}{8} + x \qquad (3)$$

Enačbo (3) pomnožimo z 0,8

$$\frac{8}{10}\sqrt[10]{10} = 1 + 0{,}8x$$

in potenciramo z deset

$$8^{10}.10^{-9} = (1 + 0{,}8x)^{10}$$

Levo stran zgornje enačbe lahko zapišemo kot

$$2^{30}.10^{-9} = (2^{10}.10^{-3})^{3} = 1{,}024^{3} = 1{,}073741824$$

Na desni strani pa uporabimo formulo (2).

$$1{,}073741824 = 1 + 8x + 36.0{,}8x^2 + 96.0{,}64x^3 + \ldots. \qquad (4)$$

S pikicami smo "zapisali" preostalih sedem členov. Takoj bomo namreč ugotovili, da so tako majhni, da se pri računanju na pet decimalk nič ne poznajo. Ker so vsi členi pozitivni, lahko takoj opazimo, da je $x < 0{,}01$, že če upoštevamo le prva dva člena na levi strani enačbe (4). Pravzaprav, če smo natančnejši in upoštevamo na levi tri člene, dobimo, da je $x < 0{,}009$. Res, za $x = 0{,}009$ je

$$1 + 8x + 36.0{,}8x^2 = 1{,}0743328$$

kar je že preveč.

Predelamo enačbo (4)

$$8x = 0{,}073742 - 36.0{,}8x^2 - 96.0{,}64x^3 - \ldots$$

$$x = 0{,}009218 - 3{,}6x^2 - 96.0{,}08x^3 - \ldots \qquad (5)$$

Tu smo račun zaokrožili na šest decimalk. Če hočemo namreč pet točnih mest, moramo vedeti tudi še šesto decimalko. Ocenimo najprej člen z x^3. Ker je $x < 0{,}009$, ta členi ni večji kot

$$96.0{,}08.0{,}9^3.10^{-6} = 7{,}68.0{,}729.10^{-6} = 5.10^{-6}$$

Naslednji členi so še manjši in jih res lahko izpustimo.
Iz enačbe (5) in zgornje ocene vidimo, da moramo od 0,009218 odšteti še $3{,}6x^2$. Ampak kako, če iksa ne poznamo? No, vemo pa,

da je x nekaj manjši od 0,009. Če odštejemo $3{,}6 . 0{,}009^2 = 0{,}000292$, dobimo

$x = 0{,}008926$

kar je za malenkost premalo, saj smo odšteli preveč. Če pa za to odštevanje vzamemo $x = 0{,}0089$, bomo odšteli

$3{,}6x^2 = 3{,}6 . 0{,}000079 = 0{,}000285$

in število x je enako

$x = 0{,}008933$

Pet decimalk je tedaj trdnih. Pogledamo enačbo (3) in zapišemo deseti koren iz deset na pet decimalk

$$\sqrt[10]{10} = 1{,}25893$$

Peter Petek