

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 17 (1989/1990)

Številka 2

Strani 86–94

Marija Vencelj:

GLEJ MAVRICA! 2. DEL, KJE NA NEBU ISKATI MAVRICO

Ključne besede: matematika, analiza, fizika, dežna mavrica, lom, odboj.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/17/974-Vencelj-mavrica.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

GLEJ, MAVRICA!

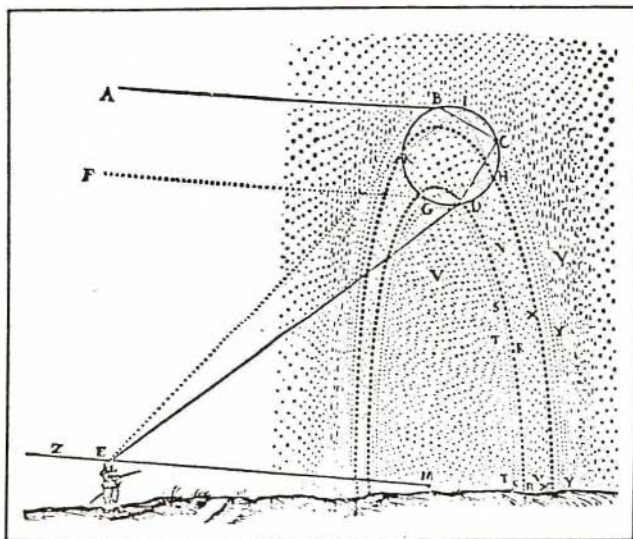
2. del: Kje na nebu iskati mavrico

Po uvodnih mislih v prejšnji številki Preseka je pred nami naloga, da razložimo pojav dežne mavrice.

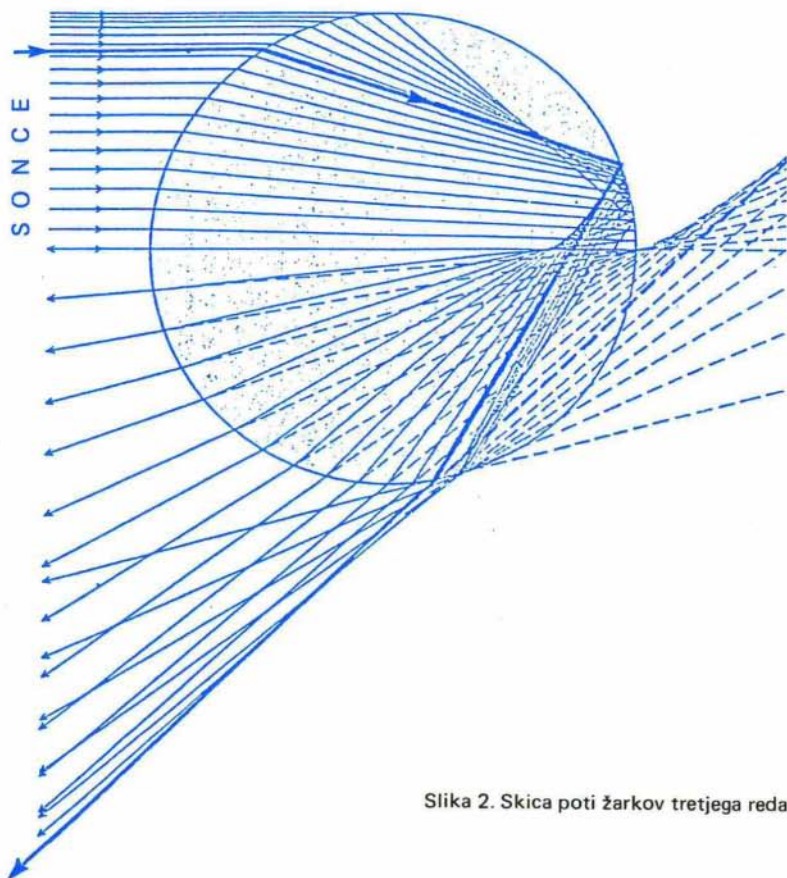
Povedali smo že, da so *izvor glavne mavrice žarki tretjega reda*. To so žarki, ki se na stenah dežne kapljice dvakrat lomijo in enkrat odbijejo na notranji strani. *Stransko mavrico dajejo žarki z dvema lomoma in dvema notranjima odbojema*. Imenovali smo jih *žarki četrtega reda*.

