PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 2
Stran 89

Boris Lavrič:

TRI NALOGE

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/928-Lavric-naloge.pdf

TRI NALOGE

DOTIKANJA

Na stranici AB trikotnika ABC leži točka D. Dokaži, da se kroga k_1 in k_2, včrtana v trikotnika ADC in BCD, dotikata natanko takrat, kadar se v trikotnik ABC včrtani krog v točki D dotakne stranice AB. Kdaj se med sabo dotikata kroga, ki sta pričrtana trikotnikoma ADC in BCD ob stranicah AD in DB?

PLAŠČA

Stožec in valj imata skupno osnovno ploskev in enako višino. Kateri od obeh ima večji plašč, če stranica stožca oklepa z osnovno ploskvijo kot α? Za reševanje naloge ni nujno poznavanje kotnih funkcij.

PROJEKCIJA

Kako naj obrnemo kvader, ki ga projiciramo pravokotno na ravnino Π, da bo ploščina projekcije največja? Kolikšna je ta ploščina, če robovi kvadra merijo a, a in $2a$?

Boris Lavrič

TRI NALOGE – rešitev s str. 89

DOTIKANJA

Denimo, da se kroga k_1 in k_2 dotikata v točki O. Potem je CD njuna skupna tangenta, odseki DK, DO in DL na tangentah DA, DC in DB na kroga k_1 in k_2 pa so tedaj enako dolgi. Torej leži točka D na sredini med K in L.

Poglejmo zdaj na desno sliko. Očitno velja $\overline{AT} = \overline{AS}$ in $\overline{BT} = \overline{BR}$, zato tudi

$$\overline{KT} = \overline{NS} \quad \text{in} \quad \overline{TL} = \overline{RM}$$

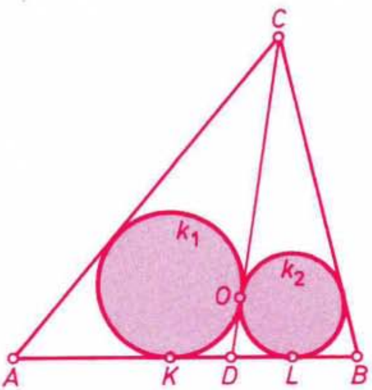
Poleg tega je $\overline{CN} = \overline{CO} = \overline{CM}$ in $\overline{CS} = \overline{CR}$, torej

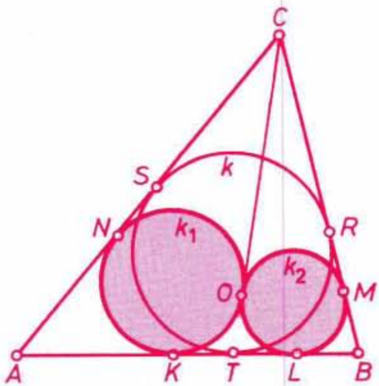
$$\overline{NS} = \overline{CN} - \overline{CS} = \overline{CM} - \overline{CR} = \overline{RM} \quad \text{in} \quad \overline{KT} = \overline{TL}$$

Dotikališče T kroga k leži na sredi med K in L in zato sovpada s točko D.

Obratno smer trditve dokažemo podobno, zato dokaz opustimo.

Še odgovor na vprašanje ob koncu naloge. Kroga se dotikata tedaj in le tedaj, kadar je D točka, v kateri se stranice AB dotikata trikotniku ABC pričrtani krog.

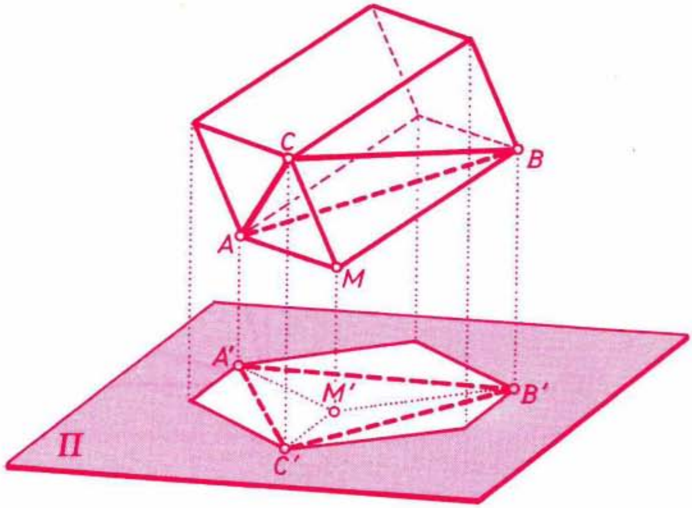




PROJEKCIJA

Označimo z M tisto oglišče kvadra, ki leži najbliže ravnini Π, sosednja tri oglišča z A, B in C, njihove projekcije na Π pa zaporedoma z M', A', B' in C'. Projekcija kvadra je potem sestavljena iz paralelogramov, napetih na pare daljic

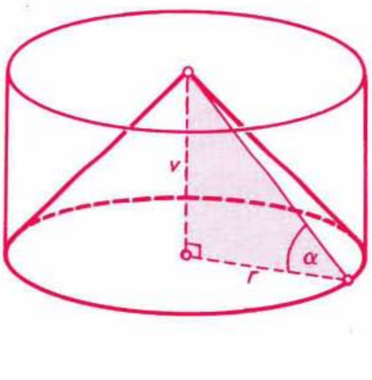
$M'A'$, $M'B'$ in $M'C'$. Njena ploščina je dvakratnik ploščine trikotnika $A'B'C'$ in doseže največjo vrednost, ko je trikotnik ABC vzporeden ravnini Π. Če robovi kvadra merijo a, a in $2a$, je ploščina projekcije enaka $3a^2$.



PLAŠČA

Označimo z r polmer osnovne ploskve in z v višino obeh teles. Potem plašč stožca meri $p_S = \pi r \sqrt{r^2 + v^2}$, plašč valja pa $p_V = 2\pi rv$. Določimo kvocient k velikosti plaščev:

$$k = \frac{\pi r \sqrt{r^2 + v^2}}{2 \pi r v} = \frac{\sqrt{r^2 + v^2}}{2 v} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{v}\right)^2 + 1}$$



Brž vidimo, da sta plašča enako velika (torej $k = 1$) natanko takrat, kadar velja $r = v\sqrt{3}$, torej pri $\alpha = 30^0$. Zdaj je odgovor na dlani: če je $\alpha < 30^0$, ima stožec večji plašč kot valj, pri $\alpha > 30^0$ pa je res prav narobe.

Boris Lavrič