PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **8** (1980/1981)
Številka 1
Stran 46

Tomaž Pisanski:

KOLIKO JE KOMBINACIJ?

Ključne besede: bistovidec, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/8/458-Pisanski-kombinacije.pdf

KOLIKO JE KOMBINACIJ?

Saši Pucko, dijak prvega letnika gimnazije nam je pred kratkim poslal sorodno nalogo. Sprašuje, na koliko načinov lahko v drugem ornamentu (Slika 2) preberemo vprašanje:

KOLIKO JE KOMBINACIJ?

```
                  ?
                K J ?
              K O I J ?
            K O L C I J ?
          K O L I A C I J ?
        K O L I K N A C I J ?
      K O L I K O I N A C I J ?
    K O L I K O J B I N A C I J ?
  K O L I K O J E M B I N A C I J ?
K O L I K O J E K O M B I N A C I J ?
  K O L I K O J E K B I N A C I J ?
    K O L I K O J E I N A C I J ?
      K O L I K O J N A C I J ?
        K O L I K O A C I J ?
          K O L I K C I J ?
            K O L I I J ?
              K O L J ?
                K O ?
                  K
```

V njegovi nalogi presledkov ni. Brati začnemo na levem robu, končamo pa na desnem robu ornamenta. Vedno pa moramo skozi središče (črka O)! Upamo, da bomo tudi za to nalogo prejeli kmalu vaše rešitve!

Tomaž Pisanski

KOLIKO JE KOMBINACIJ? - Rešitev iz P-8/1, str. 46

V prvi številki VIII. letnika Preseka 1980/81 je na strani 46 Saši Pucko iz Cerkelj ob Krki vprašal, na koliko načinov je mogoče v ornamentu (slika 1) prebrati vprašanje. Saši je dijak matematične smeri gimnazije Brežice. V pismu ob nalogi je zapisal, da je idejo za nalogo dobil ob reševanju magičnih kvadratov. Naloga je zelo zanimiva.

Lahko jo seveda posplošimo. Mislimo si, da je tekst krajši ali daljši. Struktura uganke naj ostane enaka. Namesto črk uporabimo številke. Besedilo KOLIKOJEKOMBINACIJ? bi prepisali v tekst:

```
                  ?
                K J ?
              K O I J ?
            K O L C I J ?
          K O L I A C I J ?
        K O L I K N A C I J ?
      K O L I K O I N A C I J ?
    K O L I K O J B I N A C I J ?
  K O L I K O J E M B I N A C I J ?
K O L I K O J E K O M B I N A C I J ?
  K O L I K O J E K B I N A C I J ?
    K O L I K O J E I N A C I J ?
      K O L I K O J N A C I J ?
        K O L I K O A C I J ?
          K O L I K C I J ?
            K O L I I J ?
              K O L J ?
                K O ?
                  K
```

Slika 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Originalno besedilo je namreč dolgo 19 znakov. Na sliki 2 si poglejmo nekaj manjših zgledov.

```
                                       9
                       7             1 8 9
         5           1 6 7         1 2 7 8 9
  3    1 4 5       1 2 5 6 7     1 2 3 6 7 8 9
1 2 3 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1    1 2 5       1 2 3 6 7     1 2 3 4 7 8 9
         1           1 2 7         1 2 3 8 9
                       1             1 2 9
                                       1
```

Slika 2

V vsaki shemi se srednji znak pojavi samo enkrat. To pomeni, da mora vsaka pravilna kombinacija skozi središče ornamenta. Po levi strani pridemo do središča, po desni pa nadaljujemo do konca. Takole napravimo! Naj n pove velikost lika. To pomeni, da je zapis dolg $2n + 1$ znakov. Imamo torej n začetnih znakov, za tem srednji znak in še n končnih znakov. Z $x(n)$ označimo število pravilnih kombinacij. Naj $y(n)$ označuje število pravilnih začetkov. Zaradi simetrije je $y(n)$ tudi število koncev. Ker nam vsak pravilni začetek daje s poljubnim pravilnim koncem pravilno kombinacijo in na ta način dobimo ravno vse pravilne kombinacije, je očitno:

$$x(n) = y(n).y(n) = y(n)^2.$$

Samo še $y(n)$ moramo znati izračunati, pa bo naloga rešena. Oglejmo si spet nekaj majhnih likov. Zadoščajo le leve polovice - začetki. Tokrat bomo v polje vpisali število različnih delov besedila od tega polja do središča. Glej sliko 3!

			1
		1	3 1
	1	2 1	3 2 1
1 1	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
1	2 1	3 2 1	4 3 2 1
	1	3 1	6 3 1
		1	4 1
			1
$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$

Slika 3

V vsakem večjem opazimo vse manjše like. Bralec naj poskusi ugotoviti pravilo, po katerem nastajajo tile liki. Starejši bralci bodo opazili v liku dva Pascalova trikotnika! Če seštejemo števila začetnih označenih polj, dobimo ravno $y(n)$. Tako je $y(1) = 2$, $y(2) = 5$, $y(3) = 11$, $y(4) = 23$, itd. Z matematično indukcijo je mogoče dokazati, da je

$$y(n) = 2^n + 2^{n-1} - 1 = 3.2^{n-1} - 1.$$

Število kombinacij je

$$x(n) = (3.2^{n-1} - 1)^2$$

Razpredelnica na sliki 4 prikazuje $y(n)$ in $x(n)$ za majhne vrednosti . Za našo začetno nalogo je $n = 9$. Zato je odgovor na zastavljeno vprašanje: $x(9) =$ 588 289.

	$y(n) = 3.2^{n-1} - 1$	$x(n) = (3.2^{n-1} - 1)^2$
1	2	4
2	5	25
3	11	121
4	23	529
5	47	2209
6	95	9025
7	191	36481
8	383	146689
9	767	588289
10	1535	2356225
11	3071	9431041
12	6143	37736449
13	12287	150970369
14	24575	603930625
15	49151	2415820801

Slika 4

Med rešitvami, ki smo jih prejeli sta bili le dve popolnoma pravilni. Nalogo sta pravilno rešila *Janez Košmrlj* iz Žlebiča št. 2, Ribnica na Dolenjskem in *Tomaž Pogačnik* iz Ljubljane. Precej blizu rešitvi sta prišla še *Andrej Florjančič* iz Kopra in *Marko Lampe* iz Velenja.

Uredniški odbor je sklenil, da izvrstno rešitev Tomaža Pogačnika nagradi s knjigo J. Rakovec: Osnovni pojmi topologije.

Tomaž Pisanski