PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 1
Strani 20–21

Mitja Rosina:

OKRNJENA FIBONACCIJEVA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, teorija števil, Fibonaccijevo zaporedje, rekurzivna formula.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1358-Rosina.pdf

OKRNJENA FIBONACCIJEVA ŠTEVILA

V četrti številki Preseka (25.letnik, 1997/98, str.232) vas je Sandi Klavžar ponovno seznanil z zaporedjem Fibonaccijevih števil. Dobimo ga z *rekurzivno formulo* $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ ali preprosteje - naslednji člen zaporedja dobimo tako, da seštejemo prejšnja dva člena. Če začnemo s $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$, dobimo zaporedje

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597, \ldots$$

Kot vidimo, zaporedje hitro "zbezlja".

Dosti bolj krotka zaporedja dobimo, če vsakič upoštevamo le zadnjo števko:

$$\begin{aligned}
&1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 4,\ 3,\ 7,\ 0,\\
&7,\ 7,\ 4,\ 1,\ 5,\ 6,\ 1,\ 7,\ 8,\ 5,\ 3,\ 8,\ 1,\ 9,\ 0,\\
&9,\ 9,\ 8,\ 7,\ 5,\ 2,\ 7,\ 9,\ 6,\ 5,\ 1,\ 6,\ 7,\ 3,\ 0,\\
&3,\ 3,\ 6,\ 9,\ 5,\ 4,\ 9,\ 3,\ 2,\ 5,\ 7,\ 2,\ 9,\ 1,\ 0,\\
&(1,\ 1,\ 2, \ldots)
\end{aligned}$$

Če začnemo z drugačno vrednostjo F_1 in F_2, pa dobimo

$$2,\ 2,\ 4,\ 6,\ 0,\ 6,\ 6,\ 2,\ 8,\ 0,\ 8,\ 8,\ 6,\ 4,\ 0,\ 4,\ 4,\ 8,\ 2,\ 0,\ (2,\ 2,\ 4, \ldots)$$

ali

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 1,\ 8,\ 9,\ 7,\ 6,\ 3,\ 9,\ 2,\ (1,\ 3,\ 4, \ldots)$$

ali

$$2,\ 6,\ 8,\ 4,\ (2,\ 6,\ 8, \ldots)$$

ali

$$5,\ 5,\ 0,\ (5,\ 5,\ 0, \ldots)$$

ali

$$0,\ (0,\ 0,\ 0, \ldots).$$

Takoj opazimo, da so zaporedja *periodična*. To hitro razumemo. Iz dveh zaporednih števil enolično sledi naslednje število in potem vsa naslednja. Ker je različnih dvojic enomestnih števil le 100, pridemo prej ali slej do dvojice, ki smo jo že imeli in od tam dalje se cikel ponovi.

Vidimo, da ne nastane samo en cikel, ampak jih je kar šest. Njihove dolžine so 60, 20, 12, 4, 3, 1. Vsota dolžin je seveda 100, ker se mora zvrstiti sto dvojic, vsaka samo po enkrat.

Da ne more nastati samo en cikel, sledi iz naslednjega razmisleka: Če seštejemo dve lihi števili, dobimo sodo število, liho+sodo da liho, sodo+liho spet liho, liho+liho pa spet sodo število. Torej si sledijo v zaporedju po dve lihi števili in eno sodo. Če cikel sploh vsebuje liha števila, jih je dvakrat toliko kot sodih. Če bi bil cikel en sam, bi moral vsebovati 50 lihih in 50 sodih števil, kar po prejšnjem ni mogoče.

Če množimo števila v prvem zaporedju z 2, dobimo drugo zaporedje (ki porabi precej "odvečnih" sodih števil). To zaporedje ima krajšo periodo. Množenje prvega zaporedja s 5 pa nam da peto zaporedje (ki porabi "odvečne" petke, saj je prvo zaporedje izkoristilo dvakrat manj petk kot ostalih lihih števil). Zaporedje z začetkom 0, 0 ima najkrajšo periodo. Ostaneta še dva cikla, tretji in četrti, z začetkoma 1, 3 in 2, 6.

Okrnjena Fibonaccijeva števila smo pravzaprav vpeljali z *rekurzivno formulo*

$$G_n = \mathrm{mod}([G_{n-2} + G_{n-1}], j), \qquad j = 10\,.$$

Pri tem smo z $\mathrm{mod}(N, j)$ označili ostanek, ki ga dobimo, če število N delimo z j. V našem primeru je vsota $[G_{n-2}+G_{n-1}]$ vedno manjša od $2j$, in torej to vsoto bodisi pustimo pri miru bodisi ji odštejemo j, če dosega ali presega j.

Bralce vabim, da poiščejo zaporedja okrnjenih Fibonaccijevih števil še za module $j = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$

Ugotovite za vsak j, koliko ciklov dobite in kakšni so! Računate lahko "peš", problem pa je zelo primeren tudi za računalnik, saj vam operacije mod ne bo težko sprogramirati, vkolikor že ni vgrajena v vaš računalnik.

Mitja Rosina