PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 5
Stran 267

Boris Lavrič:

IRACIONALNE VSOTE

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1054-Lavric-vsote.pdf

IRACIONALNE VSOTE

Dokaži, da so števila

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\,,\quad \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\,,\quad \sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\quad \text{in}\quad \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$$

iracionalna.

Boris Lavrič

IRACIONALNE VSOTE — Rešitev s str. 267

Če velja $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, je

$$\sqrt{6}=(1/2)((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5) \in \mathbb{Q}$$

kar pa ni res. Torej $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Denimo, da $r=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Potem je

$$3=(r-\sqrt{2})^3=r^3+6r-(3r^2+2)\sqrt{2}$$

in spet pridemo do protislovja

$$\sqrt{2}=(r^3+6r-3)/(3r^2+2) \in \mathbb{Q}$$

ki pove, da je $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Podobno ugotovimo, da je število $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ iracionalno.

Predpostavimo zdaj, da je $s=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Potem iz enakosti

$$\begin{aligned} s^2 &= 2+3(\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18})+3= \\ &=5+3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})=5+3s\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

sledi $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{Q}$, kar ni res. Torej tudi $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Da se dokazati, da za vsak par naravnih števil $m, n>1$ velja $\sqrt[m]{2}+\sqrt[n]{3} \notin$ $\notin \mathbb{Q}$.

Boris Lavrič