Da je mavrica posledica loma in odboja svetlobe, je že v 13. stoletju domneval poljski menih Vitello. Vendar je menil, da gre za lom in odboj na oblaku kot celoti. Pomemben napredek pomeni trditev nemškega meniha Theodorica iz Freiburga v začetku 14. stoletja, da nastane mavrica zaradi loma in odboja svetlobe na posameznih vodnih kapljicah. Ker pa v njegovem času lomni zakon še ni bil znan, ni mogel razložiti, zakaj vidimo mavrico vedno pod istim kotom glede na smer sončnih žarkov.

To je uspelo šele Descartesu dobra tri stoletja kasneje (slika 1). Descartes je rezultat dobil z risanjem poti sončnih žarkov, ki zadenejo ob kapljico pod različnimi vpadnimi koti. Na sliki 2 je skica žarkov tretjega reda. Žarek, ki pade na kapljico pravokotno, gre skozi središče kapljice, se na notranji steni odbije nazaj proti soncu in izhaja kot žarek tretjega reda za 180° odklonjen od



Slika 1. Descartesova razlaga mavrice iz leta 1637. Glavno mavrico daje žarek **ABCDE**, stransko žarek **FGHKE**.



Slika 2. Skica poti žarkov tretjega reda.

prvotne smeri. Z večanjem vpadnega kota se odklon žarkov tretjega reda od prvotne smeri manjša do nekega najmanjšega odklona (ta žarek je na risbi narisana poudarjeno), nato pa spet raste. Črtkano so narisane še navidezne poti žarkov, kot jih dojemamo naše oko. S slike lahko razberemo marsikaj. Če naj žarek tretjega reda zadene naše oko, se moramo nahajati na isti strani kapljice kot sonce. To pomeni, da *moramo biti obrnjeni tako, da imamo sonce za hrbtom*. Razen tega mavrice ne bomo našli prav visoko na nebu. Najvišja možna smer je določena s smerjo najmanjšega odklona žarkov tretjega reda od prvotne smeri. Na sliki je ta smer označena s poudarjeno črtkano črto.

Če je mavrica vidna, smer lahko izmerimo. Poiskali jo bomo tudi po matematični poti. V obeh primerih se moramo odločiti, od kod bomo merili kot, ki smer določa. Prvi hip se zdi, da bi ga bilo najprimerneje meriti od vodoravne

ravnine tal, na katerih stojimo. Vendar bi tedaj nastopile težave, če bi na primer stali na bregu. Zato se raje odločimo za bolj neodvisno osnovno smer. Taka je smer vpadnih sončnih žarkov. Izbira njihove smeri za osnovno ima še dodatno prednost, da sta matematični izračun in tolmačenje rezultata enostavnejša.

Na sliki 3 je narisana pot enega samega žarka tretjega reda skozi dežno kapljico. S φ smo označili kot, suplementaren kotu odklona žarka od prvotne poti. Poiščimo odvisnost kota φ od vpadnega kota α !

Kota pri P in R , ki smo ju označili z δ , sta enaka, ker sta izmenična. Trikotnik ASP ima zunanji kot 4β in nepriležna notranja kota α in δ , trikotnik RCQ pa zunanji kot δ in nepriležna notranja kota φ in α . To pomeni

