PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 2
Strani 70–72

povzel Samo Stanič:

BARVANJE ŠAHOVNICE

Ključne besede: matematika, šah.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1032-Stanic.pdf

BARVANJE ŠAHOVNICE

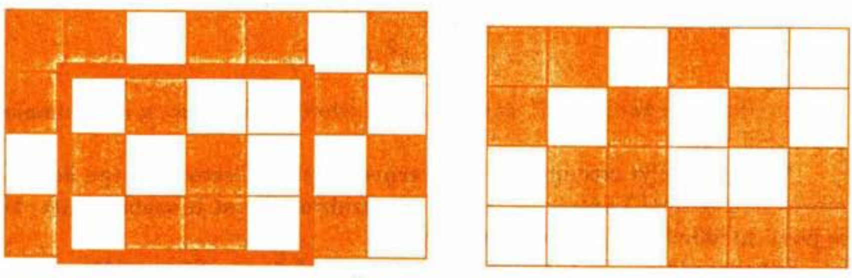
Pri razporejanju stvari po predalčkih zlahka opazimo naslednja dejstva:

Izrek 1. Če hočemo spraviti $n+1$ predmetov v n predalčkov, bosta vsaj v enem predalčku vsaj dva predmeta.

Izrek 2. Če naključno napolnim $2n+1$ predalčkov s črnimi in belimi žetoni, bo vsaj $n+1$ predalčkov vsebovalo žetone iste barve.

Že res! Kako pa si lahko s temi trditvami pomagamo? Dejansko nas lahko takole zlaganje stvari v predalčke privede do zahtevnih matematičnih spoznanj. Prvi je to pokazal Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), naslednik enega izmed največjih matematikov vseh časov Carla Friedricha Gaussa. Primer uporabe teh preprostih trditev, ki jih poznamo pod imenom "Dirichletov princip", je barvanje šahovnic.

Na šahovnicah 4×7 in 4×6 popolnoma poljubno pobarvamo polja s črno in belo barvo.



Slika 1. Šahovnici 4×7 in 4×6

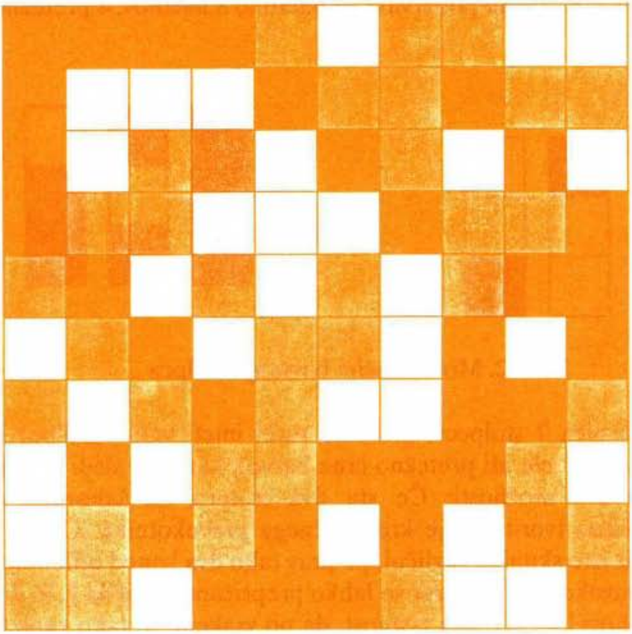
Na prvi pogled izgledata šahovnici čisto podobni, saj so na obeh polja poljubno pobarvana. Pa vendar je med njima velika razlika. Prva vsebuje (na sliki debelo okvirjen) tako imenovani **kromatični pravokotnik**, določen s tem, da so vsa štiri njegova ogljišča iste barve. Izkaže se, da kakorkoli že pobarvamo šahovnico velikosti 4×7, ta vedno vsebuje vsaj en kromatičen pravokotnik. Na drugi, malo manjši šahovnici pa nasprotno ne moremo najti prav nobenega takega pravokotnika! Zato je ta šahovnica nekaj posebnega. Zakaj tudi tu nimamo kromatičnega pravokotnika? Da bi razumeli to presenetljivo dejstvo, si oglejmo manjšo šahovnico velikosti 3×7. Razdelimo jo lahko na 7 stolpcev višine 3 in kakorkoli jo že pobarvamo, bosta vedno vsaj 2 polji v vsakem stolpcu iste barve (izrek 2).

