PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 3
Strani 132–137

Bojan Mohar:

NALOGE S KOVANCI

Ključne besede: matematika, rekreacijska matematika, geometrijski problemi.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/9/9-3-Mohar.pdf

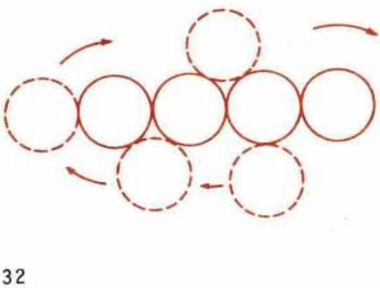
MATEMATIKA

NALOGE S KOVANCI

V tem sestavku si bomo zastavili več nalog, ki imajo vse eno skupno lastnost - opraviti imajo s kovanci. Ne zanima nas, ali so kovanci zlatniki, srebrniki ali pa navadni dinarji. Omenil bi le to, da so slednji najprimernejši, saj za praktičen preizkus pravilnosti rešitve zlatnikov in srebrnikov navadno nimamo pri roki.

Naloga 1. V ravni vrsti imamo postavljenih nekaj enako velikih kovancev, tako da se drug drugega dotikajo kot kaže slika 1. Vzemimo prvi kovanec in ga kotalimo po obodu okrog preostalih kovancev, dokler ne pride spet nazaj na svoje začetno mesto. Zanima nas, koliko obratov okrog svoje osi je napravil novčič na svoji poti.

Slika 1

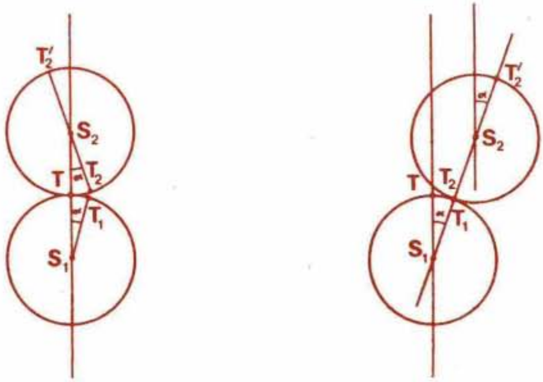


Slika 2

Naloga 1 ni enostavna, zato si najprej oglejmo najpreprostejši primer, ko imamo opravka le z dvema novcema. V tem primeru en kovanec zavrtimo okrog drugega. Prenagljen sklep marsikaterega bralca bo takle: kovanca imata isti obseg, zato prvi novčič pri poti okrog drugega napravi točno en obrat. Vendar nam praktičen preizkus z dinarjema na mizi pokaže, da je tak sklep napačen. Kovanec se namreč dvakrat zasuče okrog svoje osi. En obrat pride od poti, ki jo kovanec napravi pri kotaljenju vzdolž svojega roba, drugi pa je posledica potovanja okrog novčiča. Do istega zaključka nas pripelje tudi malo drugačno razmišljanje: namesto kovancev imejmo dve zobati kolesi iste velikosti, ki se stikata. Zavrtimo prvo kolo za en obrat v smeri ure. Pri tem drugo kolo napravi obrat v nasprotno smer, kolesi pa se spet stikata v začetnih točkah. Če se postavimo kot opazovalec na drugo kolo, se bomo zavrteli skupaj z njim in se nam bo zdelo, da to kolo miruje. Pri tem pa bo prvo kolo napravilo pot okrog nas in prišlo v začetni položaj. Ni težko uganiti, da je tako gibanje povsem ekvivalentno z gibanjem obeh kovancev. Opazovalcu na drugem kolesu se pri obratu zdi, da so se mirujoča telesa zavrtela za en obrat v smeri ure. Ker pa je prvo kolo napravilo še en dejanski obrat, se mu zdi, da se je dvakrat zavrtelo.

Tako fizikalno razmišljanje nas pripelje do splošnejšega sklepa, ki nam bo pomagal pri reševanju naloge 1.

Trditev. Ko se prvi kovanec zavrti za kot α okrog drugega, se zasuče za kot 2α okrog svoje osi.



