

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **16** (1988/1989)

Številka 6

Stran 342

Boris Lavrič:

MATEMATIČNI KROŽEK

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/16/954-Lavric-krozek.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

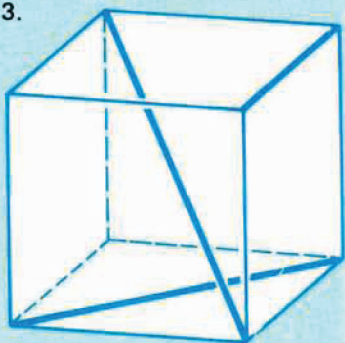
MATEMATIČNI KROŽEK

1. Trikotniku, v katerem obstajata taki dve stranici, da je vsota njunih dolžin enaka vsoti dolžin tretje stranice in višine nanjo, recimo *TV*-trikotnik.
a) Poišči vse enakokrake *TV*-trikotnike.
b) Ali obstaja kakšen pravokoten *TV*-trikotnik?



2. Za katera naravna števila n je vsota $3^n + 7$ popolni kvadrat?

3.



Dana je kocka z robom dolžine a . Kolikšna je (najkrajša) razdalja med njeno telesno diagonalno in mimobežnim robom kocke?

- a) mimobežno diagonalno stranske ploskve kocke?
- b) mimobežno diagonalno stranske ploskve kocke?

Boris Lavrič

1. a) Naj bo ABC enakokraki TV –trikotnik s krakoma AB in AC ter višinama AA_1 in BB_1 . Višina BB_1 je kateta pravokotnega trikotnika BCB_1 , zato je krajša od osnovnice BC in velja

$$\overline{AC} + \overline{BB_1} < \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Torej mora biti (glej sliko in upoštevaj, da je ABC TV –trikotnik)

$$a + v = 2b$$

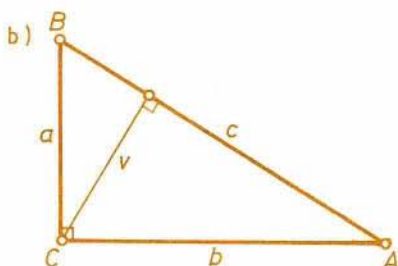
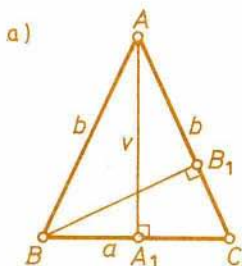
po Pitagorovem izreku za AA_1C pa še

$$a^2 + 4v^2 = 4b^2$$

Če kvadriramo prvo enakost in upoštevamo drugo, dobimo $3v^2 = 2av$, torej velja

$$v = (2/3)a, \quad b = (5/6)a$$

Vsi enakokraki TV –trikotniki so potemtakem podobni trikotniku z osnovnico dolžine 6 in krakoma, ki merita 5.



b) Dokažimo, da pravokotnega TV –trikotnika ni. Vsota dolžin katete in hipotenuze je očitno večja od vsote dolžin druge katete in višine nanjo, ki sovpada s prvo kateto. Bolj zanimivo je preveriti, če je vsota dolžin obeh katet manjša od vsote dolžin hipotenuze in višine nanjo:

Poglejmo oznake na sliki, izrazimo ploščino trikotnika na dva načina in uporabimo Pitagorov izrek. Dobimo

$$ab = cv \quad \text{in} \quad a^2 + b^2 = c^2 < c^2 + v^2$$

od tod pa še

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab < c^2 + v^2 + 2cv = (c + v)^2$$

in nazadnje $a + b < c + v$.

2. Zapišimo $3^n + 7 = m^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$) in upoštevajmo, da je vsota na levi sode za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zato je tudi število m sodo, m^2 pa deljiv s 4. Odtod sledi, da potenca 3^n pri deljenju s 4 da ostanek 1. Ostanki pri deljenju 3^n s 4 so zaporedoma za $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ enaki 3, 1, 3, 1, ..., torej je n sodo število. Zato velja $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) in

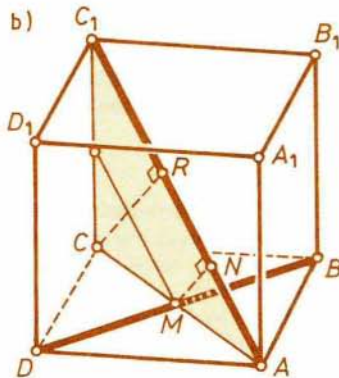
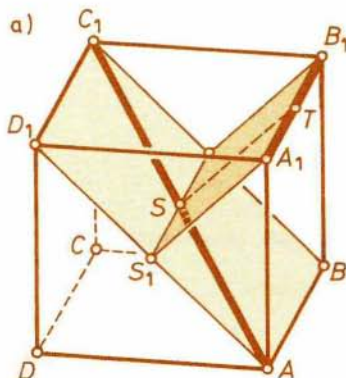
$$7 = m^2 - 3^{2k} = (m - 3^k)(m + 3^k)$$

Ker je 7 praštevilo, dobimo enakosti

$$m - 3^k = 1, \quad m + 3^k = 7$$

z edino rešitvijo $m = 4, k = 1$. Torej je $n = 2$.

3. a) Pomagali si bomo s sliko a. Izračunajmo razdaljo med robom A_1B_1 in diagonalo AC_1 . Rob A_1B_1 je vzporeden ravnini skozi točke A, C_1, D_1 in od nje oddaljen $A_1S_1 = (\sqrt{2}/2)a$. To je tudi oddaljenost med točko T z roba A_1B_1 in najbližjo točko S z diagonale AC_1 , torej razdalja med obema daljicama.



b) Poglejmo sliko b in določimo razdaljo med diagonalo BD stranske ploskve in telesno diagonalo AC_1 . Le-ta je vzporedna ravnini, ki gre skozi točki B, D in razpolovišče P roba CC_1 . Zato je iskana razdalja d enaka dolžini pravokotnice MN , ki pa je pol krajša od višine CR pravokotnega trikotnika AC_1C . Iz enakosti

$$\overline{AC} \cdot \overline{CC_1} = \overline{CR} \cdot \overline{AC_1}$$

dobimo $\overline{CR}$ in nato še $d = \sqrt{2/3} a$.

Boris Lavrič