PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 129–131

Samo Stanič:

DVAJSET TISOČ DECIMALK ŠTEVILA π

Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/982-Stanic.pdf

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803
482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344
61284756482337867831652712019091456485669234
60348610454326648213393607260249141273724587
00660631558817488152092096282925409171536436
78925903600113305305488204665213841469519415
11609433057270365759591953092186117381932611
79310511854807446237996274956735188575272489
12279381830119491298336733624406566430860213
94946395224737190702179860943702770539217176
29317675238467481846766940513200056812714526
35608277857713427577896091736371787214684409
01224953430146549585371050792279689258923542
01995611212902196086403441815981362977477130
99605187072113499999983729780499510597317328
16096318595024459455346908302642522308253344
68503526193118817101000313783875288658753320
83814206171776691473035982534904287554687311
59562863882353787593751957781857780532171226
80661300192787661119590921642019893809525720
10654858632788659361533818279682303019520353
01852968995773622599413891249721775283479131
51557485724245415069595082953311686172785588
90750983817546374649393192550604009277016711
39000984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404
75346462080466842590694912933136770289891521
04752162056966024058038150193511253382430035
58764024749647326391419927260426992279678235
47816360093417216412199245863150302861829745
55706749838505494588586926995690927210797509
30295532116534498720275596023648066549911988
18347977535663698074265425278625518184175746
72890977772793800816470600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757418494684385233239073941433345477624168625

DVAJSET TISOČ DECIMALK ŠTEVILA PI

Krog je ena najpogostejših geometrijskih oblik v naravi in že stari Egipčani so opazili, da obstaja med polmerom in površino kroga povezava. Antični misleci so pokazali, da je ploščina sorazmerna s kvadratom polmera, sorazmernostni koeficient pa danes poznamo kot π. Določanja te konstante se je prvi sistematično lotil Arhimed (225 pr.n.št.). Z izračunom ploščine krogu včrtanega in očrtanega 96 - kotnika je določil zgornjo in spodnjo mejo intervala, na katerem leži π. Njegova metoda je ostala v uporabi naslednjih 1800 let, zgornja meja 22/7 pa je še danes uporabljan približek. Največjo natančnost je z njo dosegel Ludolph Van Ceulen, ki je leta 1610 z uporabo 2^{62} – kotnikov uspel izračunati π na 35 mest natančno; nekateri viri navajajo, da je po tem zaradi izčrpanosti umrl. Odkritje Jamesa Gregorya leta 1671 je omogočilo mnogo večjo natančnost. Skoraj vsi postopki za računanje π do leta 1983 temeljijo na njegovi potenčni vrsti za arkus tangens (inverzna funkcija tangensu):

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (1)$$

Za vsak x se lahko z izračunom ustrezno mnogo členov vrste dobimo arkus tangens x na željeno stevilo decimalk natančno. Naš cilj je izračunati π, torej bomo izbrali tak x, katerega arkus tangens bo mnogokratnik π. Poznana je zveza $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; torej lahko zapišemo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \qquad \text{Leibnizova formula} \quad (2)$$

Težava je v tem, da moramo pri uporabi vrste (2) izračunati izredno veliko členov za vsako naslednje decimalno mesto: vrsta konvergira zelo počasi. Z uporabo raznih matematičnih trikov so matematiki za računanje π izpeljali formule, ki vsebujejo vsote in razlike arkus tangensov števil dosti manjših od 1. Tako vrste za vsak posamezen arkus tangens konvergirajo dosti hitreje in enako natančnost dosežemo z izračunom bistveno manj členov. Čim hitreje konvergira vrsta, tem hitrejši bo tudi izračun. Nekatere izmed bolj znanih formul so:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg}\frac{3}{79} \qquad (3)$$

po kateri je Jurij Vega leta 1794 izračunal π na 126 mest natančno;

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \qquad \text{John Machin l.1706} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{10} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{515} \qquad \text{Klingstierna} \qquad (5)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \qquad \text{Gauss} \qquad (6)$$

Hitrost izračuna najlepše prikaže natančnost rezultata glede na število izračunanih členov:

n	Leibnizova formula	Machinova formula
1	4.00000	3.1832635
2	2.66666	3.1405970
3	3.46666	3.1416210
4	2.89523	3.1415917
5	3.33968	3.1415926
10	3.04138	
100	3.13593	

Po teh formulah z osebnim računalnikom v relativno kratkem času dobimo približek π natančen na nekaj 1000 decimalk. Objavljenih 20.000 mest je rezultat enournega računanja na računalniku VAX 8650. Rezultat je bil preverjen tako, da je bil izračunan po treh različnih formulah (4, 5 in 6). Rezultati se ujemajo v 19.995 mestih. Na žalost se kmalu pokažejo tudi omejitve te metode. Čas računanja se veča s kvadratom decimalnih mest, tako da je metoda uporabna le do nekaj 100.000 mest, potem pa se čas računanja poveča preko vsake smiselne meje. Šele po letu 1983 so odkrili nove postopke, ki pa so dosti bolj zapleteni. Z njihovo pomočjo je letos profesor Yasuma Kaneda s Tokijske univerze na superračunalniku NEC SX - 2 izračunal 536.870.912 (2^{29}) decimalnih mest π, kar je najnovejši dosežek na tem področju.

Literatura:

[1] Ivan Vidav, *Višja matematika I,* DMFA SRS, Ljubljana (1987) 399

[2] Tomaž Pisanski, *Razmerje med polmerom in obsegom kroga,* Obzornik za matematiko in fiziko 31 (1984) 44 - 48

[3] Jurg Nievergelt, *Computer approaches to mathematical problems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1974) 198 - 202

Samo Stanič