PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 6
Strani 322–327

Borut Zalar:

MAGIČNI KVADRATI DIMENZIJE $4n + 2$

Ključne besede: matematika, aritmetika, kombinatorika, magični kvadrati.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1068-Zalar.pdf

MAGIČNI KVADRATI DIMENZIJE $4n+2$

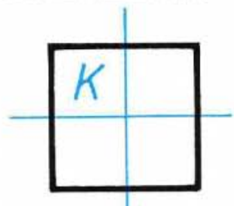
Zvesti bralci Preseka se mogoče spomnijo, da sem pred nekaj leti že dvakrat pisal, kako sestavljamo magične kvadrate. V prvem članku sem pokazal, kako sestavimo magične kvadrate, ki imajo dimenzije 4, 8, 12, 16, ..., v drugem pa, kako sestavimo magične kvadrate lihe dimenzije. Ostali so še magični kvadrati 6, 10, 14, ... Ta števila lahko napišemo v obliki $4n+2$, kjer je $n = 1, 2, \ldots$ poljubno naravno število.

Magični kvadrat je kvadratna tabela dimenzije n, v katero vpišemo števila od 1 do n^2 (v vsako polje tabele eno številko in nobene številke ne smemo zapisati dvakrat) tako, da bo vsota v vseh vrsticah, vseh stolpcih in obeh glavnih diagonalah enaka. Primera za $n=3$ in $n=4$ sta naslednja:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

V prvem primeru je vsota v vsaki vrstici 15, v drugem pa 34. Vzemimo zdaj poljuben kvadrat dimenzije $4n+2$ in ga razdelimo na štiri enake kvadrate dimenzije $2n+1$ z dvema simetralama, kot kaže slika.



Polja v kvadratu bomo označevali podobno kot šahisti, le da bomo uporabljali dve številki namesto ene črke in ene številke. Polja v zgornjem levem kotu bomo torej označili s parom števil $(1,1)$, polja v zgornjem desnem kotu s parom števil $(1, 4n+2)$, polje v spodnjem levem kotu s številoma $(4n+2, 1)$ in polje v spodnjem desnem kotu pa s številoma $(4n+2, 4n+2)$.

Označimo z $A(i,j)$ tisto število, ki ga zapišemo v polje označeno s parom števil (i,j). Za začetek bomo števila razporedili kar po vrsti. Če bi bil na primer kvadrat dimenzije 6, bi števila razporedili takole:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

In zdaj prva naloga za bralce. Prepričajte se, da pri taki zaporedni razporeditvi velja formula $A(i,j) = (4n+2)(i-1)+j$.

Za konstrukcijo magičnega kvadrata potrebujemo tri operacije, ki jih bomo zdaj opisali. Na tretji sliki je s črko K označena zgornja leva četrtinka našega kvadrata. Operacije bomo definirali na poljih kvadrata K. Operacija $\mathcal{S}$ zamenja števili, ki ležita v danem polju in polju, ki leži v isti vrstici in je simetrično z danim poljem glede na vertikalno simetralo kvadrata.

Zgled:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\xrightarrow{\mathcal{S}_{(2,1)}}$

1	2	3	4
9	6	7	8
5	10	11	12
13	14	15	16

Operacija ν zamenja števili, ki ležita v danem polju in polju, ki leži v istem stolpcu in je simetrično z danim poljem glede na horizontalno simetralo kvadrata. Zgled:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\xrightarrow{\mathcal{V}_{(1,1)}}$

4	2	3	1
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Operacija $\mathcal{C}$ zamenja števili, ki ležita v danem polju in polju, ki leži simetrično z danim poljem glede na središče kvadrata. Zamenja tudi obe števili, ki ležita v poljih, ki sta z danim poljem simetrični glede na obe simetrali kvadrata. Zgled:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\xrightarrow{\mathcal{C}_{(1,2)}}$

1	15	14	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	3	2	16

Zdaj pa si izberimo v kvadratu K tri skupine polj. V prvi skupini naj bodo polja:

$(1,1),(1,2),\ldots(1,n)$ v prvi vrsti

$(2,2),(2,3),\ldots,(2,n+1)$ v drugi vrsti

...

$(2n+1,2n+1),(2n+1,\overline{2n+2}),\ldots,(2n+1,\overline{3n+1})$ v $(2n+1)$-vi vrsti.

