

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **27** (1999/2000)

Številka **1**

Strani 4-9, I, II, IV

Peter Legiša:

FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA IV – Fresnelova leča

Ključne besede: matematika, fizika, optika, fotografija, elektronska bliskavka.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/27/1389-Legisa.pdf>

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PRE SEK

27 (1999-2000)

1



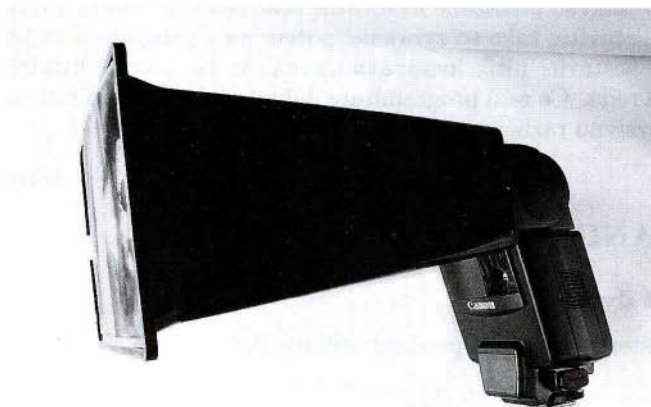
ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

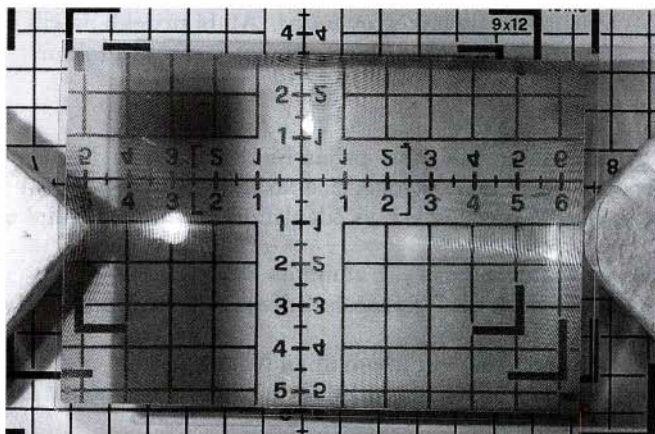


FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA IV – Fresnelova leča

Pred časom sem v ZDA naročil nastavek za elektronsko bliskavko. Sestavljen je iz črnega plastičnega ohišja in tanke prozorne plastične plošče s komaj opaznimi koncentričnimi brazdami (sliki 1 in 2). Nastavek snop svetlobe iz bliskavke skoncentrira v ožji snop, primeren za teleobjektive z goriščnimi razdaljami nad 300 mm. Na ta način se, kot sem preveril, doseg bliskavke vsaj podvoji.



Slika 1. Fresnelova leča z ohišjem na bliskavki.



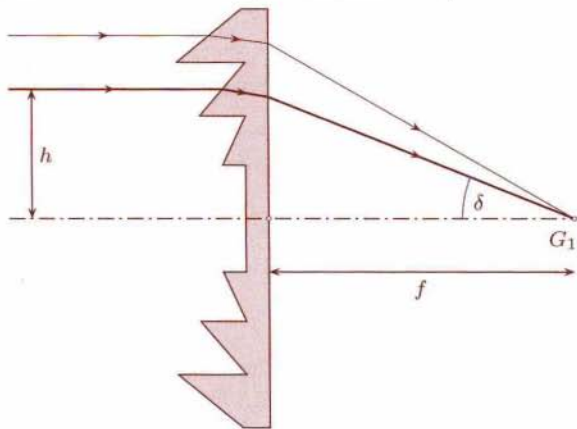
Slika 2. Fresnelova leča.

Zgoraj omenjena plastična plošča stane kakih 1000 SIT, je pa pravzaprav edini pomembni del vse zadeve. Pravijo ji *Fresnelova leča*. Če jo vrtimo v rokah, vidimo, da deluje podobno kot zbiralna leča. Na eni strani je gladka, na drugi komaj opazno razbrazdana. Globina brazd narašča proti robu. Seveda sem bil radoveden, kako stvar deluje.

