PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 1
Strani 20–22

Matjaž Željko:

UPORABA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL V RAVNINSKI GEOMETRIJI, prvi del

Ključne besede: matematika, geometrija, kompleksna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1115-Zeljko.pdf

UPORABA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL V RAVNINSKI GEOMETRIJI – prvi del

Na ravnino postavimo kartezični koordinatni sistem, osi označimo z Re in Im ter ju poimenujmo realna in imaginarna os. Točka (a, b) nam tedaj predstavlja kompleksno število $\alpha = a + bi$. Kompleksna števila si lahko predstavljamo kot vektorje v ravnini, saj jih seštevamo po komponentah.

Od nič različno kompleksno števila $\alpha = a + bi$ lahko zapišemo enolično v *polarni obliki:* $\alpha = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, kjer je $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\vartheta = \dfrac{a}{r}$ in $\sin\vartheta = \dfrac{b}{r}$. Število r imenujemo modul, število ϑ pa argument kompleksnega števila α.

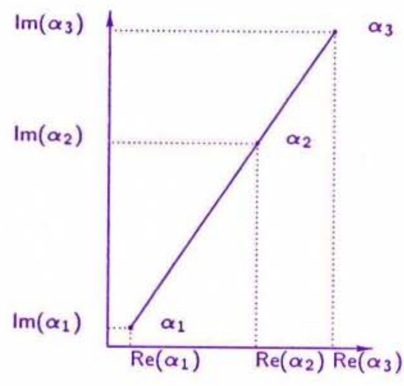
Enostavno lahko preverimo

$$r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\cdot s(\cos\varphi + i\sin\varphi) = rs(\cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi)).$$

To pomeni, da lahko množenje s kompleksnim številom modula r in argumenta ϑ obravnavamo kot kompozicijo zasuka okrog izhodišča za kot ϑ in raztega z negibno točko v koordinatnem izhodišču in s koeficientom r.

S pomočjo podobnih trikotnikov uvidimo, da ležijo tri različne točke α_1, α_2 in α_3 na isti premici natanko tedaj, ko velja:

$$\frac{\mathrm{Re}(\alpha_3 - \alpha_1)}{\mathrm{Re}(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\mathrm{Im}(\alpha_3 - \alpha_1)}{\mathrm{Im}(\alpha_2 - \alpha_1)} = \lambda.$$



Pri tem je λ seveda realno število. Sistem preoblikujemo

$$\mathrm{Re}(\alpha_3 - \alpha_1) = \lambda\ \mathrm{Re}(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \mathrm{Im}(\alpha_3 - \alpha_1) = \lambda\ \mathrm{Im}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

nato pa drugo enačbo pomnožimo z i in prištejemo prvi. Dobljeno enačbo

$$\mathrm{Re}(\alpha_3 - \alpha_1) + i\,\mathrm{Im}(\alpha_3 - \alpha_1) = \lambda\ \mathrm{Re}(\alpha_2 - \alpha_1) + i\,\mathrm{Im}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

še poenostavimo: $\alpha_3 - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)$.

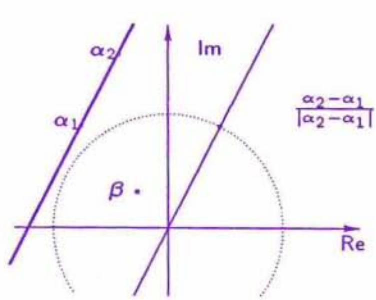
To pa pomeni, da leži točka α_3 na premici skozi različni točki α_1 in α_2

natanko tedaj, ko velja $\alpha_3 - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Število $\alpha_2 - \alpha_1$ imenujemo *nenormirani smerni koeficient* premice. (Nenormirani zato, ker $|\alpha_2 - \alpha_1|$ ni nujno enako 1.) Število $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{|\alpha_2 - \alpha_1|}$ pa je potem *normirani smerni koeficient* premice.

Kompleksno število $\beta = \mathrm{Re}(\beta) + i\,\mathrm{Im}(\beta)$ nam v ravnini določa vektor s komponentama $\mathrm{Re}(\beta)$ in $\mathrm{Im}(\beta)$.

Premaknimo premico vzporedno za ta vektor. Potem preideta točki α_1 in α_2 s te premice v α_1' in α_2', da velja $\alpha_1' = \alpha_1 + \beta$ in $\alpha_2' = \alpha_2 + \beta$. Iz zveze $\alpha_1' - \alpha_1 = \alpha_2' - \alpha_2$ pa sledi, da se smerni koeficient premice pri vzporednem premiku ohranja.