Slika 3

Dokaz. Oznake bomo pobrali s slike 3. Ker sta loka TT_1 in TT_2 iste dolžine, se bosta pri poti za kot α točki T_1 in T_2 pokrili. Diametralno glede na T_2 leži točka T_2' in je v začetku za kot α levo od navpičnice, po zasuku pa za kot α desno os nje, saj je kot med navpičnico in T_2S_2 enak kotu T_1S_1T (vzporedne nosilke). Točka se je torej zasukala za kot 2α. Zasuk okrog osi je za vse točke kroga (novca) isti, kar nam pove, da je trditev pravilna.

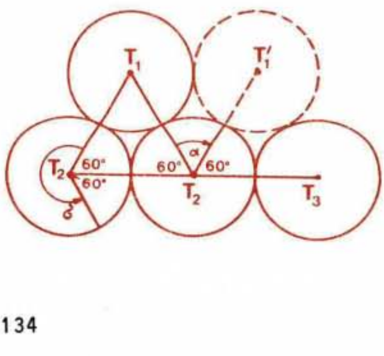
Opomba. Dokaz gornje trditve je oprt na geometrijsko predstavo in na sliko 3. Iz slike je konstrukcija razvidna le za dovolj majhne kote, vendar pa nas nę pusti na cedilu tudi pri poljubno velikem kotu α. Če kdo tega ne verjame, naj poskusi to dokazati. Npr. za kot $\alpha = 512^\circ$ lahko storimo naslednje: napravimo 512-krat obrat za 1° (1° je dovolj majhen kot), torej se bo kovanec zasukal 512-krat za 2° okrog svoje osi, skupno torej za kot $512.2^\circ = 1024^\circ = 2.512^\circ = 2\alpha$.

Bralec sam bo ugnal naslednjo nalogo:

Naloga 2. Kovanec s polmerom r naj napravi pot okrog kovanca s polmerom R. Kolikokrat se pri tem zasuče okrog svoje osi?

Rešitev: $((R + r)/r)$-krat.

Vrnimo se zdaj spet k nalogi 1. Na sliki 4 je predstavljeno kotaljenje novca okrog verige kovancev v trenutku, ko prehaja z enega na drugi kovanec.



Slika 4

če se kovanec kotali ob nekem drugem novčiču v verigi vzdolž loka nad kotom α, se je pri tem zavrtel za kot 2α okrog svoje osi. Zato je dovolj, da ugotovimo, kako dolgo se prvi novčič kotali po vsakem izmed kovancev iz verige. Z drugimi besedami, določiti moramo kota α in σ, prikazana na sliki 4. Kot α izračunamo takole: trikotnika $T_2T_3T_1$ in $T_3T_4T_1'$ sta enakostranična (vse stranice so dolžine $2r$, če je r polmer kovanca). Zato sta kota $T_2T_3T_1$ in $T_4T_3T_1'$ enaka $60°$. Torej mora biti kot α enak $\alpha = 180° - 2.60° = 60°$. Isti sklep nam pove, da je kot σ enak $\sigma = 360° - 2.60° = 240°$. Konec računa je pred nami. Recimo, da smo imeli v začetni verigi n novcev vštevši tudi prvega. Prvi kovanec se ob drugem in zadnjem kovancu kotali vzdolž kota σ, ob preostalih n-3 kovancih pa vzdolž kota 2α (zgoraj za kot α in ravno tako spodaj). Skupna dolžina teh kotov je enaka

$$\Phi_n = (n-3)\cdot 2\alpha + 2\sigma = (n-3)\cdot 120° + 4.120° = (n+1)\cdot 120°$$

Na svoji poti se torej prvi novčič okrog svoje osi zasuka za kot $2\Phi_n = (n+1)\cdot 240°$, število obratov je enako

$$M_n = \frac{2(n+1)}{3}$$

Število obratov ni nujno celo število. To se zgodi le v primeru, ko je n+1 deljivo s 3. Tak primer smo imeli tudi, ko sta bila pred nami le dva novca.

Naslednja naloga zahteva znanje trigonometrije in reševanje prepuščam bralcu.

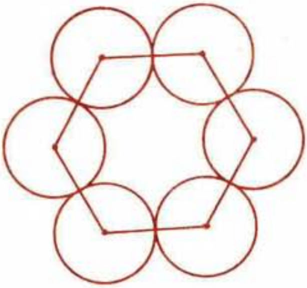
Naloga 3. Kakšna je rešitev naloge 1, če prvi kovanec ni enake velikosti kot so preostali kovanci v verigi?

