PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 3
Stran 152

Boris Lavrič:

MATEMATIČNI KROŽEK

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/930-Lavric-krozek.pdf

MATEMATIČNI KROŽEK

1. Množico P naj tvorijo vsi pravokotniki, pri katerih ena od stranic meri največ 10, druga najmanj 50, dolžini obeh pa sta naravni števili.
   Dokaži, da sta dva pravokotnika iz P skladna tedaj in le tedaj, kadar imata enako dolgo diagonalo.
2. Janez in Micka z brega okroglega jezera opazujeta kvadratast otok na sredi jezera. Micka stoji najbližje otoku, Janez pa najdlje od njega, a kljub temu ga oba vidita pod enakim kotom. Koliko meri otok, če je od Micke oddaljen 100 m?
3. V kakšnem zaporedju si slede cifre na mestu enic v desetiškem zapisu števil

$$a_n = \left. n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}} \right\} n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Boris Lavrič

MATEMATIČNI KROŽEK – Rešitve s str. 163

1. Označimo dolžino dveh pravokotnikov iz P z a_1, b_1 in a_2, b_2 ter brez škode predpostavimo, da je $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2$ in $a_1 \leqslant a_2$. Če sta diagonali obeh pravokotnikov enako dolgi, velja $a_1{}^2 + b_1{}^2 = a_2{}^2 + b_2{}^2$, torej

$$a_2{}^2 - a_1{}^2 = b_1{}^2 - b_2{}^2 = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2)$$

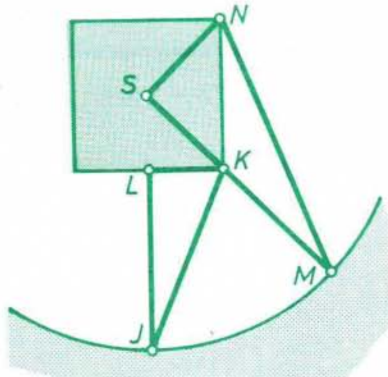
Leva stran enakosti zaradi predpostavke za P ne presega 99. Če velja $b_1 \neq b_2$, na desni dobimo več kot 100, torej pridemo do protislovja. Zato je $b_1 = b_2$ in tedaj še $a_1 = a_2$.

2. Poglejmo na sliko, kjer točka J označuje Janezov, točka M pa Mickin položaj. Zaradi podobnosti pravokotnih trikotnikov JKL, MNS in enakosti

$$r = \overline{SJ} = \overline{SM}\ , \quad m = \overline{SL} = \overline{LK}$$

velja

$$\frac{r}{m\sqrt{2}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{LJ}}{\overline{LK}} = \frac{r-m}{m}$$



Od tod dobimo $r = (2+\sqrt{2})m$ in nato $\overline{KM} = 2m = r - \sqrt{2}\,m = \overline{SM} - \overline{SK} = \overline{KM} = 100$ m.

3. Zaznamujmo zadnjo cifro v desetiškem zapisu števil n in a_n zaporedoma z x in y. Če je $x \in \{0, 1, 5, 6\}$, potem je očitno $y = x$. Za $x = 4$ dobimo $y = 6$, ker je eksponent m izraza $a_n = n^m$ v tem primeru sodo število. Podobno ugotovimo, da pri $x = 9$ velja $y = 9$. Pri pogoju $n > 2$ za $x \in \{2, 8\}$ najdemo $y = 6$, ker je eksponent m tedaj deljiv s štiri. Z $x = 3$ in $x = 7$ je nekoliko več dela. Tudi tu je y odvisen od ostanka, ki ga da pri deljenju s štiri eksponent m. V obeh primerih ($x = 3$, $x = 7$) je n lih, zato velja $m = n^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Brž vidimo, da tedaj m in n dasta pri deljenju s štiri ista ostanka (1 ali 3). Od tod najdemo iskani y. Če je $x = 3$, za $n = 3, 13, 23, 33, \ldots$ dobimo izmenoma $y = 7, 3, 7, 3, \ldots$, pri $x = 7$ pa imamo za $n = 7, 17, 27, 37, \ldots$ zaporedoma $y = 3, 7, 3, 7, \ldots$. Zaporedje ostankov y se torej od tretjega člena a_3 naprej periodično ponavlja s periodo 20:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
y	1	4	7	6	5	6	3	6	9	0	1	6	3	6	5	6	7	6	9	0	1	6	7	...

Boris Lavrič