$$\delta = \varphi + \alpha = 4\beta - \alpha$$

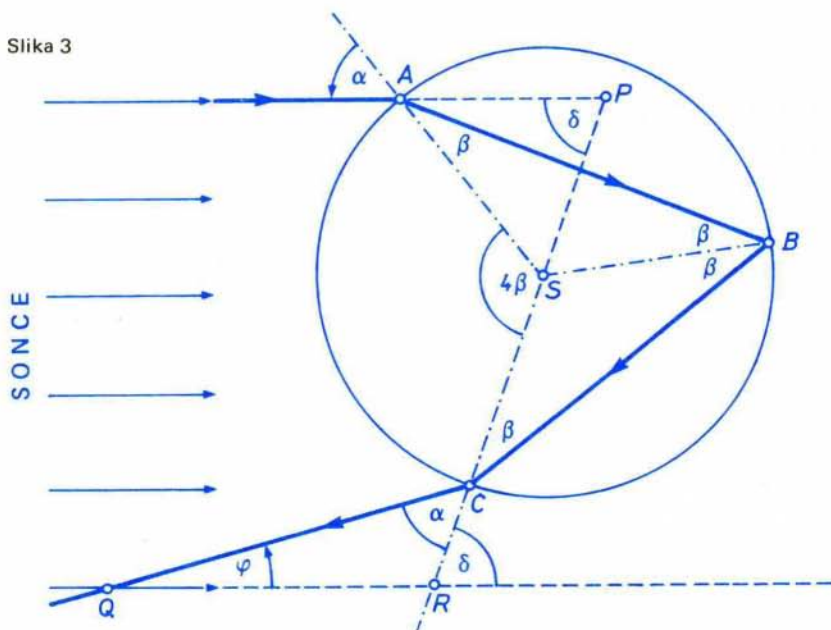
kar da

$$\varphi = 4\beta - 2\alpha \quad (1)$$

Po lomnem zakonu je

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c_1}$$

Slika 3



kjer sta c in c_1 hitrosti širjenja svetlobe v zraku in v vodi. Če označimo

$$n = \frac{c}{c_1}$$

imamo

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right)$$

kar da skupaj z (1)

$$\varphi = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) - 2\alpha \quad (2)$$

Vstavimo v (2) vrednost $n = \frac{4}{3}$, kar je približna vrednost lomnega količnika za prehod svetlobe iz zraka v vodo. Dobimo:

$$\varphi = 4 \arcsin\left(\frac{3}{4} \sin \alpha\right) - 2\alpha \quad (3)$$

kjer je $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Funkcija (3) je narisana na sliki 4. Tudi tisti, ki so vam bili zadnji računi pretežki, lahko z nje razberete, kako se spreminja kot φ , ko vpadni kot α narašča od 0° do 90° .

Vidimo, da zavzame kot φ vrednosti od 0° do približno 42° . Pri tem ne prezrimo, da je φ odvisen le od vpadnega kota α in nič od premera krogljice. Torej bo tudi *največja možna vrednost kota φ za vse dežne kapljice ista*. Z nekaj več matematičnega znanja lahko to vrednost izračunamo. V ta namen poiščemo ničle prvega odvoda funkcije (2) na intervalu $[0^\circ, 90^\circ]$. Imamo:

$$\varphi' = \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - 2 = 0$$

kar da

$$\sin \alpha_{\max} = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (4)$$

Za $n = \frac{4}{3}$ je

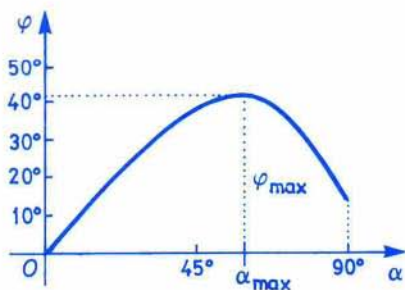
$$\sin \alpha_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

in

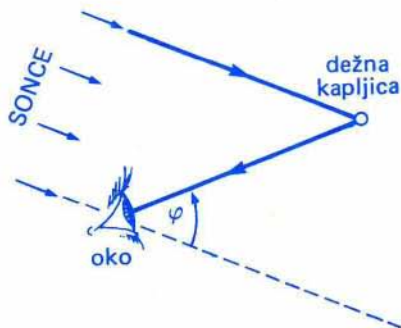
$$\alpha_{\max} = 59,4^\circ \quad \varphi_{\max} = 42,03^\circ$$

Kaj ta rezultat pomeni? Pogledajmo ponovno sliko 3. Denimo, da narisani žarek zadene naše oko. Potem je kot φ enak kotu z vrhom v našem očesu, enim krakom v smeri sončnih žarkov (stran od sonca) in drugim krakom v smeri kapljice, iz katere žarek izhaja (slika 5).

