PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **6** (1978/1979)
Številka 3
Strani 132–133

Danijel Bezek:

HERONOVI TRIKOTNIKI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/6/368-Bezek.pdf

MATEMATIKA

HERONOVI TRIKOTNIKI

V *celoštevilskih trikotnikih* so dolžine stranic naravna števila.

Če za celoštevilske trikotnike zahtevamo še kak dodaten pogoj, govorimo o "odlikovanih" celoštevilskih trikotnikih.

Matematiki vseh časov so se z njimi radi ukvarjali, ker skrivajo pod geometrijskim plaščem često zanimivo aritmetično in algebrsko vsebino.

Presek je že objavil članke o celoštevilskih trikotnikih, ki imajo naslednje dodatne lastnosti:

a) eden od notranjih kotov v trikotniku je 120^0, 90^0 ali 60^0

b) obseg je po številski vrednosti enak ploščini

To pot si oglejmo celoštevilske trikotnike, katerih ploščina je celo (naravno) število. Takim trikotnikom pravimo *Heronovi trikotniki*. Imamo naravni števili m in n, ki nista hkrati 1. Z njima tvorimo izraze za stranice a, b in c:

$a = m(1 + n^2)$; $b = n(1 + m^2)$ in $c = (m + n)(mn - 1)$

Dokažimo, da so a, b in c stranice trikotnika, ki ima za ploščino celo število.

a) Najprej dokažemo, da je vsota poljubnih dveh stranic večja od tretje:

$$a + b = (m + mn^2) + (n + nm^2) = mn^2 + nm^2 + m + n$$
$$c = m^2n + mn^2 - m - n$$

Očitno je vsota $(a + b)$ za $2(m + n)$ večja od c !

1. Podobno pokaži, da velja: $(a + c) > b$ in $(b + c) > a$!

b) Dokažimo še, da je ploščina celo število. Izraze za strani-

ce a, b, c vstavimo v Heronov obrazec za ploščino trikotnika:
$p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ in upoštevamo, da je
$s = (a + b + c)/2$

Tako dobimo: $p = \sqrt{(mn^2 + nm^2)(m^2n - m)(mn^2 - n)(m + n)}$
$= (mn^2 + nm^2)(mn - 1)$

Tudi Heronovi trikotniki niso brez zanimivosti. Oglejmo si samo nekatere:

2. Pokaži, da je v Heronovih trikotnikih polmer trikotniku včrtanega kroga vedno naravno število!

3. Naravni števili m in n imenujemo generatorja stranic Heronovega trikotnika. Kako ju je treba izbrati, da bo polmer Heronovemu trikotniku očrtanega kroga tudi naravno število?

4. Ali obstaja Heronov trikotnik, v katerem so višine stranic naravna števila?

5. Določi dolžine stranic Heronovega trikotnika z najmanjšim obsegom!

6. Pokaži, da je vsak pravokotni trikotnik s celoštevilskimi stranicami tudi Heronov trikotnik!

Danijel Bezek

HERONOVI TRIKOTNIKI - rešitev s str. 132

1. Stranica b je za $2n(mn - 1)$ manjša od vsote stranic $(a+c)$ in stranica a je za $2m(mn - 1)$ manjša od vsote stranic $(b+c)$.

2. $p = \rho s \Rightarrow \rho = p/s = mn - 1$

3. $p = abc/4r \Rightarrow r = abc/4p = (1 + n^2)(1 + m^2)/4$
   Produkt $(1 + m^2)(1 + n^2)$ je deljiv s 4, če sta m in n lihi števili.

4. $v_a = 2p/a = 2n(m + n)/(1 + n^2)$
   $v_b = 2p/b = 2m(m + n)/(1 + m^2)$
   $v_c = 2p/c = 2mn/(mn - 1)$
   Vsi trije imenovalci morajo biti sodi, zato sta m in n lihi števili. Število $(mn - 1)$ je potem sodo in je tuje proti mn. Če naj bo v_c celo število, mora biti $mn - 1 = 2$. Od tod $mn = 3$. Vstavimo $m = 3$ in $n = 1$ v izraz za v_a in v_b in se prepričamo, da v_b ni naravno število.

5. Za $m = 2$ in $n = 2$ dobimo trikotnik s stranicami $a = 10$, $b = 10$ in $c = 12$. Okrajšamo z 2 in dobimo $a' = 5$, $b' = 5$ in $c' = 6$!

6. Za pravokotni trikotnik s celoštevilskimi stranicami velja: $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ in $c = u^2 + v^2$ (glej Presek - 4/1977/78). Ploščina je: $p = ab/2 = (u^2 - v^2)uv$.

Danijel Bezek