PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **3** (1975/1976)
Številka 2
Strani 82–85

Edvard Kramar:

KAKO DOBIMO NEKATERE CELOŠTEVILSKE TRIKOTNIKE

Ključne besede: matematika, teorija števil, geometrija, trikotnik, pitagorejska trojica, celoštevilski trikotnik.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/3/3-2-Kramar.pdf

KAKO DOBIMO NEKATERE CELOŠTEVILSKE TRIKOTNIKE

Vprašajmo se, kako bi poiskali vse celoštevilske trojice (a,b,c), ki so dolžine stranic nekega trikotnika z enim vnaprej predpisanim kotom γ. Poiskali bomo vse rešitve za trikotnike z enim kotom $90°$, $120°$ in $60°$.

Dogovorimo se, da naj bo c dolžina stranice, ki leži nasproti predpisanemu kotu γ. Trojico za ta kot bomo včasih pisali z $(a,b,c)_\gamma$.

Pravi kot

Za $\gamma = 90°$ dobimo ravno celoštevilske pravokotne trikotnike in trojico (a,b,c), za katero velja Pitagorov izrek

$$a^2 + b^2 = c^2$$

imenujemo tudi *pitagorejsko trojico*.

Če namesto števil a,b in c uvedemo števila u,v in z, ki so s prejšnjimi v zvezi

$$a = u + z \;, \; b = v + z \;, \; c = u + v + z$$

dobi zgornji Pitagorov izrek preprostejšo obliko

$$2uv = z^2$$

Ker moramo rešiti enačbo

$$uv = z^2/2$$

v celih številih, je očitno, kako tvorimo pitagorejske trojice. Izbiramo soda naravna števila za z, za u in v vzamemo cele delitelje števila $z^2/2$ v poljubnem vrstnem redu in nato iz zgornjih zvez izračunamo števila a,b in c. Da dobimo s tem res vse pitagorejske trojice, je očitno, saj lahko k vsaki trojici (a,b,c) poiščemo nazaj u, v in z iz zvez

$$u = c - b \;,\; v = c - a \;,\; z = a + b - c$$

Bolj znan način, toda ne tako ugoden, je naslednji: namesto, da trojice (a,b,c) predstavimo s števili u,v in z preko linearnih zvez, jih izrazimo s številoma u in v v obliki

$$a = u^2 - v^2 \quad , \quad b = 2uv \quad , \quad c = u^2 + v^2$$

Če za u in v izbiramo celi, tuji si števili, od katerih je eno sodo in eno liho, dobimo za (a,b,c) ravno pitagorejske trojice, vendar le tako imenovane primitivne trojice, to je trojice, v katerih so a,b in c paroma si tuja števila. Vse ostale trojice dobimo tako, da primitivne trojice pomnožimo s poljubnim naravnim številom. To trditev poskusi dokazati sam !

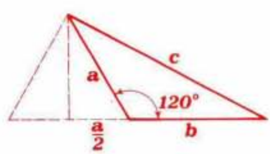
Kot 120°

Poiščimo vse celoštevilske trikotnike z enim kotom $\gamma = 120°$. Namesto Pitagorovega izreka bomo dobili drugačno zvezo med dolžinami stranic. Iz slike je očitno

$$c^2 - (\tfrac{a}{2} + b)^2 = a^2 - (\tfrac{a}{2})^2$$

odkoder dobimo zvezo

$$a^2 + b^2 + ab = c^2$$



Linearne zveze med a,b,c in u,v,z, ki to enačbo poenostavijo, so

$$a = u + 2z \quad , \quad b = v + 2z \quad , \quad c = u + v + 3z \; .$$

Pri tem dobi zgornja enačba preprosto obliko

$$uv = 3z^2$$

iz katere sledi postopek za tvorbo celoštevilskih trikotnikov:

za z izbiramo zaporedna naravna števila, za u in v delitelje števila $3z^2$ v poljubnem vrstnem redu in nato iz zgornjih linearnih zvez med stranicami in parametri izračunamo trojico (a,b,c). Da dobimo s tem res vse trojice $(a,b,c)_{120°}$, je razvidno iz obratnih povezav

$$u = 2c - a - 2b \quad , \quad v = 2c - 2a - b \quad , \quad z = a + b - c$$

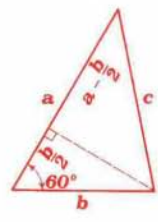
Kot $60°$

Nazadnje bi si zadali še nalogo poiskati vse celoštevilske trikotnike z enim kotom $\gamma = 60°$. Zvezo med stranicami razberemo iz slike

$$b^2 - (\frac{b}{2})^2 = c^2 - (a - \frac{b}{2})^2$$

oziroma

$$a^2 + b^2 - ab = c^2$$



Če bi tudi hoteli najti ustrezne linearne transformacije podobne prejšnjim, bi naleteli na težave. Lahko pa se naslonimo na zadnji primer.

Najprej tvorimo vse enakostranične trikotnike z izbiro $a = b = c = n$, kjer je n naravno število, trojice z med seboj različnimi elementi pa dobimo iz trojic za $\gamma = 120°$. Velja namreč :

Če je (a,b,c) trojica s kotom $\gamma = 120°$, sta $(a+b,b,c)$ in $(a+b,a,c)$ trojici s kotom $\gamma = 60°$.

Namreč, ker je

$$a^2 + b^2 + ab = c^2$$

je

$$(a+b)^2+b^2-(a+b)b = a^2+b^2+2ab+b^2-ab-b^2 = a^2+b^2+ab = c^2$$

in analogno tudi za drugi primer. Zgornjo trditev lahko preveriš tudi iz geometrijske slike.

Ostane le še vprašanje, če res dobimo vsako trojico s kotom $\gamma = 60°$ na ta način. Pa naj bo $(a,b,c)_{60°}$ poljubna taka trojica. Če je $a = b$, je tudi $a = b = c$; take trojice pa smo tvorili posebej. Če je $a > b$, je trojica $(a,b,c)_{60°}$ nastala iz $(a-b,b,c)_{120°}$, saj je

$$(a-b)^2+b^2+(a-b)b = a^2-2ab+b^2+b^2+ab-b^2 = a^2+b^2-ab = c^2$$

Če pa je $a < b$, je ta trojica nastala iz $(b-a,a,c)_{120°}$, kar preverimo na enak način kot zgoraj.

Ali bi znal še na kak drug način tvoriti vse omenjene celoštevilske trikotnike? Obstajajo celoštevilski trikotniki tudi z enim kotom 30° ali 45°?

Zapišimo ob koncu še nekaj primerov zgornjih trikotnikov :

$\gamma = 90°$						$\gamma = 120°$						$\gamma = 60°$					
u	v	z	a	b	c	u	v	z	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	2	2	3	4	5	1	3	1	3	5	7	8	5	7	1	1	1
2	1	2	4	3	5	3	1	1	5	3	7	8	3	7	2	2	2
1	8	4	5	12	13	1	12	2	5	16	19	21	5	19	3	3	3
2	4	4	6	8	10	3	4	2	7	8	13	21	16	19		...	
8	1	4	12	5	13	2	6	2	6	10	14	15	7	13		...	
	...			...			...			...			...			...	

Edvard Kramar