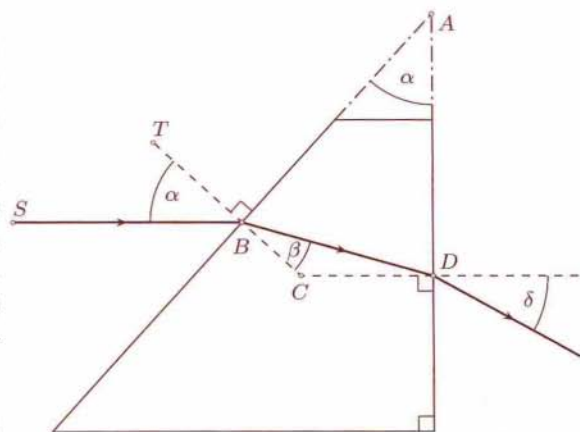
Os *Fresnelove* ali *stopničaste leče* je premica skozi središče vseh brazd, pravokotno na lečo. Prerez take leče z ravnino skozi os je, če ima leča le nekaj brazd, tak kot na sliki 3.

Recimo, da je naloga naše ploščate leče snop svetlobe, vzporeden osi, zbrati v gorišču G_1 (ali pa žarke iz točkastega svetila G_1 preusmeriti v vzporeden snop). Označimo z f razdaljo od G_1 do leče, s h razdaljo od brazde do središča leče in z α naklon brazde k ravnini leče. (Privzeli bomo, da so brazde tanke in da je kot α za vse točke na brazdi enak. Moja leča ima dve brazdi na milimeter, tako da je taka poenostavitev smiselna.) Iz slike 3 sledi

$$h = f \operatorname{tg} \delta. \quad (1)$$



Slika 3. Prerez Fresnelove leče.



Slika 4.

Denimo, da ima plastika naše leče lomni količnik n . Oglejmo si stvar od blizu (slika 4). Žarek SB je vzporeden osi leče in torej pravokoten na AD . Črtkano imamo narisani pravokotnici na plastiko. Kota $\angle SBT$ in

$\sphericalangle DAB$ imata paroma pravokotne krake, zato je $\sphericalangle SBT = \alpha$. Po lomnem zakonu je

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Ker je $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \alpha$, je $\sphericalangle CDB = \alpha - \beta$. Po lomnem zakonu v točki D je

$$\sin \delta = n \sin(\alpha - \beta).$$

Vzemimo, da je $\alpha = 30^\circ$. Za pleksi steklo z $n = 1,49$ izračunamo $\beta \doteq 19,61^\circ$, $\alpha - \beta \doteq 10,39^\circ$ in $\delta \doteq 15,59^\circ$. Za polistiren z $n = 1,59$ pa je $\delta \doteq 18,76^\circ$.

Splošno je

$$\beta = \arcsin(n^{-1} \sin \alpha) \quad \text{in} \quad \delta = \arcsin(n \sin(\alpha - \arcsin(n^{-1} \sin \alpha))). \quad (2)$$

Iz (1) in (2) dobimo pri danem f polmer h brazde kot funkcijo kota α . Čim večji je α , tem večja sta δ in h .

Ker je

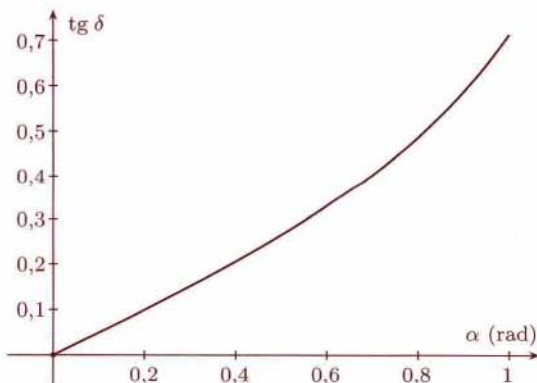
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = n^{-1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha},$$

je končno po adicijskem izreku

$$\sin \delta = (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha) \sin \alpha.$$

Na sliki 5 imamo za $n = 1,49$ narisan $\operatorname{tg} \delta$ kot funkcijo kota α , izražene ga v radianih.

Na sliki 3 bodo žarki, ki vzporedno padajo na dano brazdo, po izhodu iz Fresnelove leče spet vzporedni. Čim ožje so brazde, tem bližje G_1 se bodo sekali lomljeni žarki. Literatura navaja tudi 8 brazd na milimeter.

