PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **27** (1999/2000)
Številka 3
Strani 146–151

Karmela Milutinović:

NALOGE O ELIPSAH IZ JAPONSKIH TEMPLJEV

Ključne besede: matematika, geometrija, elipse, Japonska, sangaku.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/27/1395-Milutinovic.pdf

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NALOGE O ELIPSAH IZ JAPONSKIH TEMPLJEV

Sangaku je izjemno zanimiv pojav v zgodovini matematike. Pomeni ploščice, ki prikazujejo matematične probleme in so jih na Japonskem v obdobju Edo (1603–1867) izobešali v šintoističnih templjih. V tem obdobju je bila Japonska praktično popolnoma izolirana od zahodnih vplivov, tako da se je tam razvijala povsem samosvoja matematika. Tako so japonski matematiki na različnih področjih dobili mnogo originalnih rezultatov oziroma originalnih dokazov rezultatov, ki so jih med tem odkrili tudi na zahodu. Na sangaku ploščicah najdemo predvsem geometrijske rezultate pogosto brez dokazov, saj so bile ploščice posvečene bogovom. Ker so se avtorji pri tem trudili napraviti tudi estetski izdelek, je bil rezultat zanimiva zmes matematike, umetnosti in religije.

Sangaku problemi so na zahodu znani že dalj časa. Tako R. Honsberger v knjigi *Mathematical Gems III* (1985) podrobno prikazuje eno od sangaku nalog in njeno rešitev ter navaja, da jo povzema po knjigi R. Johnsona *Advanced Euclidean Geometry*, ki je prvič izšla leta 1929. Vendar so šele po izidu knjige Fukagawe in Pedoa *Japanese Temple Geometry Problems* sangaku problemi postali zares znani. V revijah, kot so Crux Mathematicorum ali Quantum/Kvant, so jih začeli objavljati praktično v vsaki številki.

Ohranjenih je približno 900 sangaku ploščic, mnoge druge, ki so bile uničene, pa najdemo v starih japonskih knjigah. Fukagawa je v svoji knjigi predstavil 250 nalog, ki jih je našel na originalnih ploščicah in v knjigah. Podrobne rešitve so podane samo za manjše število nalog, vendar so večinoma sodobne. Originalne rešitve so znane samo za manjše število nalog (in še te so iz starih knjig in ne s ploščic).

Večina nalog v Fukagawovi knjigi se nanaša na "dotikajoče se figure". To so naloge o dotikajočih se krožnicah, včrtanih v druge krožnice, trikotnike, kvadrate, pravokotnike, naloge o elipsah, ki se dotikajo med sabo ali s krožnicami, ter naloge o dotikajočih se sferah (in tudi elipsoidih).

Kaže, da so celo naloge o elipsah originalno reševali s sredstvi prostorske geometrije (elipsa je presek valja z ravnino, krožnice pa preseki sfer z ravnino). Na ta način so japonski matematiki lahko naloge o elipsah in krožnicah obravnavali kot naloge o valjih in sferah.

Na tem mestu se bomo omejili le na nekaj nalog o elipsah. Pri tem bomo izbrali take, ki jih lahko rešimo z uporabo transformacije ravnine, ki elipso preslika v krožnico (preslikave, ki bi jo v ustreznem koordinatnem sistemu zapisali kot $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$ za neki fiksni λ).

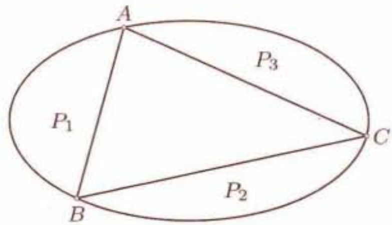
To preslikavo Fukagawa in Pedoe imenujeta preprosto "afina transformacija".

Za nas bo pomembno, da preslika elipso v krožnico (če sta ustrezno izbrana premica negibnih točk in koeficient λ), da preslika premice v premice in da pri tem ohranja incidentnost, tangente in vzporednost. V eni nalogi bo potrebno uporabiti tudi informacijo o tem, da ploščino transformiranega lika iz ploščine originala izračunamo z množenjem z $|\lambda|$.

