PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **2** (1974/1975)
Številka 1
Strani 26–28

Peter Petek:

O PRAVOKOTNIH TRIKOTNIKIH IN O PRIBLIŽKIH ZA KOREN IZ DVA

Ključne besede: matematika.

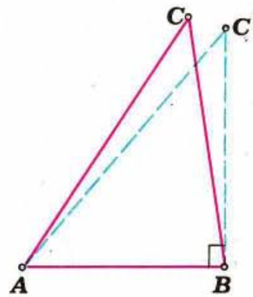
Elektronska verzija: http://www.presek.si/2/2-1-Petek.pdf

O PRAVOKOTNIH TRIKOTNIKIH IN O PRIBLIŽKIH ZA KOREN IZ DVA

Kako "popraviti" trikotnik, da bo postal pravokoten? Zamislimo si, da so v ogliščih trikotnika zabiti žebljički, stranice pa so vrvica, ki je napeta na te žebljičke. Izberimo najkrajšo stranico. Žebljiček-oglišče nasproti njej izrujemo in ga toliko časa premikamo, da dobimo pravokoten trikotnik.

Primer: $AB = 4$ cm
$BC = 5$ cm
$AC = 6$ cm

Po premikanju je seveda
$BC'+AC' = BC+AC = 11$ cm.
Če označimo z x dolžino katete BC', ostane za hipotenuzo AC' $(11-x)$ cm. V pravokotnem trikotniku velja Pitagorov izrek, zato



$$(11-x)^2 = x^2+4^2$$
$$121-22x+x^2 = x^2+16$$
$$22x = 105$$
$$x = \frac{105}{22}$$

Torej je: $BC' = \frac{105}{22}$, $AC' = 11-x = \frac{137}{22}$ in $AB = 4 = \frac{88}{22}$.

Razmerje stranic tega trikotnika je torej 88:105:137. Mimogrede smo ugotovili, da je trikotnik s stranicami 88, 105, 137 pravokoten. Vidimo, da lahko s "popravljanjem" trikotnika dobimo pravokoten trikotnik s celoštevilskimi stranicami. Tri cela števila a, b, c, ki so lahko dolžine stranic pravokotnega trikotnika ($a^2+b^2=c^2$), imenujemo "pitagorejsko trojico". Tedaj je 88, 105, 137 pitagorejska trojica!

Vsi vemo, da je v enakokrakem pravokotnem trikotniku s kateto a hipotenuza $a\sqrt{2}$. Če bi imeli enakokrak pravokoten trikotnik s celoštevilskimi stranicami $a=b$ in c, bi brez težav lahko zapisali $\sqrt{2}$ z ulomkom: $\sqrt{2} = \frac{c}{a}$. To žal ni mogoče. Toda recimo, da imamo pravokoten trikotnik, ki je skoraj enakokrak; to se pravi, da se kateti le malo razlikujeta. Dobili bomo pač približek za $\sqrt{2}$. Oglejmo si na primeru, kako dobimo vedno boljše približke. Ne pozabimo pri tem, da je na štiri decimalke točno $\sqrt{2}=1{\cdot}4142$!

Za začetek vzemimo poljuben enakokrak trikotnik. Da bo stvar enostavnejša in števila manjša, začnimo kar z enakostraničnim trikotnikom s stranicami 1, 1, 1. Najprej izberimo najmanjšo stranico. No, ker so vse tri enake, je vseeno, za katero se odločimo, njena dolžina je enaka 1, vsota ostalih dveh je seveda 2. Premaknemo nasprotni vrh in po Pitagori nastavimo enačbo

$(2-x)^2 = x^2+1^2$,

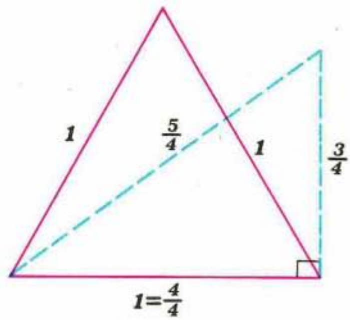
ki jo hitro rešimo

$4x = 3$

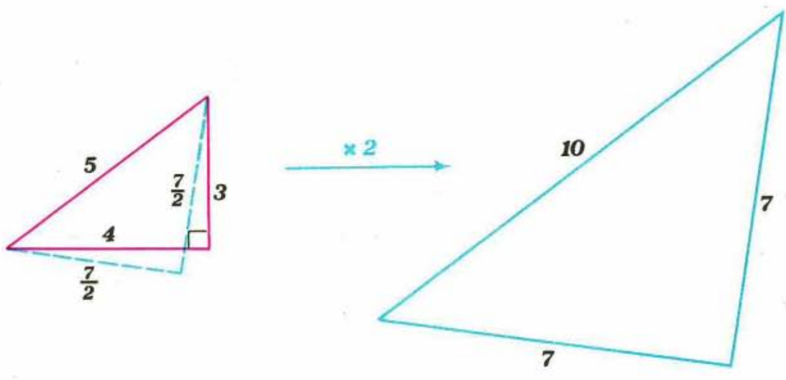
$x = \frac{3}{4}$

To je kateta, hipotenuza je

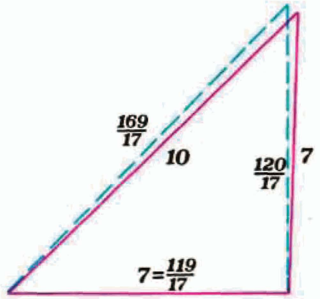
$2-x = \frac{5}{4}$



Izrazimo še prvotno kateto s četrtinami $1=\frac{4}{4}$ in vidimo, da so stranice novega trikotnika v razmerju 3:4:5. Odločimo se za podoben trikotnik (dva trikotnika sta podobna, če se ujemata v razmerju enakoležnih stranic), ki ima stranice štirikrat večje, torej natanko 3, 4, 5! Pravokotnemu trikotniku podoben trikotnik je spet pravokoten, pa še zelo znan je! Poznali so ga že stari Egipčani*, ki so z njegovo pomočjo in z vrvjo v roki merili prave kote po plodnih tleh okrog Nila. Ampak mi bi radi dobili približek za $\sqrt{2}$. No, števili 3 in 4 se ne razlikujeta preveč in že imamo dva približka $\frac{5}{3}$=1'6667 in $\frac{5}{4}$=1'2500. Prvi približek je prevelik, drugi premajhen. Morda bi bilo bolje, če bi namesto 3 ali 4 vzeli sredino med obema $\frac{7}{2}$. Naredimo to na trikotniku in že imamo spet enakokrak trikotnik $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}$, 5 (slika); ali pa raje pomnožimo stranice z 2, da dobimo cela števila 7,7,10.



Toda, ojoj, trikotnik ni več pravokoten. Brž ga popravimo!



$$(17-x)^2 = x^2+7^2$$
$$289-34x+x^2 = x^2+49$$
$$34x = 240$$
$$x = \frac{120}{17}$$
$$17-x = \frac{169}{17}$$
$$7 = \frac{119}{17}$$

In popravljeni (in s 17 pomnoženi) trikotnik je 119, 120, 169. Sedaj sta približka že mnogo boljša. $\frac{169}{118}=1{\cdot}4202$ in $\frac{169}{120}=1{\cdot}4083$. Prva decimalka je že dobra, druga pa tudi ni hudo narobe.

Bodi dovolj! Če ima bralec veselje in potrpljenje z računanjem bo lahko sam nadaljeval po isti poti in izračunal še boljše približke.Lahko pa začne z drugim enakokrakim trikotnikom in dobi drugačno zaporedje približkov.

Peter Petek