PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 6
Stran 330

Šefket Arslanagić, prevod in priredba Boris Lavrič:

TRI NEENAKOSTI

Ključne besede: Naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/1005-Arslanagic-Lavric.pdf

TRI NEENAKOSTI

1. Dokaži, da za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0$$

2. Dokaži, da za poljubne $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja

$$x^2 + 199y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz \geq 0$$

in ugotovi, kdaj velja enakost.

3. Dokaži, da je za vsak $x \in \mathbb{R}$

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$$

Šef ket Arslanagić
prev. in prir. *Boris Lavrič*

TRI NEENAKOSTI - Rešitev s str. 330

1. Levo stran neenakosti pomnožimo z 2 in zapišemo v naslednji obliki:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 = (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Odtod že vidimo, da neenakost velja, enakost pa je dosežena le pri $x = y = 1$.

2. Spet preoblikujemo levo stran neenakosti

$$\begin{aligned} &x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz = \\ &= (x - 4y - 2z)^2 + y^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz = \\ &= (x - 4y - 2z)^2 + y^2 + 2(y-z)^2 \end{aligned}$$

od koder sledi trditev. Enakost velja le za $x = y = z = 0$.

3. Označimo $p(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ in ločimo tri možnosti. Če je $x \leq 0$, je očitno $p(x) \geq 1$, saj so ostali sumandi v $p(x)$ nenegativni. Za $0 < x < 1$ velja

$$p(x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$$

pri $x \geq 1$ pa je

$$p(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x-1) + 1 \geq 1$$

Šef ket Arslanagić
prev. in prir. *Boris Lavrič*