PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 6
Stran 326

Boris Lavrič:

DVE IRACIONALNI

Ključne besede: naloge, razvedrilo, matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/954-Lavric.pdf

DVE IRACIONALNI

1. Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev:
   Če je a racionalno število, ki pa ni celo, potem število 10^a ni racionalno.

2. Dokaži, da za noben $n \in \mathbb{N}$ število $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$ ni racionalno.

Boris Lavrič

DVE IRACIONALNI – Rešitev s strani 326

1. Denimo, da sta števili a in 10^a obe racionalni. Zapišimo ju v obliki okrajšanih ulomkov in se najprej omejimo na primer $a > 0$.

$$a = m/n, \quad 10^a = p/q\,; \quad m, n, p, q \in \mathbb{N}$$

Potem je $10^{m/n} = p/q$, od koder sledi enakost

$$10^m q^n = p^n$$

Števili p in q sta tuji, zato je $q = 1$ in tedaj $10^m = p^n$. Od tod vidimo, da sta 2 in 5 edina prafaktorja števila p, in zato p naravna potenca števila 10. Torej je m večkratnik števila n, a pa naravno število.

Na podoben način ugotovimo, da pri pogoju $a < 0$ velja $a \in \mathbb{Z}$. Trditev naloge potemtakem drži.

2. Predpostavimo, da je število $r = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$ racionalno. Potem je

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} = r^2 - n \in \mathbb{Q} \quad \text{in} \quad \sqrt{n} = (r^2 - n)^2 - n \in \mathbb{Q}$$

Druga ugotovitev nam pove, da je n popoln kvadrat, torej $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Potem pa je število $\sqrt{m^2 + m}$ racionalno in se da zapisati kot okrajšani ulomek

$$\sqrt{m^2 + m} = p/q\,; \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Enakost $(m^2 + m)\, q^2 = p^2$ s tujima p in q pove, da je $q = 1$, torej velja $m^2 + m = p^2$. Zato je

$$m^2 < p^2 < (m + 1)^2 \quad \text{in} \quad m < p < m + 1$$

kar pa ne more biti res. Predpostavka na začetku dokaza je tedaj napačna, trditev pa s tem dokazana.

Boris Lavrič