Natančneje: Stolpec lahko pobarvam na natanko 8 načinov, 4 pretežno bele in 4 pretežno črne.

Slika 2. Možni načini barvanja stolpca

Ker ima šahovnica 7 stolpcev, moramo torej imeti vsaj 4 stolpce iz iste skupine (pretežno bele ali pretežno črne barve), kar spet sledi iz izreka 2. Zdaj imamo dve možnosti: Če sta dva stolpca na šahovnici enako pobarvana, očitno tvorita meje kromatičnega pravokotnika. Če pa so vsi štirje stolpci iz iste skupine različni, pa prav tako dva izmed njih omejujeta kromatični pravokotnik, o čemer se lahko prepričamo na sliki 2. Z drugimi besedami: Šahovnica 3×7 ima lastnost, da po vsakem, še tako zapletenem načinu barvanja na njej najdemo vsaj en kromatični pravokotnik. Taki šahovnici rečemo **kromatična**. Zdaj vidimo tudi rešitev prvotne naloge: naša šahovnica 4×7 vsebuje šahovnico 3×7 in tako tudi kromatičen pravokotnik.

S tem problemom se je pred leti ukvarjalo več profesorjev na ameriških univerzah Adelphi v Garden Cityu in State University v New Yorku. Ugotovili so, da je poleg šahovnice 3×7 kromatična le še šahovnica 5×5 in pa seveda vse tiste, ki katero od teh dveh vsebujejo, vse ostale pa so nekromatične. Dopuščajo torej vsaj eno tako barvanje, ki ne vsebuje nobenega kromatičnega pravokotnika. Naredili pa so še korak naprej: poleg črne in bele so vzeli še eno barvo – recimo zeleno. Po že opisanem postopku so ugotovili, da so zdaj kromatične le šahovnice velikosti 4×19, 5×16, 7×13, 10×11 in pa vse večje, ki katero od naštetih vsebujejo. Vse ostale so nekromatične. Seveda pa je zelo težko najti nekromatično barvanje neke šahovnice s tremi barvami. Dolgo časa so se trudili najti nekromatično barvanje šahovnice 10×10, vendar brez uspeha, čeprav so vedeli, da tako barvanje obstaja. Kot poslastico si oglejte barvanje, ki ga je končno uspelo najti ekipi z univerze Simon Fraser v Britanski Kolumbiji, izračunali pa so ga B. Alspach, K. Heinrich in B. McKey.



Slika 3. Nekromatično barvanje šahovnice 10×10 s tremi barvami

Naloga:

Podmnožici naravnih števil rečemo **rafinirana**, če za vsak njen element velja, da ni delitelj nobenega izmed ostalih elementov množice.
Tako je npr. množica {4, 6, 7, 11, 15, 19 25} rafinirana, množica {4, 6, 7, 11, 15, 18, 25} pa ne, ker 6 deli 18.

a) Izmed števil med 1 do vključno 30 izberite rafinirano množico, ki vsebuje 15 elementov.
b) Zdaj morate izbrati rafinirano množico, ki vsebuje celo 16 elementov. Čeprav je možno izbrati 16 števil izmed 30 na 145 422 675 načinov, pa prav nobena od možnih kombinacij ni rafinirana množica. Zakaj?

Še namig – do rešitve boste prišli s pomočjo izrekov 1 in 2.

Po reviji IBM Nachrichten
povzel *Samo Stanič*