PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 1
Stran 47

Boris Lavrič:

1988. TRD OREH

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/923-Lavric-1988.pdf

1988

Naloge

1. Pokaži, da nobena od enačb

   $x^2 + y^2 = 1988,\quad x^2 + 2y^2 = 1988$ in $x^2 + 3y^2 = 1988$

   nima celoštevilskih rešitev.

2. Med enačbami

   $x^2 + n\,y^2 = 1988,\quad n \in \mathbb{N}, n \leqslant 10$

   je le ena rešljiva s parom naravnih števil x, y. Katera? Poišči še njeno rešitev.

TRD OREH

Ali je mogoče v enakostih

$$PR = ES + EK \qquad \text{in} \qquad TRD = OR + EH$$

črke nadomestiti s ciframi tako, da veljata obe hkrati? Nobeno število naj se ne začne z ničlo, različnim črkam naj pripadajo različne cifre, enakim pa enake.

Boris Lavrič

1988 – Rešitev s str. 47

Poglejmo najprej prvo enačbo. Desna stran je deljiva s 7, torej mora biti vsota kvadratov $x^2 + y^2$ deljiva s 7. Kvadrat celega števila pri deljenju s 7 lahko da le ostanek 0, 1, 2 ali 4, zato je vsota $x^2 + y^2$ deljiva s 7 le, če sta x in y deljiva s 7. Potem pa bi moralo biti število $1988 = x^2 + y^2$ deljivo z 49. Ker to ni res, enačba nima celoštevilskih rešitev.

Na enak način uženemo tudi drugo enačbo.

Pri tretji enačbi opazimo, da njena desna stran pri deljenju s tri da ostanek 2, leva stran pa bodisi 1 ali pa 0. Torej enačba nima celoštevilskih rešitev.

Z istim sklepom ugotovimo, da pri $n \in \{3, 6, 9\}$ diofantska enačba $x^2 + n\,y^2 = 1988$ nima rešitve.

Za $n = 4$ in $n = 8$ zapišemo

$$x^2 + 4\,y^2 = x^2 + (2y)^2 = 1988 \text{ in}$$

$$x^2 + 8\,y^2 = x^2 + 2\,(2y)^2 = 1988$$

Če bi imela katera od teh dveh enačb celoštevilsko rešitev, bi jo imela tudi ena od prvih dveh (pri $n = 1$ ali $n = 2$). To ne drži, torej za $n \in \{4, 8\}$ ni rešitve.

Denimo, da je n deljiv s 5. Iz enačbe $x^2 + n y^2 = 1988$ vidimo, da mora x^2 pri deljenju s 5 dati ostanek 3. To ni mogoče, zato tudi pri $n \in \{5, 10\}$ ne dobimo rešitve.

Ostane nam le še enačba $x^2 + 7 y^2 = 1988$. Očitno smemo zapisati $x = 7 z$, $z \in \mathbb{N}$. Po krajšanju dobimo $7 z^2 + y^2 = 284$. Brž vidimo, da sta števili y in z bodisi obe lihi bodisi obe sodi. Dokazali bomo, da je v prvem primeru leva stran deljiva z 8, odkoder sklepamo, da je mogoč le drugi primer.

Res, iz zapisa $(2k + 1)2 = 4k(k + 1) + 1$ lahko razberemo, da kvadrat lihega števila pri deljenju z 8 da ostanek 1, zato je izraz $x^2 + 7 y^2$ v prvem primeru deljiv z 8.

Potemtakem velja $z = 2u$, $y = 2v$ $(u, v \in \mathbb{N})$, $7u^2 + v^2 = 71$ in tedaj $u \leqslant 3$. Edina rešitev je $u = 1$, $v = 8$, torej ima prvotna enačba le rešitev $x = 14$, $y = 16$.

TRD OREH – Rešitev s str. 47

Očitno je $T = 1$, $E \leqslant 4$ in K, S, R ter H so od nič različni. Poglejmo prvo enakost. Dve možnosti sta:

$$K + S = R \quad \text{in} \quad P = 2E \tag{1}$$

$$K + S = R + 10 \quad \text{in} \quad P = 2E + 1 \tag{2}$$

V primeru (1) velja $R = K + S \geqslant 2 + 3 = 5$, zato iz druge enakosti dobimo $O + E \geqslant 14$. To ne more biti res (ker je $E \leqslant 4$), torej je mogoč le primer (2).

Druga enakost nam prav tako nudi dve poti:

$$H + R = D + 10 \quad \text{in} \quad O + E = R + 9 \tag{3}$$

$$H + R = D \quad \text{in} \quad O + E = R + 10 \tag{4}$$

Če velja (3), iz zveze $O = R - E + 9$ vidimo, da mora biti $R < E$. Torej je $E = 3$, $R = 2$ ali $E = 4$ in $R \in \{2, 3\}$. V prvem primeru dobimo $P = 7$, $O = 8$, v drugem pa $P = 9$ in $O \in \{7, 8\}$. Iz enakosti $H = D + 10 - R$ sklepamo, da je $D = 0$, od tod pa brž ugotovimo, da zaradi $K + S = R + 10$ nobena od treh možnosti ni dobra.

Torej velja (4), zato $R = (O + E) - 10 \leqslant O - 6 \leqslant 3$ in potem $R \in \{2, 3\}$. Če je $R = 3$, dobimo $O = 9$, $E = 4$ in $P = 9$. Protislovje pove, da je $R = 2$. Tedaj je bodisi $O = 9$ in $E = 3$ bodisi $O = 8$ in $E = 4$. V prvem primeru je $P = 7$, v drugem pa $P = 9$. Če upoštevamo še enakosti $K + S = 12$ in $D = H + 2$, spet opazimo, da z rešitvijo ni nič.

Vse možnosti smo izčrpali in tako strli oreh – kljub temu, da naloga nima nobene rešitve.

Boris Lavrič