PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 4
Strani 204–205

Edvard Kramar:

ODLIKOVANI TRIKOTNIKI, II. Del

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-4-Kramar.pdf

ODLIKOVANI TRIKOTNIKI

2. del

Zadnjič* smo imenovali odlikovane vse tiste trikotnike, katerih dolžine stranic so naravna števila in imajo še lepo lastnost, da je njihov obseg številsko enak λ-kratni ploščini. Poiskali smo že vse take trikotnike pri $\lambda=1$ in $\lambda=2$. Poiščimo še nekaj ostalih rešitev !

Iskani trikotnik smo pisali v obliki trojice (a,b,c), pri čemer je bilo $a \leq b \leq c$. Vpeljali smo še naravna števila m, n in k, ki se s stranicami in srednjico s izražajo

$$m = 2(s-a), \quad n = 2(s-b), \quad k = 2(s-c)$$

Problem iskanja odlikovanih trikotnikov smo po krajšem premisleku izrazili takole: *pri danem parametru* $\lambda>0$ *dobimo vse odlikovane trikotnike z razrešitvijo zahtev*

$$16(m+n+k) = \lambda^2 mnk$$

$$nk \leq 48/\lambda^2 \ , \ k^2 \leq 48/\lambda^2$$

$k \leq n \leq m$ *ter* m, n *in* k *so iste parnosti.*
Stranice trikotnika dobimo nato iz zvez

$$a = (n+k)/2, \ b = (m+k)/2, \ c = (m+n)/2$$

Razrešimo sedaj zgornji sistem zahtev za vse parametre λ, ki so večji od števila $\sqrt{8}$, saj kot bomo videli, jih ni prav veliko. Med rešitvami bodo vsebovani tudi morebitni trikotniki za $\lambda=3,4,..$

Upoštevajmo torej zahtevo $\lambda^2 > 8$ in naše ocene še malo poostrimo: $16\cdot 3m \geq 16(m+n+k) = \lambda^2 mnk > 8mnk$. Odtod po krajšanju dobimo $kn < 6$ in še $k^2 = k\cdot k \leq k\cdot n < 6$. Očitno imamo za k edini možni rešitvi $k = 1$ ali $k = 2$. Ker je število n iste parnosti kot k, dobimo naslednje možnosti: $k = 1$; $n = 1,3$ ali 5 ter $k = 2$; $n = 2$. Oglejmo si še, kako je s številom m, zanj imamo še največ izbire pri $k = 1$, $n = 1$, saj je lahko enak poljubnemu lihemu številu $m = 2i-1$, $i=1,2,3,\ldots$ in vsak ustrezni parameter λ bo tak, kot smo zahtevali ($\lambda_i^2 = 16(1+ 2/(2i-1)) > 8$, $i=1,2,\ldots$). Pri $k=1$, $n=3$ dobimo le tri rešitve: $m = 3,5$ ali 7 z ustreznimi para-

---

*Glej 2. številko, str.113

metri $\lambda_m^2 = 16(1+4/m)/3$, medtem ko je za $m \geq 9$ parameter $\lambda^2 < 8$. Hitro ugotovimo, da za $k=1$, $n=5$ ne dobimo nobene rešitve za m, kajti iz $m \geq n = 5$ sledi $\lambda^2 = 16(1+6/m)/5 < 8$. Ostane nam le še primer $k=2$, $n=2$; pri tem pa bo $\lambda^2 < 8$ le, če bo $16(4+m) = 4\lambda^2 m > 4\cdot 8m$, to je $m < 4$. Očitno je edina možnost $m=2$. Ustrezni parameter je tedaj $\lambda^2 = 12$.

Strnimo zadnje ugotovitve: za $\lambda > \sqrt{8}$ dobimo le naslednje odlikovane trikotnike z ustreznimi parametri

a	b	c	λ	
1	i	i	$4\sqrt{1+2/(2i-1)}$,	$i=1,2,3,\ldots$
2	2	3	$4\sqrt{7/3}$	
2	3	4	$4\sqrt{3/5}$	
2	4	5	$4\sqrt{11/21}$	
2	2	2	$2\sqrt{3}$	

Opazili smo, da z večanjem parametra λ dobimo vse manj odlikovanih trikotnikov. Za $\lambda=1$ smo jih dobili pet, za $\lambda=2$ le enega, za večje cele vrednosti λ pa nobenega več, nekaj smo jih našli samo pri nekaterih iracionalnih vrednostih parametra (sam se prepričaj, da so zgornje vrednosti res vse iracionalna števila), največji od teh je bil $\lambda = \sqrt{48}$.

Hitro se lahko prepričamo, da je pri manjših vrednostih parametra λ veliko več odlikovanih trikotnikov, vendar jih je še vedno pri posamezni vrednosti le končno, kar sledi iz neenačb $k^2 \leq 48/\lambda^2$, $nk \leq 48/\lambda^2$ in iz zgornje enačbe.

Iz danih odlikovanih trikotnikov lahko naredimo seveda nove tako, da trojko (a,b,c) pomnožimo s skupnim številom r in dobimo trojko (ra,rb,rc) spet iz celih števil, če le vzamemo za r naravno število ali ulomek, katerega imenovalec je skupni delitelj števil a, b in c. Sam se prepričaj, da je novi parameter tedaj enak λ/r ! Odtod vidimo, da dobimo veliko več odlikovanih trikotnikov pri majhnih vrednostih parametra λ.

Reši sam še naslednje naloge:

a) Poišči vse odlikovane enakostranične trikotnike za $1/2 < \lambda < 2$!
b) Poišči vse odlikovane pravokotne trikotnike za $\lambda > 3/4$!
c) Izračunaj radij včrtanega kroga odlikovanih trikotnikov!

Edvard Kramar