PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 6
Stran 351

Božidar Casar:

TRIKRAT O NEKI NALOGI

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/954-Casar.pdf

TRIKRAT O NEKI NALOGI

Ko sem pred dnevi brskal po starih zvezkih iz gimnazijskih časov, sem našel v njih tudi nalogo z republiškega tekmovanja srednješolcev iz fizike v Velenju leta 1981. Nalogo sem rešil na tri načine in prepričan sem, da vas bodo naloga, in seveda tudi same rešitve, zanimale. Pa kar k nalogi.

Mornar opazi ob času $t = 0$ dve ladji. Prva je od njega oddaljena za 5 km proti vzhodu in 2 km proti severu, giblje pa se s hitrostjo 3 km/h proti severu. Druga ladja je 2 km vzhodno in 4 km severno od mornarja, njena hitrost pa je 1 km/h proti vzhodu in 2 km/h proti severu.

a) Kdaj si bosta ladji najbližji?

b) Kolikšna bo tedaj njuna medsebojan razdalja?

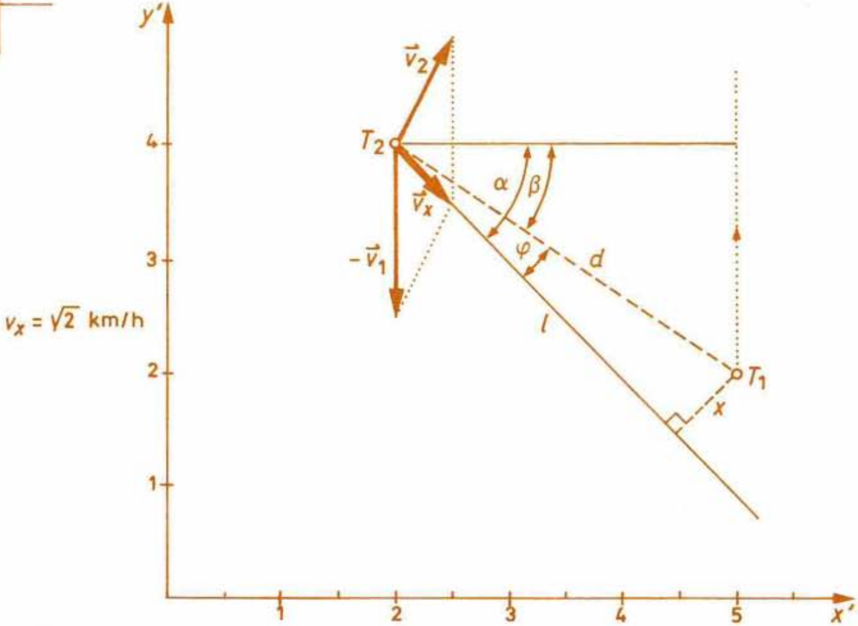
c) Za koliko bosta oddaljeni od mornarja?

Božidar Casar

Rešitve glej na strani 371.

TRIKTRAT O NEKI NALOGI – Rešitev s str. 351

A) Nalogo lahko rešujemo upoštevaje *Galilejevo transformacijo.* Ta transformacija nam omogoča, da pri računanju upoštevamo, kot da prva ladja miruje, druga pa se premika glede na njo s hitrostjo $\vec{v}_x = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$. Z drugimi besedami. koordinatni sistem, v katerem bomo sedaj računali, "se vozi" s prvo ladjo z enako hitrostjo v isti smeri.



Slika 1

Izračunajmo najprej d (slika 1)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}\,\text{km}$$

Hitro ugotovimo, da $\alpha = 45^0$ in $\sin\beta = 2/\sqrt{13}$. Ker velja $\varphi = \alpha - \beta \Rightarrow \varphi \doteq$ $\doteq 11{,}3^0$.

Najmanjša razdalja med ladjama je pravokotnica x, za katero velja

$$x = d.\sin\varphi = 0{,}707\ \text{km}$$

To bo po času t

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{x}{\mathrm{tg}\varphi .\, v_x} = \frac{d.\sin\varphi}{v_x .\mathrm{tg}\varphi} = \frac{d.\cos\varphi}{v_x} = 2,5 \text{ h}$$

Razdalje do mornarja dobimo od tu zelo enostavno: k legam v koordinatnem sistemu $x'y'$ prištejemo razdaljo, ki jo je ta koordinatni sistem prevozil v primerjavi s koordinatnim sistemom xy t.j. $Y = 2,5$ h 3 km/h = 7,5 km.

