

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 18 (1990/1991)

Številka 5

Stran 267

Boris Lavrič:

IRACIONALNE VSOTE

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/18/1054-Lavric-vsote.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

IRACIONALNE VSOTE

Dokaži, da so števila

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \quad \text{in} \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$$

iracionalna.

Boris Lavrič

IRACIONALNE VSOTE — Rešitev s str. 267

Če velja $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, je

$$\sqrt{6} = (1/2)((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5) \in \mathbb{Q}$$

kar pa ni res. Torej $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Denimo, da $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Potem je

$$3 = (r - \sqrt{2})^3 = r^3 + 6r - (3r^2 + 2)\sqrt{2}$$

in spet pridemo do protislovja

$$\sqrt{2} = (r^3 + 6r - 3)/(3r^2 + 2) \in \mathbb{Q}$$

ki pove, da je $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Podobno ugotovimo, da je število $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ iracionalno.

Predpostavimo zdaj, da je $s = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Potem iz enakosti

$$\begin{aligned} s^2 &= 2 + 3(\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}) + 3 = \\ &= 5 + 3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 5 + 3s\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

sledi $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{Q}$, kar ni res. Torej tudi $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Da se dokazati, da za vsak par naravnih števil $m, n > 1$ velja $\sqrt[m]{2} + \sqrt[n]{3} \notin \mathbb{Q}$.