Naloga 4. Naj bo a stranica pravilnega n-kotnika. n kovancev polmera $a/2$ postavimo s središči na oglišča tega n-kotnika in tako dobimo sklenjen obroč (slika 5). Novčič iste velikosti kotalimo okrog. Koliko obratov okrog svoje osi napravi pri tem?

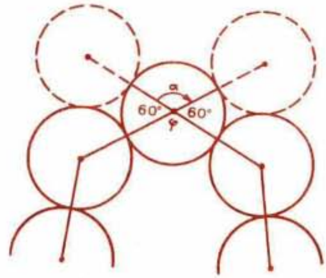
Rešitev: Spet moramo izračunati le vsoto kotov lokov, nad katerimi se kotali novčič. Dovolj je, da poznamo kot α s slike 6. Ravno tako kot pri reševanju naloge 1 ugotovimo, da sta kota med krakoma kotov α in Φ enaka 60°. Iz slike je razvidno, da je

$$\alpha = 360^\circ - 2.60^\circ - \Phi = 240^\circ - \Phi$$

kjer je Φ notranji kot pravilnega n-kotnika in je torej enak $\Phi = 180^\circ - 360^\circ/n$. Kot α je zato enak $\alpha = 60^\circ + 360^\circ/n$.



Slika 5



Slika 6

Lok s kotom α napravimo n-krat, vsakič pa se novčič zasuka za kot 2α okrog svoje osi. Skupen zasuk je torej enak $2n\alpha = 2n\cdot 60^\circ + 720^\circ = (n+6)\cdot 120^\circ$. Število obratov pa je enako

$$N_n = 2n\alpha/360^\circ = n/3 + 2$$

Naloga 5. Iz n kovancev enake velikosti tvorimo poljubno sklenjeno verigo. Okrog nje zakotalimo novčič. Koliko obratov okrog svoje osi napravi pri tem? Središča kovancev v sklenjeni verigi tvorijo n-kotnik. Ali je število obratov rotirajočega novčiča v kakšni zvezi z notranjimi koti tega n-kotnika?

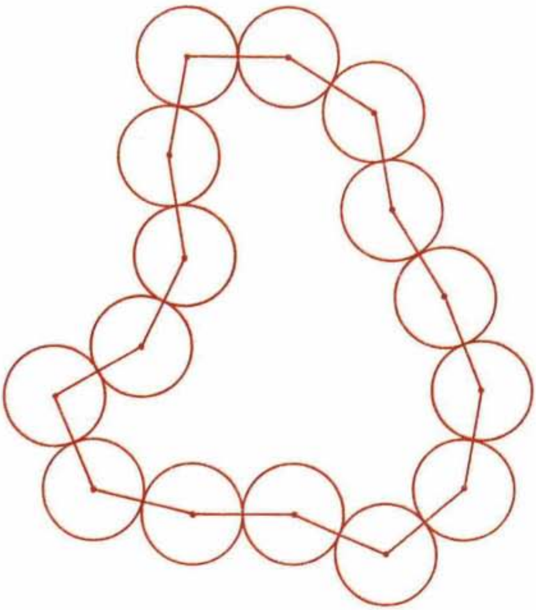
Pri reševanju naloge 4 smo ugotovili, da je kot α s slike 6 enak $\alpha = 240^\circ - \Phi$. Geometrijska predpostavka pri tem je bila, da je kot α nenegativen. To pa pomeni, da mora biti kot Φ manjši ali enak 240°. Če predpostavimo, da vsi koti v n-kotniku ustrezajo temu pogoju, potem lahko tako kot pri nalogi 4 ugotovimo, da se bo novčič na poti okrog obroča zavrtel okrog svoje osi za kot

$$\gamma = 2\cdot(240^\circ - \alpha_1 + 240^\circ - \alpha_2 + \ldots + 240^\circ - \alpha_n) =$$

$$= n\cdot 480^\circ - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ notranji koti n-kotnika. Ker je vsota notranjih kotov n-kotnika vedno enaka $(n-2)\cdot 180°$, dobimo

$$\gamma = n\cdot 480° - 2(n-2)\cdot 180° = (n+6)\cdot 120°$$



Slika 7

Rezultat je torej isti kot pri nalogi 4, če je le izpolnjena predpostavka, da so vsi koti manjši ali kvečjemu enaki 240°. Če pa ta zahteva ni izpolnjena, je lahko rešitev povsem drugačna. Ustrezne primere naj skonstruira bralec sam.

Bojan Mohar