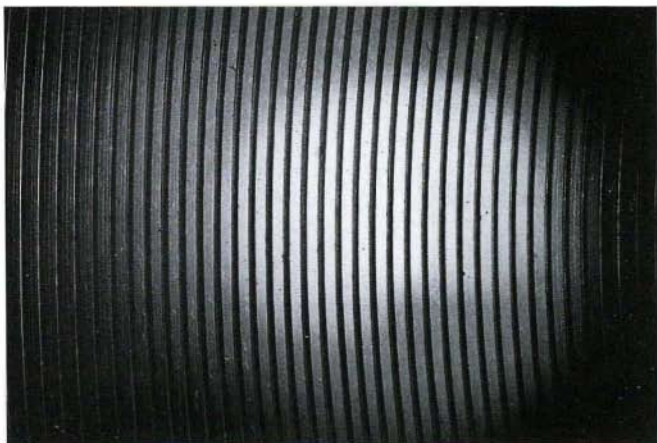


Slika 5.

Goriščna razdalja leče deljena s premerom je *zaslonsko število* z leče. Tako je

$$z = \frac{f}{2h} = \frac{f}{2f \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \delta}.$$

Za $\delta = 15,59^\circ$ je $z = 1,8$, za $\delta = 18,76^\circ$ je $z = 1,5$. Na videz ni spodnje meje za z . Vendar majhne vrednosti za z pomenijo velik δ in s tem velik α . Žarki, vzporedni osi, padajo na zelo strmo brazdo pod zelo majhnim kotom. Pri tem se velik del svetlobe odbije v napačno smer, namesto da bi se lomil. (Kadar je sonce nizko nad vodno površino, se prav tako velik del sončne svetlobe odbije na gladini.) Zelo strme brazde so nepraktične, saj se v njih lahko nabira umazanija. Kot kaže slika 6, so robovi brazd v praksi nekoliko zglačeni, to pa spet omejuje strmino.



Slika 6.

Tako so običajna zaslonska števila do 0,6, se pravi, da je polmer leče nekaj manjši od goriščne razdalje. V grafoskopih Fresnelova leča pokriva celotno ploščo in ima na robu dejansko že kar strme brazde.

Fresnelove leče uporabljajo tudi v žarometih, svetilnikih, iskalih zrcalnorefleksnih aparatov, v bliskavkah z zoomom, se pravi tam, kjer je treba usmerjati svetlobo. Povsod, kjer vidimo prozorno ploščo z množico koncentričnih krogov, gre skoraj gotovo za Fresnelovo lečo.

Če kupimo Fresnelovo lečo, nas tudi opozorijo, naj je ne puščamo na soncu. V primernih okoliščinah namreč lahko leča zbere svetlobo na zelo majhni površini in povzroči škodo ali celo požar.

Navodila priporočajo tudi, kako naj obrnemo lečo. Denimo, da bi lečo s slike 3 obrnili tako, da bi vzporedni snop padal na gladko stran (slika 7).

Vidimo, da je

$$\sin(\alpha + \delta_1) = n \sin \alpha.$$

Za $\alpha = 30^\circ$ in $n = 1,59$ izračunamo $\delta_1 = 22,66^\circ$, kar je za skoraj 4° različno od kota δ za stanje na sliki 3. Obrnjena leča torej žarek, vzporeden osi in na isti oddaljenosti od osi, bolj prelomi kot neobrnjena. Torej ni vseeno, kako obrnemo lečo.

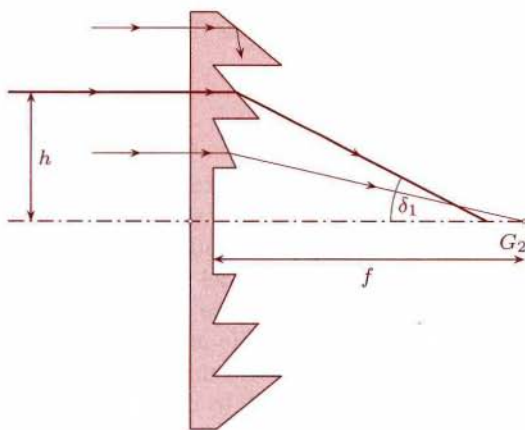
Žarek po lomu seka os leče na razdalji

$$\frac{h}{\operatorname{tg} \delta_1} = f \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta_1}.$$