Ta kot lahko zavzame vrednosti od 0° do $\varphi_{\max}$. Temu pogoju ustreza *notranjost stožca* z vrhom v našem očesu, osjo v smeri sončnih žarkov in kotom $\varphi_{\max}$ med osjo in tvorilko. Vsaj polovica tega stožca je pod obzorjem. V zgornjem delu prihajajo do nas žarki tretjega reda, ki jih dojemamo kot *kos osvetljene polkrožne plošče* v daljavi. Kolikšen je ta kos, je odvisno od višine sonca in tudi od tega, kolikšen del dopustnega prostorskega kota zastira dežna zavesa.



Slika 4

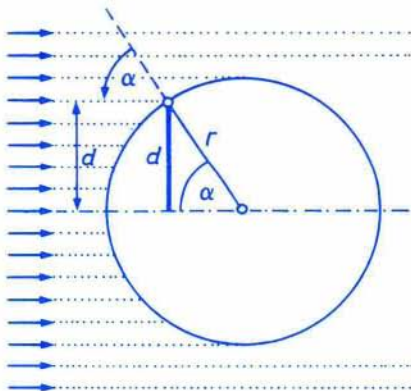


Slika 5

Poglejmo sedaj, kako je s *porazdelitvijo svetlobe* na tej plošči. Ker pripada dani kapljici ena sama taka ravnina, v kateri potuje žarek tretjega reda proti opazovalčevemu očesu, je tudi ta problem ravninski.

Sončna svetloba je v prostoru *enakomerno porazdeljena*. Za ravninski primer lahko to lastnost prikažemo s snopom med seboj enakomerno oddaljenih žarkov (slika 6). S slike takoj vidimo, da temu ne ustreza enakomerna porazdelitev vpadnih kotov. Pod manjšimi vpadnimi koti zadene kapljico več svetlobe kot pod velikimi. Enakomerna pa je porazdelitev oddaljenosti vpadnih žarkov od središča kapljice. Na sliki 6 je ta razdalja označena z d . Zavzame lahko vrednosti z intervala $[0, r]$, kjer je r polmer opazovane kapljice. Enako dolgim intervalom spremenljivke d pripadajo enake količine vpadle svetlobe.

Slika 6



Za opis porazdelitve svetlobe na naši navidezni svetli plošči v daljavi je torej primerno v funkciji (3) zamenjati spremenljivko a s spremenljivko d . Njunjo medsebojno zvezo

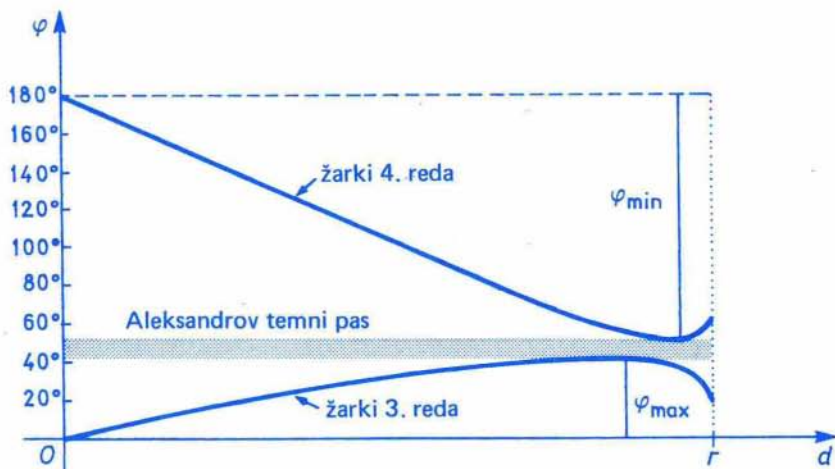
$$d = r \sin a$$

dobimo s slike 6. Opustimo analitičen zapis funkcije $\varphi(d)$, $d \in [0, r]$, pač pa si ogledjmo njen graf na sliki 7. Na isti sliki je narisana tudi graf ustrezne funkcije za stransko mavrico, o kateri bomo govorili kasneje.

