PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 3
Strani 182–184

Edmond Rusjan:

LETNA ŠOLA MALDIH MATEMATIKOV

Ključne besede: novice.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-3-Rusjan.pdf

LETNA ŠOLA MLADIH MATEMATIKOV

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Hrvatske je letos organiziralo že peto letno šolo mladih matematikov v Primoštenu. Med 12. in 18. julijem 1976 smo se v tem prijetnem turističnem kraju zbrali mladi matematiki iz vse Jugoslavije. Izbrali so nas po rezultatih republiških tekmovanj in zveznega tekmovanja. Slovenijo smo zastopali: Matjaž Vidmar - zdaj učenec 4. razreda gimnazije v Novi Gorici, ki je pravi rekorder, saj je bil v Primoštenu že tretjič; Luka Šušteršič - učenec 4. razreda I. gimnazije v Ljubljani je sodeloval v letni šoli drugič in Edmond Rusjan - učenec 3. razreda I. gimnazije v Ljubljani prvič.

Primošten je zelo lep turistični kraj ob morju med Šibenikom in Splitom. Starejši del mesteca leži na majhnem polotoku, ki ga le ozek pas povezuje s kopnim, kjer rastejo sodobni hoteli. Zraven njih je tudi tabor esperantistov, kjer smo stanovali.

Dopoldne smo imeli tri ure predavanj, ki so jih vodili univerzitetni profesorji. Dr. Kurnik je predaval o izbranih problemih o konveksnih množicah, dr. Mičić o algebrskih in transcendentnih številih, dr. Palman pa o projektivni geometriji. Predavanja so bila zelo zanimiva, vendar precej zahtevna.

Popoldne in zvečer smo bili prosti. Takrat smo se kopali, igrali minigolf, šah in se sprehajali po Primoštenu. Veliko smo se tudi pogovarjali in to o najrazličnejših temah. Izvedel sem marsikaj zanimivega o življenju mladih drugod po Jugoslaviji, s kakšnimi zunajšolskimi dejavnostmi se ukvarjajo in kaj jih najbolj zanima. Razumljivo, da je pogovor nanesel tudi na matematiko. Kolegi iz Beograda so me vprašali, če imamo tudi v Sloveniji kakšno matematično gimnazijo. Ko sem jim povedal, da tudi jaz obiskujem oddelek za intenzivno matematiko, jih je zanimalo, koliko ur matematike imamo. Odgovoril sem, da imamo 9 ur v dveh tednih. Čudili so se, kakšen intenziven oddelek sploh je to, saj imajo oni 9 ur na teden, v Zagrebu pa 7 ur na teden.

Predzadnji dan smo odšli na izlet z ladjo na otoka Krapanj in Zlarin. Teden v Primoštenu je hitro minil in odšli smo domov s tiho željo, da bi se še vrnili.

Še nekaj nalog, ki so jih zastavili predavatelji, pa tudi kolegi:

1. V kotu šahovnice stoji šahovski konj. Ali lahko skače tako, da skoči na vsako polje natanko enkrat in da konča potovanje v nasprotnem kotu šahovnice?
2. Dokaži, da število 0,12112111211112... ni racionalno!
3. Dokaži, da je od vseh števil oblike $2p + 1$ (p je praštevilo) samo eno kub naravnega števila!
4. Če sta a in b tuji si števili $(a,b) = 1$, dokaži

$$(a + b,\ a^2 - ab + b^2) = 1 \text{ ali } 3.$$

Rešitve:

1. Šahovski konj skoči vedno z belega na črno polje, s črnega pa na belo. Če začne svoje potovanje na belem polju, bo po eni potezi stal na črnem polju, po dveh na belem itd. Po $2k$-1 potezah bo stal na črnem, po $2k$ potezah pa spet na belem. Ker ima šahovnica 64 polj in mora skočiti na vsako polje enkrat, bo napravil 63 potez. Na koncu potovanja bo stal na polju druge barve kot na začetku. Polji v nasprotnih kotih šahovnice pa sta iste barve. Zato ne more začeti skakati v enem kotu šahovnice, končati pa v nasprotnem.
2. Za vsako racionalno število obstaja enoličen neskončen periodičen decimalni zapis. Predpostavimo, da je 0,121121112.... racionalno število. V njegovi periodi so enice in dvojke. Poskusimo ugotoviti, koliko cifer je v periodi! Samo ena ne more biti, ker bi bila to enica ali dvojka, ne pa oboje. Dve cifri ne moreta biti v periodi, ker imamo v zapisu dve enici zaporedoma in mora biti v periodi vsaj ena dvojka. Podobno sklepamo za tri cifre, za štiri itd. Za poljubno naravno število n lahko najdemo n zaporednih enic, zato n ne more biti število cifer v periodi. Ker 0,121121112.. nima periodičnega decimalnega zapisa, ni racionalno število.
3. Če enačbo

$$2p + 1 = k^3 \qquad (p \text{ je praštevilo})$$

malo preoblikujemo, dobimo

$$k^3 - 1 = 2p$$
$$(k - 1).(k^2 + k + 1) = 2p$$

Ker je p praštevilo, sta sedaj le dve možnosti.

1. $k - 1 = 1$, $k = 2$ in $k^2 + k + 1 = 2p$, $4 + 2 + 1 = 2p$

kar vodi v protislovje: $7 = 2p$.

2. $k - 1 = 2$, $k = 3$ in $k^2 + k + 1 = p$, $9 + 3 + 1 = p$, $p = 13$

Od vseh števil oblike $2p + 1$ je kub samo število 27:

$$2.13 + 1 = 3^3 = 27.$$

4. Če $a^2 - ab + b^2$ delimo z $a+b$, dobimo

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b).(a - 2b) + 3b^2$$

Če je število k delitelj dveh števil, je tudi delitelj njune vsote in razlike. S pomočjo tega izreka se lahko prepričamo, da velja

$$(a^2 - ab + b^2,\ a + b) = (a + b,\ 3b^2)$$

$(a + b,\ 3b^2)$ je lahko enak 3, na primer $a = 4,\ b = 5 \Rightarrow (9,\ 75) = 3$, lahko pa tudi 1, na primer $a = 1,\ b = 3 \Rightarrow (4,\ 27) = 1$.

Dokažimo, da ne more biti nobeno praštevilo p skupni delitelj števil $a+b$ in b^2 !

Iz $p|b^2$ sledi $p|b$ in $b = p.c$

Iz $p|(a+b)$ sledi $a + b = p.d$

$$a = (a + b) - b = p.d - p.c = p.(d-c)$$

Torej $p|(a,b)$, kar je protislovje.

Vsak skupni delitelj števil $a+b$ in b^2 lahko razstavimo v produkt praštevil. Vsako od teh praštevil je tudi skupni delitelj števil $a+b$ in b^2. Malo prej pa smo dokazali obratno: nobeno praštevilo ni skupni delitelj števil $a+b$ in b^2.

Torej tudi nobeno sestavljeno število ni skupni delitelj števil $a+b$ in b^2.

S tem pa smo že dokazali

$$(a + b,\ 3b^2) = 1 \text{ ali } 3$$

in

$$(a^2 - ab + b^2,\ a + b) = (a + b,\ 3b^2) = 1 \text{ ali } 3$$

Edmond Rusjan