PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 6
Strani 322–323

Andreja Pečovnik Mencinger:

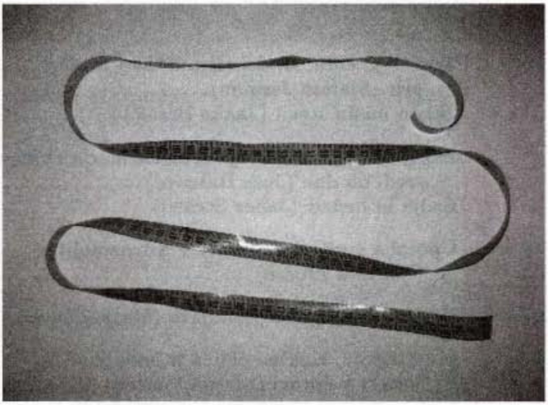
LINEARNA SPIRALA

Ključne besede: naloge, matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1575-Pecovnik.pdf

LINEARNA SPIRALA

Bralci Preseka gotovo poznate šiviljski meter (glej sliko 1), saj ste ga verjetno že zvijali v kolut, kot kaže slika 2.



Slika 1.

Slika 2.

Naloga, ki vam jo Presek tokrat nalaga, je dvojna:

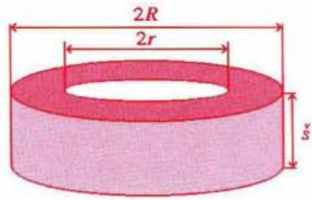
a) Z domačega (maminega ali babičinega) šiviljskega metra odčitaj njegovo dolžino, s pomičnim merilom izmeri njegovo debelino, lahko pa izmeriš tudi širino metra (čeprav ta podatek v bistvu ni potreben). Poišči svinčnik in izmeri njegov premer. Šiviljski meter navij na svinčnik, da nastane kolut (slika 2), in preštej, kolikokrat se meter ovije okoli svinčnika.

b) Dobljeni eksperimentalni podatek poskusi potrditi računsko. V pomoč naj ti bodo naslednja navodila:

1. način.

Ko meter zvijamo, se njegov volumen (tako rekoč) ne spreminja; torej je volumen kvadra (ko je meter popolnoma raven – slika 3) enaka volumnu kolobarja (razlika dveh valjev – slika 4). Če primerjamo samo tlorisa teles na slikah 3 in 4, lahko podobno sklepamo tudi za ploščini pravokotnika in kolobarja.

Slika 3. Kvader



Slika 4. Izrezani valj

2. način.

Ko meter zvijamo, se njegova dolžina (tako rekoč) ne spreminja. Spiralno krivuljo lahko zaradi lažjega računanja približno opišemo s koncentričnimi krogi (glej sliki 5 in 6).

Slika 5. Spirala

Slika 6. Koncentrične krožnice

Če se računski rezultat od eksperimentalnega ne razlikuje za več kot dva zavoja, si (verjetno) pravilno računal (in meril).

Izračunaj še, koliko navojev bi približno prišlo v spiralo, če bi 10 meterski trak debeline $\frac{1}{2}$ milimetra navili na kolut premera 3 centimetre.

Andreja Pečovnik Mencinger

Rešitve so na strani 362.

LINEARNA SPIRALA – Rešitev s str. 322

Šiviljski meter, ki je na sliki 1, meri 150 cm, njegova debelina je 0.6 mm, njegova širina pa je 1 cm. Na svinčnik premera $2r = 7.7$ mm ga lahko ovijemo $n = 22$ krat. Upoštevajoč navodila iz prejšnje številke Preseka bomo ta "eksperiment" računsko potrdili na dva načina:

1. način

Volumen kvadra je enak $V = l \cdot \Delta \cdot š$, volumen izrezanega valja pa je enak $V = \pi \left(R^2 - r^2\right) \cdot š$. Po enačenju obeh volumnov dobimo

$$l\Delta = \pi \left(R^2 - r^2\right) ,$$

od koder sledi

$$R = \sqrt{\frac{l\Delta}{\pi} + r^2} .$$

Število zavojev n v spirali je tako približno enako kvocientu debeline navitja in debeline merskega traku

$$n = \frac{R - r}{\Delta} = \frac{\sqrt{\frac{l\Delta}{\pi} + r^2} - r}{\Delta} \approx 22.5 .$$

2. način.

Spiralo lahko približno opišemo z n koncentričnimi krožnicami. Polmer prve krožnice je enak $r + \Delta$, polmer vsake naslednje krožnice pa je od prejšnjega večji za Δ, tako da polmeri tvorijo *aritmetično zaporedje* z začetnim členom $a_0 = r + \Delta$ in diferenco $d = \Delta$. V tem primeru enačimo vsoto obsegov n koncentričnih krožnic in dolžino šiviljskega traku l:

$$2\pi (r + \Delta) + 2\pi (r + 2\Delta) + \cdots + 2\pi (r + [n-1]\Delta) = l .$$

Če zgornjo enačbo okrajšamo z 2π in upoštevamo, da je vsota prvih $n - 1$ naravnih števil enaka $\frac{1}{2}(n-1)n$, dobimo

$$\begin{aligned} nr + \Delta (1 + 2 + \cdots + n - 1) &= \frac{l}{2\pi} \\ nr + \frac{(n-1)n}{2}\Delta &= \frac{l}{2\pi} , \end{aligned}$$

od koder sledi za n kvadratna enačba:

$$n^2\Delta + (2r - \Delta)\, n - \frac{l}{\pi} = 0\,.$$

Ena rešitev je negativna, druga pa je enaka

$$n = \frac{\sqrt{4r^2 - 4r\Delta + \Delta^2 + \frac{4\Delta l}{\pi}} - 2r + \Delta}{2\Delta} \approx 22.9\,.$$

Za radovedne bralce na koncu omenimo, da z obema zgornjima načinoma dobimo približek. Točno vrednost je malo težje izračunati. Uporabiti je treba formulo za ločno dolžino parametrično podane krivulje. Če je namreč $(x(\phi), y(\phi))$ parametrično podana krivulja (s parametrom ϕ), je dolžina loka med točkama $A(x(\phi_A), y(\phi_A))$ in $B(x(\phi_B), y(\phi_B))$ enaka

$$l = \int_{\phi_A}^{\phi_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}\, d\phi\,. \tag{1}$$

Tako dobimo še tretji način.

3. način.

Spirala, ki relativno dobro opisuje sredinsko črto zvitega traku, ima enačbo

$$(x(\phi), y(\phi)) = A(\phi)(\cos\phi, \sin\phi)\ ,$$

kjer je $A(\phi) = r + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2\pi}\phi$. Integral (1) je v tem primeru preveč zapleten, da bi ga natančno računali. Zadovoljili se bomo z numeričnimi rezultati: za $n = 22$ je $l = 1.486$ m, za $n = 23$ pa je $l = 1.596$ m, za $n = 22.128$ pa dobimo $l = 1.5000$ m.

Kaže, da je natančnejši prvi način, ki je tudi enostavnejši.

Rešitev zastavljene naloge s strani 322 je:

a) po prvem načinu: $R = 42.\,621$ in $n = 55.\,242$,
b) po drugem načinu: $n = 55.\,567$.

Andreja Pečovnik Mencinger