Večjo koncentracijo svetlobe lahko pričakujemo v taki smeri φ , v kateri se združujejo osnovni žarki s širšega območja spremenljivke d . To je področje počasnega spreminjanja funkcije $\varphi(d)$, torej okolica maksimuma. S slike 7 razberemo, da za zelo širok interval spremenljivke d izhajajo žarki tretjega reda pod koti med 40° in 42° . Pri manjših kotih φ je svetlobe manj in je enakomernejše porazdeljena.

Torej lahko sklenemo: *navidezna svetlobna plošča ima v bližini $\varphi_{\max}$, to je ob zunanjem robu, svetel lok, ki blesti postopoma proti notranjosti in ostreje proti temni zunanji strani.* Ponovno se je izkazala pomembnost kota $\varphi_{\max}$, zato zasluži posebno ime. Rekli mu bomo *mavrični kot*.

Seveda mavrice s tem še nismo povsem razložili. Vsi vemo, da lok ni samo svetel, ampak tudi lepo barvast.



Slika 7

V prejšnji številki Preseka smo povedali, da se vsaka barvna komponenta svetlobe nekoliko drugače lomi. Tega doslej nismo upoštevali, saj smo funkcijo (3) dobili iz (2) z vstavljanjem $n = 4/3$, približne vrednosti lomnega količnika za prehod svetlobe iz zraka v vodo. Dejansko pa bi morali vstaviti v (2) za vsako posamezno barvo ustrezno poprečno vrednost za n . Da ne bo preveč podatkov, navedimo le mejni vrednosti:

barva	n	φ_{max}
rdeča	1'3290	42° 39' 52"
vijolična	1'3452	40° 20' 0"

V zadnjem stolpcu je zapisana tudi velikost ustreznega mavričnega kota. Vidi-mo, da je pri rdeči barvi ta kot za dobri dve stopinji večji kot pri vijolični. Ko gremo v osnovnem spektru vidne svetlobe od vijolične preko modre, zelene, rumene in oranžne barve do rdeče, lomni količnik n monotono pada. Nadalje sledi iz (4), da je a_{max} padajoča funkcija spremenljivke n na intervalu (1'3290, 1'3452); z vstavljanjem a_{max} v (3) dobimo še, da je φ_{max} padajoča funkcija a_{max} . Če vse združimo, sledi, da narašča mavrični kot od 40° 20' do 42° 39' 52" glede na barve v istem vrstnem redu, kot si sledi v osnovnem spektru vidne svetlobe.

Mavrica sestoji torej iz polkrožnih plošč svetlobe različnih barv. Ker imajo plošče skupno središče, se v sredini prekrivajo in dajejo *belo ali svetlo sivo notranjost glavnega mavričnega loka*. Posamezne barvne plošče so zaradi različnih mavričnih kotov različno velike. Največja je rdeča, najmanjša vijolična plošča. Tako rdeča plošča na zunanjem robu ni prekrita z drugimi barvami. To pojasnjuje, zakaj je v mavrici prav rdeča barva najčistejša. Ostale barve se bolj ali manj prekrivajo. Ker pa so njihovi intenzivneje obarvani zunanji robovi medsebojno rahlo premaknjeni, prevlada v mešanici na posameznem mestu ustrezna najmočnejša barva. *Lepi lok glavne mavrice torej sestavljajo drug ob drugem nanizani barvni loki s skupno navidezno širino nekaj nad dve stopinji*. V njem je vijolična barva najmanj izrazita, ker je prekrita z vsemi barvami. Včasih celo čisto zbledi. Ostale barve postajajo proti zunanjemu robu izrazi-tejše.

