PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 6
Strani 354–358

Leila Marek – Crnjac:

SEBI PODOBNOST IN DIMENZIJA FRAKTALOV

Ključne besede: matematika, fraktali.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1193-Marek.pdf

SEBI PODOBNOST IN DIMENZIJA FRAKTALOV

V tem članku bomo predstavili dimenzijo (razsežnost) objektov, ki so sebi podobni. Najprej bomo definirali lastnost, ki jo imenujemo sebi podobnost.

Definicija 1:

Če je del objekta majhna kopija celotnega objekta, potem je ta sebi podoben.

Definicija 2:

Objekt je strogo sebi podoben, če lahko objekt razdelimo na več delov in je vsak kos majhna kopija celote.

Spomnimo se trikotnika Sierpinskega (glej članek Poglejmo fraktale v 3. številki Preseka.) in ugotovimo, ali je sebi podoben, in ali je strogo sebi podoben. Vsak del v tem trikotniku je majhna kopija celote in zato je sebi podoben. Trikotnik Sierpinskega je sestavljen iz manjših trikotnikov, ki so kopije celote in zato je strogo sebi podoben.

Vprašajmo se še, ali je Kochova krivulja sebi podobna, oz. strogo sebi podobna.

Kochova krivulja je sebi podobna, ker vsebuje majhne kopije celote. Prav tako je tudi strogo sebi podobna, ker jo lahko razdelimo na več kosov in vsak kos je majhna kopija celote.

Kochova snežinka ni sebi podobna, ker majhni kosi niso kopije celotne snežinke.

Poglejmo še, kakšne lastnosti ima končno drevo. Je sebi podobno, ker vsebuje kopije celotnega drevesa. Ni pa strogo sebi podobno, ker deblo ni kopija celotnega drevesa.

Sedaj pa poglejmo, kako sebi podobnost vpliva na dimenzijo.

Sebi podobnost je odločilnega pomena za intuitivno razlago dimenzije fraktalov.

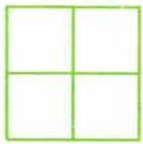
Enotski interval $[0, 1]$ je zgled enodimenzionalnega objekta in je sebi podoben.

Ta interval razdelimo na N enakih kosov in tako ima vsak od njih dolžino $r = \frac{1}{N}$. Od tod sledi $Nr^1 = 1$.

Podobno je pri dvodimenzionalnem objektu, na primer pri kvadratu s stranico dolžine 1. Razdelimo ga na N sebi podobnih majhnih kvadratov, ki imajo stranice z dolžino $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Od tod dobimo $Nr^2 = 1$.

Zgled za sebi podoben tridimenzionalni objekt je kocka s stranico dolžine 1. Lahko jo razdelimo na N majhnih enakih kock. Dolžina stranice majhne kocke je $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$. Od tod izhaja $Nr^3 = 1$.

Slika 1.



Slika 2.

Slika 3.

V vseh treh primerih se eksponent števila r ujema z dimenzijo objekta.

V splošnem se enačba glasi $Nr^D = 1$. Iz nje izračunamo z logaritmiranjem eksponent D in ga imenujemo dimenzija ali razsežnost sebi podobnega objekta.

$$\begin{gathered}
\log Nr^D = \log 1 \\
\log N + D \log r = 0 \\
D \log r = -\log N \\
D = -\frac{\log N}{\log r} \\
D = \frac{\log N}{\log(r^{-1})}
\end{gathered}$$

Pri nekaterih objektih se zgodi, da tako izračunana dimenzija D ni celo število. Tak objekt imenujemo fraktal.

Sedaj pa poskusimo izračunati dimenzijo Kochove krivulje. Vsak kos v kateremkoli konstrukcijskem koraku Kochove krivulje (glej članek Poglejmo fraktale) se razdeli na 4 dele z dolžino $\frac{1}{3}$ prejšnjega dela. Zato je dimenzija D po prejšnji formuli enaka:

$$D = \frac{\log 4}{\log(\frac{1}{3})^{-1}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26\ldots$$

Dimenzija je necelo število, ki je večje od 1 in manjše od 2. To število pove marsikaj o lastnostih Kochove krivulje. Krivulja bolj napolni prostor v ravnini kot enotski interval z dimenzijo 1, vendar pa manj kot ravninski lik z dimenzijo 2.

Poglejmo še dimenzijo trikotika Sierpinskega. Trikotnikove stranice dolžine 1 smo razpolovili, jih povezali in srednji trikotnik izrezali. Postopek smo nadaljevali na ostalih treh trikotnikih. Na vsakem koraku ima stranica trikotnika dolžino $\frac{1}{2}$ dolžine prejšnje stranice trikotnika in od vsakega trikotnika ostanejo trije manjši.

$$\text{Dimenzija } D = \frac{\log 3}{\log(\frac{1}{2})^{-1}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58\ldots$$

Dimenzija leži med 1 in 2, kar nam marsikaj pove o lastnostih trikotnika Sierpinskega. Ker smo začetnemu enakostraničnemu trikotniku izrezali mnogo manjših trikotnikov, je zelo preluknjan. Ta dimenzija je manjša od dimenzije običajnega trikotnika, ki je enaka 2.

Preprogo Sierpinskega dobimo iz kvadrata s stranico dolžine 1. Stranice tretjinimo, jih povežemo in srednji manjši kvadrat izrežemo. Na osmih robnih manjših kvadratih postopek nadaljujemo. Na vsakem konstrukcijskem koraku ima stranica kvadrata dolžino $\frac{1}{3}$ dolžine prejšnje stranice kvadrata in od vsakega kvadrata nam ostane osem manjših.

$$\text{Dimenzija } D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,89\ldots$$

Če primerjamo dimenzijo trikotnika Sierpinskega in preprogo Sierpinskega, vidimo, da je trikotik z $D = 1,58\ldots$ precej bolj preluknjan kot kvadrat z $D = 1,89\ldots$

Vrnimo se še enkrat h Kochovi krivulji in njeni dimenziji. Nekatere podobnosti s Kochovo krivuljo najdemo na zemljevidih, če opazujemo morske obale. S pomočjo fraktalov lahko dobro ocenimo dimenzijo morskih obal. Ocene mnogo povedo o razgibanosti obale.

Kot zanimivost bomo navedli dimenzijo Brownovih morskih obal in pokrajin. Brownove funkcije so nastale z računalniško simulacijo in so dobri modeli za morske obale in pokrajine.

Slika 4 prikazuje obalo z dimenzijo $D = 1,3$, ki je precej realna in spominja na Afriko ali Južno Ameriko.

Slika 4. Model obale dimenzije $D = 1,300$.

Če dimenzija D narašča k vrednosti $\frac{3}{2}$, dobimo nekaj podobnega sliki 5. Obala je precej razgibana, kljub temu lahko v atlasu najdemo podobnosti.

Slika 5. Model obale dimenzije $D \approx \frac{3}{2}$.

Dimenzija D lahko narašča k vrednosti 2 in slika 6 ustreza tej dimenziji. Zemljevid je precej kompliciran, spominja na Finsko.

Slika 6. Model obale z dimenzijo D blizu 2.

Na zadnji sliki 7 je primer Brownovega reliefa dimenzije $D = 2{,}1$, ki je model pokrajine. Dimenzija zelo razgibane pokrajine se približuje vrednosti 3.

Slika 7. Model pokrajine.

Leila Marek-Crnjac