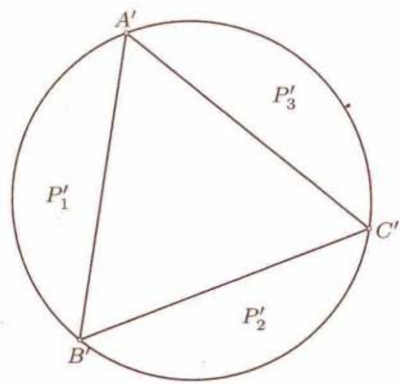
1. naloga. Na elipsi $O(a, b)$ so izbrane tri točke A, B in C tako, da so ploščine P_1, P_2, P_3 označenih odsekov elipse enake.

Pokaži, da je ploščina trikotnika ABC enaka

$$\frac{3}{4}\sqrt{3}ab\,.$$



Rešitev. Za premico negibih točk afine transformacije izberemo nosilko velike osi elipse, za koeficient raztega v smeri, pravokotni na to premico, pa a/b. Transformacija preslika elipso in trikotnik v krožnico in njej včrtani trikotnik.

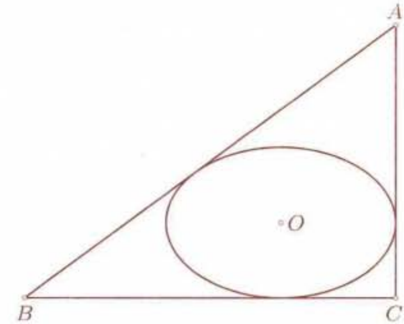


Ploščine tako dobljenih krožnih odsekov P_1', P_2', P_3' so med seboj enake, saj so dobljene z množenjem z a/b iz enakih ploščin odsekov elipse P_1, P_2, P_3. Od tod sledi, da je trikotnik $A'B'C'$ enakostraničen, saj različnim tetivam očitno ustrezajo različne ploščine krožnih odsekov.

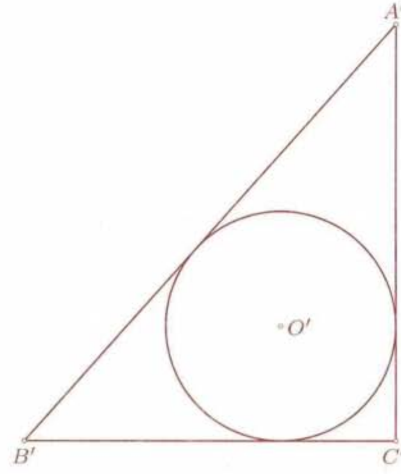
Ker je polmer krožnice enak a, meri stranica tega trikotnika $a\sqrt{3}$. Zato je njegova ploščina enaka $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$, izračunamo pa jo iz ploščine trikotnika ABC z množenjem s koeficientom a/b. Zato je ploščina trikotnika ABC enaka

$$\frac{3ab\sqrt{3}}{4}\,.$$

2. naloga. Trikotnik ABC ima pravi kot v oglišču C. Elipsa $O(a,b)$ je včrtana v ta trikotnik tako, da je njena velika os vzporedna z BC. Izrazite veliko polos a z AC, BC in b.



Rešitev. Elipso na enak način kot v rešitvi prejšnje naloge transformiramo v krožnico s polmerom a. Slika trikotnika ABC je pravokotni trikotnik $A'B'C'$, s pravim kotom pri C', očrtan tej krožnici. Dvakratno ploščino tega trikotnika izrazimo na dva načina:



$$B'C' \cdot A'C' = a(B'C' + A'C' + A'B').$$

Upoštevamo, da je $B'C' = BC$ in $A'C' = \frac{a}{b}AC$ ter uporabimo Pitagorov izrek:

$$A'B' = \sqrt{BC^2 + \frac{a^2}{b^2}AC^2}\,.$$

Tako dobimo

$$BC \cdot \frac{a}{b}AC = a\left(BC + \frac{a}{b}AC + \sqrt{BC^2 + \frac{a^2}{b^2}AC^2}\right).$$

