PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **8** (1980/1981)
Številka 1
Stran 18

Vladimir Batagelj:

ENAKOSTI

Ključne besede: bolj za šalo kot zares, matematika, rekreacijska matematika, diofantska enačba.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/8/458-Batagelj.pdf

ENAKOSTI

$$13 \times 93 = 31 \times 39$$

in

$$12 \times 63 = 21 \times 36$$

zadoščata enačbi

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$$

pri čemer je $a \neq b$ in $c \neq d$. Enačba ima še nekaj rešitev. Poišči jih čim več!

Vladimir Batagelj

ENAKOSTI - Rešitev iz Preseka 8/1, str. 18

V Bistrovidcu (Presek 7(1979-80)4, 213) in nato, pomotoma, še enkrat (Presek 8(1980-81)1,18) smo vam zastavili za nalogo poiskati rešitve enačbe

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc} \qquad (1)$$

Odgovor na to vprašanje nam je poslal le *Nardin Boštjan* iz Nove Gorice, ki pa je poiskal samo rešitve z $a = 1$. Zato skupaj premislimo, kako bi poiskali vse rešitve.

Začnimo z naslednjo ugotovitvijo: če je (a, b, c, d) rešitev enačbe (1), so njene rešitve tudi:

(c, d, a, b)	$\overline{cd} \times \overline{ab} = \overline{dc} \times \overline{ba}$
(b, a, d, c)	$\overline{ba} \times \overline{dc} = \overline{ab} \times \overline{cd}$
(d, c, b, a)	$\overline{dc} \times \overline{ba} = \overline{cd} \times \overline{ab}$

ki pa predstavljajo v bistvu isto rešitev. Ker se v teh štirih rešitvah vsaka od cifer a, b, c in d enkrat pojavi na prvem mestu v rešitvi, lahko naše nadaljnje iskanje omejimo na rešitve, za katere velja $a \leq b, c, d$.

Povrnimo se nazaj k enačbi (1) in jo zapišimo v enakovredni obliki:

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c)$$

iz katere dobimo po krajšem računu enačbo:

$$a.c = b.d \qquad (2)$$

Iz dobljene enačbe (2) takoj razberemo skupini rešitev oblike: (a, b, b, a) in (a, a, b, b), pri čemer sta a in b poljubni od nič različni cifri $(a \leq b)$.

Kaj pa, če je $a = 0$? Tedaj ima enačba (1) obliko

$$\overline{b} \times \overline{cd} = \overline{b0} \times \overline{dc}$$

Če je tudi $b = 0$, je enačba izpolnjena pri poljubnem paru cifer c in d; kar da rešitve oblike $(0, 0, c, d)$. Sicer pa dobimo, po krajšanju z b, enačbo

$$\overline{cd} = 10 \times \overline{dc}$$

iz katere izhaja $d = 0$. Ustrezne rešitve imajo obliko: $(0, b, c, 0)$, pri čemer sta b in c poljubni cifri.

Ostale so nam še netrivialne rešitve, ki zadoščajo dodatnim pogojem: $a \neq b$, $a \neq d$ in $a \neq 0$. Ključ do teh rešitev je naslednja ugotovitev: ker je $a \neq b$ in $a \neq d$, se mora dati število $k = a.c$ zapisati vsaj na dva načina kot produkt dveh faktorjev manjših od 10. Nadaljevanje je razvidno iz tabele:

$k = a.c = b.d$	(a, b, c, d)	$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$
4 = 1.4 = 2.2	1 2 4 2	12 × 42 = 21 × 24
6 = 1.6 = 2.3	1 2 6 3	12 × 63 = 21 × 36
= 3.2	1 3 6 2	13 × 62 = 31 × 26
8 = 1.8 = 2.4	1 2 8 4	12 × 84 = 21 × 48
= 4.2	1 4 8 2	14 × 82 = 41 × 28
9 = 1.9 = 3.3	1 3 9 3	13 × 93 = 31 × 39
12 = 2.6 = 3.4	2 3 6 4	23 × 64 = 32 × 46
= 4.3	2 4 6 3	24 × 63 = 42 × 36
16 = 2.8 = 4.4	2 4 8 4	24 × 84 = 42 × 48
18 = 2.9 = 3.6	2 3 9 6	23 × 96 = 32 × 69
= 6.3	2 6 9 3	26 × 93 = 62 × 39
24 = 3.8 = 4.6	3 4 8 6	34 × 86 = 43 × 68
= 6.4	3 6 8 4	36 × 84 = 63 × 48
36 = 4.9 = 6.6	4 6 9 6	46 × 96 = 64 × 69

Vladimir Batagelj

REŠITVE NALOG