

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 17 (1989/1990)

Številka 6

Stran 331

Boris Lavrič:

ERFURT 1989

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/17/1005-Lavric-Erfurt.pdf>

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Kljub obilici nalog z domačih matematičnih tekmovanj si spet (glej *Vzorec iz Moskve – P3*) privoščimo pogled v tujino. Izbrali smo pet nalog, ki so jih desetošolci iz Nemške demokratične republike reševali maja 1989 na zveznem tekmovanju v Erfurtu.

1. Dokaži, da je število $2^8 + 2^{11} + 2^n$ popolni kvadrat le za en $n \in \mathbb{N}$ in določi ta n .
2. Utemelji, da enačba $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$ nima nobene realne rešitve.
3. Poišči realni funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (definirani za vsak $x \in \mathbb{R}$), ki izpolnjujeta pogoja
 - a. $f(0) = 7$,
 - b. $g(x) \cdot f(x+1)/f(x) = g(2x) + 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
4. Trinajst točk ravnine tvori množico M , ki ustreza naslednjemu pogoju: Če vzamemo poljubne tri točke iz M , sta vsaj dve (od teh) med seboj oddaljeni manj kot 1 cm.
 - a. Dokaži, da obstaja tak krog s polmerom 1 cm, da v njem leži vsaj sedem točk iz M .
 - b. Ali je mogoče dokazati, da obstaja tak krog s polmerom 1 cm, ki vsebuje osem točk iz M ?
5. Dokaži, da za vsako četvorko (a, b, c, d) pozitivnih realnih števil, ki ustrezajo pogoju

$$a + b + c = d\sqrt{3}/2$$

obstaja taka trojka (x, y, z) realnih števil, ki reši sistem enačb

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$

$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$

$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

Boris Lavrič

ERFURT 1989 – Rešitve nalog s str. 331

1. Označimo število $2^8 + 2^{11} + 2^n$ z m in vzemimo najprej $n \leq 8$. Potem je

$$m = 2^n(2^{8-n} + 2^{11-n} + 1) = 2^n(9 \cdot 2^{8-n} + 1)$$

od koder preberemo, da za lihi n število m ne more biti popolni kvadrat (faktor 2^n), za sodi n (torej za $n \in 2, 4, 6, 8$) pa m tudi ni kvadrat naravnega števila.

Naj bo zdaj $n > 8$. Potem je $m = 2^8(9 + 2n - 8)$ popolni kvadrat natanko takrat, kadar obstaja tako naravno število p , da velja

$$2^k + 9 = p^2, \quad k = n - 8 \in \mathbb{N}$$

Potem pa je $(p - 3)(p + 3) = 2^k$ in zato

$$p = 2^{k_1} + 3 = 2^{k_2} - 3, \quad k_1, k_2 \in 0 \cup \mathbb{N}$$

Od tod sledi enakost

$$6 = 2^{k_2} - 2^{k_1} = 2^{k_1}(2^{k_2-k_1} - 1), \quad k_1 < k_2$$

ki nam da $k_1 \in \{0, 1\}$ ter navsezadnje edino dobro možnost $k_1 = 1, k_2 = 3$. Tedaj je $p = 5, k = 4$, torej je m popolni kvadrat le za $n = 12$.

2. Razčlenimo levo stran enačbe pa bo dokaz pred nami:

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 &= x^2(x-3)^2 + x^2 + 4((x-3)^2 + 1) = \\ &= x^2((x-3)^2 + 1) + 4((x-3)^2 + 1) = (x^2 + 4)((x-3)^2 + 1) > 4 \end{aligned}$$

3. Vzemimo za g konstantno funkcijo $g(x) = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Potem mora f izpolnjevati pogoja

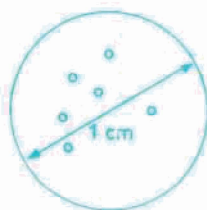
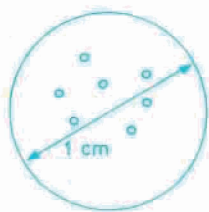
$$f(0) = 7 \quad \text{in} \quad \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2 \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}$$

Tvegajmo z nastavkom za eksponentno funkcijo

$$f(x) = c \cdot a^x, \quad c \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

ki nam takoj da rešitev $c = 7, a = 2$, torej $f(x) = 7 \cdot 2^x$.

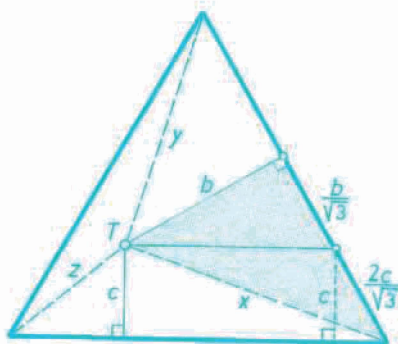
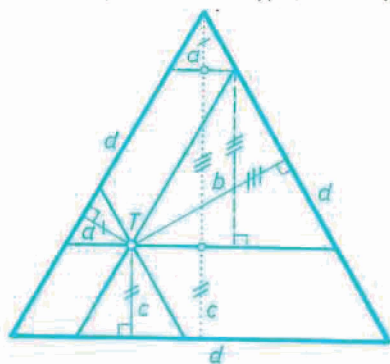
4. Denimo, da sta poljubni dve točki iz M oddaljeni manj kot 1 cm. Potem v vsakem krogu s središčem v eni izmed teh točk in s polmerom 1 cm ležijo vse točke množice M . Ostane nam še primer, ko sta dve točki iz M oddaljeni vsaj 1 cm. Označimo ti dve točki z A in B . Potem je zaradi pogoja naloge vsaka druga točka iz M oddaljena manj kot 1 cm bodisi od A bodisi od B , torej vsaj eden od krogov s središčem v A ali B in s polmerom 1 cm vsebuje vsaj sedem točk množice M . S tem smo dokazali a), odgovor na b) pa je negativen, kar pokaže slika na naslednji strani.



5. Načrtajmo enakostranični trikotnik z osnovnico dolžine d in v njem poiščimo točko T , ki je od osnovnic oddaljena a , b , oziroma c . Da to lahko storimo, nam pove slika na levi, desna slika pa pokaže, da iskano trojko (x, y, z) sestavljajo razdalje od T do oglišč trikotnika. Za nameček nam ta slika da rešitve. Po Pitagorovem izreku je namreč

$$x^2 = b^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2c}{\sqrt{3}}\right)^2$$

in zato $x = 2\sqrt{(b^2 + bc + c^2)/3}$. Podobno dobimo še $y = 2\sqrt{(a^2 + ac + c^2)/3}$, $z = 2\sqrt{(a^2 + ab + b^2)/3}$.



Boris Lavrič