

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **21** (1993/1994)

Številka 6

Strani 336–338

Borut Zalar:

ODVOD POLINOMA IN NJEGOVA UPORABA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/21/1193-Zalar.pdf>

© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ODVOD POLINOMA IN NJEGOVA UPORABA

1. Kaj je odvod polinoma?

Polinom ene spremenljivke je izraz oblike

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Privzamemo, da je prvi koeficient a_n različen od nič. Število n se tedaj imenuje stopnja polinoma P .

Odvod polinoma P je nov polinom P' , ki ima stopnjo za ena nižjo od stopnje polinoma P . Dobimo ga po naslednjih pravilih:

- (i) Odvod konstantnega polinoma je enak nič.
- (ii) Odvod potence x^n je enak $n x^{n-1}$.
- (iii) Odvod vsote polinomov je vsota posameznih odvodov; torej $(P + Q)' = P' + Q'$.
- (iv) Odvod s konstanto pomnoženega polinoma je s to isto konstanto pomnožen odvod prvotnega polinoma; torej $(aP)' = a \cdot P'$.

Za zgled izračunajmo odvod polinoma $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 8$. Z uporabo zgornjih pravil dobimo

$$\begin{aligned} P'(x) &= (x^3)' + (2x^2)' + (4x)' - (8)' = \\ &= 1 \cdot (x^3)' + 2 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (x^1)' - 8 \cdot (1)' = \\ &= 1 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 4 \cdot x^0 - 8 \cdot 0 = \\ &= 3x^2 + 4x + 4. \end{aligned}$$

V naslednjih dveh razdelkih bomo ilustrirali na primerih uporabnost tega pojma.

2. Realne ničle

Za število α rečemo, da je ničla polinoma P , če je $P(\alpha) = 0$. Polinom ima največ toliko realnih ničel, kot je njegova stopnja, npr. polinom $P(x) = x^2 - 3x + 2$ ima lahko največ dve realni ničli in ju v resnici tudi ima. To sta $\alpha = 1$ in $\alpha = 2$. Polinom $P(x) = x^2 + 1$ pa nasprotno nima nobene realne ničle. Ničle ločimo tudi glede na njihovo stopnjo. Ničla α je prve stopnje, če $(x - \alpha)^2$ ne deli polinoma $P(x)$. Tak primer je ničla $\alpha = 1$ v polinomu $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Ničla α je druge stopnje, če $(x - \alpha)^2$ deli $P(x)$, $(x - \alpha)^3$

pa ne. Primer za to je ničla $\alpha = 1$ v polinomu $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Podobno definiramo tudi ničle višjih stopenj.

Za polinom $P(x)$ rečemo, da ima vse ničle realne, če je vsota stopenj vseh realnih ničel enaka stopnji polinoma. To lahko povemo tudi drugače: Polinom $P(x)$ ima vse ničle realne, če ga lahko zapišemo kot produkt

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_k)^{n_k},$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ realne ničle polinoma $P(x)$. Njihove stopnje so seveda $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Naslednji izrek je dokazal matematik Rolle.

Če ima polinom $P(x)$ vse ničle realne, potem ima tudi njegov odvod $P'(x)$ vse ničle realne.

Dokaz tega izreka ni težak, vendar presega nivo srednješolske matematike. Uporabimo ga lahko za reševanje problemov naslednjega tipa:

Naj bo $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$. Ali je možno izbrati števila a, b, c tako, da bo imel polinom $P(x)$ same realne ničle?

Če polinom $P(x)$ zaporedoma odvajamo, dobimo

$$P'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b,$$

$$P''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2a,$$

$$P'''(x) = 60x^2 + 24x + 6.$$

Če bi imel $P(x)$ same realne ničle, bi imel po Rolleovem izreku tudi $P'(x)$ same realne ničle. Po isti logiki bi morala imeti tudi $P''(x)$ in $P'''(x)$ same realne ničle. S pomočjo odvoda smo manjšali stopnjo polinoma in po treh korakih prišli do kvadratne enačbe $60x^2 + 24x + 6 = 0$. Ta enačba pa nima realnih rešitev, ker je njena diskriminanta negativna. To pomeni, da je odgovor na zastavljeni problem negativen.

3. Minimum in maksimum

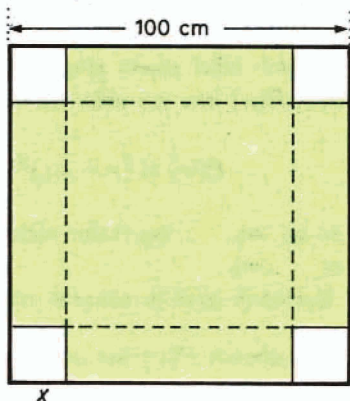
V zvezi z odvodom obstaja naslednji pomembni izrek:

Če je v točki α lokalni minimum ali maksimum, potem je α ničla odvoda $P'(x)$.

Ta izrek nam pomaga pri reševanju nekaterih zelo življenjskih problemov, kot je naslednji:

Denimo, da imamo kvadraten kos lepenke s stranico 1 m. Na vseh štirih vogalih želimo odrezati manjše kvadrate tako, da bomo preostanek zložili v škatlo brez pokrova (slika). Kako naj odrežemo, da bo volumen dobljene škatle največji možen?

Naj bo x velikost stranice odrezanega kvadratka. Tedaj bo imela škatla širino in dolžino $100 - 2x$ (v centimetrih) ter višino x . Njen volumen bo



$$V(x) = (100 - 2x)^2 x = 4x^3 - 400x^2 + 10000x.$$

Naša naloga je določiti maksimum tega polinoma, ko je x med 0 in 50 cm. Po zgornjem izreku je potrebno rešiti enačbo

$$V'(x) = 12x^2 - 800x + 10000 = 0.$$

Njeni rešitvi sta $x = 50$ cm ter $x = 16,66$ cm. Pri prvi rešitvi je volumen enak 0 (to je seveda minimalen volumen), pri drugi pa dobimo maksimalni možni volumen 74074 cm^3 oziroma $0,074 \text{ m}^3$.

Borut Zalar