V vsaki vrsti kvadrata K je točno n polj. Toda polje $(2n+1,2n+2)$ sploh ne leži v kvadratu K, upravičeno porečete. Zato se dogovorimo, da števila, ki presegajo $2n+1$, zmanjšamo za $2n+1$ in to označimo z znakom nad številom. Torej je $\overline{2n+2}=1, \overline{2n+3}=2, \overline{4n+2}=2n+1, \overline{4n+3}=1$ in tako naprej.

V drugi skupini naj bodo naslednja polja: $(1,n+1),(2,n+2),\ldots,$ $(2n+1,\overline{3n+1})$. V vsaki vrstici in vsakem stolpcu kvadrata K je točno eno polje druge skupine. V tretjo skupino pa vzemimo naslednja polja: $(1,n+2)$, $(2,n+3),\ldots,(2n+1,\overline{3n+2})$. Spet je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu kvadrata K točno eno polje te skupine.

Zdaj pa že lahko opišemo sestavljanje magičnega kvadrata. Na vseh poljih 1. skupine uporabim operacijo $\mathcal{C}$, na vseh poljih 2. skupine uporabim operacijo $\mathcal{S}$, na poljih 3. skupine uporabim operacijo $\mathcal{V}$, ostala polja pa pustim nespremenjena. Kar dobim na koncu je magični kvadrat.

Naredimo še zgled za $n = 1$ oziroma za kvadrat 6x6. V prvo skupino bomo dali polja: $(1,1), (2,2), (3,3)$. V drugo skupino bomo dali polja: $(1,2), (2,3), (3,\overline{4}) = (3,1)$. V tretjo skupino pa bomo dali polja: $(1,3)$, $(2,\overline{4}) = (2,1), (3,\overline{5}) = (3,2)$. Potek konstrukcije je zdaj naslednji:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

$\mathcal{C}_{(1,1)} + \mathcal{C}_{(2,2)} + \mathcal{C}_{(3,3)}$

36	2	3	4	5	31
7	29	9	16	26	12
13	14	22	21	17	18
19	20	16	15	23	24
25	11	27	28	8	30
6	32	33	34	35	1

$\mathcal{S}_{(1,2)} + \mathcal{S}_{(2,3)} + \mathcal{S}_{(3,1)}$

36	32	3	4	5	31
7	29	27	10	26	12
19	14	22	21	17	18
13	20	16	15	23	24
25	11	9	28	8	30
6	2	33	34	35	36

$\mathcal{V}_{(1,3)} + \mathcal{V}_{(2,1)} + \mathcal{V}_{(3,2)}$

36	32	4	3	5	31
12	29	27	10	26	7
19	17	22	21	14	15
13	20	16	15	23	24
25	11	9	28	8	30
6	2	33	34	35	1

Na koncu smo dobili magični kvadrat, v kar se hitro lahko prepričate, če seštejete števila po vrsticah, stolpcih in diagonalah. Vsota v tem kvadratu je 111.

Še domača naloga za računalnikarje. Pobrskajte po starih Presekih in poiščite še oba stara članka o magičnih kvadratih in sestavite program, ki bo sprejel podatek n in izrisal magični kvadrat velikosti nxn.

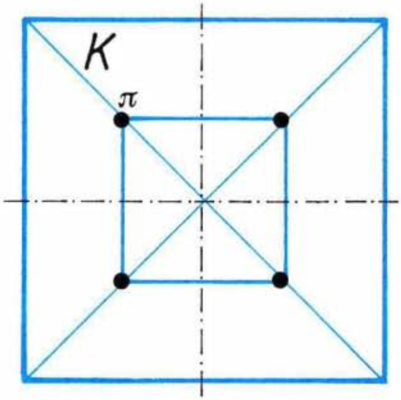
Za matematike pa še dokaz, da je naš postopek res pravilen. Osnova naših razmišljanj bo znana formula za vsoto $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. V našem primeru je torej vsota vseh števil v kvadratu enaka $1 + 2 + \ldots + (4n+2)^2 = (2n+1)(4n+2)((4n+2)^2+1)$. Ker imamo $4n+2$ vrstic, mora biti vsota v posamezni vrstici enaka $S = (2n+1)((4n+2)^2+1)$.

1. korak. Nobeno od polj iz druge in tretje skupine ne leži na glavni diagonali velikega kvadrata.

