PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 3
Strani 158–159

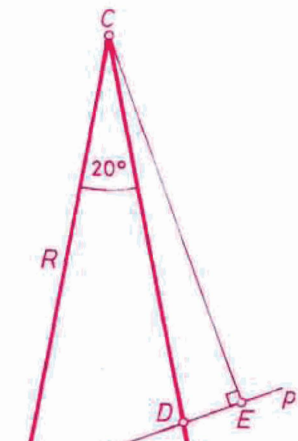
Dragoljub M. Milošević, prev. in prir. Lavrič:

PRAVILNI OSEMNAJSTKOTNIK

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1036-Lavric-Milosevic.pdf

PRAVILNI OSEMNAJSTKOTNIK



Označimo z a dolžino stranice pravilnega osemnajstkotnika, R pa naj bo polmer njemu očrtanega kroga. Dokazali bomo, da a in R povezuje enakost

$$a^3 + R^3 = 3\,a\,R^2 \qquad (Z)$$

Oglejmo si enakokraki trikotnik z vrhom C v središču očrtanega kroga in z osnovnico AB, ki se ujema s stranico osemnajstkotnika. Kot ob vrhu C seveda meri 20°. Iz A zdaj načrtajmo poltrak p, ki seka stranico BC v točki D in oklepa z AB kot 20°, nato pa še pravokotnico CE na p.

Trikotnika ABC in BDA sta podobna, zato je

$$\overline{BD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

in tedaj $\overline{BD} = a^2/R$. Torej je

$$\overline{CD} = R - a^2/R \tag{1}$$

Ker kot CAE meri 60° in je trikotnik AEC pravokoten, je

$$\overline{AE} = R/2 \text{ in } \overline{CE} = R\sqrt{3}/2$$

Zapišimo Pitagorov izrek za trikotnik CDE

$$\overline{CD}^2 = (\overline{AE} - \overline{AD})^2 + \overline{CE}^2 = (R/2 - a)^2 + (R\sqrt{3}/2)^2$$

in upoštevajmo enakost (1), pa dobimo

$$(R - a^2/R)^2 = (R/2 - a)^2 + 3R^2/4$$

Od tod po kratkem računu sledi iskana zveza (Z).

Če (Z) delimo z R^3, dobimo ekvivalentno enačbo

$$k^3 - 3k + 1 = 0 \tag{2}$$

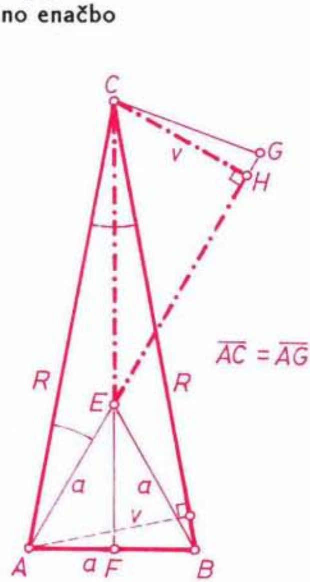
za količnik $k = a/R$. S pomočjo kotnih funkcij lahko pridemo do enačbe (2) po krajši poti. Res, iz slike 2 razberemo enakost

$$\sin 10^\circ = (a/2)/R = k/2$$

ki nam z uporabo formule za sinus trojnega kota da

$$\begin{aligned} 1/2 = \sin 3o^\circ &= \\ &= 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ = \\ &= 3(k/2) - 4(k/2)^3 \end{aligned}$$

oziroma $k^3 - 3k + 1 = 0$.



Namig za tretji dokaz zveze (Z) daje slika 2. Prepustimo dokaz bralcu, ki zanj ne potrebuje kotnih funkcij, lahko pa si pomaga s ploščinami načrtanih trikotnikov. Najde ga tudi na strani 186.

Dragoljub M. Milošević

Prev. in prir. *Boris Lavrič*