PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 1
Strani 30–31

Mirko Dobovišek:

MNOŽENJE ZA TISTE, KI POZNAJO LE POŠTEVANKO ŠTEVILA 2

Ključne besede: matematika, aritmetika, naravna števila, množenje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1252-Dobovisek.pdf

MNOŽENJE ZA TISTE, KI POZNAJO LE POŠTEVANKO ŠTEVILA 2

Zastavimo si naslednji problem: Predpostavimo, da znamo seštevati naravna števila, množiti in deliti pa znamo le s številom dve. Ali lahko s tem znanjem izračunamo produkt poljubnih naravnih števil m in n? Seveda: Če zapišemo n-krat število m v stolpec in seštejemo, dobimo rezultat.

Tu si oglejmo nekoliko krajšo metodo. Menda so jo poznali že stari Egipčani, sedaj pa jo nekateri imenujejo metoda ruskih kmetov. Zanimiva je tudi zato, ker je vseeno, v kateri osnovi števila zapisujemo. Važno je le, da znamo množiti z dve, deliti z dve in seštevati.

Postopek je takle:

1. Števili, ki ju želimo zmnožiti, zapišemo na vrh stolpcev.
2. Števila v prvem stolpcu zaporedoma delimo z dve, kvociente podpisujemo in ostanke enostavno pozabimo. Končamo, ko pridemo do 1. Števila v drugem stolpcu pa zaporedoma množimo z dve. Ko pridemo vzporedno z enojko na levi, končamo.
3. V desnem stolpcu prečrtamo števila v tistih vrsticah, kjer je v levem stolpcu sodo število.
4. Števila v desnem stolpcu, ki jih nismo prečrtali, seštejemo. Vsota je produkt števil m in n.

Oglejmo si postopek na primeru $m = 76$ in $n = 27$.

$$\begin{array}{rr}
76 & \cancel{27} \\
38 & \cancel{54} \\
19 & 108 \\
9 & 216 \\
4 & \cancel{432} \\
2 & \cancel{864} \\
1 & 1728
\end{array}$$

Seštejemo $108 + 216 + 1728 = 2052$, kar je res enako 76×27.

Poglejmo še, zakaj ta metoda deluje.

S številom m se dogaja sledeče: Najprej ga delimo z 2 in dobimo kvocient m_1 ter ostanek b_0. Nato delimo z 2 število m_1 in tako dalje.

Kvociente označimo z m_1, m_2, ..., m_k, ostanke pa z b_0, b_1,..., b_k.

$$\begin{array}{lcccc} m & = & 2\cdot m_1 & + & b_0 \\ m_1 & = & 2\cdot m_2 & + & b_1 \\ . & . & . & . & . \\ m_{k-1} & = & 2\cdot m_k & + & b_{k-1} \\ m_k & = & b_k & & \end{array}$$

Končamo pri $m_k = b_k = 1$. Števila b_0, b_1, ..., b_k so ostanki pri deljenju z dva in so enaka 0 ali 1. Vstavimo sedaj izraz za m_k v izraz za m_{k-1}, izraz za m_{k-1} v izraz za m_{k-2} in tako vse do m. Dobimo:

$$m = 2(2(2(2\cdots(2b_k + b_{k-1}) + b_{k-2}) + \cdots) + b_1) + b_0.$$

Od tod sledi:

$$m = 2^k b_k + 2^{k-1} b_{k-1} + \cdots + 2b_1 + b_0.$$

Pomnožimo sedaj tako zapisani m s številom n:

$$m \cdot n = 2^k n b_k + 2^{k-1} n b_{k-1} + \cdots + 2nb_1 + nb_0.$$

Ker so b_0,b_1,..., b_k enaki 1 ali 0, je produkt $m \cdot n$ zapisan kot vsota nekaterih od števil n, $2n$, $4n$, $8n$,...,$2^k n$. V zgornji vsoti so od nič različni sumandi seveda tisti, pri katerih je ostanek po deljenju z dva, to je pripadajoči b_j, enak 1. To pa je tam, kjer imamo v levem stolpcu liho število. Če je v levem stolpcu sodo število, je ustrezen produkt s potenco dvojke pomnožen z 0, zato smo ga prečrtali. To pomeni, da je naš način množenja pravilen.

Vidimo, da je vseeno vredno se naučiti vse poštevanke. Število operacij (množenj in deljenj z 2 ter seštevanj), ki jih moramo izvesti pri tem množenju, je namreč zelo veliko v primerjavi z ustreznim številom operacij pri običajnem množenju.

Mirko Dobovišek