

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **15** (1987/1988)

Številka **4**

Strani 213–215

Miha Štalec:

OD ENE NALOGE K DRUGI

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/902-Stalec.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

1. $PR \perp OP, \overline{PR} = 2r$
2. Pitagorov izrek:

$$\overline{OR} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PR}^2} = r\sqrt{5}$$
3. S sorazmerjem določimo A' :

$$\overline{OA'} = r\sqrt{5}/5$$
4. S šestilom prenesemo $\overline{OA'}$ na os x (dobimo A) in na os y (dobimo D).
5. Na krožnici dobimo še točki B in C :
 $DB \parallel \text{os } x \text{ in } AC \parallel \text{os } y$

Naloga je končana. Saj res, izračunali bi lahko še ploščino!

Naslednja — druga naloga: Kolikšna je ploščina našega kvadrata, izražena s polmerom kroga?

Rešitev: Na sliki 3 vidimo, da je stranica kvadrata $a = \overline{AD}$ hkrati diagonala kvadrata $OASD$, ki ima stranico x . Torej je:

$$a = x\sqrt{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{r\sqrt{10}}{5}$$

in ploščina:

$$p = a^2 = \left(\frac{r\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{r^2 \cdot 10}{25} = \frac{2r^2}{5}$$

Računanje ploščine (tista "petka" v imenovalcu) nas pripelje še do tretje naloge:

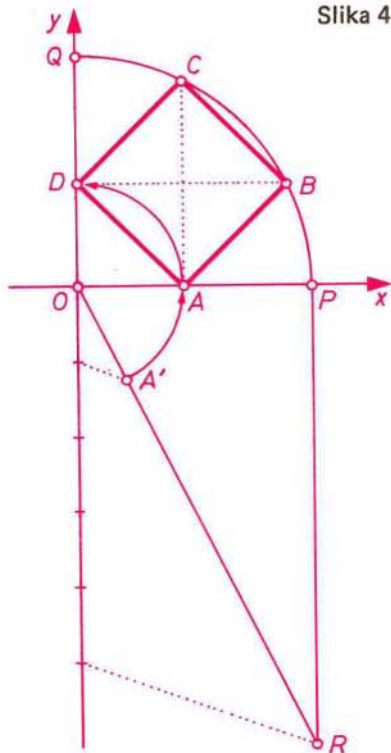
V krog včrtamo pet kvadratov (križ), kot kaže slika 5. Izračunaj ploščino tega križa.

Rešitev:

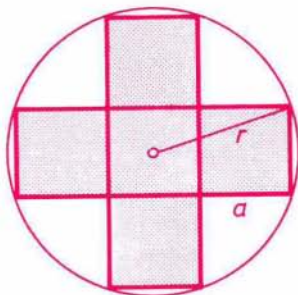
Nič posebnega! Križ je sestavljen iz petih prej obravnavanih kvadratov, zato ima ploščino:

$$p = 5a^2 = 5 \cdot \frac{2r^2}{5} = 2r^2$$

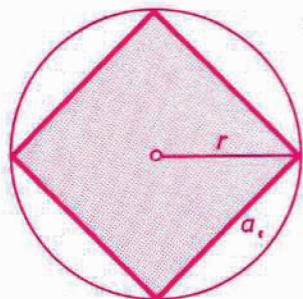
Slika 4



Slika 5



Slika 6

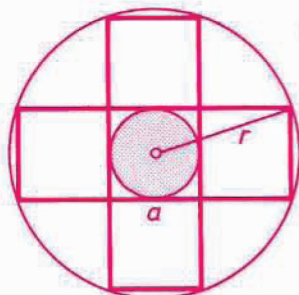


Glej, glej! Dobljeni rezultat pokaže, da je ploščina krogu včrtanega križa enaka ploščini istemu krogu včrtanega kvadrata (slika 6).

$$a_1 = r\sqrt{2}$$

$$p = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$$

Slika 7

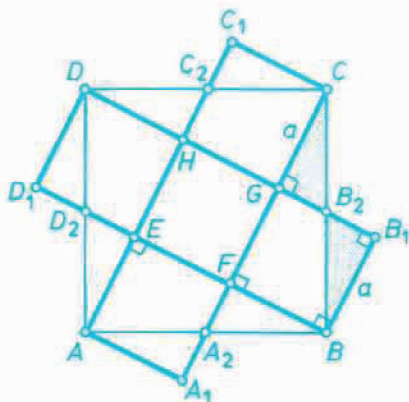


Dobljeni rezultat nas privede k misli, da je mogoče kvadrat (z rezanjem in dopolnjevanjem) prevesti v 5 skladnih (seveda manjših) kvadratov (križ). To je seveda spet nova naloga. Poskusi najti kako rešitev ali pa poglej na stran III.

Iz naše začetne naloge izvira še mnogo vprašanj in lahko si zastavimo še veliko nalog. Lep odnos najdeš na primer med "križu" očrtanim krogom in krogom, ki je včrtan notranjemu kvadratu (slika 7).

Miha Štalec

OD ENE NALOGE K DRUGI
rešitev s str. 213



Iz danega kvadrata dobimo zahtevani "križ" takole: Razpolovimo stranico prvotnega kvadrata. Dobimo točke A_2, B_2, C_2, D_2 . Načrtamo poltrake AC_2, BD_2, CA_2 in DB_2 in nato pravokotnice: Iz A na poltrak A_2C , iz B na poltrak B_2D itd. Dobimo točke A_1, B_1, C_1 in D_1 . Očitno sta trikotnika BB_1B_2 in CGB_2 skladna, kar lahko tudi hitro dokažemo. Izrežemo trikotnik CGB_2 in druge na enak način dobljene trikotnike, dodamo jih k trapezu BB_2GF in drugim. Dobimo križ — naloga je rešena.

Miha Štalec