Normirani smerni koeficient je vedno neko kompleksno število na enotski krožnici.

Zamenjajmo med sabo točki α_1 in α_2. Smerni koeficient premice se s tem spremeni (kako?). To pa ni preveč lepo, saj želimo poiskati količino, ki opisuje smer premice in ne bo odvisna od izbire točk na premici.

Vzemimo enačbo premice: $\alpha_3 - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)$. Pri konjugiranju te enačbe se enakost ohranja in dobimo $\overline{\alpha_3} - \overline{\alpha_1} = \lambda\left(\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1}\right)$. (Upoštevali smo $\overline{\lambda} = \lambda$, saj je λ realno število.)
Ko iz teh dveh enačb eliminiramo λ, dobimo zvezo $\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\overline{\alpha_3} - \overline{\alpha_1}} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1}}$.
Količino $\chi = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1}}$ imenujemo *kompleksni nagib premice*.

Tudi kompleksni nagib premice se ohranja pri vzporednem premiku.
Za razliko od smernega koeficienta pa se kompleksni nagib premice ne spremeni, če zamenjamo točki med sabo. Preverimo lahko, da ima realna os kompleksni nagib 1, imaginarna os -1, simetrala lihih kvadrantov pa i. Slednjega ni težko videti, saj ležita na tej premici npr. točki 0 in $1 + i$ in je zato kompleksni nagib enak $\frac{1 + i - 0}{\overline{1 + i - 0}} = \frac{(1 + i)^2}{2} = i$.

S pomočjo kompleksnega nagiba lahko izrazimo potrebne in zadostne pogoje za vzporednost in pravokotnost premic, saj veljata naslednji trditvi: Premici sta vzporedni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba enaka. Premici sta pravokotni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba nasprotna.

Za dokaz prve trditve vzemimo različne točke α_1, α_2 in ζ. Premici skozi α_1 in ζ ter α_2 in ζ imata kompleksna nagiba $\frac{\zeta-\alpha_1}{\overline{\zeta}-\overline{\alpha_1}} = \chi_1$ oziroma $\frac{\zeta-\alpha_2}{\overline{\zeta}-\overline{\alpha_2}} = \chi_2$. V enačbah za kompleksna nagiba premic odpravimo ulomke. Točko ζ, ki je presečišče premic, dobimo torej kot rešitev sistema

$$\begin{aligned} \zeta - \chi_1\overline{\zeta} &= \alpha_1 - \overline{\alpha_1}\chi_1 \\ \zeta - \chi_2\overline{\zeta} &= \alpha_2 - \overline{\alpha_2}\chi_2, \end{aligned}$$

v katerem sta ζ in $\overline{\zeta}$ neznanki. Za sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama vemo, da je rešljiv natanko tedaj, ko je determinanta sistema neničelna. Ker je determinanta tega sistema enaka $\chi_1-\chi_2$, smo tako dokazali prvo trditev, saj v primeru $\chi_1 = \chi_2$ točka ζ (ki je presečišče premic) ne obstaja in sta zato premici vzporedni.

Za dokaz druge trditve pa najprej predpostavimo, da sta premici pravokotni in zapišimo oba normirana smerna koeficienta premic. Ker se smerna koeficienta in kompleksna nagiba ohranjata pri vzporednem premiku, lahko predpostavimo, da potekata obe premici skozi koordinatno izhodišče. Množenje z i predstavlja vrtenje za kot $\pi/2$ okrog koordinatnega izhodišča. Torej velja enakost

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{|\alpha_2-\alpha_1|} = \pm i\frac{\beta_2-\beta_1}{|\beta_2-\beta_1|},$$

saj lahko normirani smerni koeficient prve premice preide v normirani smerni koeficient druge premice z rotacijo za kot $\pi/2$ ali $-\pi/2$. Enakost kvadriramo, upoštevamo $|z|^2 = z\overline{z}$ in dobimo

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\overline{\alpha_2}-\overline{\alpha_1}} = -\frac{\beta_2-\beta_1}{\overline{\beta_2}-\overline{\beta_1}}.$$

Za pravokotni premici torej velja $\chi_2 = -\chi_1$. Trditev velja tudi v obratno smer, saj lahko preberemo dokaz tudi nazaj.

Toliko za tokrat. V naslednji številki Preseka pa si bomo ogledali, kako z uporabo kompleksnih nagibov zlahka dokažemo nekatere izreke ravninske geometrije.

Matjaž Željko