Dokaz. Polja (i, j) na tej diagonali so karakterizirana z lastnostjo $i = j$, oziroma obe komponenti morata biti enaki. Polja 2. skupine imajo koordinate $(i, \overline{n+2})$ za nek i iz množice $1, 2, \ldots, 2n+1$. Če bi katero izmed teh polj ležalo na diagonali, bi po definiciji operacije $^-$ dobili $i + (2n+1) = n + i$ oziroma $n + 1 = 0$, kar je seveda nesmisel. Povsem podobno vidimo, da tudi števila tretje skupine ne morejo biti na diagonali.

2. korak. Diagonali imata pravo vsoto.

Dokaz. Vsako polje na eni izmed diagonal je oglišče kvadrata, ki ima vsa oglišča na diagonalah (glej sliko) in natanko eno od teh polj leži v kvadratu K. Zdaj imamo samo dve možnosti: ali to polje spada v prvo skupino ali pa sploh v nobeno izmed treh skupin. V prvem primeru operacija zamenja ta števila med seboj tako, da še vedno vsa ostanejo na isti diagonali kot prej. V drugem primeru seveda ostanejo na mestu. Torej nobeno število ne zamenja diagonale, zato sta v dobljenem kvadratu vsoti v obeh diagonalah isti, kot sta bili v začetni postavitvi. Da pa sta ti vsoti pravilni, se za vajo prepričajte sami.



3. korak. Vrstice imajo pravo vsoto.

Označimo z $V(k)$ vsoto vseh števil v k-ti vrstici. Na začetku je bila ta vsota enaka

$$V(k) + A(k,1) + A(k,2) + \ldots + A(k, 4n+2) =$$
$$= (4n+2)(k-1)+1+(4n+2)(k-1)+2+\ldots+(4n+2)(k-1)+4n+2 =$$
$$= (4n+2)^2(k-1)+1+2+\ldots+(4n+2) = (4n+2)^2(k-1)+(2n+1)(4n+3)$$

Ugotoviti je potrebno, kako se je spremenil $V(k)$ po uporabi operacij $\mathcal{V}, \mathcal{S}$ in $\mathcal{C}$. Z $V'(k)$ označimo novo vsoto. V k-ti vrstici je eno polje 2. skupine in eno polje 3. skupine. Ko uporabimo operacijo $\mathcal{V}$, se vsota v vrstici ne spremeni. Ko uporabimo operacijo $\mathcal{S}$, pa zamenjamo število v polju (k, i) s številom v polju $(4n+3-k, i)$. Razlika znaša $A(4n+3-k, i) - A(k, i) = = (4n+2)(4n+2-k) + i - (4n+2)(k-1) - i = (4n+2)(4n+2-k- - k+1) = (4n+2)(4n+3-2k)$.

V k-ti vrstici je tudi n števil 1. skupine. Pri teh uporabimo operacijo $\mathcal{C}$ in v vrstici se zgodita kar dve spremembi: Zamenjata se števili v poljih (k, i) in $(4n+3-k, 4n+3-i)$ ter števili v poljih $(k, 4n+3-i)$ in $(4n+3-k, i)$. Razlika po eni uporabi operacije $\mathcal{C}$ znaša: $A(4n+3-k, 4n+3-i) - A(k, i) + + A(4n+3-k, i) - A(k, 4n+3-i) = 2(4n+2)(4n+3-2k)$. Skupna razlika med vsoto V', ki jo dobimo v k-ti vrstici po uporabi vseh treh operacij in vsoto V, ki je bila v k-ti vrstici pri začetni postavitvi, je torej $(2n+1)(4n+ + 2)(4n+3-2k)$.

$$\begin{gathered} V'(k) = V(k) + razlika = (4n+2)^2(k-1) + (2n+1)(4n+3) + \\ +(2n+1)(4n+2)(4n+3-2k) = (4n+2)(2n+1)(2k-2+4n+3-2k) + \\ +(2n+1)(4n+3) = (2n+1)(4n+2)(4n+1) + 4n+3 = \\ = (2n+1)(4n+2)^2 + 1 = S \end{gathered}$$

4. korak. Stolpci imajo pravo vsoto.

Ta korak dokažemo povsem podobno kot prejšnji korak. Poskusite sami.

Borut Zalar