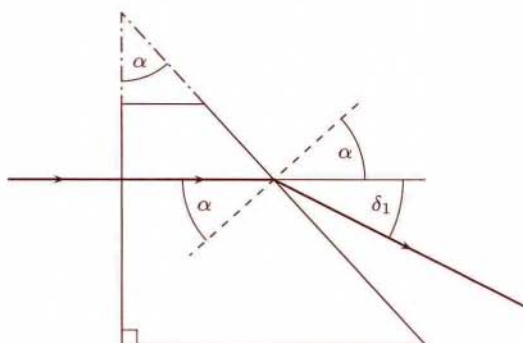
Na sliki 9 imamo narisani količnik

$$\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta_1}$$

kot funkcijo kota α (za $n = 1,49$). Za kote α blizu 0 je gornji kvocient blizu 1. Žarki, vzporedni osi in blizu osi, se v obeh primerih srečajo na enaki oddaljenosti od plošče v enem od obeh gorišč G_1, G_2 . Z nekaj višje matematike bi se dalo dokazati, da to velja za vsak n . Robni žarki pa na sliki 7 zgrešijo gorišče G_2 . Še eno omejitev imamo pri stanju na slikah 7 in 8. Veljati mora $\alpha + \delta_1 < 90^\circ$ (sicer žarek ne more iz plošče – pride do popolnega odboja). Torej mora veljati



Slika 7.



Slika 8.

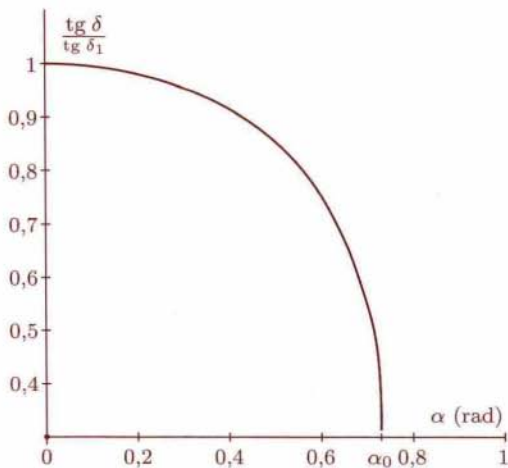
$$n \sin \alpha < 1,$$

se pravi $\alpha < \alpha_0$, kjer je

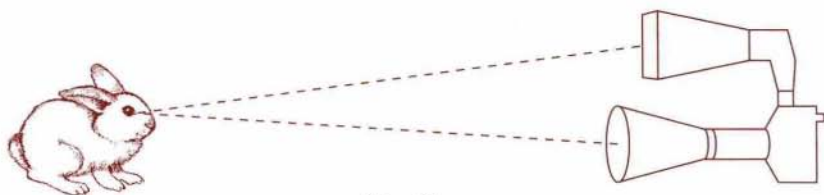
$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}.$$

Kot α_0 za $n = 1.49$ znaša približno $0,73$ radiana.

Vidimo, da ni čisto vseeno, kako obrnemo Fresnelovo lečo. Bolje je, da robni žarki na nazobčani strani oklepajo manjši kot z osjo kot na gladki.



Slika 9.



Slika 10.

Na koncu še dve opozorili. Fresnelove leče omogočajo fotografiranje živali z bliskavko tudi na večjih razdaljah. Če držimo bliskavko v bližini aparata, bodo vpadni in v fotografski objektiv odbiti žarki oklepali zelo majhen kot (slika 10). V fotoaparat bo tako lahko prišla svetloba, odbita od očesnega ozadja živali. Če slikamo zajca, veverico ali sovo, bodo ti dobili tudi podnevi krvavo rdeče oči in slike bodo neuporabne. Mačke dobijo na ta način zelene ali rumene oči, vrana na ovitku celo modre. Zpomnimo si še, da je za nočna bitja svetloba bliskavke v trdi temi hud šok. (Kdor ne verjame, naj to preskusi na sebi po prilagoditvi na temo. Zadošča kakršnakoli bliskavka, brez Fresnelove leče.)

Na koncu povejmo, da smo obravnavali le najpreprostejšo različico Fresnelove plošče. Bolj popolne Fresnelove leče imajo poševne dele brazd rahlo zakrivljene in širine brazd se spreminjajo.