Tako smo s sredstvi geometrijske optike uspešno razložili zgradbo in lego glavne mavrice. Poglejmo še enkrat, kje jo ob ugodnih vremenskih razmerah lahko pričakujemo. *Obrnjeni s hrbtom proti soncu, odmerimo kot 40° do 42° navzgor od smeri sončnih žarkov. Le na dobljenem mestu se lahko nahaja vrh loka glavne mavrice*. Od tod takoj sledi, da glavne mavrice ne moremo videti,

če je sonce previsoko na nebu, natančneje, če je več kot 42° nad obzorjem. Če pa je sonce dovolj nizko, si jo lahko celo sami napravimo. "Dež" v ravno pravi smeri lahko naredimo kar s pomočjo cevi za zalivanje vrta ali pranje avtomobila.

Stranska mavrica je zgrajena podobno kot glavna, kar ugotovimo z analizo žarkov četrtega reda. Odvisnost kota φ , ki ga merimo od istega poltraka kot pri žarkih tretjega reda, je prikazana na sliki 7.

Vidimo, da stranska mavrica ne oddaja nič svetlobe v notranjost stožca, določenega s kotom φ_{min} , ki meri približno 50° . To je *mavrični kot stranske mavrice*. Med posameznimi barvami ima najmanjši mavrični kot rdeča komponenta stranske mavrice, največjega vijolična. Torej si barve stranske mavrice slede od znotraj navzven v obratnem vrstnem redu kot pri glavni mavrici. Poleg tega so tu razlike med mavričnimi koti posameznih barv večje. Zato je stranska mavrica širša od glavne, je pa tudi bolj motna oziroma bleda. To lahko razložimo z večjo izgubo svetlobe pri žarkih četrtega reda v primerjavi z žarki tretjega reda. Delno pa pojasnjuje medlost tudi manj sploščeno teme zgornje krivulje na sliki 7.

Slika 7 pojasnjuje tudi *Aleksandrov temni pas*, to je temnejše področje med obema mavričnima lokoma. Vidimo, da žarki tretjega in četrtega reda ne prispevajo nič svetlobe v kote med 42° in 50° . Če bi ne bilo drugih žarkov, bi bilo to področje povsem črno.

Tako smo z metodo *geometrijske optike* pojasnili najbolj opazne mavrične pojave. Ima pa metoda to pomankljivost, da z njo ni moč razložiti navidezno manj pomembnih pojavov. Za njihovo razumevanje je treba upoštevati *valovno naravo svetlobe*. Tako je moč z *interferenco* pojasniti pojav dodatnih lokov, ki leže na notranji strani glavne mavrice, kakor tudi to, da so njihove sledi odvisne od velikosti dežnih kapljic. Čim manjše so kapljice, tem redkejši in zato jasneje vidni so dodatni loki. Ko kapljice dežja padajo, se večajo, zato dodatne loke laže opazimo blizu vrha mavrice.

Ni pa moč npr. samo z interferenco razložiti rahle osvetljenosti Aleksandrovega temnega pasu, saj tudi ta metoda predvideva popolno temo v tem področju. Zadovoljiv odgovor na to in še na nekatera druga vprašanja daje pravzaprav le popolno upoštevanje dejstva, *da je svetloba elektromagnetno valovanje*.

Za konec omenimo še lep pojav, ki ga z metodami, uporabljenimi v tem članku, ne moremo razložiti. Gre za imenitno predstavo, za katero včasih

MAVRIČNA UGANKA

Zadnjega šolskega dne opoldne sta se s spričevaloma v torbah skupaj vračala iz šole Špela in Janez. Nenadoma je skozi dež posijalo sonce. Janez je vzkliknil: "Glej, mavrica!" "Lažeš!" je odvrnila Špela in se ni niti ozrla. — Kako je Špela vedela, da jo hoče Janez potegniti?

Marija Vencelj

