**PRESEK**
**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 5
Strani 278–282

Nada Razpet:

# PRETAKANJE VODE IN BINOMSKI SIMBOLI

Ključne besede: matematika, binomski simboli.

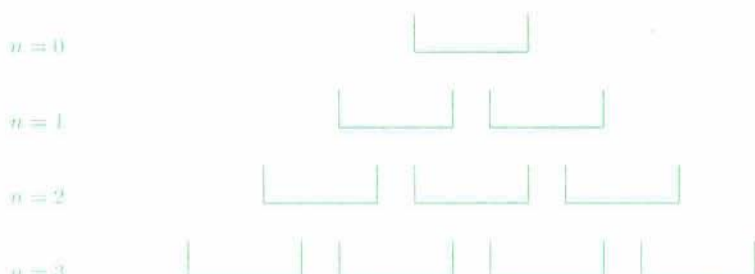
Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1569-Razpet.pdf

# PRETAKANJE VODE IN BINOMSKI SIMBOLI

Pretakanje vode iz posode v posodo je lahko zelo zanimivo. Spomnimo se samo na vodne ure, na terase, po katerih se pretaka voda, in na različne znamenite vodnjake. Tokrat si oglejmo, kakšno zvezo s pretakanjem vode imajo Pascalov trikotnik in binomski simboli.

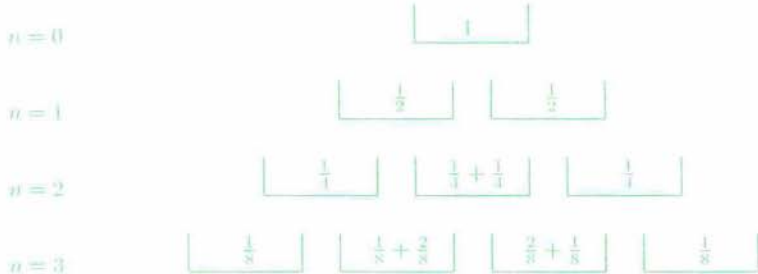
Izberimo posebne posode, ki imajo ravno dno, na katerem sta tik ob steni na nasprotnih straneh dve odprtini. Presek take posode kaže slika.

Pretakanje skozi odprtine nadzorujemo s posebnimi magnetnimi ventili. Ti nam omogočajo, da odprtini hkrati odpremo in zapremo ter tako uravnavamo količino vode, ki izteka skozi posamezno oprtino. Posode postavimo v obliki piramide, kot kaže slika (odprtin nismo risali).




Najprej odpremo ventila v posodi, ki leži najvišje ($n = 0$). Ko voda iz posode izteče, se hkrati odprejo vsi ventili v posodah na nivoju $n = 1$, ko so te prazne, se odprejo ventili na nivoju $n = 2$ in tako naprej.

Obravnavajmo primer, ko je pretok vode skozi obe odprtini posamezne posode enak, torej ko skozi vsako odprtino steče polovica vode, ki je v posodi.




Posoda na nivoju $n = 0$ naj bo polna vode (1 enota). Ko odpremo odprtini, se skozi vsako iztoči $1/2$ količine vode. Ko odpremo odprtine na nivoju $n = 1$, teče voda v posode na nivoju $n = 2$. V prvo posodo teče voda le iz ene odprtine posode nad njo, torej $1/4$, v drugo teče voda iz dveh odprtin, torej priteče $(1/4) + (1/4)$, in v zadnjo posodo na tem nivoju spet priteka voda samo iz ene odprtine, torej priteče $1/4$ vode. Na nivoju $n = 3$ teče v prvo posodo voda le iz ene odprtine posode, ki je nad njo, v sosednji dve posodi teče voda iz dveh odprtin in v zadnjo spet iz ene odprtine.

Opazimo naslednje:

- Vsota števil v vsaki vrstici je 1 (to je ravno količina vode, ki jo pretakamo).
- Števila v naslednji vrsti dobimo tako, da vsoto števil, ki sta levo in desno nad iskanim številom, delimo z dve.
- V vsaki vrstici damo ulomke na najmanjši skupni imenovalec. Če bi zapisovali samo števce ulomkov, bi nastal Pascalov trikotnik.

Zapišimo člene na $n$-tem nivoju

$$\frac{\binom{n}{0}}{2^n}, \quad \frac{\binom{n}{1}}{2^n}, \quad \frac{\binom{n}{2}}{2^n}, \ldots \frac{\binom{n}{n}}{2^n}.$$

Vsota teh števil predstavlja skupno količino vode v posodah na $n$-tem nivoju, zato je

$$\frac{\binom{n}{0}}{2^n} + \frac{\binom{n}{1}}{2^n} + \frac{\binom{n}{2}}{2^n} + \ldots + \frac{\binom{n}{n}}{2^n} = 1\,.$$

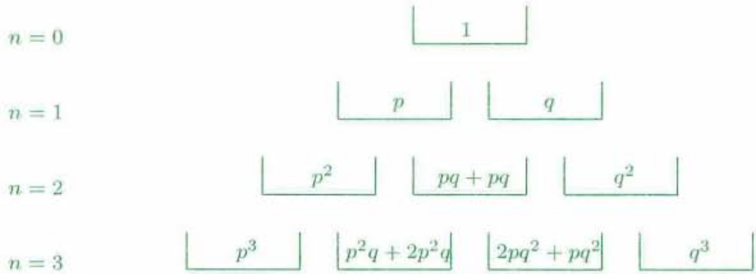
Upoštevali smo, da je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Enačbo pomnožimo z $2^n$ in dobimo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n .$$

Izračunali smo vsoto binomskih simbolov $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Zdaj poglejmo primer, ko na vsakem nivoju skozi levo odprtino izteče delež $p$, skozi desno pa delež $q$ vode. Pri tem seveda velja, da je $p + q = 1$.