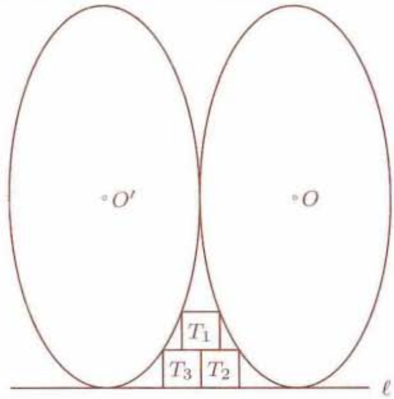
Od tod sledi

$$BC \cdot AC - b \cdot BC - a \cdot AC = \sqrt{a^2 \cdot AC^2 + b^2 \cdot BC^2}.$$

Po kvadriranju in preureditvi tega izraza dobimo

$$a = \frac{BC(AC - 2b)}{2(AC - b)}.$$

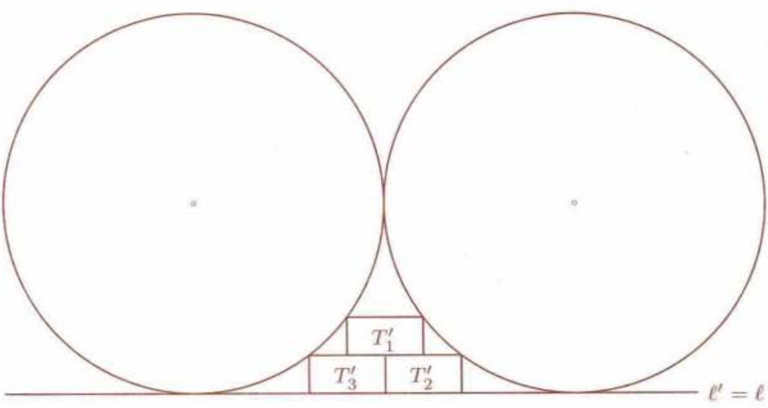
3. naloga. Skladni elipsi,$O(a,b)$ in $O'(a,b)$, se dotikata druga druge tako, da potekata mali osi obeh skozi dotikališče. Z ℓ je označena ena od skupnih zunanjih tangent (vzporedna malima osema). Trije skladni kvadrati T_1, T_2, T_3, s stranico t, so postavljeni tako, da imata dva skupno stranico, po eno stranico na ℓ in po eno oglišče na elipsah. Tretji ima po eno oglišče na vsaki elipsi in stranico, ki leži na dveh stranicah prvih dveh kvadratov (glej sliko).



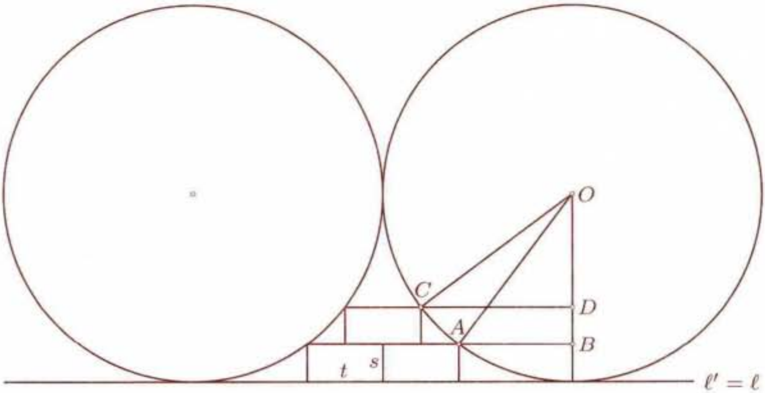
Pokaži, da je

$$a = 2b\,, \quad t = \frac{a}{5}\,.$$

Rešitev. Za premico negibnih točk afine transformacije izberemo ℓ, za koeficient raztega v smeri, pravokotni na to premico, pa b/a. Tako dobimo krožnici, tri pravokotnike in premico v naslednjem medsebojnem položaju:



Označimo krajšo stranico pravokotnika z s (daljša je že označena s t; pri tem je seveda $s = \frac{b}{a}t$) in upoštevamo, da je polmer krožnic enak b.