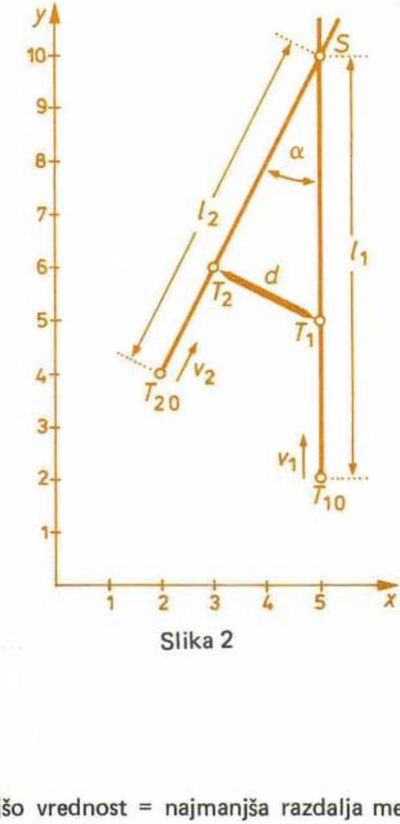
B) Poglejmo drugi način. Poti ladij se sečeta v točki S pod kotom α (za kot α se hitro ugotovi, da velja $\mathrm{tg}\alpha = 0,5$ ali $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$). Ob času $t = 0$, sta ladji oddaljeni za l_1 oz. za l_2 od točke S (slika 2). Za razdaljo d med ladjama velja vsak trenutek enačba (upoštevaje *kosinusni izrek*)

$$d^2 = (l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2 - 2(l_1 - v_1 t)(l_2 - v_2 t)\cos\alpha$$

Če enačbo malo preuredimo,

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha)t^2 - 2[(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1)\cos\alpha\,]\,t + (l_1{}^2 + l_2{}^2 - 2\,l_1 l_2 \cos\alpha)$$

vidimo, da predstavlja naša kvadratna enačba za d^2 funkcijo, katere graf je parabola s koeficienti a, b, c



Slika 2

$$y = d^2 = at^2 + bt + c$$

Zadostuje, da najdemo *teme* parabole, in že imamo odgovor na prvi dve vprašanji (tam doseže funkcija najmanjšo vrednost = najmanjša razdalja med ladjama). Kot vemo, je teme parabole $P(t, y)$ podano z

$$t = -\frac{b}{2a}, \qquad y = d_{\min}^2 = -\frac{D}{4a}$$

kjer je D *diskriminanta* gornje kvadratne enačbe $D = b^2 - 4ac$. V našem primeru velja

$$a = (v_1{}^2 + v_2{}^2 - 2\, v_1 v_2 \cos\alpha)$$

$$b = 2\,[\,(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1)\cos\alpha\,]$$

$$c = (l_1{}^2 + l_2{}^2 - 2\, l_1 l_2 \cos\alpha)$$

Sedaj zlahka zapišemo izraza za najmanjšo razdaljo med ladjama in za čas po katerem bo ta dosežena:

$$d = \left\{\frac{(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha)(l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\alpha)-[(l_1v_1+l_2v_2)-(l_1v_2+l_2v_1)\cos\alpha]^2}{v_1^2+v_2^2-2\,v_1v_2\cos\alpha}\right\}^{1/2}$$

$$t = \frac{(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1)\cos\alpha}{v_1{}^2 + v_2{}^2 - 2\, v_1 v_2 \cos\alpha}$$

ker je $l_1 = \sqrt{45}$ km, $v_1 = 3$km/h, $l_2 = 8$ km, $v_2 = \sqrt{5}$ km/h , sledi

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \text{ km}, \qquad t = 2{,}5 \text{ h}$$

Sami lahko odgovorite še na tretje vprašanje.

C) Pa poglejmo še tretjo rešitev, ki je namenjena tistim, ki so v matematiki že malo bolj podkovani. Zapisali bomo *parametrsko* obliko enačb gibanja

$x_1 = 5$	1. ladja	$x_2 = 2 + t$	2. ladja
$y_1 = 2 + 3t$		$y_2 = 4 + 2t$	

Zaradi večje preglednosti smo opustili pisanje enot (kot tudi prej), kar pa v tem primeru ni velik greh, ker je vsa stvar enostavna. Zapišimo izraz za razdaljo med ladjama $s = T_1 T_2\ (t)$ in zahtevajmo, naj bo le–ta minimalna:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(2 + t - 5)^2 + (4 + 2t - 2 - 3t)^2}$$

$$s = \sqrt{2t^2 - 10t + 13} = \min$$

Da zadovljimo zahtevi, mora biti *odvod* te funkcije enak 0

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\,t - 5}{(2t^2 - 10\,t + 13)^{1/2}} = 0 \;\Rightarrow\; t = 2{,}5 \text{ h}$$

Razdalja med ladjama ob tem času je $s_{\min} = \sqrt{2}/2 = 0,707$ km. Iz parametrskih enačb gibanja dobimo tudi legi ladij ob času $t = 2,5$ h

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 \text{ km} \\ y_1 &= 9,5 \text{ km} \end{aligned}\right\} \text{1. ladja} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= 4,5 \text{ km} \\ y_2 &= 9 \text{ km} \end{aligned}\right\} \text{2. ladja}$$

od tu pa hitro razdalji od mornarja do njiju.

Božidar Casar