Poglejmo, kako se voda pretaka po nivojih.




Zapišimo rezultate še v tabelo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 0$ | | | | | $1$ | | | | |
| $n = 1$ | | | | $p$ | | $q$ | | | |
| $n = 2$ | | | $p^2$ | | $2pq$ | | $q^2$ | | |
| $n = 3$ | | $p^3$ | | $3p^2q$ | | $3pq^2$ | | $q^3$ | |
| $n = 4$ | $p^4$ | | $4p^3q$ | | $6p^2q^2$ | | $4pq^3$ | | $p^4$ |

Opazimo, da koeficienti členov v posameznih vrsticah spet tvorijo Pascalov trikotnik, zato lahko skupno količino vode na $n$-tem nivoju zapišemo kot vsoto naslednjih prispevkov:

$$\binom{n}{0}p^n + \binom{n}{1}p^{n-1}q^1 + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 + \cdots + \binom{n}{n}q^n = 1 . \qquad \text{(M1)}$$

Izberimo za $p$ in $q$ posebni vrednosti

$$p = \frac{a}{a+b} \qquad \text{in} \qquad q = \frac{b}{a+b} ,$$

kjer sta $a$ in $b$ pozitivni števili in seveda $p + q = 1$.

Splošni člen v enačbi (M1) je potem

$$\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k}=\binom{n}{k}\frac{a^{n-k}b^k}{(a+b)^n}\,.$$

Enačbo (M1) pomnožimo na obeh straneh z $(a+b)^n$ in dobimo

$$\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n=(a+b)^n\,. \qquad \text{(M2)}$$

Vidimo, da smo na fizikalni način izpeljali binomsko formulo, ki pa v resnici velja za poljubni realni števili $a$ in $b$.

Pojasnimo še zapis količine vode z binomskimi koeficienti. Količino vode v $k$-ti posodi na $n$-tem nivoju zapišemo kot

$$C_{n,k}p^{n-k}q^k\,.$$

Mislimo si, da na $n$-tem nivoju gledamo dve posodi ($k$-to in $(k+1)$-vo), iz katerih teče voda v posodo na $(n+1)$-vem nivoju ($(k+1)$-va posoda). V posodo izteče $p$-ti delež vode iz leve zgornje posode in $q$-ti delež vode iz desne posode nad njo, torej

$$C_{n,k}p^{n-k}q^{k+1}+C_{n,k+1}p^{n-k}q^{k+1}\,.$$

Sledi

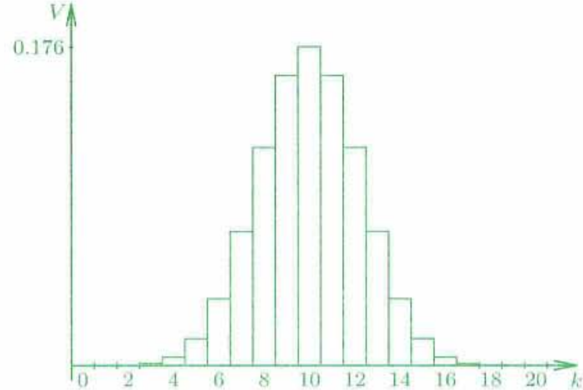
$$C_{n+1,k+1}p^{n+1-k-1}q^{k+1}=C_{n,k}p^{n-k}q^{k+1}+C_{n,k+1}p^{n-k}q^{k+1}\,.$$

Ko zvezo poenostavimo, dobimo rekurzivno enačbo za koeficiente

$$C_{n+1,k+1}=C_{n,k}+C_{n,k+1}\,.$$

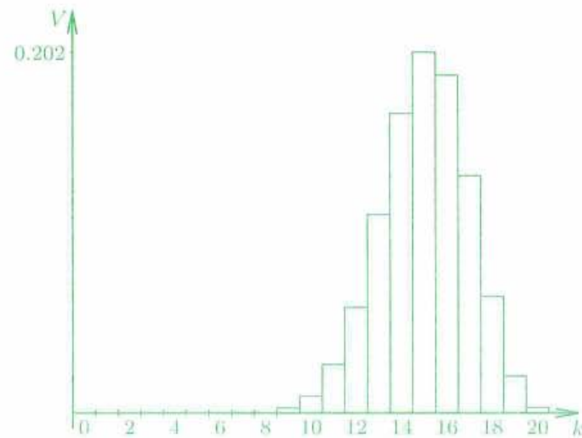
Vemo, da je $C_{n,0}=C_{n,n}=1$. Zdaj lahko bralci sami izračunajo koeficiente.

Za konec si še narišimo, koliko vode bi se nateklo v posode na nivoju $n=20$ v primeru, ko velja $p=q=1/2$. Na tem nivoju je $k$ posod, pri čemer štejemo $k$ od 0 do $n$, kar pomeni, da je na $n$-tem nivoju $(n+1)$ posod, v našem primeru 21.




Višina stolpca pomeni količino vode v posodi. V vseh posodah skupaj je toliko vode, kot jo je bilo na začetku v prvi posodi ($V = 1$). Pri tem opazimo, da v prvih nekaj in zadnjih nekaj posodah ni nobenega stolpca. Količina vode, ki se nateče v teh posodah, je praktično nič. Če bi zalivali rože na tak način, potem bi se rože, ki bi bile na obeh koncih, posušile. Slika je simetrična glede na osrednji stolpec pri $k = 10$.

Poglejmo še, kakšna je slika, če je $p = 1/4$ in $q = 3/4$.




Zdaj je največ vode v petnajsti posodi. Graf ni več simetričen.

*Nada Razpet*