Dvakrat uporabimo Pitagorov izrek (za trikotnika OAB in OCD) in dobimo

$$(b-t)^2 + (b-s)^2 = b^2\,, \quad (b-\frac{t}{2})^2 + (b-2s)^2 = b^2\,.$$

Enačba

$$(b-t)^2 + (b-s)^2 = (b-\frac{t}{2})^2 + (b-2s)^2$$

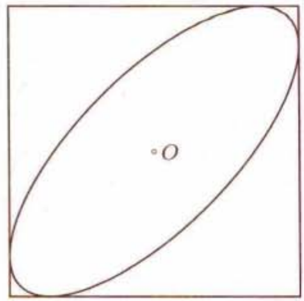
nam da $s = \frac{t}{2}$ ali $s = \frac{4b-3t}{6}$.

Če v enačbo $(b-t)^2+(b-s)^2 = b^2$ vstavimo $s = \frac{t}{2}$, dobimo kvadratno enačbo $5t^2 - 12bt + 4b^2 = 0$, ki ima dve rešitvi, $t = \frac{2b}{5}$ (ta da povezavo med a, b in t: iz $\frac{t}{s} = \frac{a}{b}$ in $s = \frac{t}{2}$ sledi $a = 2b$ in potem iz $t = \frac{2b}{5}$ dobimo še $t = \frac{a}{5}$) in $t = 2b$, ki odpade zaradi pogoja $t < b$, ki mora veljati, če želimo, da so kvadrati včrtani v lik, omejen z elipsama in premico na opisani način (sicer tudi ta rešitev da geometrijsko smiselni odgovor, vendar se tako dobljeni kvadrati prekrivajo z elipsama).

Če v enačbo $(b-t)^2 + (b-s)^2 = b^2$ vstavimo $s = \frac{4b-3t}{6}$, dobimo kvadratno enačbo $45t^2 - 60bt + 4b^2 = 0$. Rešitev $t = \frac{2(5+2\sqrt{5})}{15}$, $s = \frac{5-2\sqrt{5}}{15}$ odpade iz enakega razloga kot prej, rešitev $t = \frac{2(5-2\sqrt{5})}{15}$, $s = \frac{5+2\sqrt{5}}{15}$ pa odpade, ker je v tem primeru $b > a$. Ta rešitev nam sicer da kvadrate, včrtane na pravi način, vendar se elipsi dotikata v krajiščih velikih polosi.

Sami se spoprimite še z naslednjimi nalogami. Njihove rešitve bomo objavili v naslednji številki Preseka.

1. Elipsa $O(a, b)$ je včrtana v kvadrat s stranico t. Določi t, če veš, da so vsa števila a, b, t cela.

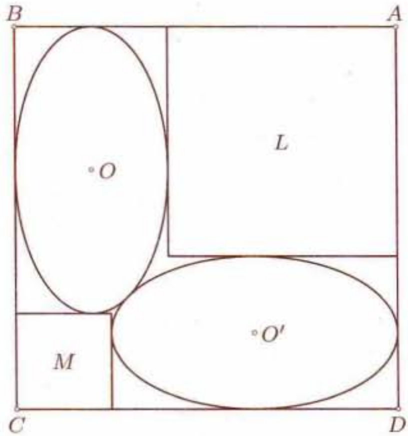


2. V kvadrat $ABCD$ sta včrtana kvadrata L (s stranico l) in M (s stranico m) tako, da se nahajata v nasprotnih vogalih kvadrata $ABCD$ in da po dve njuni stranici ležita na stranicah kvadrata $ABCD$.

Dve skladni elipsi, $O(b, a)$ in $O'(a, b)$, se dotikata druga druge in kvadratov L in M. Poleg tega se elipsi dotikata vsaka dveh stranic kvadrata $ABCD$ (glej sliko).

Pokaži, da je ploščina posamezne elipse enaka

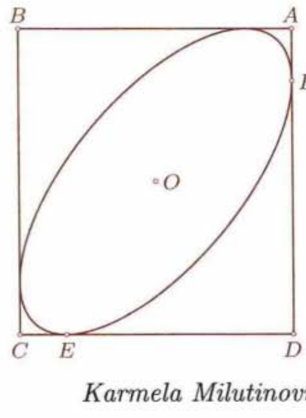
$$\frac{1}{2}\pi l m\,.$$



3. Elipsa $O(a, b)$ je včrtana v pravokotnik $ABCD$ in se dotika stranice CD v točki E ter stranice AD v točki F.

Pokaži, da je

$$AF \cdot ED = FD \cdot CE\,.$$



Karmela Milutinović