PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 5
Stran 263

Boris Lavrič:

OSTANKI

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1054-Lavric-ostanek.pdf

NALOGE

OSTANKI

Pri katerih naravnih številih n je vsota

$$s_n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n$$

deljiva s tri?

Boris Lavrič

OSTANKI – Rešitev s str. 263

Oglejmo si najprej ostanke, ki jih dobimo pri deljenju števil

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ 4^k,\ \ldots;\quad k \in \mathbb{N}$$

s tri. Brez težav lahko ugotovimo, da so ostanki enaki

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ \ldots \text{ za lihe } k \\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots \text{ za sode } k \end{array}$$

in da se periodično ponavljajo s periodo 3. Od tod sledi, da delne vsote

$$1^k,\ 1^k+2^k,\ 1^k+2^k+3^k, \ldots$$

pri deljenju s tri dajo ostanke

$$\begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots \text{ za lihe } k \\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ \ldots \text{ za sode } k \end{array}$$

ki se ponavljajo s periodo 3 za lihe k in s periodo 9 za sode k. Zdaj sestavimo zaporedje ostankov, ki jih dobimo pri deljenju števil $s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots$ s tri. Dobimo periodično zaporedje

$$1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ \ldots$$

s periodo 18. Vsota s_n je torej deljiva s tri, kadar je n deljiv z 18 in kadar pri deljenju z 18 da enega od ostankov 3, 4, 5, 8, 9, 11, 15, 17.

Boris Lavrič